Теория игр и исследование операций

Морозов Владимир Викторович

к/р - в середине ноября

03.09 §1. Введение.

Антагон. игры
Неант. игры
Иерархич. игры
Неопр. в выборе цели - многокрит. задачи
Оптим. распред. ресурсов

Лит-ра:

V 1) А.А. Васин, Б.В. Морозов (2/3 курса)
„Теория игр и модели мат. экономики"
МАКС-Пресс, 2005

2) В.В. Морозов, А.Г. Сухарев, В.В. Федоров
„Исследование операций в задачах и упр."
1986 год

Глава I. Антагонистические игры

§2. Седловые точки и решение антагонист. игр.

$F(x, y)$ – вещ., $x \in X$, $y \in Y$
X, Y – $\forall$

$F(x, y) \in X \times Y$

Опр. $(x^0, y^0) \in X \times Y$ наз. седл. точкой ф-ии $F(x, y)$, если:

$$F(x, y^0) \le F(x^0, y^0) \le F(x^0, y) \quad (1)$$

$\forall x \in X$, $\forall y \in Y$

$z + x^2 - y^2 = 0$ – седлов. поверхность

В игре 2 игрока: 1, 2

1 игрок – стратегия $x \in X$
2 игрок – стратегия $y \in Y$

Норм. форма игры: выбор стратегий не зависим

$(x, y) \in X \times Y$

$F(x, y) \in X \times Y$ – ф-ия выигрыша 1-ого игрока (или проигрыш 2-ого)

Цель 1-ого игрока – сделать выигрыш как можно больше
2-ой игрок – наоборот

Антагон. игра:

$\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle$

игроки выбир. стратегии независимо
$1 \to \max F$
$2 \to \min F$

Рассм. седлов. точку (x^0, y^0)
Тогда игрокам невыгодно отклоняться от своего положения - это уст. сост.

(1) $\Leftrightarrow$ $\max\limits_{x \in X} F(x, y^0) = F(x^0, y^0) = \min\limits_{y \in Y} F(x^0, y)$

Опр.
Решение антаг. игры Г наз. след. тройка
(x^0, y^0, v) , (x^0, y^0) - седл. т. F
v - значение седл. т.

оптим. стратегии игроков

значение игры (цена игры)

Коррект. опр. v:

Лемма 1. (x^0, y^0), (x^*, y^*) - седл. т. F на $X \times Y$.
Тогда $F(x^0, y^0) = F(x^*, y^*)$.

Док-во:

1) $F(x, y^0) \le F(x^0, y^0) \le F(x^0, y)$ (1)
$F(x, y^*) \le F(x^*, y^*) \le F(x^*, y)$ (2)

2) $F(x^0, y^0) \overset{(1)}{\le} F(x^0, y^*) \overset{(2)}{\le} F(x^*, y^*) \overset{(2)}{\le} F(x^*, y^0) \overset{(1)}{\le} F(x^0, y^0)$

$\Downarrow$

$F(x^0, y^0) = F(x^*, y^*)$

Лемма док-на.

Рассм. матричн. игры:

Опр. Г называв. матричной, если
X, Y - конечн. мн-ва
$X = \{1, 2, \dots, m\}$, $Y = \{1, \dots, n\}$

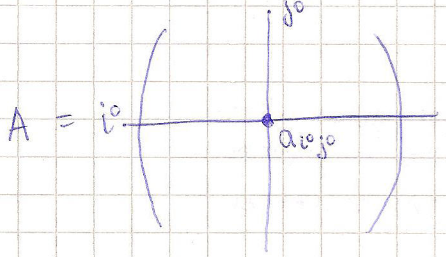
$i \in X$, $j \in Y$

$F(i, j) = a_{ij}$

$A = (a_{ij})_{m \times n}$

Опр. (i^0, j^0) – седлов. т. м. A, если

$$a_{ij^0} \le a_{i^0j^0} \le a_{i^0j}, \quad i = 1 \ldots m, \; j = 1 \ldots n \qquad (1)$$



$a_{i^0j^0}$ – в столбце максим.
– в строке миним.

Пример:

①. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Седл. т.: $(1,1)$, $(2,1)$

$v = 0$

(!) $a_{12} = 0 = v$
не явл. седл. т.

②. $A = \begin{array}{c|cc} & o & p \\ \hline o & -1 & 1 \\ p & 1 & -1 \end{array}$

Матрица игры Орлянка

Эта игра не имеет реш., т.к. нет седл. т.

$F(x,y)$, $X \times Y$

1 игрок выбрал: x => $\inf\limits_{y \in Y} F(x,y) = W(x)$ – гарантир. выигрыш 1 игрока

$\underline{v} = \sup\limits_{x \in X} \inf\limits_{y \in Y} F(x,y)$ – наилучш. гарант. выигрыш 1 игрока

нижн. значение игры

Опр. Стратегия $x^0 \in X$ — максиминная стратегия, если $\inf\limits_{y \in Y} F(x^0, y) = \underline{v}$

2 игрок выбрал: $y \in Y$

$\sup\limits_{x \in X} F(x, y)$ — гарант. результат для 2-ого игрока (наиб. проигрыш)

$= M(y)$

$$\overline{v} = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y)$$ — верхн. значение игры

Опр. $y^0 \in Y$ — минимаксная стратегия, если $\sup\limits_{x \in X} F(x, y^0) = \overline{v}$

Лемма 2. $\forall$ ант. игры Γ верно: $\underline{v} \leq \overline{v}$

Док-во: „лучше быть плохим среди хороших, чем хорошим среди плохих"

1) $\forall x \in X, \forall y \in Y$

$$W(x) = \inf_{y \in Y} F(x, y) \leq F(x, y) \leq \sup_{x \in X} F(x, y) = M(y)$$

2) Фикс. $\forall y \Rightarrow W(x) \leq \underbrace{M(y)}_{\text{число}} \quad \forall x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\sup_{x \in X} W(x)}_{= \underline{v}} \leq M(y) \Rightarrow \underline{v} \leq \overline{v}.$$

Лемма док-на.

Теорема 1.1:

1) F имеет седл. т. на $X \times Y$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x,y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x,y) \quad (\alpha)$$

В соотв. Г вып. $\underline{v} = \overline{v} = v$

2) Вып. усл. (α), (x^0, y^0) - седл. т. $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \inf_{y \in Y} F(x^0, y) = \underline{v}, \quad \sup_{x \in X} F(x, y^0) = \overline{v} \quad (\beta)$$

Док-во:

$\Rightarrow$

1) (x^0, y^0) - седл. Т. $\Rightarrow (\alpha), (\beta)$ $\leftarrow$ док-ем

$$\overline{v} = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x,y) \overset{(*1)}{\leq} \sup_{x \in X} F(x, y^0) \overset{(1)}{=} F(x^0, y^0) \overset{(1)}{=}$$

$$= \inf_{y \in Y} F(x^0, y) \overset{(*2)}{\leq} \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x,y) = \underline{v}$$

$\Downarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{v} \leq \underline{v} \\ \text{л.2} \ \underline{v} \leq \overline{v} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{v} = \underline{v} = v$$

$\Downarrow$

$(*1) \Rightarrow y^0$ - минимакс. стр.

$(*2) \Rightarrow x^0$ - максимин. стр. $\Rightarrow$ вып. $(\beta), (\alpha)$

2) $\Leftarrow$ (α) - вып., x^0, y^0 - из (β)

док-ем: (x^0, y^0) - седл. т.

$$F(x^0, y^0) \overset{=}{\leq} \sup_{x \in X} F(x, y^0) \overset{(\beta)}{=} \overline{v} \overset{(\alpha)}{=} \underline{v} \overset{(\beta)}{=} \inf_{y \in Y} F(x^0, y) \leq$$

$$\overset{=}{\leq} F(x^0, y^0)$$

$\Downarrow$

$$\sup_{x \in X} F(x, y^0) = F(x^0, y^0) = \inf_{y \in Y} F(x^0, y)$$

$\Downarrow$

(x^0, y^0) - седл. т.

Т-ма док-на.

Поиск седл. т.:

$X^0 = \{ x^0 \in X \mid (\beta) \}$,

$Y^0 = \{ y^0 \in Y \mid (\beta) \}$

$X^0 \times Y^0$ – мн-во всех седл. т.

<u>Примеры</u>: (задача в к/р)

① . $F(x, y) = x \cdot y$
$X = Y = (-\infty, +\infty)$

$(0, 0)$ – седл. т.
$0 \cdot y = 0 \cdot 0 = x \cdot 0$ $\Rightarrow v = 0$

$\inf\limits_{y \in Y} xy = -\infty, \quad x \neq 0$

$\sup\limits_{x \in X} xy = +\infty, \quad y \neq 0$

② .

$W(i) = \min\limits_j a_{ij}$

$$\begin{array}{cc} & j \\ A = i & \begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ M(j) \to & (7 \quad 2 \quad 7 \quad 2) \end{array}$$

найти седл. т.

$\underline{v} = \max\limits_{1 \le i \le 4} \min\limits_{1 \le j \le 4} a_{ij}$, $\quad \underline{v} = 2$ $\quad \max W(i)$

$X^0 = \{2, 3\}$
где достиг. max, см. $W(i)$

$\overline{v} = \min\limits_{1 \le j \le 4} \max\limits_{1 \le i \le 4} a_{ij}$, см. строку $M(j)$

$\overline{v} = 2 \quad \min M(j)$

$Y^0 = \{2, 4\}$

$\underline{v} = \overline{v} = 2 \Rightarrow \exists$ седл. точк.: $(2,2)$, $(2,4)$
$X^0 \times Y^0 \longrightarrow (3,2)$, $(3,4)$

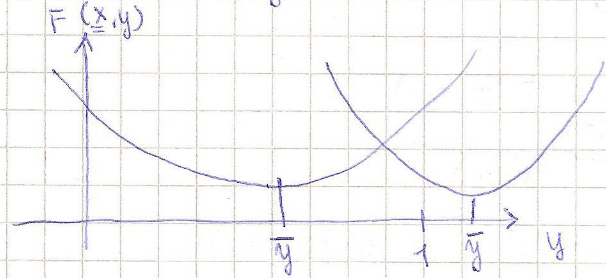
(4).
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$ Найти седл. т.

(3). $F(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2$, $X = Y = [0,1]$

Найти седл. т., если есть.

$$\underline{v} = \max_{0 \le x \le 1} \underbrace{\min_{0 \le y \le 1} F(x,y)}_{= W(x)}$$

$W(x) = F(x, y(x))$



$F'_y = -3x + 2y = 0 \Rightarrow \bar{y} = \frac{3x}{2}$ – т. безусл. min

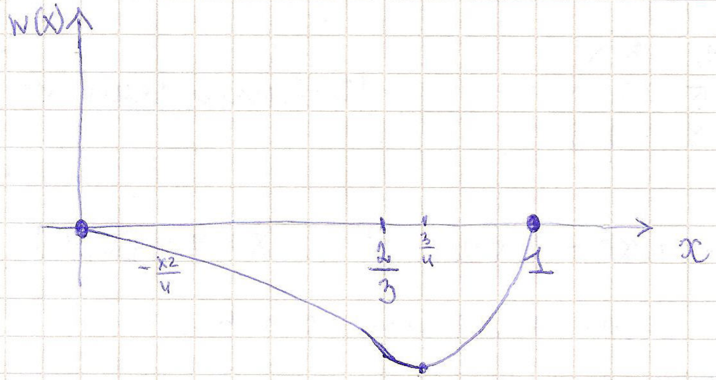
$0 \le \bar{y} = \frac{3x}{2} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x \le \frac{2}{3}$, $y(x) = \bar{y}$

$\frac{2}{3} < x \le 1 \Rightarrow y(x) = 1$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2}, & 0 \le x \le \frac{2}{3} \\ 1, & \frac{2}{3} < x \le 1 \end{cases}$$

$$\underline{W(x)} = F(x, y(x)) = \begin{cases} -\frac{x^2}{4}, & 0 \le x \le \frac{2}{3} \\ 2x^2 - 3x + 1, & \frac{2}{3} < x \le 1 \end{cases}$$

$$F\left(x, \frac{3x}{2}\right) = 2x^2 - \frac{9x^2}{2} + \frac{9x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}$$



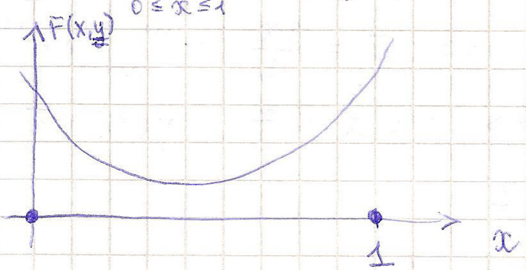
$2x^2 - 3x + 1$

$x = \frac{3}{4}$ – верш. параб.

$$\boxed{X^0 = \{0, 1\}}$$

$$\bar{v} = \min_{0 \le y \le 1} \underbrace{\max_{0 \le x \le 1} F(x, y)}_{M(y)}$$

$$M(y) = \max_{0 \le x \le 1} F(x, y) = F(x(y), y)$$

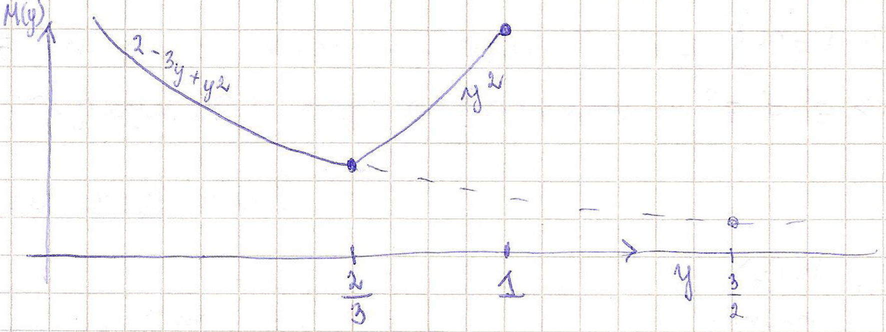


$$M(y) = \max \{ F(0, y), F(1, y) \} =$$

$$= \max \{ y^2, 2 - 3y + y^2 \}$$

$$\cancel{y^2} \le 2 - 3y + \cancel{y^2} \Rightarrow y \le \frac{2}{3}$$

$$M(y) = \begin{cases} 2 - 3y + y^2, & 0 \le y \le \frac{2}{3} \\ y^2, & \frac{2}{3} < y \le 1 \end{cases}$$



$-3 + 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

$y^0 = \frac{2}{3}$

$\overline{v} = \min\limits_{0 \le y \le 1} M(y) = M(\frac{2}{3}) = \frac{4}{9} > 0 = \underline{v}$

$\Rightarrow$ нет седлов. точки

Z - мн-во в метр. пр-ве

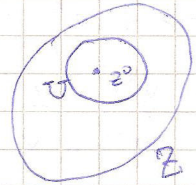
<u>Опр.</u> Z - <u>компактн.</u>, если из $\forall z^k$, $k = 1, 2, \ldots$, $z^k \in Z$ можно выделить сход. подп-ть z^{k_l}, $l = 1, 2, \ldots$: $z^{k_l} \to z^0 \in Z$

E^m:
компакты - замкн. огр. мн-ва

<u>Утв.</u> Z - компакт метр. пр-ва, $\{z^k\} \subset Z$.
Если z^0 - един. пред. точка $\{z^k\}$, то $z^k \to z^0$

<u>Док-во:</u>

1) Пусть, $z^k \not\to z^0 \Rightarrow$
? $\Rightarrow \exists$ окр. т. z^0 U : в U беск. много эл-тов п-ти z^k $\Rightarrow$
$\Rightarrow z^{k_l} \in \underline{Z \setminus U}$, $l = 1, 2, \ldots$



замкн. подмн-во комп. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ комп.

2) $\Rightarrow \{z^{k_l}\} \subset Z \setminus U$ имеет свою пред. т. z' $\Rightarrow$
$\Rightarrow z' \neq z^0$ – противор. усл. ($\exists!$ пред. т.)

Утв. док-но.

Z, $h(z)$

$$\mathrm{Arg}\overset{\min}{\max_{z \in Z}} h(z) = \{ z' \in Z \mid h(z') = \overset{\min}{\max_{z \in Z}} h(z) \}$$

$F(x, y)$, $X \times Y$

$$Y(x) = \mathrm{Arg}\min_{y \in Y} F(x, y)$$

мн-во ответов 2-го (минимизирующие)

<u>Теорема 1.2.</u> $F(x, y)$ – непр. на $X \times Y$, X, Y – компакты метр. пр-в. Тогда:

1) $W(x) = \min_{y \in Y} F(x, y)$ – непр. на X

2) пусть, $Y(x) = \{y(x)\}$, $\forall x \in X \Rightarrow$
$\Rightarrow y(x) : X \to Y$ – непр. отображение

<u>Док-во:</u>

1) $W(x)$, $\max_{x,y} F(x,y) \geq F(x,y) \geq \min_{x,y} F(x,y)$

Рассм. т. $x^0 \in X$
Рассм. $\forall$ п-ть $x^k \to x^0$ (непр. по Гейне)
$\{W(x^k)\}$, w' – пред. точка $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists x^{k_l} : W(x^{k_l}) \to w'$

Рассм. $y^{k_l} \in Y(x^{k_l})$
$y^{k_l} \in Y$ – комп. $\Rightarrow y^{k_l} \to y'$

$F(x^{k_l}, y^{k_l}) \leq F(x^{k_l}, y)$, $\forall y \in Y$, $l = 1, 2, \ldots$

11 $l \to \infty$, фикс. $y \Rightarrow \{F$ – непр.$\}$ $F(x^0, y') \leq F(x^0, y)$, $\forall y \in Y$

$\Rightarrow y' \in Y(x^0)$

$$\underset{\downarrow \atop W'}{W(x^{k_l})} = F(x^{k_l}, y^{k_l}) \xrightarrow{l\to\infty} F(x^0, y') = \min_{y\in Y} F(x^0, y) = W(x^0)$$

$\Downarrow$

$W' = W(x^0) \Rightarrow \{W(x^k)\}$ имеет ед. пред. т. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ {утв.} $W(x^k) \to W(x^0) \Rightarrow W(x)$ - непр.

2) $x^0 \in X$, $\forall x^k \to x^0$
док-ем: $y(x^k) \to y(x^0)$

$\{y(x^k)\}$, пусть, y' - пред. т. этой п-ти $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \{x^{k_l}\}$: $\underset{y^{k_l}}{y(x^{k_l})} \to y' \in Y(x^0) \overset{\text{усл. т-мы}}{=} \{y(x^0)\} \Rightarrow$

1-ая часть т-мы

$\Rightarrow y' = y(x^0)$

Т-ма док-на.

$M(y) = \max\limits_{x\in X} F(x, y) \Rightarrow$ аналогичн. т-ма

<u>Опр.</u> Ант. игра $\Gamma = \langle X, Y, F(x,y)\rangle$ наз. <u>непр.</u>, если $F(x,y)$ - непр. на $X \times Y$, $X \subset E^m$, $Y \subset E^n$
параллелепипеды

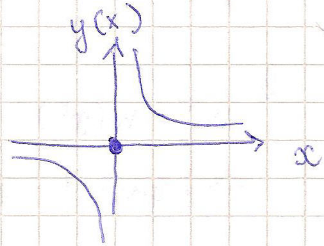
<u>Следствие</u> В $\forall$ непр. игре Γ у игроков $\exists$ максимин. и минимакс. стратегии.
Т-мы 1.2.

