Содержание

Предисловие

Содержание предлагаемого пособия основано на материалах лекционных курсов по теории игр и математической экономике, читавшихся авторами в течение ряда лет на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова.

В отличие от изданной ранее учебной литературы основное внимание уделяется теории некооперативных игр и ее экономическим приложениям. Излагаются новые разделы теории: иерархические и статистические игры, методы поиска ситуаций равновесия, доказательство сходимости метода Брауна для матричных игр и др. Рассматриваются модели несовершенной конкуренции, задачи оптимального налогообложения и организации налоговой инспекции. Для читателей, интересующихся математическими основаниями теории игр, в приложении даны доказательства теоремы об отделяющей гиперплоскости, теоремы Хелли о пересечении выпуклых компактов евклидова пространства, теоремы Брауэра и Какутани о неподвижной точке.

Пособие может быть использовано для чтения курсов по теории игр и математической экономике студентам, обучающимся по специальностям "Прикладная математика"и "Экономическая кибернетика". Предполагается знакомство читателей с начальными курсами математического анализа, линейной алгебры и теории вероятностей. Предлагаемые в каждом параграфе примеры и упражнения способствуют активному усвоению материала и позволяют использовать пособие также для проведения семинарских занятий. Последний раздел содержит решение всех упражнений. Каждая глава снабжена библиографическим комментарием, позволяющим заинтересованному читателю более глубоко изучить соответствующую тему.

Авторы признательны всем коллегам по кафедре исследования операций за поддержку и советы, во многом определившие структуру книги и стиль ее изложения. Мы также благодарны Полине Васиной, Евгению Жиглову, Юлии Сосиной, Алексею Теплову, Елене Тыртышниковой и Кириллу Чокпарову за помощь при подготовке пособия.

§ 1. Введение

Теорией игр называется математическая теория принятия решения в конфликтных ситуациях. Поясним это определение. Простейшие модели принятия решений рассматриваются в курсах математического анализа и оптимизации. В этих моделях лицо, принимающее решения (ЛПР), выбирает свое действие из некоторого множества стратегий (например, множество планов производства в задаче линейного программирования). Задана целевая функция, которая отражает интересы ЛПР и зависит от выбранной им стратегии (например, функция прибыли, зависящая от назначенного плана производства). Задача принятия решений в этой постановке состоит, как правило, в том, чтобы найти стратегию, доставляющую максимум целевой функции.

Отличие конфликтной ситуации в том, что решение принимается не одним индивидуумом, а несколькими участниками, и функция выигрыша каждого индивидуума зависит не только от его стратегии, но также и от решений других участников. Математическая модель такого рода конфликта называется *игрой*, а участники конфликта – *игроками*.

В рамках теории игр существуют два основных направления. *Теория некооперативных игр* изучает принятие решений в предположении, что существует механизм, обеспечивающий выполнение совместно принятого решения. При этом основная проблема – указать множество взаимовыгодных решений с учетом интересов и самостоятельных возможностей отдельных игроков и *коалиций*, то есть групп совместно действующих игроков. Если это множество включает несколько вариантов решения, то возникает также задача выработки критерия оптимальности, который позволил бы найти единственное, наилучшее в некотором смысле решение. В настоящем пособии основные понятия и некоторые результаты теории кооперативных игр изложены в § 15.

Некооперативные игры отражают ситуации, в которых игроки действуют самостоятельно, независимо друг от друга, и если какие-то соглашения заключаются, то они не являются обязывающими: каждый игрок может отклониться от договоренности. Таким играм уделяется основное внимание в данном пособии.

Если игроков двое, а интересы их противоположны, то игра называется *антагонистической*. Типичными примерами антагонистических игр являются шахматы, шашки, "крестики-нолики", а также азартные игры типа "орлянки". При проведении военных операций нападающая

сторона обычно стремится нанести противнику максимальный ущерб, а противник стремится этот ущерб минимизировать. Поэтому в таких случаях военную операцию можно изучать как антагонистическую игру.

В некоторых задачах целевая функция ЛПР зависит от неопределенного фактора (например, погодных условий). Рассчитывая на "худший случай", предполагают, что этот фактор – стратегия противника, имеющего противоположные интересы. Возникает игра против "природы", также относящаяся к антагонистическим играм. Такие игры рассматриваются в первой главе.

Вторая и третья главы посвящены *неантагонистическим играм*. Экономика и социальная сфера дают многочисленные примеры таких игр. Пусть несколько фирм конкурируют на товарном рынке и заинтересованы в увеличении своих доходов. Цена на продукцию определяется спросом на товар и количеством выпущенной продукции. Теория игр предписывает фирмам-игрокам назначать выпуск продукции в таких количествах, при которых каждому отдельно взятому игроку было бы невыгодно отклоняться от предписанного объема. Соответствующий набор стратегий называют *равновесием по Нэшу*. Другим примером являются *иерархические игры*, отражающие взаимодействие между верхним и нижним звеньями управления (начальником и подчиненным, заказчиком и производителем продукции и т.п.). Здесь обычно интересуются не равновесием в игре, а *наилучшим гарантированным результатом*, который может себе обеспечить игрок-лидер, первым сообщающий свою стратегию другому игроку. Значительное внимание в указанных главах уделяется также *решениям по доминированию*.