Пример:

$F(x,y) = (1+y^2)(xy-1)^2$

$X = [-1,1]$, $Y = (-\infty, +\infty)$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



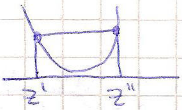
Наруш. усл.: Y не явл. компактом

Z – мн-во евкл. пр-ва конечн. размерн.

Опр. Z – выпукл., если $\forall z' \neq z'' \in Z$, $\forall \lambda \in (0,1) \Rightarrow$
$\lambda z' + (1-\lambda) z'' \in Z$

$h(z)$ – опр. на вып. Z

Опр. $h(z)$ – выпукл. ф-ция, если $\forall z' \neq z''$, $\forall \lambda \in (0,1) \Rightarrow$
$\Rightarrow h(\lambda z' + (1-\lambda) z'') \leq \lambda \cdot h(z') + (1-\lambda) \cdot h(z'')$



Опр. $h(z)$ – вогнут. ф-ция, если –"– $h(\ldots) > \lambda h + (1-\lambda) \cdot h$

Пример (упр.):

1. $h(z) = \sum_{i=1}^{m} z_i^2 = |z|^2$ – строго выпукл.
   ↑ док-ть $\qquad z^2,\ z \in E^1$ – сначала

2. $h(z)$ – непр. на вып. комп. Z
   $h(z)$ – строго выпуклая
   Тогда $\min h(z)$ достиг. в ед. т. $\Leftarrow$ док-ть

Теорема 1.3. Пусть, $F(x,y)$ - непр. на $X \times Y$,
X - выпукл. комп. в E^m, Y - вып. комп. в E^n,
$\forall y \in Y \Rightarrow F(x,y)$ - вогнут. по x,
$\forall x \in X \Rightarrow F(x,y)$ - выпукл. по y

$\Downarrow$

$\exists$ седл. точка ф-ии $F(x,y)$ на $X \times Y$

Док-во:

1) пусть, $F(x,y)$ - строго вып. по y $\leftarrow$ доп. предпол.

Рассм. $W(x) = \min\limits_{y \in Y} F(x,y) = F(x, y(x)) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ {т-ма 1.2} $y(x)$ - непр. отобр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow W(x)$ - непр.

x^*: $W(x^*) = \max\limits_{x \in X} W(x)$

$(x^*, y(x^*))$

$\forall x \in X$, $\forall t \in (0,1)$

Рассм. выраж:

$(1-t)x^* + tx \in X$ (т.к. X - вып.)

$\tilde{y} \overset{def}{=} y((1-t)x^* + tx)$

$W(x^*) \geq W((1-t)x^* + tx) =$

$= F((1-t)x^* + tx, \tilde{y}) \geq$ {F - вогн. по 1 арг.} $\geq$

$\geq (1-t) \cdot \underbrace{F(x^*, \tilde{y})} + t \cdot F(x, \tilde{y}) \geq$

$\geq (1-t) \cdot W(x^*) + t \cdot F(x, \tilde{y})$

$\Downarrow$

$\cancel{t} \cdot F(x, \tilde{y}) \leq \cancel{t} \cdot W(x^*)$, $t > 0$

$t \to 0+ \Rightarrow \tilde{y} \to y(x^*) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{F(x, y(x^*))} \leq W(x^*) = \underline{F(x^*, y(x^*))} \leq$

$\leq \underline{F(x^*, y)}$, $\forall y \in Y$, $\forall x \in X$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (x^*, y(x^*))$ - седл. т. ф-ии F.

2) Общ. случай (без предп.)

Рассм. $F_\varepsilon(x,y) = F(x,y) + \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j^2$ - строго вып. по y

$\Downarrow$

F_ε - удовл. 1 части док-ва

$\Downarrow$

$\exists$ седл. т. ф-ии F_ε : $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$

Рассм. $\varepsilon_k \to 0+ \Rightarrow (x^{\varepsilon_k}, y^{\varepsilon_k}) \in X \times Y$ - комп.

$\Rightarrow$ можно выделить сход. подп-ть

$(x^{\varepsilon_k}, y^{\varepsilon_k}) \to (x^0, y^0)$

$F_{\varepsilon_k}(x, y^{\varepsilon_k}) \le F_{\varepsilon_k}(x^{\varepsilon_k}, y^{\varepsilon_k}) \le F_{\varepsilon_k}(x^{\varepsilon_k}, y)$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$

$k \to \infty$ $(\varepsilon_k \to 0)$ $\Rightarrow F(x, y^0) \le F(x^0, y^0) \le F(x^0, y)$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$

Т-ма док-на.

$\boxed{10.09}$

Пример:

$F(x,y) = xy$, $X = Y = [0,1]$

$X^0 = [0,1]$
$Y^0 = \{0\}$ > показать

$X^0 \times Y^0$ - мн-во всех седл. т.

пусть, $x^* = 0$
$\Downarrow Y(0) = [0,1]$
$y^* = 1$

$(0,1)$ - не явл. седл. точкой

Если F - строго вогн. по x, то

$X(y) = \{x(y)\}$

y^* - минимакс. страт.

$(x(y^*), y^*)$ - седл. т.

<u>Пример</u>:

$F(x,y) = -x^2 + y^3 + y^2 x - 4y + 3$

$X = Y = [0,1]$

Явл. ли вогн. - вып.?

$F''_{xx} = -2 < 0 \Rightarrow$ строго вогн. по x

$F''_{yy} = 6y + 2x \geq 0 \Rightarrow$ выпукл. по y

2-ой метод нахожд. седл. т.:

$x(y): \quad F'_x = -2x + y^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(y) = \frac{y^2}{2} \in [0,1]$

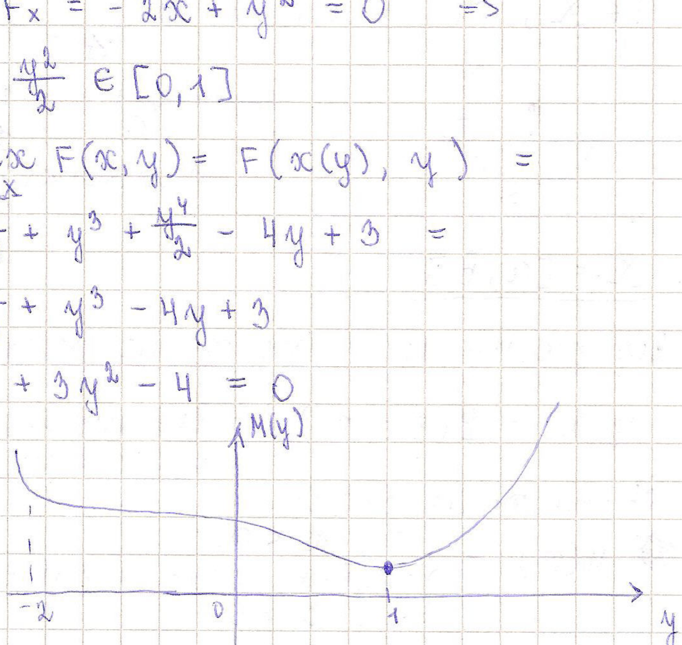
$M(y) = \max\limits_{x \in X} F(x,y) = F(x(y), y) =$

$= -\frac{y^4}{4} + y^3 + \frac{y^4}{2} - 4y + 3 =$

$= \frac{y^4}{4} + y^3 - 4y + 3$

$M'(y) = y^3 + 3y^2 - 4 = 0$

$\Downarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_{2,3} = -2 \end{cases}$



$y^* = 1, \quad x(y^*) = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ - седлов. точка

§3. Смешанные расширения антагонистических игр.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ – нет седл. т.

X – мн-во страт.

Опр. Смеш. страт. 1ого игрока наз. вероятн. распр. φ на мн-ве X.

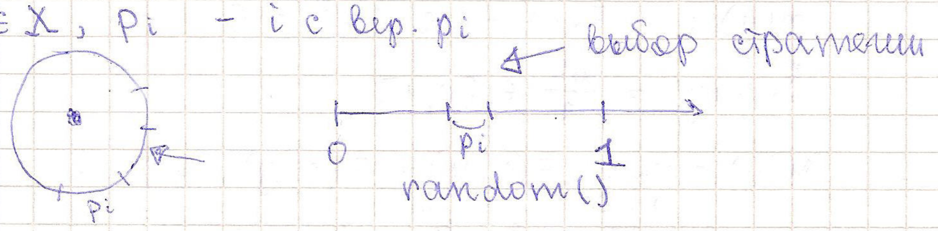
Применить смеш. страт. означ., что игрок выбир. знач. x, как реализ. случ. величины распр. φ.

① $X = \{1, \dots, n\}$

Вероятн. распр. задается вероятностным вектором:

$p = (p_1, \dots, p_m)$: $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, $p_i \geq 0$, $i = 1 \dots m$

$i \in X$, p_i – i с вер. p_i



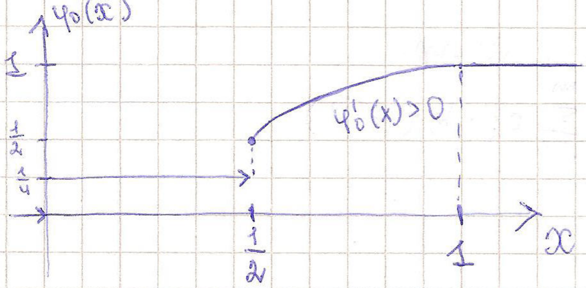
② $X = [a, b]$

вер. распр. φ – это ф-ия распр.

$\varphi(x) = P(\xi \leq x)$ – вер. того, что случ. величина $\xi \leq x$

Св-ва ф-ии распр.:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \text{неубыв., непр. справа}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$



пример ф-ии распред.

Как примен. такую стратегию?

1) Реал. на $[0,1]$ случ. велич. $\eta \in [0,1]$, равном. распр. на $[0,1]$

2) строим обр. ф-ию к $\varphi_0(x)$

$$\xi = \begin{cases} 0 & , 0 \le \eta < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & , \frac{1}{4} \le \eta < \frac{1}{2} \\ \varphi_0^{-1}(\eta) & , \frac{1}{2} \le \eta \le 1 \end{cases}$$

ξ имеет ф-ию распр. $\varphi_0(x)$:

$$P(\xi \le x) = P(0 \le \eta \le \varphi_0(x)) \overset{\text{т.к. равном. распр.}}{=} \varphi_0(x)$$

~

Если на $[a,b]$ $h(x)$ - непр. (кус.-непр.), то

$$\int_a^b h(x)\, d\varphi_0(x) = \frac{1}{4}\cdot h(0) + \frac{1}{4}\cdot h\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{1/2}^{1} h(x)\varphi_0'(x)\,dx$$

3. X - вып. компакт в евкл. пр-ве

(вып. замк. огр. мн-во)

$x_0 \in X$

Вер. мера, сосред. в точке:

ф-ия-индикатор $I_{x_0}(x) = \begin{cases} 1, & x = x_0 \\ 0, & x \ne x_0 \end{cases}$

$x^{(i)} \in X, \quad i = 1, \dots, m$

$\varphi = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot I_{x^{(i)}}$ $\qquad p = (p_1, \dots, p_m)$

$h(x)$ опр. на X, непр.

$$\int_X h(x)\,d\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot h(x^{(i)})$$

∼∼∼

Рассм. X

$\{\varphi\}$ - мн-во смеш. страт. на X

X - мн-во чистых стратегий

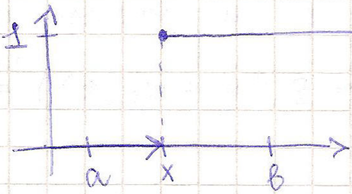
Считаем, что $X \subset \{\varphi\}$, т.к.

①. $X = \{1, \dots, n\}$

i, $p = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ ~ чист. страт.

②. $X = [a, b]$

x,



~ чист. стат.

③. X - вып. комп.

x, I_x ~ чист. страт.

∼∼∼

$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle$ - антаг. игра

$\{\varphi\}$ - вер. распр. на X - смеш. стр. 1-ого игрока

$\{\psi\}$ - вер. распр. на Y - смеш. стр. 2ого игр.

$F(\varphi, \psi)$ - мат. ожид. выигрыша 1ого игрока

$$F(\varphi, \psi) = \int_X \int_Y F(x,y)\,d\varphi(x)\,d\psi(y)$$

$\overline{\Gamma} = \langle \{\varphi\}, \{\psi\}, F(\varphi,\psi) \rangle$

смеш. расшир. игры Γ

Опр. Γ имеет реш. в смеш. стратегиях, если имеет реш. $\overline{\Gamma}$.

реш. $\overline{\Gamma}$ – (φ^0, ψ^0, v), (φ^0, ψ^0) – седл. т. $F(\varphi,\psi)$

$v = F(\varphi^0, \psi^0)$

Опр. φ^0, ψ^0 – оптим. смеш. страт.

v – значение (цена) игры

Смеш. расшир. матр. игры:

$A = (a_{ij})_{m\times n}$

$p \in P = \{p \in E^m \mid \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ p_i \geq 0,\ i = 1\ldots m\}$

страт. 1ого игрока

$q \in Q = \{q \in E^m \mid \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,\ q_j \geq 0,\ j = 1\ldots n\}$

страт. 2ого игрока

ожид. выигрыш 1ого игр.:

$A(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j$ – мат. ожид. случ. вел. a_{ij}

p_i, i

q_j, j $\quad (i,j)$ с вер. $p_i q_j$

$\overline{\Gamma} = \langle P, Q, A(p,q) \rangle$ – смеш. расшир.

Теорема 1.4 (основн. т-ма матр. игр)
$\forall$ матр. игра имеет реш. в смеш. страт.

Док-во:

1) $A = (a_{ij})_{m \times n}$

док-ть: $A(p,q)$ имеет седл. т. на $P \times Q$

2) {т-ма 1.3}:

$$\left\{\begin{array}{l} P, Q - \text{вып. замк. огр. мн-ва} \\ A(p,q) - \text{непр. по } p, q \\ \quad\quad\quad\quad \text{билин. (лин. по } p\text{, по } q) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow A(p,q) - \text{вогн. по } p \\ \quad\quad\quad\quad \text{вып. по } q \quad (\text{т. к. лин.}) \end{array}\right.$$

$\Downarrow$ т.1.3.

$A(p,q)$ имеет седл. т. (p^0, q^0)

Т-ма док-на.

(p^0, q^0):

$$A(p, q^0) \le \underset{v}{A(p^0, q^0)} \le A(p^0, q), \quad \forall p \in P, \ \forall q \in Q$$

Когда возм. применять смеш. стратегии?

1. Игра Г повторяется много раз

2. Игра Г – 1 раз
игрок действует в усл. риска

$A = (a_{ij})$ вместо денеж. выигр.
$\downarrow$ надо исп. полезность
$A' = (a'_{ij})$ – исп. ф-ию полезности

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ? \end{pmatrix}$$ Как опр. полезность „5"?

м. полезности

Рассм. лотерею:
„10" с вер. a $\qquad 0<a<1$
„0" с вер. $1-a$

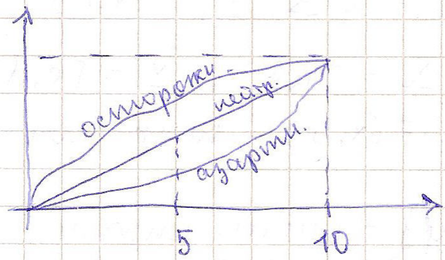
~~Сколько стоит такой лотер. билет?~~

При каком a выигрыш „5" эквив. этой лотерее?

нейтр. отн. к риску: $a = 0.5$
осторожн.: $a > 1/2$
рисков.: $a < 1/2$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

учитывается отношение игрока к риску



③. Реализация в виде „физич." смеси.

Пример:
(игра против природы)

Фермер: $i = 1, 2, 3$ (3 вида с/х культур)

Природа: $j = 1, 2, 3$

$j = 1$ – норм. год
$j = 2$ – засуха
$j = 3$ – дожди

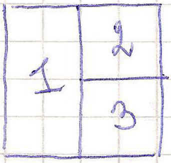
цена i-ой культ. – a_i

матрица урожайности $H = (h_{ij})$

$A = (a_i \cdot h_{ij})$ – выручки фермера

Пусть, оптим. смеш. страт.

$$p^\circ = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$



на участке так засеваются культуры

Непрерывные игры:

$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle$

$X = [a,b]$, $Y = [c,d]$.

$F(x,y)$ – непр. на $[a,b] \times [c,d]$

$\{\varphi\}$ – смеш. страт. 1ого игрока (на $[a,b]$)

$\{\psi\}$ – смеш. страт. 2ого игрока (на $[c,d]$)

$$F(\varphi,\psi) = \int_a^b \int_c^d F(x,y)\, d\varphi(x)\, d\psi(y)$$

$F(x,\psi) = \int_c^d F(x,y)\, d\psi(y)$, если x – чист. страт.

$$F(\varphi,y) = \int_a^b F(x,y)\, d\varphi(x)$$

$$F(\varphi,\psi) = \int_a^b F(x,\psi)\, d\varphi(x) = \int_c^d F(\varphi,y)\, d\psi(y)$$

$\overline{\Gamma} = \langle \{\varphi\}, \{\psi\}, F(\varphi,\psi) \rangle$ – смеш. расшир. непр. игры на прямоуг.

$X = [a, b]$

$\{\varphi\}$ - мн-во ф-ий распр. на $[a, b]$

<u>Утв.</u> $\{\varphi\}$ - слаб. компакт

т.е. $\forall \varphi_k$, $k = 1, 2, \ldots$ $\exists \varphi_{k_l}$, $l = 1, 2, \ldots$:

$\varphi_{k_l} \xrightarrow{\text{сл.}} \varphi_0 \in \{\varphi\}$, т.е.

$\forall h(x)$ - непр. на $[a, b]$

$$\int_a^b h(x)\, d\varphi_{k_l}(x) \longrightarrow \int_a^b h(x)\, d\varphi_0(x)$$

(без док-ва)

<u>Лемма</u> 3. В непр. Г на прямоуг. $\exists$ макси-мин. и минимакс. смеш. страт.

<u>Док-во</u>:

1) Рассм. смеш. расшир. $\overline{\Gamma}$:

$$\underline{v} = \sup_{\varphi \in \{\varphi\}} \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi)$$

$$\overline{v} = \inf_{\psi \in \{\psi\}} \sup_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi)$$

лемма утв., что внеш. sup (inf) достиг.

2) Док-ем $\exists$ максимин. стратегии:

Рассм. $\varepsilon_k \to 0+$:

$$\exists \varphi_k : \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi_k, \psi) \geq \underline{v} - \varepsilon_k$$

3) $\{\varphi\}$ - сл. комп. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_{k_l} \xrightarrow{\text{сл.}} \varphi_0$

$$\inf_{\psi} F(\varphi_{k_l}, \psi) \geq \underline{v} - \varepsilon_{k_l}$$

$\Downarrow$

$$F(\varphi_{k_l}, \psi) = \int_a^b \overbrace{F(x, \psi)}^{\text{непр. по } x}\, d\varphi_{k_l}(x) \geq \underline{v} - \varepsilon_{k_l}$$

$\Downarrow$

$\Downarrow\ l \to \infty$, сл. сход., F - непр. по x

$$\int_a^b F(x, \psi)\, d\varphi_0(x) \geq \underline{v}$$

$\Downarrow$

$$F(\varphi_0, \psi) \geq \underline{v}, \quad \forall \psi \in \{\psi\}$$

$\Downarrow$

$$\inf_{\psi} F(\varphi_0, \psi) \geq \underline{v}$$

$\Downarrow$ из опр. $\underline{v} = \sup \inf$

$$\inf_{\psi = \{\psi\}} F(\varphi_0, \psi) = \underline{v}$$

$\Downarrow$

$\exists$ максимин. стр.