В четвертой главе дается краткое введение в математическую экономику и рассматриваются приложения теории некооперативных игр к анализу актуальных экономических проблем. Одна из них – исследование экономических рынков в условиях несовершенной конкуренции и оценка отклонения ожидаемого состояния рынка от конкурентного равновесия. Изложенная в § 18 теорема благосостояния для однопродуктовой экономики показывает, что состояние конкурентного равновесия является оптимальным с точки зрения суммарного выигрыша всех участников. В § 19 рассматриваются модели рыночной конкуренции по Курно и Бертрану, а также аукцион функций предложения. Проводится сравнение равновесий по Нэшу и решений по доминированию с конкурентным равновесием.

В §§ 20, 21 обсуждаются модели, связанные с функционированием

налоговой системы. Рассматриваются простейшие задачи оптимального выбора налоговых ставок для финансирования бюджетного сектора, а также модели организации налоговых проверок в условиях уклонения и коррупции.

ГЛАВА I. АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

§ 2. Седловые точки и антагонистические игры

Пусть функция $F(x,y)$ определена на декартовом произведении $X \times Y$, где X, Y – множества произвольной природы.

Определение. Пара $(x^0, y^0) \in X \times Y$ называется *седловой точкой* функции $F(x,y)$ на $X \times Y$, если

$$F(x, y^0) \le F(x^0, y^0) \le F(x^0, y) \ \ \forall\, x \in X, \ \ \forall\, y \in Y \tag{2.1}$$

или, эквивалентно,

$$\max_{x \in X} F(x, y^0) = F(x^0, y^0) = \min_{y \in Y} F(x^0, y).$$

Понятие седловой точки используется в определении решения антагонистической игры.

Опишем антагонистическую игру. В ней принимают участие два игрока 1 и 2 (первый и второй). Игрок 1 выбирает стратегию x из множества стратегий X, игрок 2 выбирает стратегию y из множества стратегий Y. Нормальная форма игры подразумевает, что каждый игрок выбирает свою стратегию независимо, не зная выбора партнера. Задана *функция выигрыша* $F(x,y)$ первого игрока, определенная на $X \times Y$. Выигрыш $F(x,y)$ первого игрока является проигрышем для второго. Цель первого игрока состоит в увеличении своего выигрыша $F(x,y)$, а цель второго – в уменьшении $F(x,y)$.

Таким образом, антагонистическая игра задается набором $\Gamma = \langle X, \ Y, \ F(x,y) \rangle$. Термины "выигрыш"и "игрок"сложились исторически, когда анализировались преимущественно азартные игры. Эти термины не совсем точные. Например, если значение $F(x,y) < 0$, то "выигрыш"первого игрока является фактически его проигрышем. Кроме того, рассматривают игры, где $F(x,y)$ является не денежным выигрышем, а, скажем, вероятностью поражения цели. Игрок 2 может не быть интеллектуальным противником. Часто рассматривают игры против "природы".

Вернемся к определению седловой точки, которой можно придать следующий игровой смысл. Если игроки выбрали в качестве стратегий компоненты x^0, y^0 седловой точки, то каждому из них невыгодно отклоняться от выбранной стратегии. Поэтому седловая точка является формализацией концепции равновесия в игре.

Определение. Говорят, что антагонистическая игра Γ имеет *решение*, если функция $F(x,y)$ имеет на $X \times Y$ седловую точку. Пусть (x^0, y^0) – седловая точка функции $F(x,y)$. Тогда тройка $(x^0, y^0, v = F(x^0, y^0))$ называется решением игры, x^0, y^0 – *оптимальными* стратегиями игроков, а v – *значением* игры.

Покажем, что значение игры не зависит от выбора седловой точки.

Лемма 2.1. Если (x^0, y^0), (x^*, y^*) – две седловые точки функции $F(x,y)$ на $X \times Y$, то $F(x^0, y^0) = F(x^*, y^*)$.

Доказательство. Наряду с (2.1), выпишем аналогичные неравенства для седловой точки (x^*, y^*)

$$F(x, y^*) \le F(x^*, y^*) \le F(x^*, y) \ \ \forall\, x \in X, \ \ \forall\, y \in Y. \tag{2.2}$$

Имеем

$$F(x^*, y^*) \overset{(2.2)}{\le} F(x^*, y^0) \overset{(2.1)}{\le} F(x^0, y^0) \overset{(2.1)}{\le} F(x^0, y^*) \overset{(2.2)}{\le} F(x^*, y^*).$$

Здесь все неравенства выполнены как равенства. ■

Важнейший класс антагонистических игр образуют матричные игры.