Лемма док-на.

<u>Лемма 4</u>. $\left.\begin{array}{l} \Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle \\ \Gamma' = \langle X, Y, F'(x,y) \rangle \\ F, F' \text{ - огранич.} \\ |F(x,y) - F'(x,y)| \leq \varepsilon, \ \forall x, y \in X \times Y \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (A)$

$$\Rightarrow |\underline{v} - \underline{v}'| \leq \varepsilon, \quad |\overline{v} - \overline{v}'| \leq \varepsilon$$

<u>Док-во</u>:

1) Рассм. $\forall x \in X$

$$\left|\inf_{y \in Y} F(x,y) - \inf_{y \in Y} F'(x,y)\right| \leq \varepsilon \quad (1) \text{ - док-ем}$$

$$\inf_{y \in Y} F(x,y) - \inf_{y \in Y} F'(x,y) \geq \inf (F(x,y) - F'(x,y)) \geq$$

$\geq -\varepsilon$ (из усл. (A))

Аналогично, $F' - F$ $\Rightarrow$ (1) док-но

2) $$\Big|\underbrace{\sup_{x \in X} W(x)}_{\underline{v}} - \underbrace{\sup_{x \in X} W'(x)}_{\underline{v}'}\Big| \leq \varepsilon \quad \text{(аналог. (1))}$$

Лемма док-на.

Теорема 1.5 (основн. т-ма непр. игр.)
∀ непр. Г на прямоуг. имеет реш. в смеш. стратегиях.

Док-во:

1) Рассм. $\overline{\Gamma} \to F(\varphi, \psi)$

$$\left.\begin{aligned} \{\text{т-ма } 1.1\}: \ \underline{v} &= \max_{\varphi} \inf_{\psi} F(\varphi, \psi) \\ \overline{v} &= \min_{\psi} \sup_{\varphi} F(\varphi, \psi) \end{aligned}\right\} \text{док-ть } \underline{v} = \overline{v}$$

(∃ max и min по л. 3)

2) $F(x,y)$ – непр. на $X = [a,b]$, $Y = [c,d]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow F(x,y)$ – равном. непр. $\Rightarrow$

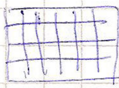
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ ∃ разбиение X^i, $i = 1 \dots m$,

∃ разб. Y^j, $j = 1 \dots n$: $|F(x,y) - F(x',y')| \le \varepsilon$ (1)

$\forall (x,y), (x',y') \in X^i \times Y^j$

3) рассм. $x^i \in X^i$

$y^j \in Y^j$



опр. ступенч. ф-ию:

$F_1(x,y) = F(x^i, y^j)$, $(x,y) \in X^i \times Y^j$

Из усл. (1) $\Rightarrow |F(x,y) - F_1(x,y)| \le \varepsilon$, $\forall (x,y)$ (2)

4) $a_{ij} = F(x^i, y^j)$

$\Downarrow$

$A = (a_{ij})_{m \times n}$

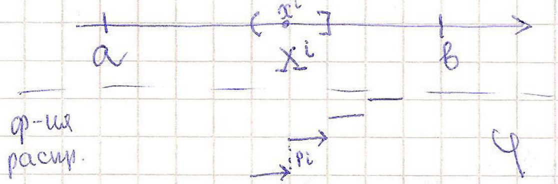
5) φ сопоставим $p = (p_1, \dots, p_m)$

$p_i = \int_{X^i} d\varphi(x) \ge 0$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$

т.е. построим отобр. на:

$\{\varphi\} \xrightarrow{\text{на}} P$

$\forall p \in P \ \exists \varphi \to p$, т.к.



6) Аналогично, $\{\psi\} \xrightarrow{\text{на}} Q$

7) $$F_1(\varphi, \psi) = \int_a^b \int_c^d F_1(x,y)\, d\varphi(x)\, d\psi(y) =$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i \underbrace{a_{ij}}_{= F(x^i, y^j)} q_j = A(p,q) \qquad (3)$$

8) $$|F(\varphi,\psi) - F_1(\varphi,\psi)| = \left| \int_a^b \int_c^d (F(x,y) - F_1(x,y))\, d\varphi(x)\, d\psi(y) \right| \le$$

$$\le \int_a^b \int_c^d \overbrace{|F(x,y) - F_1(x,y)|}^{\overset{(2)}{\le} \varepsilon}\, d\varphi(x)\, d\psi(y) \le \varepsilon, \ \forall \varphi, \psi$$

это усл. (A)

$\Downarrow$ {лемма 4}

$$\Big| \underbrace{\max_{\varphi \in \{\varphi\}} \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi,\psi)}_{= \underline{v}} - \underbrace{\max_{\varphi} \min_{\psi} F_1(\varphi,\psi)}_{= \max_p \min_q A(p,q) = v(A)} \Big| \le \varepsilon$$

т.е. $|\underline{v} - v(A)| \le \varepsilon$

9) Аналогично, $|\overline{v} - v(A)| \le \varepsilon$

10) $$\left. \begin{array}{l} |\underline{v} - v(A)| \le \varepsilon \\ |\overline{v} - v(A)| \le \varepsilon \end{array} \right\} \Rightarrow |\underline{v} - \overline{v}| \le 2\varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{\forall \varepsilon\} \ \underline{v} = \overline{v}$

Т-ма док-на.

§4. Свойства решений в смешанных стратегиях.

Рассм. непр. игры.

Теорема 1.6.
(φ^0, ψ^0, v) – реш. в см. стр. непр. Γ на прямоуг. $\Leftrightarrow$ $F(x, \psi^0) \le v \le F(\varphi^0, y)$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$ (*)

[Рассм. $F(x, \psi^0) \le v$ означ.:
$\max\limits_{x \in X} F(x, \psi^0) \le v \; (\le \min\limits_{y \in Y} F(\varphi^0, y))$]

Док-во:

1) необх. ($\Rightarrow$)
(φ^0, ψ^0, v) – реш. в см. ст. Γ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\varphi^0, \psi^0)$ – седл. т. $F(\varphi, \psi)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow F(\varphi, \psi^0) \le \underbrace{F(\varphi^0, \psi^0)}_{= v} \le F(\varphi^0, \psi), \; \forall \varphi, \psi$$

В качестве φ – чист. страт. x $\Rightarrow$

$$\Rightarrow F(x, \psi^0) \le v \le F(\varphi^0, y), \; \forall x, \forall y$$

2) достат. ($\Leftarrow$)
вып. (*) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ рассм. $\forall \varphi \in \{\varphi\}$

$$F(\varphi, \psi^0) = \int_a^b \overbrace{F(x, \psi^0)}^{\overset{(*)}{\le} v} d\varphi(x) \le v$$

аналог., $v \le F(\varphi^0, \psi)$, $\forall \psi \in \{\psi\}$

пусть, $\varphi = \varphi^0$, $\psi = \psi^0$ $\Rightarrow F(\varphi^0, \psi^0) \le v \le F(\varphi^0, \psi^0) \Rightarrow$

$\Rightarrow v = F(\varphi^0, \psi^0) \Rightarrow (\varphi^0, \psi^0)$ – седл. т.

Т-ма док-на.

Теорема 1.6'

(p^0, q^0, v) – реш. в см. стр. матр. игры $A \Leftrightarrow$

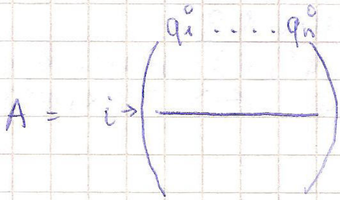
$\Leftrightarrow A(i, q^0) \le v \le A(p^0, j), \quad \forall i = 1 \dots m, \quad \forall j = 1 \dots n \qquad (*)$

(док-ть)

$$A(i, q^0) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^0$$

$\Updownarrow$

скал. пр-ние
i-ой строки на q^0



~~ск.~~

$$A(p^0, j) = \sum_{i=1}^{m} p_i^0 a_{ij}$$

$\Updownarrow$ скал. пр-ние p^0 на j-й столбец

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots\dots & a_n \\ a_n & a_1 \dots\dots & a_{n-1} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ a_2 & \dots\dots a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

$p^0 = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = q^0$ – оптим. страт. – ?

$$v = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}$$

$A(p^0, j) = v = A(i, q_0), \quad \forall i, j \Rightarrow (*)$ – вып.

Теорема 1.7

Для непр. Г на прямоуг. верно:

1) $\forall \varphi \in \{\varphi\} \Rightarrow \inf\limits_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) = \min\limits_{y \in Y} F(\varphi, y)$

2) $\forall \psi \in \{\psi\} \Rightarrow \sup\limits_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi) = \max\limits_{x \in X} F(x, \psi)$

Док-во:

1) $\overset{\forall \varphi:}{\inf\limits_{\psi \in \{\psi\}}} F(\varphi, \psi) \leq \min\limits_{y \in Y} F(\varphi, y)$ (I)

$Y \subset \{\psi\}$

2) $\forall \psi: \quad F(\varphi, \psi) = \int\limits_c^d \overbrace{F(\varphi, y)}^{\geq \min\limits_{y \in Y} F(\varphi, y)} d\psi(y) \geq \min\limits_{y \in Y} F(\varphi, y)$

$\Rightarrow \inf\limits_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) \geq \min\limits_{y \in Y} F(\varphi, y) \Rightarrow$ 1) док-но

Т-ма док-на.

Следствие: в непр. Г на прямоуг. значение игры $v = \max\limits_{\varphi \in \{\varphi\}} \min\limits_{y \in Y} F(\varphi, y) = \min\limits_{\psi \in \{\psi\}} \max\limits_{x \in X} F(x, \psi)$

Док-во:

1) $v \overset{T.1.1}{=} \max\limits_{\varphi \in \{\varphi\}} \inf\limits_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) = \min\limits_{\psi \in \{\psi\}} \sup\limits_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{T.1.7\} \quad v = \max\limits_{\varphi \in \{\varphi\}} \min\limits_{y \in Y} F(\varphi, y) = \min\limits_{\psi \in \{\psi\}} \max\limits_{x \in X} F(x, \psi)$

Сл-е док-но.

Упр.: $\max\limits_{x \in X} \min\limits_{y \in Y} F(x, y) \leq v \leq \min\limits_{y \in Y} \max\limits_{x \in X} F(x, y)$

Теорема 1.7'.
игра с A, верно:

1) $\forall p \in P \Rightarrow \min\limits_{q \in Q} A(p,q) = \min\limits_{1 \le j \le n} A(p,j)$

2) $\forall q \in Q \Rightarrow \max\limits_{p \in P} A(p,q) = \max\limits_{1 \le i \le m} A(i,q)$

(док-ть)

A - лин. по q, ...

Следствие.
в игре с A, $v = \max\limits_{p \in P} \min\limits_{1 \le j \le n} A(p,j) = \min\limits_{q \in Q} \max\limits_{1 \le i \le m} A(i,q)$

~~~

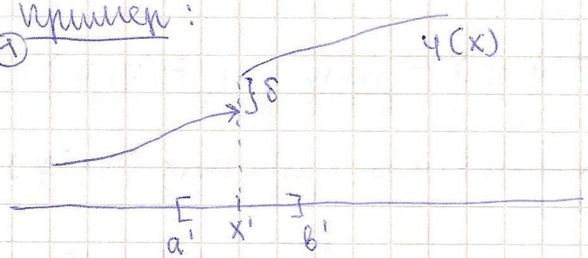
φ - смеш. ст. 1ого игрока на $X = [a, b]$

Опр. $x' \in Sp(\varphi)$, если выполн.:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists [a', b'] \ni x' : b' - a' < \varepsilon, \ \varphi(b') - \varphi(a') > 0$

Sp - спектр

пример:

1



т. спектра = т. роста

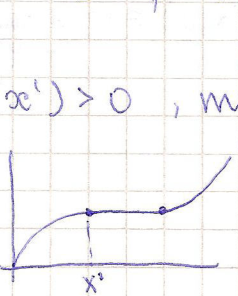
$x' \in Sp(\varphi)$

$\varphi(b') - \varphi(a') > \delta > 0, \quad b' - a' < \varepsilon$

2. если в x' $\varphi'(x') > 0$, то $x' \in Sp(\varphi)$

3. $\varphi'(x') = 0$

$x' \in Sp(\varphi)$


~~~

V. Метод Брауна

задана точн. $\varepsilon > 0$
опр. знач. игры v с точн. до ε

$p^\varepsilon : \min\limits_{1 \le j \le n} A(p^\varepsilon, j) \geq v - \varepsilon$ — максимин. смеш. стратегия у 1 игрока по ε

$q^\varepsilon : \max\limits_{1 \le i \le m} A(i, q^\varepsilon) \leq v + \varepsilon$

~~Интерпретация~~

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ — игра повтор. многокр.

игра повтор. k раз
1 игрок r_i раз выбрал i-ую чист. страт.
$\sum\limits_{i=1}^{m} r_i = k$

$p(k) = \left(\frac{r_1}{k}, \dots, \frac{r_m}{k}\right) \in P$ — <u>вектор частот</u>

l_j раз 2-ой игрок выбирал j-ую чистую стратегию
$\sum l_j = k$

$q(k) = \left(\frac{l_1}{k}, \dots, \frac{l_n}{k}\right) \in Q$ — вектор частот

<u>Алгоритм</u>:

<u>шаг 1</u>:
$\forall$ чист. страт. — i_1, j_1

<u>k повтор.</u>: $i_1, \dots, i_k \rightarrow p(k)$
$j_1, \dots, j_k \rightarrow q(k)$

<u>шаг $(k+1)$</u>: $i_{k+1} : A(i_{k+1}, q(k)) = \max\limits_{1 \le i \le m} A(i, q(k)) = v_1(k)$

$$j_{k+1}: A(p(k), j_{k+1}) = \min_{1 \le j \le n} A(p(k), j) = \nu_2(k)$$

~~Правило остановки~~

~~Т.~~ $\underbrace{\nu_1(k) \ge \nu \ge \nu_2(k)}$, $\forall k = 1, 2, \dots$ **(1)**

Док-ем:

$$\underline{\nu_1(k)} = \max_{1 \le i \le m} A(i, q(k)) \ge \min_{q \in Q} \max_{1 \le i \le m} A(i, q) =$$

$$= \{\text{см. Т } 1.7'\} = \underline{\nu} = \max_{p \in P} \min_{1 \le j \le n} A(p, j) \ge$$

$$\ge \min_{1 \le j \le n} A(p(k), j) = \underline{\nu_2(k)}$$

Теорема 1.11.

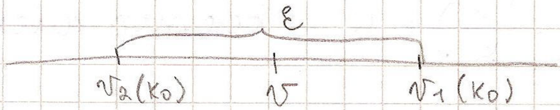
В методе Брауна 1) $\exists \lim\limits_{k \to \infty} \nu_1(k) = \lim\limits_{k \to \infty} \nu_2(k) = \nu$

2) p° – $\forall$ предел. т. $\{p(k)\}$ => p° – оптим. смеш. стратегия 1 игрока

(Аналогично, q° – ...)

Правило остановки:

$k_0: \nu_1(k_0) - \nu_2(k_0) \le \varepsilon$



$\Downarrow$

$$\begin{aligned} |\nu - \nu_1(k_0)| &\le \varepsilon \\ |\nu - \nu_2(k_0)| &\le \varepsilon \end{aligned} \qquad (2)$$

$p(k_0)$ – ε максимин. смеш. страт., т.к.

$$\min_{1 \le j \le n} A(p(k_0), j) = \nu_2(k_0) \overset{(2)}{\ge} \nu - \varepsilon$$

$q(k_0)$ – ε минимакс. смеш. страт.

Скорость сход. (теоретич.):

$$\underline{O}\left(\frac{1}{k^{\frac{1}{m+n-2}}}\right)$$

Это весьма медлен. скор. сход.

На практике: $\underline{O}\left(\frac{1}{k}\right)$

<u>Модификация м. Брауна</u>:

$$v_1^*(k) = \min_{1\le t\le k} v_1(t) \quad \leftarrow \text{опр. величину}$$

$$v_1^*(k) \overset{(1)}{\geq} v \geq v_2^*(k) = \max_{1\le t\le k} v_2(t)$$

<u>Правило остановки</u>:

$$k_0: \quad v_1^*(k_0) - v_2^*(k_0) \le \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{matrix} |v - v_1^*(k_0)| \le \varepsilon \\ |v - v_2^*(k_0)| \le \varepsilon \end{matrix} \qquad (3)$$

$$v_1^*(k_0) = \min_{1\le t\le k_0} v_1(t) \doteq v_1(t_1)$$

$$v_2^*(k_0) = \max_{1\le t\le k_0} v_2(t) = v_2(t_2)$$

$p(t_2)$ – ε-максимин. смеш. страт.
$q(t_1)$ – ε-минимакс. смеш. страт.

Т.к.

$$\min_{1\le j\le n} A(p(t_2), j) = v_2(t_2) = v_2^*(k_0) \overset{(3)}{\geq} v - \varepsilon$$

~

k повтор.

пусть, $c(k) \in E^m$: $c_i(k) = k \cdot A(i, q(k))$

$$c_i(k) = k \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \frac{l_j}{k} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot l_j = \sum_{t=1}^{k} a_{ij_t}$$

$j_t = j$ l_j раз

$c(k)$ – это сумма столбцов A с номерами j_t

Пусть, $d(k) \in E^n$

$$d_j(k) = k \cdot A(p(k), j) = \cancel{k} \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{r_i}{\cancel{k}} \cdot a_{ij} = \sum_{t=1}^{k} a_{i_t j}$$

$i_t = i$ r_i раз

$d(k)$ – сумма строк A с номерами i_t

~

$$i_{k+1}: \max_{1 \le i \le m} \frac{c_i(k)}{k} = \frac{c_{i_{k+1}}(k)}{k} = v_1(k)$$

$$j_{k+1}: \min_{1 \le j \le n} \frac{d_j(k)}{k} = v_2(k)$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

		сумма столбцов				сумма строк			
k	i_k	$c_1(k)$	$c_2(k)$	$v_1(k)$	j_k	$d_1(k)$	$d_2(k)$	$v_2(k)$	ε
1	1	0	4	$4 = \frac{4}{k}$	1	0	2	$0 = \frac{0}{k}$	4
2	2	1+1 столбцы 0	8	$4 = \frac{8}{k}$	1	4	1+2 строки 3	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
3	2	(0,8)+2 столбец 2	9	$3 = \frac{9}{k}$	2	8	4	$\frac{4}{3} = \frac{4}{k}$	$\frac{3}{2} = 3 - \frac{3}{2}$ наим. оценка
4	2	4	10	$\frac{5}{2}$	2	12	5	$\frac{5}{4}$	$1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}$
5	2	6	11	$\frac{11}{5}$	2	16	6	$\frac{6}{5}$	$\frac{11}{5} - \frac{3}{2} = \frac{7}{10}$
6	2	8	12	$2 = \frac{12}{k}$	2	20	7	$\frac{7}{6}$	$2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$
7	2	10	13	$\frac{13}{7}$	2	24	8	$\frac{8}{7}$	$\frac{13}{7} - \frac{3}{2} = \frac{5}{14}$
8	2	12	14	$\frac{7}{4}$	2	28	9	$\frac{9}{8}$	$\frac{7}{4} - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$

9	2	14	$\underline{\underline{15}}$	$\frac{5}{3}$	2	32	$\underline{\underline{10}}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{5}{3}-\frac{3}{2}=\frac{1}{6}$
10	2	16	$\underline{\underline{16}}$	$\frac{8}{5}$	2	36	$\underline{\underline{11}}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{8}{5}-\frac{3}{2}=\frac{1}{10}$

$\varepsilon = \frac{1}{10}$, $v_1^*(10) = \frac{8}{5}$, $t_1 = 10$ шаг

$v_2^*(10) = \frac{3}{2}$, $t_2 = 2$ шаг

$v =$ или $\frac{8}{5}$, или $\frac{3}{2}$, или $\frac{1}{2}\left(\frac{8}{5}+\frac{3}{2}\right)$

$p(t_2) = p(2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$q(t_1) = q(10) = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ – 2 раза выбир. 1,
8 раз выбир. 2.

§6. Решения игр с вогнутыми и выпуклыми функциями выигрыша

$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle$

Опр. Антаг. игра Γ – игра с вогн. ф-ей выигрыша, если $F(x,y)$ – непр. на вып. комп. $X \times Y$
$\forall y \in Y$, $F(x,y)$ – вогн. по x

если F – вып. по y, то игра с вып. ф-ей выигрыша

Теорема 1.12 (Хелли)

Пусть, в E^m $\exists$ сем-во $D_\alpha^{\alpha \in \mathcal{L}}$ вып. компактов: $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}$ $\bigcap_{i=1}^{m+1} D_{\alpha_i} \neq \varnothing$.

Тогда, $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{L}} D_\alpha \neq \varnothing$.

(без док-ва)

Упр. Док-ть т-му при $m = 1$

Теорема 1.13

Пусть, Γ – игра с вогн. ф-ей выигрыша $\cap_x$

Тогда, $\underline{v} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x,y) = \underbrace{\min_{\substack{y^j \in Y \\ j=1 \dots m+1}} \max_{x \in X} \min_{1 \le j \le m+1} F(x, y^j)}_{w}$

$\left\{ y^j \in Y \subset E^n, \text{ внеш. min по перем. } (m+1) \cdot n \right\}$

Док-во:

1) $F(x, y^j)$ – непр. $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ min достиг.

2) Док-ем: $w \geq \underline{v}$

рассм. $\forall y^1 \dots y^{m+1}$

$$\max_{x\in X} \min_{1\le j\le m+1} F(x, y^j) \geq \max_{x\in X} \min_{y\in Y} F(x,y) = \underline{v}$$

$\Downarrow$ $\{\forall$ набор$\}$ $w \geq \underline{v}$

3) Док-ем: $w \leq \underline{v}$

пусть, $y \in Y$ – это α из т. Хелли

$$D_y = \{x \in X \mid F(x,y) \geq w\}$$

$\left.\begin{array}{l} F \text{ – вогн. по } x \\ F \text{ – непр.} \end{array}\right\} \Rightarrow D_y$ – вып. и замкн. (проверить)

$\bigcap_{j=1}^{m+1} D_{y_j} \neq \emptyset$ ← надо док-ть

$$\max_{x\in X} \min_{1\le j\le m+1} F(x, y^j) \geq w \quad (\text{по опр. } w)$$

$\downarrow x^*$

$$\min_{1\le j\le m+1} F(x^*, y^j) \geq w \Rightarrow$$

$\Rightarrow F(x^*, y^j) \geq w$, $\forall 1\le j \leq m+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^* \in \bigcap_{j=1}^{m+1} D_{y_j} \Rightarrow \bigcap D_{y_j} \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow$ вып. усл. т-мы Хелли $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x^0 \in \bigcap_{y\in Y} D_y \Rightarrow F(x^0, y) \geq w, \ \forall y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{v} \geq \min_{y\in Y} F(x^0, y) \geq w$$

Т-ма док-на.

Введем набор:

$\overline{y}^1, \dots, \overline{y}^{m+1}$ – реализ. внеш. min в w

т. е. $\max\limits_{x \in X} \min\limits_{1 \le j \le m+1} F(x, \overline{y}^j) = w$

Пусть, $Q = \{ q = (q_1, \dots, q_{m+1}) \mid \sum\limits_{j=1}^{m+1} q_j = 1, \ q_j \ge 0 \}$

Пусть, $\Phi(x, q) = \sum\limits_{j=1}^{m+1} F(x, \overline{y}^j) \cdot q_j$

$\cap_x$, лин. по q

Теорема 1.14

В игре Γ с вог. ф-ей выигр. $\exists$ реш.:
$(x^0, \psi^0, \underline{v})$

x^0 – чист. maxmin страт. 1 иг.
ψ^0 – смеш. страт. 2ого иг.

$$\psi^0 = \sum_{j=1}^{m+1} q_j^0 I_{\overline{y}^j}$$

$q^0 = (q_1^0, \dots, q_{m+1}^0)$: $\max\limits_{x \in X} \Phi(x, q^0) = \min\limits_{q} \max\limits_{x} \Phi(x, q)$

Док-во:

1) $\underline{v} = \{T\,1.13\} = w = \max\limits_{x \in X} \min\limits_{1 \le j \le m+1} F(x, \overline{y}^j) =$

$= \{T\,1.7'\} = \max\limits_{x \in X} \min\limits_{q \in Q} \sum\limits_{j=1}^{m+1} F(x, \overline{y}^j) =$

$= \max\limits_{x \in X} \min\limits_{q \in Q} \Phi(x, q) = \{T\,1.3\} =$

$= \min\limits_{q \in Q} \max\limits_{x \in X} \Phi(x, q) = \max\limits_{x \in X} \Phi(x, q^0) =$

$$= \max_{x \in X} \sum_{j=1}^{m+1} F(x, \bar{y}_j)\, q_j^0 =$$

$$= \max_{x \in X} \int_Y F(x, y)\, d\psi^0(y) =$$

$$= \max_{x \in X} F(x, \psi^0)$$

т.е. $\max\limits_{x \in X} F(x, \psi^0) = \underline{v} = \min\limits_{y \in Y} F(x^0, y)$

$\Rightarrow F(x, \psi^0) \le \underline{v} \le F(x^0, y), \quad \forall x, y$ это $(*)$

Т-ма док-на.

<u>Замечание</u>. Не исп. Y - вып.

1) Т-ма верна, если Y - компакт метр. пр-ва

2) пусть, Y - вып. комп., Y^0 - мн-во крайних точек, $F(X, y)$ - $\cap_x, \cap_y$

$\Downarrow$

$$\underline{v} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y^0} F(x, y)$$

Рассм. $\Gamma^0 = \langle X, Y^0, F(x, y) \rangle$

Реш. в смеш. страт. Γ^0 совпад. с Γ

Тогда $\bar{y}_j \in Y^0$ - т.е. берем такие $\bar{y}$

Теорема 1.13'.

Γ - игра с вып. ф-ей выигр. ($F - \cup_y$)

Тогда $\bar{v} = \min\limits_{y \in Y} \max\limits_{x \in X} F(x, y) = \max\limits_{\substack{x^i \in X \\ i=1 \dots n+1}} \min\limits_{y \in Y} \max\limits_{1 \le i \le n+1} F(x^i, y) = w^1$

Пусть, $\bar{x}^i$, $i = 1 \dots n+1$:

$$\min_{y \in Y} \max_{1 \le i \le n+1} F(\bar{x}^i, y) = w^1$$

Пусть, $\Phi^1(p, y) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} p_i F(\bar{x}^i, y)$

$$p \in P = \{ p \in E^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1, \; p_i \ge 0 \}$$

Теорема 1.15

Γ - игра с вып. ф-ей выигр. ($\cup_y$)

Тогда $\exists$ реш. в смеш. страт.:

$(\varphi^0, y^0, \bar{v})$

y^0 - minmax чист. страт.

$\varphi^0 = \sum\limits_{i=1}^{n+1} p_i^0 I_{\bar{x}^i}$

p^0 : $\max\limits_{p \in P} \min\limits_{y \in Y} \Phi^1(p, y) = \min\limits_{y \in Y} \Phi^1(p^0, y)$

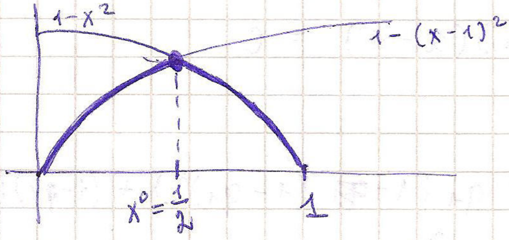
Пример:

$F(x, y) = 1 - (x-y)^2$

$X = Y = [0, 1]$

$F''_x = -2 \Rightarrow$ ф-ие вогнута

$$\underline{v} = \max_{0 \le x \le 1} \min_{0 \le y \le 1} \left[1 - (x-y)^2 \right] = \max_{0 \le x \le 1} \min \left[1 - x^2, 1 - (x-1)^2 \right]$$

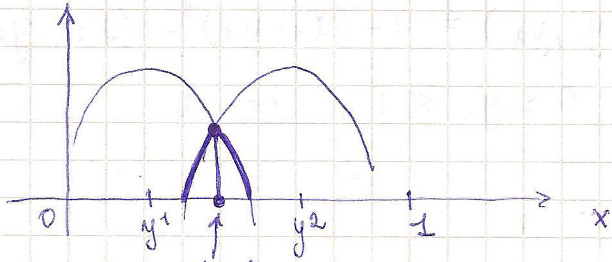


$$\boxed{x^0 = \frac{1}{2}, \quad \underline{v} = \frac{3}{4}}$$

$m = n = 1 \Rightarrow$ оптим. смеш. стр. 2 игрока сосред. в 2-х точках

$$w = \min_{0 \le y^1 \le y^2 \le 1} \max_{0 \le x \le 1} \min \left[1 - (x - y^1)^2, 1 - (x - y^2)^2 \right]$$

Фикс. y^1, y^2



$\frac{y^1 + y^2}{2}$ ← максимиз. x^*

$\Downarrow$

$$w = \min_{0 \le y^1 \le y^2 \le 1} \left[1 - \left(\frac{y^1 - y^2}{2} \right)^2 \right]$$

$\bar{y}^1 = 0$, $\bar{y}^2 = 1$ – реализ. min

$$\varphi(x, q) = q_1 \cdot F(x, \bar{y}^1) + (1 - q_1) \cdot F(x, \bar{y}^2) =$$

$$= q_1 \left[1 - x^2 \right] + (1 - q_1) \left[1 - (x - 1)^2 \right]$$

$$M(q) = \max_{0 \le x \le 1} \varphi(x, q)$$

$$\Phi'_x = -2q_1 x - 2(1-q_1)(x-1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x(q_1) = 1 - q_1$$

$$M(q_1) = \Phi(x(q_1), q) = q_1(1 - (1-q_1)^2) + (1-q_1)(1-q_1^2) =$$

$$= 1 - q_1(1-q_1)$$

$$\min_{0 \le q_1 \le 1} M(q_1) = M\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

<u>Ответ:</u> $x^0 = \frac{1}{2}$,

$$v = \underline{v} = \frac{3}{4}$$

$$\psi^0 = \frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{2} I_1$$

<u>Упр.</u> $F(x_1, x_2, y_1, y_2) = 1 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2$

$$0 \le x_i \le 1, \quad 0 \le y_i \le 1, \quad i = 1, 2$$

§7. Исследование игровых моделей.

Модель
"Нападение - оборона"

① A - общ. кол-во ср-в ~~обороны~~ нападения
B - —"— обороны
пункты: 1 ... n

A, B - бескон. делимы

$x = (x_1 \dots x_n)$ - распр. ср-в нападения
$x \in X = \{x \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = A, \ x_i \geq 0\}$

$y = (y_1 \dots y_n)$ - распр. ср-в защиты
$y \in Y = \{y \mid \sum_{i=1}^{n} y_i = B, \ y_i \geq 0\}$

i пункт:
$\mu_i > 0$ - кол-во средств нападения, ∫ может уничт. 1 ед. ср-в нападения

$x_i, \ y_i$

1 случай: $x_i > \mu_i \cdot y_i$ $(x_i - \mu_i y_i)$
2 случай: $x_i \leq \mu_i \cdot y_i$ 0

$\max[x_i - \mu_i y_i, \ 0]$ - ср-ва напад., прорыв. на i пункте

$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \max[x_i - \mu_i y_i, \ 0]$ - ф-ия выигр.

$F(x, y)$ $\cup x$, $\cup y$

$\Downarrow$ $\underline{v} = \overline{v}$ (т.к. выпукл. игра) пусть, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n > 0$

n - слабейший пункт

ⓐ $$\begin{cases} \underline{v} = \max\limits_{x \in X} \min\limits_{y \in Y} F(x,y) = \max[A - \mu_n B, 0] \\ x^0 = x^{(n)} = (0, \ldots, 0, A) \end{cases}$$

док-ем это утв.:

рассм. $\forall x \in X$

док-ем: $\min\limits_{y \in Y} F(x,y) \leq \min\limits_{y \in Y} F(x^{(n)}, y)$

$$\min_{y \in Y} F(x,y) \leq \left\{ \bar{y} : \bar{y}_i = \frac{B}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\mu_k}} \cdot \frac{x_i}{\mu_i} \right\} \leq$$

$$\leq F(x, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} \max[x_i - \mu_i \bar{y}_i, 0] =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } B \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\mu_k} \Rightarrow \bar{y}_i \geq \frac{x_i}{\mu_i} \\ \underline{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \mu_i \bar{y}_i)}, & \text{если } B < \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\mu_k} \end{cases} \leq$$

$$\leq A - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \bar{y}_i \leq A - \sum_{i=1}^{n} \mu_n \bar{y}_i = A - \mu_n B \leq$$

$$\leq \max[A - \mu_n B, 0] =$$

$$= \min_{y \in Y} \max[A - \mu_n y_n, 0] =$$

$$= \min_{y \in Y} F(x^{(n)}, y)$$

(δ). $\begin{cases} \overline{v} = \min\limits_{y\in Y} \max\limits_{x\in X} F(x,y) = \max\left[A - \dfrac{B}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, 0\right] \\ y^0 : y_i^0 = \dfrac{B}{\mu_i \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}} \end{cases}$

док-ем

$$x^{(i)} = (0, \dots, 0, \overset{i}{A}, 0, \dots, 0)$$

(1) $$\max_{x\in X} F(x,y) = \max_{1\le i\le n} F(x^{(i)}, y), \quad \forall y \in Y$$

док-ем (1):

$\max\limits_{x\in X} F(x,y) \geqslant \max\limits_{1\le i\le n} F(x^{(i)}, y)$ – очевидно

рассм. $\forall x \in X$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{x_i}{A}}_{=\lambda_i} x^{(i)}$ – вып. комбин.

$$F(x,y) = F\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{A} x^{(i)}, y\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{A} F(x^{(i)}, y) \leqslant \max_{1\le i\le n} F(x^{(i)}, y)$$

Фикс. y: $\max\limits_{x\in X} F(x,y) \leqslant \max\limits_{1\le i\le n} F(x^{(i)}, y)$

док-ли (1)

$$\overline{v} = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} F(x,y) \overset{(1)}{=} \min_{y\in Y} \max_{1\le i\le n} F(x^{(i)}, y) =$$

$$= \min_{y\in Y} \max_{1\le i\le n} \max[A - \mu_i y_i, 0] =$$

$$= \min_{y\in Y} \max\left[A - \min_{1\le i\le n} \mu_i y_i, 0\right] =$$

$$= \max\left[A - \max_{y\in Y} \min_{1\le i\le n} \mu_i y_i, 0\right] =$$

$= \{ p : p_i = y_i / B ,\ \sum p_i = 1 ,\ p_i \geq 0 \},\ p \in \mathcal{P} \} =$

$$= \max \left[A - B \cdot \max_{p \in \mathcal{P}} \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i p_i ,\ 0 \right] =$$

(см. §4 – в конце)

$$= \max \left[A - B \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}} ,\ 0 \right]$$

$$p_i^0 = \frac{1}{\mu_i \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}},\quad i = 1 \dots n$$

$\Downarrow$

$$y_i^0 = \frac{B}{\mu_i \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}$$

Сравним maxmin и minmax:

$$\underline{v} = \max [A - \mu_n B ,\ 0]$$

$$\overline{v} = \max \left[A - \frac{B}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}} ,\ 0 \right]$$

$\boxed{01.10}$

1) Пусть, $\underbrace{B \geq A \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}},$

Тогда,

$$\overline{v} = 0 \geq \underline{v} \geq 0 \Rightarrow \overline{v} = \underline{v}$$

2) Пусть, $\underbrace{B < A \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}},$

$$\overline{v} = \underbrace{A - \frac{B}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}}_{>0} > A - \frac{B}{\frac{1}{\mu_n}} = A - \mu_n B$$

$\Downarrow$

$\overline{v} > \max [A - \mu_n B ,\ 0] = \underline{v}$ – нет седловой точки

$U_y \Rightarrow \{T1.15\}$ $v = \overline{v}$

y^0 - максимин. страт.

(оптим. чист. стр. 1 игр)

$\underbrace{\varphi^0 = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \, I_{x^{(i)}}}$ - смеш. стратегия 2 игрока

$$p_i^0 = \frac{1}{\mu_i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, \quad i = 1 \dots n$$

$x^{(i)} = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow i}{A}, 0, \dots, 0)$ - концентрир. удар по i-ому пункту

Док-ем, φ^0 - оптим. смеш. стратегия для нападение

$\Downarrow$ т.е. $F(\varphi^0, y) \geq \overline{v}$ $\forall y \in Y$ - достат. док-ть

$\overset{\shortparallel}{\max_{x \in X}} F(x, y^0) \geq F(x, y^0)$ $\to$ условие (*)

рассм. н-во:

$a_i, b_i, i = 1 \dots n$

(2) $\sum_{i=1}^{n} \max[a_i, b_i] \geq \max\left[\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{n} b_i\right]$ - практич. очевидно (!...)

$$F(\varphi^0, y) = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 F(x^{(i)}, y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \max[A - \mu_i y_i, 0] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \max[\underbrace{p_i^0 A - p_i^0 \mu_i y_i}_{a_i}, \underbrace{0}_{b_i}] \overset{(2)}{\geq}$$

$$\geq \max\left[\sum_{i=1}^{n} p_i^0 A - p_i^0 \mu_i y_i, 0\right] = \left\{ \begin{array}{l} \sum p_i^0 = 1 \\ p_i^0 \mu_i = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}} \end{array} \right\} =$$

$$= \max\left[A - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i, 0\right] =$$

$$= \max\left[A - \frac{B}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, 0\right] = \overline{v}$$

док-ли

2. Модель „дуэль"

2 игрока

- d_0 - нач. расст. между дуэлянтами
- по 1 выстрелу
- дуэлянты сближаются
- в $\forall$ момент $\forall$ игрок может произвести выстрел
- $\forall$ дуэлянта ф-ия меткости

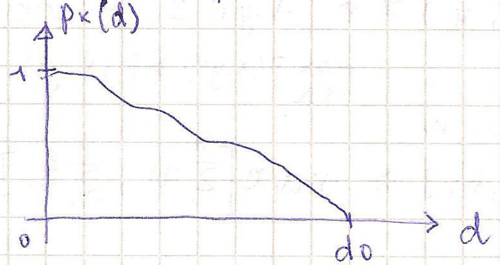
$\boxed{p_k(d)}$, $k = 1,2$ - с какой вер. попадет

$d \in [0, d_0]$

$p_k(d)$ - непр. и убывают

пусть, $p_k(0) = 1$

$p_k(d_0) = 0$



Стратегии дуэлянтов:

1 игрок : x - расст., с к. намеч. выстрел

$x \in X = [0, d_0]$ ← выигрыш - вер. пораж. противника

2 игрок : y — —"—

$y \in Y = [0, d_0]$

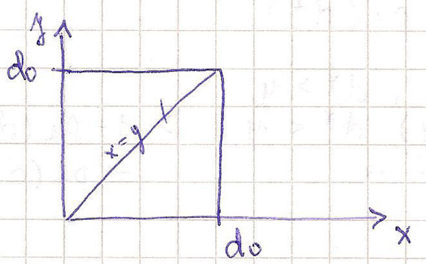
шумная дуэль - слышны выстрелы

бесшумная дуэль - не слышны

Рассм. <u>шумную</u> дуэль :

$$\boxed{F(x,y)} = \begin{cases} p_1(x), & x \geq y \\ 1 - p_2(y), & x < y \end{cases}$$ - вер. промаха 2 игрока

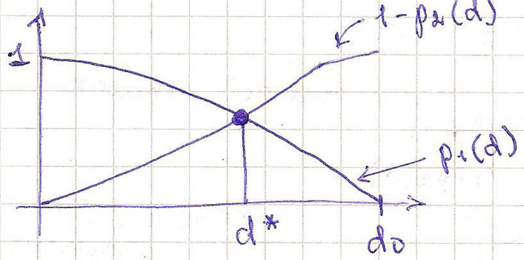
$$f(y) = \begin{cases} x, & x \geq y \\ 0, & x < y \end{cases}$$ — ф-ция поведения 1 игрока



вдоль $x = y$ ф-ция F разрывна

Рассм. ф-ции:

$p_1(d)$ и $1 - p_2(d)$



d^* — корень ур-я $p_1(d) = 1 - p_2(d)$

$\underbrace{(d^*, d^*, v = p_1(d^*))}$ — реш. шумной дуэли в чист. страт

(d^*, d^*) — седлов. т. $F(x, y)$, т.к.

$F(d^*, d^*) = p_1(d^*)$

Рассм. $\forall$ страт. x
$y = d^*$

покажем: $F(x, d^*) \leq p_1(d^*) = F(d^*, d^*)$

$\Downarrow$

$$F(x, d^*) = \begin{cases} p_1(x), & x \geq d^* \\ \underbrace{1 - p_2(d^*)}_{= p_1(d^*)}, & x < d^* \end{cases} \leq p_1(d^*)$$

~~покажем~~ пусть, $x = d^*$
$\forall y$

покажем: $F(d^*, y) \geq p_1(d^*)$

$\Downarrow$ $\left[F(d^*, y) = \begin{cases} p_1(d^*), & d^* \geq y \\ \underbrace{1 - p_2(y)}_{\text{возр. ф-ция}} & d^* < y \end{cases} > 1 - p_2(d^*) = \right.$
$= p_1(d^*)$

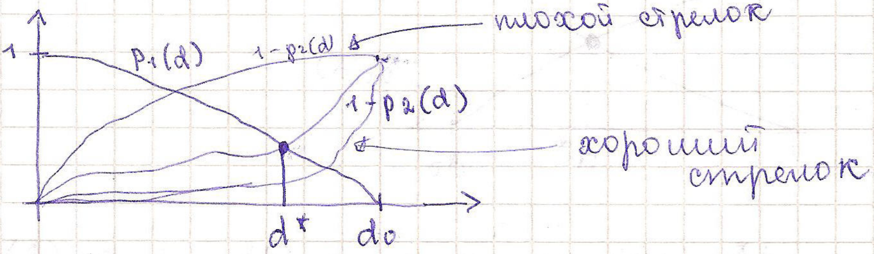
Отметим частн. случаи:

1) $p_1(d) = p_2(d)$

$\Downarrow$

$p_1(d) = 1 - p_1(d)$

$\Downarrow$ $p^*: \ p_1(d) = \frac{1}{2} = v$



Рассм. <u>бесшумную</u> дуэль:

$$F(x, y) = \begin{cases} p_1(x), & x \geq y \\ p_1(x)(1 - p_2(y)), & x < y \end{cases}$$

$$\underline{v} = \sup_{0 \leq x \leq d_0} \inf_{0 \leq y \leq d_0} F(x, y)$$

$0 \leq x < d_0$

$$w(x) = \inf_{0 \leq y \leq d_0} F(x, y) =$$

$$= \min\Big[\inf_{0 \leq y \leq x} p_1(x), \ \inf_{x \leq y \leq d_0} p_1(x)\overbrace{(1 - p_2(y))}^{\text{возраст.}}\Big] =$$

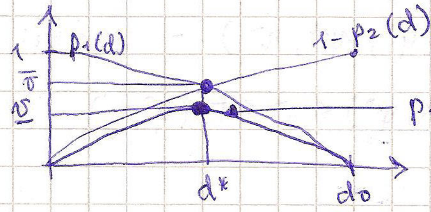
$$= \min\left[p_1(x), \ p_1(x)(1 - p_2(x))\right] = p_1(x) \cdot (1 - p_2(x))$$

Тогда, $\underline{v} = \max\limits_{0 \le x \le d_0} p_1(x)(1 - p_2(x))$

Аналогично, $\overline{v} = p_1(d^*)$ (показать)

$d^*: \; p_1(d) = 1 - p_2(d)$

Покажем: $\underline{v} < \overline{v}$



т.е. нет седлов. т. в чист. стратегиях

<u>Пример</u>:

$d_0 = 1$

$p_1(d) = p_2(d) = 1 - d$

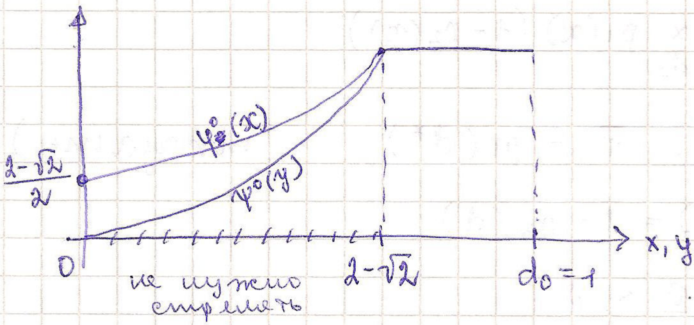
бесшумная дуэль

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - x, & x \ge y \\ (1-x)\cdot y, & x < y \end{cases}$$

Ответ: $v = \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$

$$\varphi^0(x) = \begin{cases} \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{1}{(x-1)^2} + 1\right), & 0 \le x < 2-\sqrt{2} \\ 1, & 2-\sqrt{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\psi^0(y) = \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\left(\frac{1}{(y-1)^2} - 1\right), & 0 \le y < 2-\sqrt{2} \\ 1, & 2-\sqrt{2} \le y \le 1 \end{cases}$$



смешанные стратегии

Можно док-ть: (φ^0, ψ^0, v) - удовл. усл. (*)

т.е. $F(x, \psi^0) \le v \le F(\varphi^0, y), \quad \forall x, y$

§8. ~~Антаг~~ Многошаговые антагонистические игры с полной информацией

T шагов, $t = 1 \dots T$

на $\forall$ шаге игроки выбир. значение контролируем. факторов x_t, y_t

значение x_t (y_t) – альтернатива

1 шаг: $x_1 \in U_1$, $y_1 \in V_1(x_1) = V_1(\cdot)$

„y_1" знает x_1

$(t-1)$ шагов: $x_1, \dots, x_{t-1}$; $y_1, \dots, y_{t-1}$

пусть, $\bar{x}_t = (x_1, \dots, x_t)$

$\bar{y}_t = (y_1, \dots, y_t)$

t шаг: $x_t \in U_t(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1}) = U_t(\cdot)$

$y_t \in V_t(\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1}) = V_t(\cdot)$

T шаг: $(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$ – партия игры

$F(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$ – опр. $\forall$ набора

выигрыш 1 игрока

Пример:

n спичек

2 игрока

можно взять 1 или 2 спички

кто берет посл. – проигрыв.

если $n = 1$, то 1 проигр. $-$

$n = 2$, то 1 выигр. $+$

$n = 3$, то 1 выигр. $+$

$n = 4$, то 1 проигр. $-$

$n = 5$, то 1 выигр. $+$

...

$n = 3k+1 \Rightarrow$ 1 проигрыш.

~

рассм. t шаг:

$x_t = \tilde{x}_t(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1})$, $\tilde{x}_t \in \tilde{U}_t$

$\tilde{x} = (\tilde{x}_t, t = 1, \dots, T)$ – стратегия 1 игр.

$\in \tilde{X} = \prod_{t=1}^{T} \tilde{U}_t$

$t = 1$, $\tilde{x}_1 = x_1$

$y_t = \tilde{y}_t(\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1})$, $\tilde{y}_t \in \tilde{V}_t$

$\tilde{y} = (\tilde{y}_t, t = 1, \dots, T)$ – стратегия 2 игр.

$\in \tilde{Y} = \prod_{t=1}^{T} \tilde{V}_t$

Определим:

$F(\tilde{x}, \tilde{y})$

$(\tilde{x}, \tilde{y}) \to (\bar{x}_T, \bar{y}_T)$ ← покажем

$\tilde{x}_1 = x_1$, $y_1 = \tilde{y}_1(x_1)$

$x_2 = \tilde{x}_2(x_1, y_1)$ ...

$F(\tilde{x}, \tilde{y}) = F(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$

$\Gamma = \langle \tilde X, \tilde Y, F(\tilde x, \tilde y) \rangle$ – многошаг. игра с полн. инф.

Будем рассм.:

Γ': $U_t(\cdot)$, $V_t(\cdot)$ – конечные мн-ва

Γ'': $U_t(\cdot) \equiv U_t$ – компакт

$V_t(\cdot) \equiv V_t$

$F(\bar x_T, \bar y_T)$ – непр. на $\left(\prod_{t=1}^{T} U_t\right) \times \left(\prod_{t=1}^{T} V_t\right)$

$\tilde x^0 = (\tilde x^0_t,\ t = 1, \dots, T)$

$\tilde y^0 = (\tilde y^0_t,\ t = 1, \dots, T)$

определим

исп. метод динамич. программир., т.е. эти ф-ии опр. в обратн. порядке $\tilde y^0_T, \tilde x^0_T, \tilde y^0_{T-1}, \dots$

Опр. $\tilde y^0_T$: $\tilde y^0_T(\tilde x_T, \tilde y_{T-1}) \overset{\text{обозн.}}{=} y^0_T$

y^0_T: $F(\underbrace{\bar x_T, \bar y_{T-1}}_{\text{изв.}}, y^0_T) = \min\limits_{y_T \in V_T(\cdot)} F(\underbrace{\bar x_T, \bar y_{T-1}}_{\text{изв.}}, y_T) =$

(ф-ия Беллмана) $= F(\bar x_T, \bar y_{T-1})$

опр. $\tilde x^0_T$: $\tilde x^0_T(\bar x_{T-1}, \bar y_{T-1}) \overset{\text{обозн.}}{=} x^0_T$

$F(\bar x_{T-1}, x^0_T, \bar y_{T-1}) = \max\limits_{x_T \in U_T(\cdot)} F(\bar x_{T-1}, x_T, \bar y_{T-1}) =$

$= F(\bar x_{T-1}, \bar y_{T-1})$

уже опр. $\tilde y^0_T, \tilde x^0_T, \tilde y^0_{T-1}, \dots, \tilde y^0_{t+1}, \tilde x^0_{t+1}$

$F(\bar x_t, \bar y_t)$

опр. $\tilde{y}^\circ_t$, $\tilde{x}^\circ_t$: те же ф-лы $t \leftrightarrow T$

опр. $\tilde{x}^\circ_1 = x^\circ_1 : \; F(x^\circ_1) = \max\limits_{x_1 \in U_1} F(x_1)$

↑ корректно и для Γ', и для Γ''
(т.е. max, min достиг.) ↑ т.к. мн-ва конечн. ↑ т.к. Т1.2

опр. $\underbrace{\tilde{v}}_{} = \max\limits_{x_1 \in U_1} F(x_1) = \max\limits_{x_1 \in U_1} \min\limits_{y_1 \in V_1(\cdot)} F(x_1, y_1) =$

$= \ldots = \max\limits_{x_1 \in U_1} \min\limits_{y_1 \in V_1(\cdot)} \ldots \max\limits_{x_T \in U_T(\cdot)} \min\limits_{y_T \in V_T(\cdot)} F(\overline{x}_T, \overline{y}_T)$

Теорема 1.16. (Цермело)
$\forall$ многош. игра с полн. инф. Γ' имеет реш. вида: $(\tilde{x}^\circ, \tilde{y}^\circ, \tilde{v})$

Док-во:

1) т.е. покажем: $(\tilde{x}^\circ, \tilde{y}^\circ)$ - седл. т. $F(\tilde{x}, \tilde{y})$ на $\tilde{X} \times \tilde{Y}$

т.е. $F(\tilde{x}^\circ, \tilde{y}) \geq \tilde{v}, \; \forall \tilde{y} \in \tilde{Y}$ - I н-во

$F(\tilde{x}, \tilde{y}^\circ) \leq \tilde{v}, \; \forall \tilde{x} \in \tilde{X}$ - II н-во

2) док-ем I неравенство:

рассм. $\forall \tilde{y} \in \tilde{Y}$

$F(\tilde{x}^\circ, \tilde{y}) = F(\underbrace{\tilde{x}^\circ, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{T-1}}_{}, \tilde{y}_T) \geq$

$\geq \min\limits_{y_T \in V_T(\cdot)} F(\tilde{x}^\circ_T, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{T-1}, y_T) \overset{\text{по опр. ф-ии Беллмана}}{=}$

$= F(\tilde{x}^\circ_T, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{T-1}) =$

$= F(\underbrace{\tilde{x}^\circ_1, \ldots, \tilde{x}^\circ_{T-1}}_{}, \tilde{x}^\circ_T, \underbrace{\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{T-1}}_{}) \overset{\tilde{x}^\circ_T}{=}$

$$= \max_{x_T \in U_T(\cdot)} F(\tilde{x}_1^0, \ldots, \tilde{x}_{T-1}^0, x_T, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{T-1}) =$$

$$= \{\text{ф-ия Беллмана}\} = F(\tilde{x}_1^0, \ldots, \tilde{x}_{T-1}^0, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{T-1}) \geq$$

$$\geq \ldots \geq F(\tilde{x}_1^0, \tilde{y}_1) \geq \min_{y_1 \in V_1(\cdot)} F(\tilde{x}_1^0, y_1) =$$

$$= F(\tilde{x}_1^0) \overset{\tilde{x}_1^0}{=} \max_{x_1 \in U_1} F(x_1) = \tilde{v}$$

3) II н-во – аналогично

Т-ма док-на.

<u>Пример</u>:

1) шахматы
это игра Г'

белые – 1 игр.
черные – 2 игрок

$U_t(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1})$ – мн-во всех разреш. ходов в этой позиции

$$F(\bar{x}_T, \bar{y}_T) = \begin{cases} 1, & \text{белые выигр.} \\ 1/2, & \text{ничья} \\ 0, & \text{белые проигр.} \end{cases}$$

2. [на к/р – !]

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1 – max
2 – min

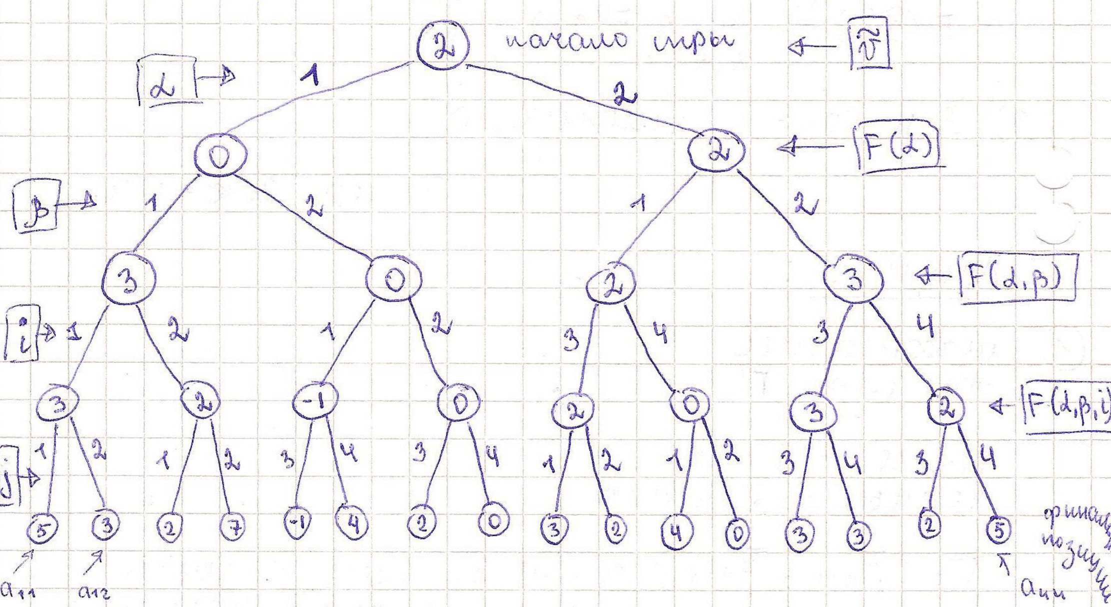
M_α : $M_1 = \{1, 2\}$, $M_2 = \{3, 4\}$ – разб. строк

N_β : $N_1 = \{1, 2\}$, $N_2 = \{3, 4\}$ – разб. столбцов

шаг 1: 1 игр. выбир. $\alpha \in \{1, 2\}$
2 игр. выбир. $\beta \in \{1, 2\}$, изв. α

шаг 2: 1 игр. выбир. $i \in M_\alpha$
2 игр. выбир. $j \in N_\beta$, изв. i

$F(\alpha, \beta, i, j) = a_{ij}$ – выигр. 1 игрока



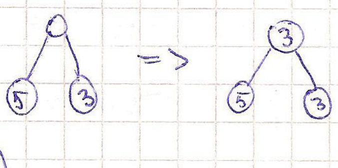
$F(\alpha, \beta, i, j) = a_{ij}$ – посл. уровень ← ф-ии Беллмана

$$F(\alpha, \beta, i) = \min_{j \in N_\beta} a_{ij}$$

$$F(\alpha, \beta) = \max_{i \in M_\alpha} F(\alpha, \beta, i)$$

$$F(\alpha) = \min_{\beta = 1,2} F(\alpha, \beta)$$

$$\tilde{v} = \max_{\alpha = 1,2} F(\alpha)$$



min и т.д.

$F(\alpha, \beta, i)$ находим и т.д.

Таким образом, нашли $\boxed{\tilde{v} = 2}$,

Постр. оптим. страт.:

α^0, $\tilde{i}^0(\alpha, \beta)$ – опр.

опт. стр. 1 игр.
$$\begin{cases} \alpha^0: \ \max F(\alpha), \text{ т.е. } \alpha^0 = 2 \ (\text{см. дерево}) \\ \tilde{i}^0(2,1) = 3, \text{ ч.б. выбрать } 2 \\ \tilde{i}^0(2,2) = 3, \text{ ч.б. выбрать } 3 \\ \qquad\quad = 4, \text{ ч.б. выбрать } 2 \ (\text{можно}) \end{cases}$$

$\tilde{\beta}^0(\alpha)$, $\tilde{j}^0(\alpha, \beta, i)$ – опр.

опт. стр. 2 игр.
$$\begin{cases} \tilde{\beta}^0(1) = 2, \text{ ч.б. выбрать } 0 \\ \tilde{\beta}^0(2) = 1, \text{ ч.б. выбрать } 2 \\ \tilde{j}^0(1, \overset{\beta(1)}{2}, 1) = 3, \text{ ч.б. } -1 \\ \tilde{j}^0(1,2,2) = 4, \text{ ч.б. } 0 \\ \qquad\qquad = 3, \text{ ч.б. } 2 \ (\text{можно}) \\ \tilde{j}^0(2, \overset{\beta(2)}{1}, 3) = 2, \text{ ч.б. } 2 \\ \tilde{j}^0(2,1,4) = 2, \text{ ч.б. } 0 \end{cases}$$

<u>Упр.</u> Та же м. А
шаг 1: 2 выбир. β
1 выбир. α, изв. β
шаг 2: 2 выбир. $j \in N_\beta$
1 выбир. $i \in M_\alpha$, изв. j

Опр. значение игры и выписать все оптим. страт.

(3). $F(x, y) = -(x-y)^2$

$X = [0, 1]$, $Y = [0, 1]$

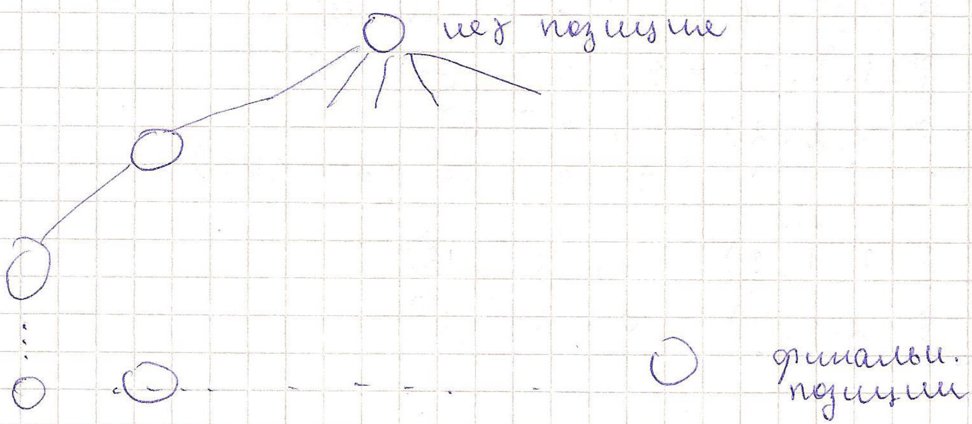
<u>шаг 1</u>: 1 выбир. $x \in X$
2 выбир. $y \in Y$, изв. x

Опр. значение игры и выписать опт. страт.

$v = \underline{v}$, x^0, $y(x)$
min-ий y на $\forall x$

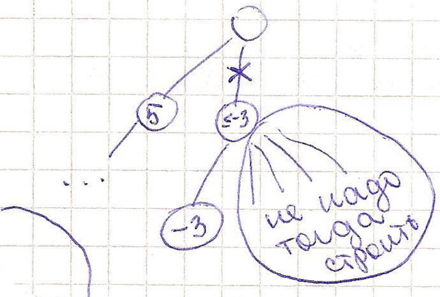
~

Программирование шахмат:



дерево строится не все сразу, а постепенно

исп. нач сокращения вычислений



α-отсечение β

Глава II. Неантагонистические игры

$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle$ – ант. игра

1) интересы 2 необяз. противопол. интересам 1

2) не 2 игрока, а много

Пусть, $\Gamma = \langle X, Y, F(x,y), G(x,y) \rangle$

$$\begin{cases} x \in X \\ y \in Y \\ 1 - \max F \\ 2 - \max G \end{cases}$$

выбор независим

← неант. игра

случай $F \equiv -G$ – ант. игра

(x, y) – ситуация

Опр. (x^0, y^0) – ситуация равновесие (равновесие по Нэшу), если вып.

$$\begin{cases} F(x, y^0) \le F(x^0, y^0), \ \forall x \in X \\ G(x^0, y) \le G(x^0, y^0), \ \forall y \in Y \end{cases}$$

Опр. игра Γ – биматричная, если $X = \{1, \dots, m\}$, $Y = \{1, \dots, n\}$

$i \in X$, $j \in Y$

$F(i,j) = a_{ij}$
$G(i,j) = b_{ij}$

↓

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ – выигр. 1 игр.

$B = (b_{ij})_{m \times n}$ – выигр. 2 игр.

1 - выб. строку
2 - выб. столбец

<u>Опр.</u> (i^0, j^0) - <u>равнов. по Нэшу</u>, если

$$\begin{cases} a_{ij^0} \le a_{i^0j^0}, & i = 1, \dots, m \\ b_{i^0j} \le b_{i^0j^0}, & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c c} & j^0 \\ i^0 & \begin{pmatrix} \cdots & a_{i^0j^0} & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c c} & j^0 \\ i_0 & \begin{pmatrix} \cdots & b_{i^0j^0} & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

max в столбце — min в строке

<u>Недостатки</u> ситуации равновесия:

① „<u>Семейный спор</u>"

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{Ф} & \text{Т} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Ф} \\ \text{Т} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{Ф} & \text{Т} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Ф} \\ \text{Т} \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2 альтернативы: футбол и театр

$(1, 1) \leftrightarrow (\text{Ф}, \text{Ф})$ ситуации
$(2, 2) \leftrightarrow (\text{Т}, \text{Т})$ равновесия

② „<u>Дилемма заключенных</u>"

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{нет} & \text{да} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{нет} \\ \text{да} \end{array} & \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{нет} & \text{да} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{нет} \\ \text{да} \end{array} & \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -10 & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

2 альтерн.: не признаваться и признаться

$(2, 2)$ - ситуация равнов.

для игроков лучше $(1, 1)$

08.10

Опр. (x^*, y^*) – <u>оптим. по Парето</u>, если
$\nexists (x,y): \begin{cases} F(x,y) \geq F(x^*,y^*) \\ G(x,y) \geq G(x^*,y^*) \end{cases}$ хотя бы 1 н-во вып. как строгое

В ант. играх $\forall$ ситуация равнов. явл. оптим. по Парето.

③.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Покажем, что $\exists!$ ситуац. равнов. $(1,1)$
[см. стрелочки]

$$W_1(1) = 0 = \min_{1 \leq j \leq 3} a_{1j}$$

$$W_1(2) = \min_{1 \leq j \leq 3} a_{2j} = 2$$

2 стратегия – maxmin (для 1 игр.)

аналогично, 2 страт. – maxmin (для 2 игр.)

Равнов. – $(1,1)$
по maxmin – $(2,2)$

Пусть, $s \geq 2$

$I = \{1, \dots, s\}$ – мн-во игроков

Рассм. k-ого игрока

$k \in I$, стратегии $x_k \in X_k$

$x = (x_1, \dots, x_s)$ – ситуация (набор стратегий)

$X = \times \prod_{k=1}^{s} X_k$

Ф-ия выигрыша для k-ого игрока:

$F_k(x) \longrightarrow max$

$\Gamma = < X_k, F_k(x), k \in I >$ – игра s лиц

(игроки выбир. св. стратегии независимо – игра в норм. форме)

$x \in X$

y_k – нез. страт. k-ого игрока

$\underbrace{x \| y_k}_{} = (x_1, \dots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \dots, x_s)$

т.е. $x_k \to y_k$

нов. ситуация

Опр. ситуация $x^0 \in X$ – сит. равновесие (равнов. по Нэшу), если вып.

$$F_k(x^0) = \max_{x_k \in X_k} F_k(x^0 \| x_k), \quad k = 1, \dots, s$$

т.е. x_k^0 – максим. по x_k эту ф-ию

Можно записать: $F_k(x^0 \| x_k) \leq F_k(x^0)$

$\forall x_k \in X_k, \quad k = 1, \dots, s$

Когда $\exists$ ситуация равновесия?

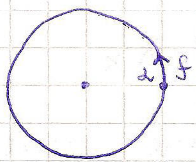
Вспомним Т1.3 $\Rightarrow$ $\approx$ обобщим.

<u>Теорема</u> (Брауэра о неподв. т.)
Пусть, X - вып. компакт евкл. пр-ва, задано отобр. $f: X \to X$ - непр.
Тогда, $\exists\, x^0 \in X : f(x^0) = x^0$.

без док-ва

<u>Упр.</u> Док-ть для случая $X = [a, b]$

X - вып.: если отказаться, то



X - окружность

f - поворот окр. на угол α

$\Downarrow$

не будет неподв. точки

Придумать контрпримеры:

1. $X = (0; 1]$
2. $X = [0; +\infty)$
3. $X = [0, 1]$, f - разрывна

Теорема 2.1.
Пусть, в игре Г множ-ли вып.:
X_k, $k = 1 \dots S$ — вып. комп. евкл. пр-в
Пусть, $F_k(x)$ — непр. на X
↘ вогнут. по x_k при фикс. ост.
$\cap_{x_k}$ перем.
Тогда, в игре Г $\exists$ ситуация равновесия.

Док-во:

I). Пусть, $F_k(x)$ — строго вогн. по x_k

1) $\max\limits_{x_k \in X_k} F_k(x \| x_k) = F_k(x \| f_k(x_l, l \neq k))$

$f_k(x_l, l \neq k) \in X_k$

$\Downarrow$

ф-ия f_k — ф-ия наилучш. ответа для $\forall$ игрока

$f_k : \prod\limits_{l \neq k} X_k \to X_k$

Т1.2. $\Rightarrow f_k$ — непр.

2) $X = \times \prod\limits_{k=1}^{S} X_k$

Построим отобр. $X \to X$:

$\forall x \in X \quad f(x) = (f_k(x_l, l \neq k), k = 1, \dots, S)$

$\exists x^0 \in X : f(x^0) = x^0$

$\Downarrow$ $f_k(x_l^0, l \neq k) = x_k^0$, $\forall k = 1, \dots, S$

$\uparrow$ x_k^0 — лучш. ответ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x^0$ — ситуация равнов.

док-ли в частн. случае.

II) Пусть, $F_k(x)$ - вогн. по x_k (общ. случай)

1) Рассм. $F_k^\varepsilon(x) = F_k(x) - \varepsilon|x_k|^2$, $\varepsilon > 0$

строго вогн. по x_k

(т.к. $|x_k|^2$ - строго вогн.)

$\Downarrow$ $\exists\, x^\varepsilon$ - ситуация равнов. $F_k^\varepsilon(x)$

2) Рассм. п-ть $\{\varepsilon_h\}$, $\varepsilon_h \to 0+$

$\Downarrow$ $\{x^{\varepsilon_h}\}$, $x^{\varepsilon_h} \in X$ - компакт $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ можно выдел. сход. п-ть

запишем $x^{\varepsilon_h} \to x^0$, $h \to \infty$

3) Ситуация равнов. $\Rightarrow$

$$F_k^{\varepsilon_h}(x^{\varepsilon_h} \| x_k) \le F_k^{\varepsilon_h}(x^{\varepsilon_h}), \quad \forall x_k \in X_k, \; k = 1 \dots S$$

Фикс. x_k, k

$\Downarrow$ $h \to \infty$

$$F_k(x^0 \| x_k) \le F_k(x^0), \quad \forall x_k \in X_k, \; k = 1 \dots S$$

$\Downarrow$

x^0 - ситуация равнов.

Т-ма док-на.

Метод поиска ситуац. равновесие с помощью мн-в наилучш. ответов:

к игрок
фикс. $\forall x_l,\ l \neq k$

$X_k(x_l,\ l \neq k) = \operatorname{Arg}\max\limits_{x_k \in X_k} F_k(x)$ – мн-во наил. ответов

x^0 – сит. равнов., если
$x_k^0 \in X_k(x_l^0,\ l \neq k)$, $k = 1, \ldots, S$
↑ система включений (?)

если $X_k(x_l^*,\ l \neq k) = \{f_k(x_l,\ l \neq k)\}$,
то получ. сист. ур-ий вида:
$f_k(x_l^0,\ l \neq k) = x_k^0$, $k = 1 \ldots S$

Пример:

1. (к|р) (!)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 5 & 4 \\ -3 & 6 & 6 & 2 \\ 8 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Постр. мн-ва наил. ответов.

$X(j)$ – для 1 игрока

$X(1) = \{1, 2\}$ – в $\forall$ столбце max эл-т
...

Аналогично, для 2 игрока: $Y(i)$
в $\forall$ строке max эл-т
$Y(1) = \{1, 4\}$

Сит. равнов.: (i^0, j^0), $i^0 \in X(j^0)$
$j^0 \in Y(i^0)$

Смотрим „общие кружочки" $\Rightarrow$

сит. равнов. $(1,1)$, $(3,3)$

(2). (к/р) !

$$\begin{cases} F(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 + 2xy - 5y^2 + 3x \\ G(x,y) = x^2 + 4xy - y^2 - y \end{cases}$$

$X = [-1; 2]$, $Y = [-2, 1]$

F - вогн. по x (строго) $F_{xx} < 0$
G - вогн. по y (строго) $\Rightarrow G_{yy} < 0$

$\Downarrow$ $\exists$ сит. равнов.

строг. вогн. $\Rightarrow$ мн-во наил. ответов — ед. эл-т

$x(y)$: $\max\limits_{-1 \le x \le 2} F(x,y) = F(x(y), y)$

$y(x)$: $\max\limits_{-2 \le y \le 1} G(x,y) = G(x, y(x))$

$\Downarrow$

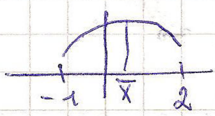
$$\begin{cases} x(y) = x \\ y(x) = y \end{cases} \rightarrow (x^0, y^0)$$

Построим $x(y)$:

$F'_x = -x + 2y + 3 = 0$ (т.к. ф-ция вогн.)

$\Downarrow$ $\bar{x} = 2y + 3$

при каких y $\bar{x} \in [-1, 2]$



$\Downarrow$

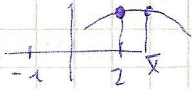
$-1 \le \bar{x} = 2y + 3 \le 2$

$\Downarrow$

$-2 \le y \le -\frac{1}{2}$

$$x(y) = \begin{cases} 2y+3, & -2 \le y \le -\frac{1}{2} \\ 2, & -\frac{1}{2} < y \le 1 \end{cases}$$

ф-ие наил. ответа для 1 игр.



Построим $y(x)$:

$$G'_y = 4x - 2y - 1 = 0$$

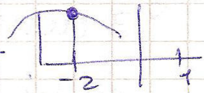
$$\Downarrow \quad \bar{y} = \frac{4x-1}{2}$$

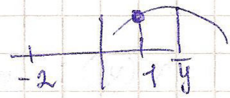
$$\Downarrow \quad -2 \le \bar{y} = \frac{4x-1}{2} \le 1$$

$$\Downarrow \quad -\frac{3}{4} \le x \le \frac{3}{4}$$

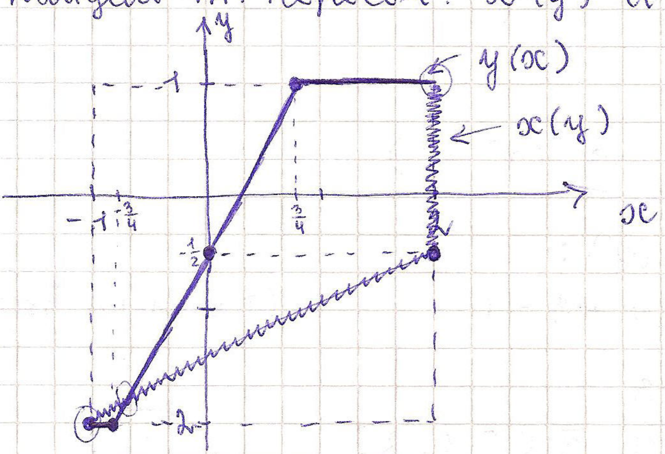
$$y(x) = \begin{cases} -2, & -1 \le x \le -\frac{3}{4} \\ \frac{4x-1}{2}, & -\frac{3}{4} \le x \le \frac{3}{4} \\ 1, & \frac{3}{4} \le x \le 2 \end{cases}$$

ф-ие наил. ответов 2 игр.





Найдем т. пересеч. $x(y)$ и $y(x)$:



$$(x^0, y^0) = (-1, -2),\ (2, 1),\ \left(-\frac{2}{3}, -\frac{11}{6}\right)$$

ситуации равновесия

$$\begin{cases} x = 2y+3 \\ 2y = 4x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = -\frac{11}{6} \end{cases}$$

Ситуации равновесия в смеш. стратегиях биматричн. игры:

$$\Gamma : \begin{cases} A = (a_{ij})_{m\times n} \\ B = (b_{ij})_{m\times n} \end{cases}$$

Если $B = -A$, то антаг. игра, $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ может не быть седл. т. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ может не быть сит. равнов. в чист. стратегиях

1 игрок: $p = (p_1, \dots, p_m) \in P$

2 игрок: $q = (q_1, \dots, q_n) \in Q$

Выигрыш игроков - ожид. выигр.:

$$A(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j$$

$$B(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i b_{ij} q_j$$

$\overline{\Gamma} = \langle P, Q, A(p,q), B(p,q) \rangle$ - смешанное расширение

(p^0, q^0) - сит. равнов. игры $\overline{\Gamma}$ - это сит. равнов. в смеш. страт. игры Γ

Опр. $A(p, q^0) \le A(p^0, q^0)$, $\forall p \in P$
$B(p^0, q) \le B(p^0, q^0)$, $\forall q \in Q$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ (p^0, q^0) - сит. равнов. в смеш. страт.

Т2.1 $\Rightarrow$ $\exists$ сит. равнов. в $\overline{\Gamma}$, т.к. усл. Т2.1.

$$\begin{cases} P, Q \text{ - вып. комп. евкл. пр-в} \\ A(p,q) \text{ - лин. по } p \Rightarrow \text{вогн. по } p \\ B(p,q) \text{ - лин. по } q \Rightarrow \text{вогн. по } q \end{cases}$$

Свойства:

Лемма 1. (p^0, q^0) – сит. равнов. в смеш. страт. биматр. игры $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(i, q^0) \le A(p^0, q^0), & i = 1 \dots m \\ B(p^0, j) \le B(p^0, q^0), & j = 1 \dots n \end{cases} \quad (*)$$

(ср. с Т1.6')

Док-во:

1) $\Rightarrow$ (p^0, q^0) – с.р. в смеш. страт.

$p = (0, \dots, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0) \Rightarrow 1$ н-ва — очевидно

2) $\Leftarrow$ (p^0, q^0) – вып. $(*)$

1 н-во: $A(i, q^0) \le A(p^0, q^0)$, $i = 1 \dots m$

Рассм. $\forall p \in P$

$p_i A(i, q^0) \le p_i A(p^0, q^0)$

$\Downarrow \sum_i$

$A(p, q^0) \le A(p^0, q^0)$, $\forall p \in P$

Аналогично для q

Лемма док-на.

Теорема 2.2 (св-во доп. нежесткости)

(p^0, q^0) – с.р. в см. стр. $\Rightarrow$

1) $p_i^0 > 0 \Rightarrow A(i, q^0) = A(p^0, q^0)$

2) $q_j^0 > 0 \Rightarrow B(p^0, j) = B(p^0, q^0)$

ср. с Т1.8'

Док-во:

1) Пусть, $\exists i_1 : p_{i_1}^0 > 0$ и $A(i_1, q^0) < A(p^0, q^0)$ $| \times p_{i_1}^0$

$\forall i \ne i_1 \overset{(*)}{\Rightarrow} A(i, q^0) \le A(p^0, q^0)$ $| \times p_i^0$ $\oplus$

$\Downarrow$

$$\Downarrow$$

$$\oplus\begin{cases} p^0_{i_1} A(i_1, q^0) < A(p^0, q^0)\, p^0_{i_1} \\ p^0_i A(i, q^0) \le A(p^0, q^0)\cdot p^0_i \end{cases}$$

$\Downarrow$ $A(p^0, q^0) < A(p^0, q^0) \Rightarrow$ противор.

2) 2-ое док. аналог.

Т-ма док-на.

<u>Следствие</u>. (p^0, q^0) - с.р. в см. стр. $\Rightarrow$

1) $A(i, q_0) < A(p^0, q^0) \Rightarrow p^0_i = 0$

2) $B(p^0, j) < B(p^0, q^0) \Rightarrow q^0_j = 0$

<u>Теорема 2.3</u>

(p^0, q^0) - с.р. в см. стр., $X = \{1 \dots m\}$, $Y = \{1 \dots n\}$ - мн-ва чист. стр.

Тогда, $\exists X^0 \subset X$, $Y^0 \subset Y$; $\exists v_1, v_2$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j \in Y^0} a_{ij} q^0_j = v_1, \ \forall i \in X^0 \\ \sum\limits_{j \in Y^0} q^0_j = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in X^0} p^0_i b_{ij} = v_2, \ \forall j \in Y^0 \\ \sum\limits_{i \in X^0} p^0_i = 1 \end{cases} \quad (2)$$

(ср. с Т1.10)

$\overline{A} = (a_{ij})_{i \in X^0, j \in Y^0}$ — не обяз. (ср.) квадр. м.

$\overline{B} = (b_{ij})_{i \in X^0, j \in Y^0}$

<u>Док-во:</u>

1) Пусть, $X^0 = Sp(p^0) = \{ i \mid p^0_i > 0 \}$

$Y^0 = Sp(q^0) = \{ j \mid q^0_j > 0 \}$

$v_1 = A(p^0, q^0)$, $v_2 = B(p^0, q^0)$

Тогда справедл. (1) и (2), (т.к.)

2) $p_i^0 > 0$, $i \in X^0$ => {св-во доп. нежс.} =>

=> $A(i, q^0) = A(p^0, q^0) = v_1$ =>

$\sum_{j \in Y^0} a_{ij} q_j^0$

=> ур-е из сист. (1) ...

Т-ма док-на.

Рассм. сист. векторов:

$a^{(i)} \in E^m$, $i \in X^0$, $|X^0| \geq m+1$

<u>Опр.</u> Эта сист. вект. имеет <u>макс. аффинный ранг</u>, если вып.:

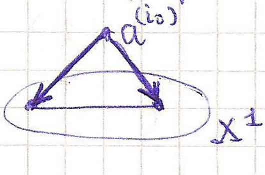
$\exists i_0 \in X^0$, $\exists X^1 \subset X^0$: $i_0 \notin X^1$, $|X^1| = m$ =>

$[a^{(i)} - a^{(i_0)}]$, $i \in X_1$ – ЛНЗ

Поясним опр. на пр.:

$m = 2$, $a^{(i)}$ – точки

∃ макс. аф. ранг : точки не лежат на 1 прямой

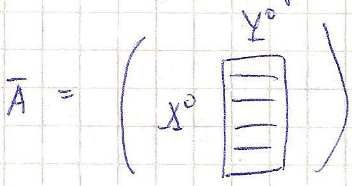


вект. – ЛНЗ

<u>Опр.</u> A находд. в <u>общ. положении</u>, если

$\forall \bar{A} = (a_{ij})_{i \in X^0, j \in Y^0}$ – подматр. м. A : $|X^0| > |Y^0|$

=> сист. строк $\bar{A}$ имеет макс. аф. ранг



Опр. В нах. в общ. положении, если вып.

$\forall \bar{B} = (b_{ij})_{i \in X^0, j \in Y^0} : |X^0| < |Y^0| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ сист. столбцов имеет макс. аф. ранг

A – в общ. полож.

A' – близка к A $\Rightarrow$ A' – в общ. полож.

Теорема 2.4.

В биматр. игре A, B – в общ. полож. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall (p^0, q^0)$ – с.р. в см. стр. верно

$\exists X^0 \subseteq X,\ Y^0 \subseteq Y,\ \exists v_1, v_2$: справ. (1) и (2)

и $|X^0| = |Y^0|$.

Док-во:

1) Рассм. $\forall$ с.р. (p^0, q^0) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ {Т2.3} справ. (1) и (2)

2) Пусть, $|X^0| > |Y^0|$

$$A = \begin{pmatrix} X^0 \left\{ \begin{array}{c} i^0 \\ \overbrace{\bar{A}}^{Y^0} \end{array} \right\} X^1 \end{pmatrix}$$ – $\bar{A}$ из (1)

Общ. полож. $\Rightarrow$ строки $\bar{A}$ имеют макс. аф. ранг $\Rightarrow$

$\Rightarrow |X^1| = |Y^0|$

$(a_{ij} - a_{i^0 j}),\ i \in X^1, j \in Y^0$ – невыр. м.

$\Downarrow$

$\sum_{j \in Y^0} (a_{ij} - a_{i^0 j}) q_j^0 = 0, \quad i \in X^1$

$|Y^0|$ ур-ий, неизв.

$\Downarrow$

$q_j^0 = 0,\ \forall j \in Y^0 \Rightarrow$ противор. 2 ур-ю из (1)

3) Аналог. для $|X^0| < |Y^0|$

Т-ма док-на.

Теорема 2.4'.

В $\forall$ биматр. игре $\exists$ с.р. в см. стр. (p^0, q^0) : !

$\exists X^0 \subseteq X$, $Y^0 \subseteq Y$, $\exists v_1, v_2$ => вып. (1), (2),

$|X^0| = |Y^0|$

Док-во:

1) $A^k \to A$, A^k - в общ. пол.

$B^k \to B$, B^k - в общ. пол. $k \to \infty$

2) Рассм. бим. игру с A^k, B^k =>

=> {Т2.4} $\exists^{(p^k, q^k)}$ $\exists X^k \subseteq X$, $Y^k \subseteq Y$, $\exists v_1^k, v_2^k$:

вып. (1) и (2) для X^k, Y^k, q^k, p^k

3) пусть, $X^k = X^0$ - подп-ть возьмем
$Y^k = Y^0$

$|X^k| = |Y^k|$

$p^k \to p^0$
$q^k \to q^0$

Тогда сист. (1) и (2)

4) Док-ем: (p^0, q^0) - с.р. в см. стр.

(*) => $A^k(i, q^k) \le A^k(p^k, q^k)$, $i = 1 \ldots m$

$B^k(p^k, j) \le B^k(p^k, q^k)$

$A^k \to A$, $p^k \to p^0$, $q^k \to p^0$

$\Downarrow$ (*) для (p^0, q^0), A, B

Т-ма док-на.

$X^0, Y^0, \quad |X^0| = |Y^0|$

$X^0 \subseteq X, \quad Y^0 \subseteq Y$

$\bar{A} = (a_{ij})_{i \in X^0,\, j \in Y^0}$ ← квадр.

$\bar{B} = (b_{ij})_{i \in X^0,\, j \in Y^0}$ ← подматр.

Решаем сист. (1) и (2)

$\underline{q_j^0}$, $j \in Y^0$, v_1 ← из (1) по A

$\underline{p_i^0}$, $i \in X^0$, v_2 ← из (2) по B

если $\exists\, p_i^0$ или $q_j^0 < 0$, то перех. к др. м.

иначе: $p^0 = (\underset{i \notin X^0}{0} \ldots, \underset{i \in X^0}{p_i^0}, 0, \ldots)$

$q^0 = (\underset{j \notin Y^0}{0} \ldots, \underset{j \in Y^0}{q_j^0}, 0 \ldots)$

проверяем (*):

$A(i, q^0) \le v_1 = A(p^0, q^0) \quad \forall i$

$A(p^0, j) \le v_2 = B(p^0, q^0) \quad \forall j$

Покажем: $v_1 = A(p^0, q^0)$

↓ i-ое ур-е $\times\, p_i^0$

$$\underbrace{\sum_{i \in X^0} \cancel{p_i} \sum_{j \in Y^0} p_i^0 a_{ij} q_j^0}_{= A(p^0, q^0)} = v_1$$

Пусть, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \end{pmatrix}$

Найти ситуации равнов. в см. стр.:

$p = (p_1, 1-p_1)$ – 2 стратегии всего

p^0 – из (2) по B

$j_1, j_2 \Rightarrow \bar{B} = \begin{array}{c} p_1 \\ 1-p_1 \end{array} \begin{pmatrix} b_{1j_1} & b_{2j_2} \\ b_{2j_1} & b_{2j_2} \end{pmatrix}$

$(2) \Rightarrow \begin{cases} p_1^0 \cdot b_{1j_1} + (1-p_1^0) b_{2j_1} = v_2 \\ p_1^0 \cdot b_{1j_2} + (1-p_1^0) b_{2j_2} = v_2 \end{cases}$ ← реш.

если $0 \le p_1^0 \le 1$, то

$B(p^0, j) \le v_2^*$, $j \ne j_1, j_2$ ← провер. (*)

⇓

$p_1 b_{1j_*} + (1-p_1) b_{2j_*} \le v_2$, $\forall j \ne j_1, j_2$

если не вып., то к др. подматр.

иначе ищем q^0:

$q^0 = (0, \dots, \underset{\uparrow j_1}{q^*}, 0, \dots, 0, \underset{\uparrow j_2}{1-q^*}, 0, \dots, 0)$

по м. $A \Rightarrow \bar{A} = \begin{array}{cc} q^* & 1-q^* \end{array}$
$\begin{pmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} \end{pmatrix}$

$(1) \Rightarrow \begin{cases} q^* a_{1j_1} + (1-q^*) a_{1j_2} = v_1 \\ q^* a_{2j_1} + (1-q^*) a_{2j_2} = v_1 \end{cases}$

↗ реш

$0 \le q^* \le 1 \Rightarrow$ нашли с.р.

график. иллюстрация:

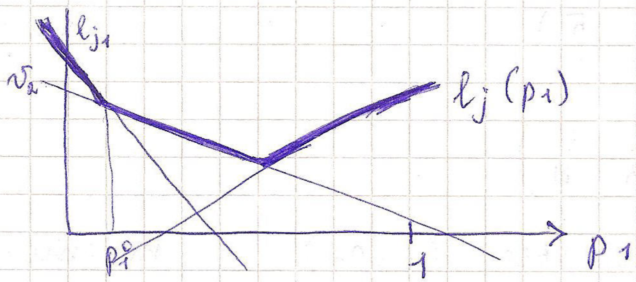
Рассм. мин. ф-цию

$$l_j(p_1) = p_1 b_{1j} + (1-p_1) b_{2j}$$

$$(2) \Rightarrow l_{j_1}(p_1^0) = l_{j_2}(p_1^0) = v_2$$

св-во доп. нежк. $\Rightarrow l_j(p_1^0) \le v_2, \; j \ne j_1, j_2$ (*)

Строим сем-во прямых



берем верхн. огибающ. и точки излома

<u>Пример</u>:

1. „<u>Семейный спор</u>"

$$A = \begin{array}{c|c} & \Phi \quad T \\ \hline \begin{array}{c}\Phi\\T\end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем реш. в смеш. стр.

для B: $2p_1^0 = 1 - p_1^0 = v_2$ (по столбц.)

$$\Downarrow \; p_1^0 = \frac{1}{3}$$

$$\Downarrow \; p^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$v_2 = \frac{2}{3}$$

для A : $\quad q_1^0 = 2(1-q_1^0) = v_1$
(по строчкам)

$\Downarrow$
$$q_1^0 = \frac{2}{3}$$
$\Downarrow$
$$q^0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$
$$v_1 = \frac{2}{3}$$

случ. п-ть Ф и Т в тех соотнош.

если Ф, Ф или Т, Т, то идут

(к|р)!

② . $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

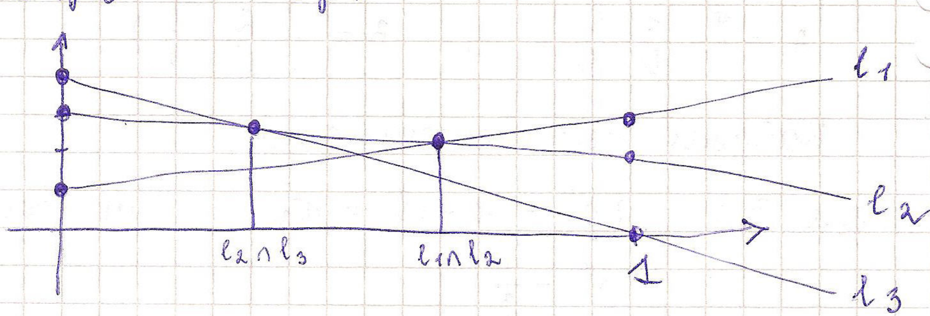
$B = \begin{array}{c} p_1 \\ 1-p_1 \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Строим прямые $l_i(p_1)$ по столбц. B

$l_1(p_1) = 3p_1 + 1 - p_1 = 1 + 2p_1$

$l_2(p_1) = 2p_1 + 3(1-p_1) = 3 - p_1$

$l_3(p_1) = 4 - 4p_1$



$\underline{l_2 \cap l_3}$: $\quad 3 - p_1 = 4 - 4p_1 = v_2$

$\Downarrow$
$$p_1^0 = \frac{1}{3} \Rightarrow p^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\text{сm. } A: \quad \begin{array}{ccc} 0 & q^* & 1-q^* \\ \left(\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}\right. & \boxed{\begin{matrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{matrix}} & \left.\right) \end{array}$$

рассм. ← по строкам

$$\begin{cases} 4q^* + 5(1-q^*) = v_1 \\ 2q^* + 1 - q^* = v_1 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$2q^* + 4(1-q^*) = 0$$

$\Downarrow$

$q^* = 2$ – за пределами => 1т. не годится

$\underline{l_1 \cap l_2}$: $1 + 2p_1 = 3 - p_1$

$\Downarrow$

$$p_1^0 = \frac{2}{3} \Rightarrow p^0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\text{сm. } A \quad \begin{array}{ccc} q^* & 1-q^* & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{matrix}} & & \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix} \end{array}$$

по строкам:

$$\begin{cases} q^* + 4(1-q^*) = v_1 \\ 3q^* + 2(1-q^*) = v_1 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$-2q^* + 2(1-q^*) = 0$$

$\Downarrow$

$$q^* = \frac{1}{2}$$

$\Downarrow$

$$q^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Ситуация равнов.

$$p^0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$q^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

15.10

3. (Алгоритм нах. не все с.р.)

$$A = \begin{array}{cc} q_1^0 & 1-q_1^0 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{array}{c} p_1 \\ 1-p_1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) для B по столбцам $\Rightarrow \begin{cases} 2p_1^0 - 3(1-p_1^0) = v_2 \\ 2p_1^0 + 4(1-p_1^0) = v_2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow -7(1-p_1^0) = 0 \Rightarrow p_1^0 = 1 \Rightarrow \underbrace{p^0 = (1, 0)}$

(1) для A по строкам $\Rightarrow \begin{cases} q_1^0 - (1-q_1^0) = v_1 \\ -2q_1^0 + 4(1-q_1^0) = v_1 \end{cases} \Rightarrow q_1^0 = \frac{5}{8} \Rightarrow \underbrace{q^0 = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)}$

если реш. $\begin{cases} q_1^0 - (1-q_1^0) = v_1 & (\text{т.к. } p_1^0 > 0) \\ -2q_1^0 + 4(1-q_1^0) \leq v_1 & \text{усл. } (*) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5(1-q_1^0) \leq 3q_1^0 \Rightarrow 1 \geq q_1^0 \geq \frac{5}{8}$

$\underbrace{p^0 = (1, 0)}$, $\underbrace{q^0 = (q_1^0, 1-q_1^0)}$, $\frac{5}{8} \leq q_1^0 \leq 1$

сит. равнов.

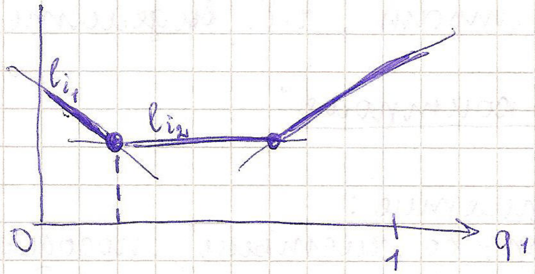
4. $m \times 2$

$$A = \begin{array}{cc} q_1 & 1-q_1 \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \vdots & \\ b_{m1} & b_{m2} \end{pmatrix}$$

$q = (q_1, 1-q_1)$, $0 \leq q_1 \leq 1$

Постр. сем-во прямых:

$l_i(q_1) = a_{i1} q_1 + a_{i2}(1-q_1)$



Верхн. огибающая

(+) точки излома

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} l_{i_1}(q_1^0) = v_1 \\ l_{i_2}(q_1^0) = v_1 \end{cases}$$

(2)e

$$p^0 = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow i_1}{p^*}, \dots, \underset{\uparrow i_2}{1-p^*}, 0 \dots 0)$$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} p^* b_{i_1 1} + (1-p^*) b_{i_2 1} = v_2 \\ b_{i_1 2} p^* + (1-p^*) b_{i_2 2} = v_2 \end{cases}$$

ср. с T1.9.

Теорема 2.5

Игра A, B. Нек. строка м. A доминируется вып. комбинацией ост. строк м. A.

Тогда эта строка входит с 0 вер. в нек. равнов. смеш. стратегию 1ого игрока.

Если строка доминир. строго, то с 0 вер. входит в $\forall$ равнов. страт. 1ого игрока.

Теорема 2.5' —"—, но про м. B и столбец, 2-ого игрока

Пример: (в чистых стр. - осторожно)

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

(1,1) - ! с.р. ! в B столбцы: $2 \geq 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ вычерк. $\Rightarrow$ нет с.р.

② . Доминир. в чист. страт., ч.б. выделить одну с.р.

„<u>Игра эколог. контроля</u>"

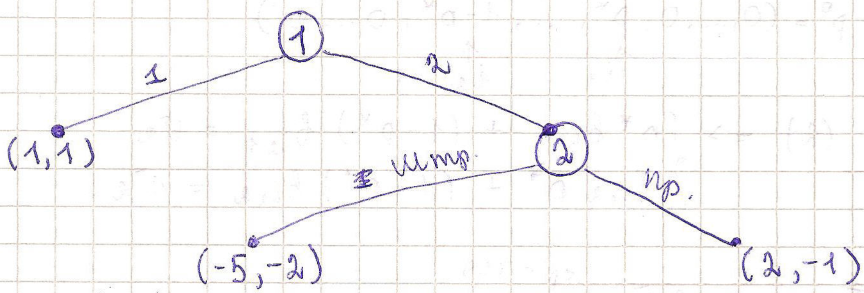
Игрок 1 – предприятие:

1 страт.: пр-во „чистым" способом
2 страт.: пр-во „грязным" способом

игра с полн. инф.

Игрок 2 – контрол. орган:

1 страт.: штрафовать шт.
2 страт: пропускать пр.



$$A = \begin{array}{c|cc} & ш & пр. \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c|cc} & ш & пр. \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{array}$$

С.р.: (1, Ш)
(2, Пр)

т. В: 2 столбец ≥ 1 столб. => 1 столб. вычерк.
т. А: аналог. 1 строка

⇓ (2, Пр) – с.р.

§10. Иерархические игры 2х лиц

$x \in X$
$y \in Y$

$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y), G(x,y) \rangle$ - игра 2х лиц в норм. форме

Считаем, что X, Y - компакты метр. пр-в
F, G - непр. на $X \times Y$

Игра Γ_1:

1 игрок - выбир. $x \in X$, сообщ. x 2ому
2 игрок - выбир. $y \in Y$, зная x

$x \xrightarrow{2} y$

(это одноходов. игра с полн. инф., $F \not\equiv -G$)

$x \in X$ - мн-во стратегий 1 игрока
$g: X \to Y$ - ~~мн-во~~ стратегия 2 игрока
$y = g(x)$
$\{g\}$ - мн-во стр. 2 игрока

(x, g): $F(x,g) \overset{def}{=} F(x, g(x))$
$G(x,g) = G(x, g(x))$

$\Gamma_1 = \langle X, \{g\}, F(x,g), G(x,g) \rangle$ - игра в норм. форме

Наилучш. гарант. результат 1ого игрока
будем это искать

x
$y \in Y(x) = \underset{y \in Y}{\mathrm{Arg\,max}}\, G(x,y)$ ← считаем

$Y(x) \neq \emptyset$, т.к. G - непр., Y - компакт
$Y(x) \subseteq Y$

Гарант. выигр. 1 игр.:

$$W(x) = \min_{y \in Y(x)} F(x, y)$$

$$F_1 = \sup_{x \in X} W(x) = \sup_{x \in X} \min_{y \in Y(x)} F(x, y)$$

Решить игру: найти F_1 и x^ε

пусть, $\varepsilon > 0$

Опр. Страт. x^ε – ε-оптим., если

$$W(x^\varepsilon) \geq F_1 - \varepsilon$$

Экономич. интерпр. Γ_1:

1 игр. – Центр → x – цена на продукцию

2 игр. – Произв. продукции →

→ y – кол-во произв. продукции

~~Опр.~~ Равновесие по Штакельбергу:

пусть, 2 игр. – благожелат. по отн. к 1 игр.

$$\Downarrow \quad W'(x) = \max_{y \in Y(x)} F(x, y)$$

$Y^*(x) = \operatorname{Arg}\max_{y \in Y(x)} F(x, y)$ – мн-во наил. ответов 2ого игрока

Опр. (x^0, y^0) – равнов. по Шт., если

$$x^0 : W'(x^0) = \max_{x \in X} W'(x) = F'$$

$$y^0 \in Y^*(x^0)$$

Существует ли $\max\limits_{x \in X}$?

Лемма. В сделан. предположениях в игре Γ_1 $\exists$ равнов. по Штакельбергу.

Док-во:

1) $F' = \sup\limits_{x \in X} W'(x)$

$\Downarrow$

рассм. п-ть $\{x^k\}$: $W'(x^k) = \max\limits_{y \in Y(x^k)} F(x^k, y)$

$\downarrow_{k \to \infty}$ F'

2) рассм. соотв. п-ть $\{y^k\}$, $y^k \in Y^*(x^k)$

3) пусть, $x^k \to x^0$ (иначе выдел. сход. подп-ти)

$y^k \to y^0$

4) Док-ем: $y^0 \in Y^*(x^0)$

$G(x^k, y^k) \geq G(x^k, y)$, $\forall y \in Y$, $\forall k = 1, 2, \ldots$

$\Downarrow$ фикс. y

$G(x^0, y^0) \geq G(x^0, y)$, $\forall y \in Y$

$\Downarrow$

$y^0 \in Y^*(x^0)$

5) $F(x^k, y^k) = W'(x^k) \to F'$, $k \to \infty$ =>

=> $\{F$ - непр.$\}$ $F' = F(x^0, y^0)$

6) Док-ем: $F(x^0, y^0) = W'(x^0)$, т.е. $y^0 \in Y^*(x^0)$

~~Пусть~~, $y^0 \in Y(x^0)$

Пусть, $y^0 \notin Y^*(x^0)$ => $\exists\, y' \in Y(x^0)$: $\underbrace{F(x^0, y')}_{= \max\limits_{y \in Y(x^0)} F(x, y)} > \underbrace{F(x^0, y^0)}_{F'}$

=> противоречие => $y^0 \in Y^*(x^0)$

Лемма док-на.

Пример:

① (к/р!)

Г: $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} \underline{7} & 4 & 3 \\ \underline{7} & \underline{7} & 3 \\ -1 & \underline{1} & \underline{1} \end{pmatrix}$

Решить $Г_1$.

$$F_1 = \max_{1 \le i \le 3} \min_{j \in Y(i)} a_{ij}, \quad Y(i) = \operatorname{Arg}\max_{1 \le j \le 3} b_{ij}$$

$$W(i) = \min_{y \in Y(i)} a_{ij}$$

$i = 1 \Rightarrow Y(1) = \{1\}$
$i = 2 \Rightarrow Y(2) = \{1, 2\}$
$i = 3 \Rightarrow Y(3) = \{2, 3\}$

$W(1) = 3$
$W(2) = 3$ $\Rightarrow$ $\boxed{i^0 = 1, 2}$ – оптим. стратегии
$W(3) = -5$ $\boxed{F_1 = 3}$

Найдем равнов. по Шт.:

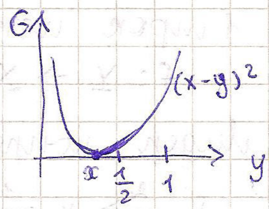
$$W'(i) = \max_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$W'(1) = 3$
$W'(2) = 4$ $\Rightarrow$ $F' = 4$
$W'(3) = 4$

Равнов. по Шт: $(i^0, j^0) = (2, 1)$
$(3, 3)$

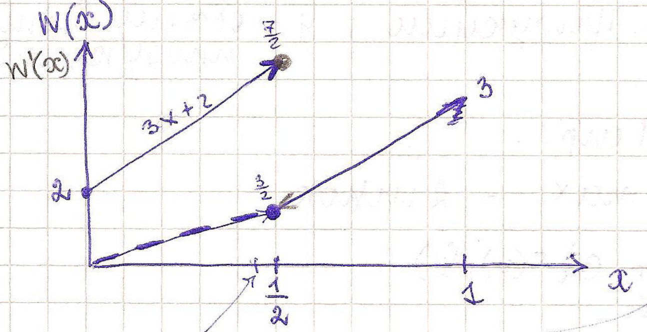
(2).

$$\begin{cases} F(x, y) = 3x + 2y \\ G(x, y) = (x - y)^2 \\ \\ X = [0, 1], \quad Y = [0, 1] \end{cases}$$



$$W(x) = \min_{y \in Y(x)} (3x + 2y)$$

$$Y(x) = \begin{cases} \{1\}, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \{0, 1\}, & x = \frac{1}{2} \\ \{0\} & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$



$F_1 = \frac{7}{2}$

sup не достиг.

$x^\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{3}$

$$\Downarrow \; W(x^\varepsilon) = 3x^\varepsilon + 2 = \frac{7}{2} - \varepsilon$$

Равнов. по Шт.:

$(x^0, y^0) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Игра Γ_2:

1 игрок - выбир. x, зная y

1 игрок исп. ф-цию ответа:

$f: Y \to X$, $x = f(y)$

Лидер по-прежнему 1 игрок:

$f \xrightarrow{2} y \xrightarrow{1} x = f(y)$

Эконом. интерпр.:

1 игр. - центр, x - размер премии

2 игр. - произв. продукции, y - объем выпуск. продукции

Гарант. выигр. 1 игр.:

$G(f(y), y) \to \max$ - 2 игрок

$Y(f) = \operatorname{Argmax}_{y \in Y} G(f(y), y)$

$y \in$

$f(y)$ - как правило, разрывная

$\Downarrow$

может $Y(f) = \varnothing$

если $Y(f) = \varnothing$, то 2 игрок выбирает $\forall y$,

т.е. нельзя предугадать его повед.

$\Downarrow$

$$\tilde{Y}(f) = \begin{cases} Y(f), & Y(f) \neq \varnothing \\ Y, & Y(f) = \varnothing \end{cases}$$

$$W(f) = \inf_{y \in \tilde{Y}(f)} F(f(y), y)$$

$F_2 = \sup_{f \in \{f\}} W(f)$ - наил. гаран. рез. 1 игр. в игре Γ_2

Опр. $\varepsilon > 0$, f^{ε} - ε-оптим. страт., если
$$W(f^{\varepsilon}) \geq F_2 - \varepsilon.$$
Если $\varepsilon = 0$, то это просто оптим. страт.

Избавимся от $\sup\limits_{f \in \{f\}} \ldots$

$X(y) = \operatorname{Arg}\max\limits_{x \in X} F(x, y)$ - мн-во наил. ответов 1игр.

$X^*(y) = \operatorname{Arg}\max\limits_{x \in X(y)} F(x, y)$ - —"—, благожел. по отнош. ко 2 игр.

Рассм. стратегию 1игр:
$\underline{f^*}$: $f^*(y) \in X^*(y)$, $\forall y \in Y$

$G(f^*(y), y)$ - достиг. $\max\limits_{y \in Y}$ (т.к. лемма 2)

$\underline{G_2} = \max\limits_{y \in Y} \min\limits_{x \in X} G(x, y)$

Опр. $f^н$ - страт. наказания, если
$$G(f^н(y), y) = \min_{x \in X} G(x, y)$$

$\underline{E} = \operatorname{Arg}\max\limits_{y \in Y} \left[\min\limits_{x \in X} G(x, y)\right]$ - все max min. страт. 2 игр., при усл. наказ.

$\underline{D} = \{(x, y) \in X \times Y \mid G(x, y) > G_2\}$

$$\underline{K} = \begin{cases} \sup\limits_{(x, y) \in D} F(x, y), & D \neq \emptyset \\ -\infty, & D = \emptyset \end{cases}$$

Если $G \equiv const$, то $D = \emptyset$

$$\boxed{M} = \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x, y)$$

<u>Теорема 2.6</u> (Гермейер)

Наил. гарант. рез. 1 игр. в игре Γ_2 при сдел. предполож.:

$$F_2 = \max[K, M]$$

(будут получ. <u>оптим.</u> страт.)

$\exists (x^0, y^0) \in D \cap \operatorname{Arg}\max_{(x,y) \in X \times Y} F(x,y)$

$\Downarrow$

$K = \max_{(x,y) \in X \times Y} F(x, y) = F_2$?

↑ абсол. максимум

<u>Док-во</u> т-мы:

I) Укажем ε-опт. страт., к. гарантирует получ. $W(f^\varepsilon) \geq \max[K, M]$

II) покажем: $\forall f \in \{f\} \Rightarrow W(f) \leq \max[K, M]$

(I). 1) $\underline{K > M} \Rightarrow$

$\Rightarrow D \neq \emptyset$

$\forall \varepsilon > 0 \quad f^\varepsilon : W(f^\varepsilon) \geq K - \varepsilon$ – надо построить

$$K = \sup_{(x,y) \in D} F(x, y)$$

рассм. $(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \in D : F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \geq K - \varepsilon$

постр. f^ε: $\boxed{f^\varepsilon(y)} = \begin{cases} x^\varepsilon, & \text{если } y = y^\varepsilon \\ f^н(y), & \text{если } y \neq y^\varepsilon \end{cases}$

Покажем: $W(f^\varepsilon) \geq K - \varepsilon$

2 игр: $f^\varepsilon(y) \to$ в G

если $y = y^\varepsilon$, то $G(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \xrightarrow{} G_2$ – выигр. 2 игр

если $y \neq y^\varepsilon$, то $G(f^н(y), y) = \min_{x \in X} G(x,y) \leq G_2$

$\Downarrow$ $\max G(f^\varepsilon(y), y)$ достиг. в $y = y^\varepsilon$

$\Downarrow$ $Y(f^\varepsilon) = \{y^\varepsilon\}$

Гар. выигр. 1 игр.:

$$W(f^\varepsilon) = \inf_{y \in Y(f^\varepsilon)} F(f^\varepsilon(y), y) = F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \geq K - \varepsilon.$$

2) $\underline{M \geq K}$

Постр. f^0: $W(f^0) \geq M$

$$\boxed{f^0} = \begin{cases} f^*(y), & \text{если } y \in E \\ f^H(y), & \text{если } y \notin E \end{cases}$$

2 игр.: $G(f^0(y), y)$

если $y \notin E$, то $\overset{\text{выигр. 2 игр.}}{G(f^H(y), y)} = \min_{x \in X} G(x, y) < G_2$

если $\underline{y \in E}$, то $G(f^*(y), y) \geq \min_{x \in X} G(x, y) = G_2$ y - max min стратег. для 2 игр.

E - комп., из л2 G достиг. max

$\Downarrow$ $Y(f^0) = \operatorname{Arg}\max_{y \in E} G(f^*(y), y) \subseteq E$

$$W(f^0) = \inf_{y \in Y(f^0)} F(f^0(y), y) \geq \inf_{y \in E} F(f^*(y), y) \geq$$

$$= \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x, y) = M$$

I док-на.

II. $\forall f$, покажем: $W(f) \leq \max[K, M]$

$$\sup_{y \in Y} G(f(y), y) \geq \max_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x, y) = G_2$$

1) $\underbrace{\sup_{y \in Y} G(f(y), y) > G_2}$

Док-ем: $\exists y^0 \in \tilde{Y}(f)$: $(f(y^0), y^0) \in D$

Если sup не достигается, то $\tilde{Y}(f) = Y \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists y^\circ$ из опр. sup : $G(f(y^\circ), y^\circ) > G_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (f(y^\circ), y^\circ) \in D$

Если sup достиг., то берем $y^\circ \in Y(f) \Rightarrow$
$\Rightarrow G(f(y^\circ), y^\circ) > G_2 \Rightarrow (f(y^\circ), y^\circ) \in D$

Тогда, $\underline{W(f)} = \inf\limits_{y \in \tilde{Y}(f)} F(f(y), y) \leq$

$$\leq F(\underbrace{f(y^\circ), y^\circ}_{\in D}) \leq K \leq \underline{\max[K, M]}$$

2) $\sup\limits_{y \in Y} G(f(y), y) = G_2$

$\forall y \in E$. Покажем: $y \in Y(f)$, т.е. $E \subseteq Y(f)$

$$G_2 = \min_{x \in X} G(x, y) \leqq G(f(y), y) \leqq$$
$$\leqq \sup_{y \in Y} G(f(y), y) = G_2$$

$\Downarrow$ sup достиг. $\forall y \in E$

$$W(f) = \inf_{y \in Y(f)} F(f(y), y) \leq \inf_{y \in E} F(f(y), y) \leq$$
$$\leq \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x, y) = M \leq \max[K, M]$$

Т-ма док-на.

(!) f^ε, f° - оптим. стратегии

Пример:

① (к/р!)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$\max\limits_{1\le i\le 3} a_{ij}$: 7, 6, ~~8~~ $\qquad$ $\min\limits_{1\le i\le 3} b_{ij}$: 4, 4, 3

$\mathcal{D}$

Решить игру Γ_2.

$$G_2 = \max_{1\le j\le 3} \min_{1\le i\le 3} b_{ij} = 4$$

$E = \{1, 2\}$

$\mathcal{D} = \{ (i,j) \mid b_{ij} > G_2 > 4 \}$ см. матрицу B

$$K = \max_{(i,j)\in\mathcal{D}} a_{ij} = 4$$

$$M = \min_{j\in E} \max_{1\le i\le 3} a_{ij} = 6 > K = 4 \Rightarrow \boxed{F_2 = 6}$$ см. матр. A

т.е. minmax для м. $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$

Выпишем оптим. страт.:

$M \ge K$ – 2) случай из т-мы

$$f^0(j) = \begin{cases} 3, & \text{если } j = 1 \in E \\ 1, & \text{если } j = 2 \in E \\ 1(2), & \text{если } j = 3 \notin E \end{cases}$$

3 строка в 1 столбце A

1 строка во 2 столб. A

min в 3 столбце B $\Rightarrow$

$^{*}\Rightarrow$ 1 или 2

Если $A = \begin{pmatrix} \cdot & -6 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ то же самое, но

$M = 3 < K = \underbrace{4 = F_2}$

Реал. F_2 в a_{33} (например): (i^0, j^0): $a_{i^0 j^0} = \max\limits_{(i,j)\in\mathcal{D}} a_{ij} \Rightarrow$

$\Rightarrow$

$$f^0(j) = \begin{cases} 3 & \text{, если } j = 3 \\ 3 & \text{, если } j = 1 \\ 1 & \text{, если } j = 2 \end{cases}$$

нашм. в 1 столбце B

нашм. во 2 столб. B

Найти $W(f^0)$:

$\Rightarrow Y(f^0) = \{3\}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} \vdots & 4 & \vdots \\ 4 & \vdots & 6 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$W(f^0) = 4$ $\qquad \max_{1 \le j \le 3} b_{f^0(j),j} \Rightarrow j = 3$

см. 1 строку опр. $f^0(j)$

$4 = a_{33}$

2. $F(x, y) = 3x + 2y$

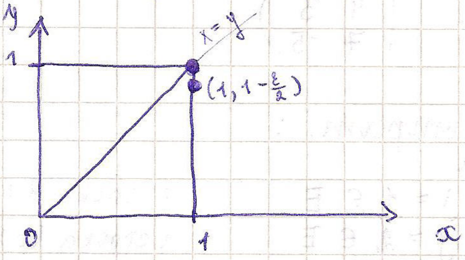
$G(x, y) = (x - y)^2$

$X = Y = [0, 1]$

Решить игру Γ_2.

$$G_2 = \max_{0 \le y \le 1} \underbrace{\min_{0 \le x \le 1} (x - y)^2}_{\text{дост. при } y = x \; = 0} = 0$$

$f^н(y) = y$ – страт. наказания



$$D = \{ (x, y) \mid \underbrace{(x - y)^2}_{= G(x,y)} > 0 = G_2 \} = \{ (x, y) \mid x \ne y \}$$

$$K = \sup_{(x,y) \in D} (3x + 2y) = 5 = F_2$$

т. к. абсол. max

$\varepsilon > 0, \quad (x^\varepsilon, y^\varepsilon) = (1, 1 - \frac{\varepsilon}{2})$

$$F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) = 3 + 2(1 - \tfrac{\varepsilon}{2}) = 5 - \varepsilon$$

$\Downarrow$

$$f^{\varepsilon}(y) = \begin{cases} 1 &, y = 1 - \varepsilon/2 \\ y &, y \neq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$ ← страт. наказ.

Игра Γ_2 – распр. в политике.