Определение. Антагонистическая игра Γ называется *матричной*, если множества стратегий игроков конечны: $X = \{1, ..., m\}$, $Y = \{1, ..., n\}$. При этом принято обозначать стратегию первого игрока через i, стратегию второго через j, а выигрыш первого $F(i,j)$ через a_{ij}. Матрица $A = (a_{ij})_{m \times n}$ называется матрицей игры. Первый игрок выбирает в ней номер строки i, а второй – номер столбца j.

В обозначениях матричной игры (i^0, j^0) – седловая точка матрицы A, если

$$a_{ij^0} \le a_{i^0 j^0} \le a_{i^0 j}, \ \ i = 1, ...m, \ \ j = 1, ..., n.$$

Пример 2.1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Здесь (1,1) и (2,1) – две седловые точки и значение игры v равно нулю. Заметим, что $a_{12} = v$, но (1,2) не является седловой точкой матрицы.

Пример 2.2. Игра "орлянка". Первый игрок закладывает монету орлом (О) или решкой (Р), а второй пытается отгадать. Если второй игрок отгадает, то первый платит ему единицу, если не отгадает, то – наоборот.

Здесь $A = \begin{array}{c} \\ O \\ P \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} O & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$. Нетрудно видеть, что эта матрица не имеет седловой точки.

Вернемся к общему определению седловой точки и антагонистической игры. Возникают два вопроса. Когда антагонистическая игра имеет решение, т.е. когда функция $F(x,y)$ имеет седловую точку на $X \times Y$? Как искать седловые точки, если известно, что они существуют?

Рассмотрим игру Γ с точки зрения первого игрока. Пусть он выбрал стратегию x. Ясно, что его выигрыш будет не меньше, чем $\inf\limits_{y \in Y} F(x,y)$. Величину $\inf\limits_{y \in Y} F(x,y)$ назовем *гарантированным результатом (выигрышем)* для первого игрока. Наилучший гарантированный результат для первого игрока $\underline{v} = \sup\limits_{x \in X} \inf\limits_{y \in Y} F(x,y)$ называется *нижним значением* игры.

Определение. Стратегия x^0 первого игрока называется *максиминной*, если $\inf\limits_{y \in Y} F(x^0, y) = \underline{v}$.

Рассмотрим игру Γ с точки зрения второго игрока. Если он выбрал стратегию y, то для него естественно считать гарантированным результатом величину $\sup\limits_{x \in X} F(x,y)$. Проигрыш второго игрока будет не больше, чем эта величина. Наилучший гарантированный результат для второго игрока $\overline{v} = \inf\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X} F(x,y)$ называется *верхним значением* игры.

Определение. Стратегия y^0 второго игрока называется *минимаксной*, если $\sup\limits_{x \in X} F(x, y^0) = \overline{v}$.

Лемма 2.2. В любой антагонистической игре Γ справедливо неравенство $\underline{v} \le \overline{v}$.[1]

Доказательство. Возьмем произвольные стратегии игроков x и y. Тогда

$$\inf_{y \in Y} F(x,y) \le F(x,y) \le \sup_{x \in X} F(x,y) \Rightarrow \inf_{y \in Y} F(x,y) \le \sup_{x \in X} F(x,y).$$

Левая часть последнего неравенства зависит от x, а правая часть – нет.

[1] Этому неравенству можно дать следующую интерпретацию: "лучше быть плохим среди хороших, чем хорошим среди плохих".

Поэтому

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x,y) \le \sup_{x \in X} F(x,y) \ \ \forall\, y \in Y \ \ \Rightarrow \ \ \underline{v} \le \overline{v}. \ ■$$

Теперь сформулируем необходимое и достаточное условие существования седловой точки для функции двух переменных.

Теорема 2.1. 1) Для того чтобы функция $F(x,y)$ на $X \times Y$ имела седловую точку, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство

$$\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x,y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x,y). \tag{2.3}$$

2) Пусть выполнено равенство (2.3). Пара (x^0, y^0) тогда и только тогда является седловой точкой, когда x^0 – максиминная, а y^0 – минимаксная стратегии игроков.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) будем доказывать одновременно.

Необходимость. Пусть (x^0, y^0) – седловая точка функции $F(x,y)$. Покажем, что выполнено равенство (2. 3), а x^0, y^0 – максиминная и минимаксные стратегии. Имеем

$$\overline{v} \le \sup_{x \in X} F(x, y^0) = F(x^0, y^0) = v = \inf_{y \in Y} F(x^0, y) \le \underline{v} \ \ \Rightarrow \overline{v} \le \underline{v}.$$

Но неравенство $\underline{v} \le \overline{v}$ верно в силу леммы 2.2. Поэтому $\overline{v} = \underline{v}$ и в последних неравенствах всюду можно поставить знаки равенств. Из полученных равенств следует, что x^0 – максиминная, а y^0 – минимаксная стратегии игроков.

Достаточность. Пусть равенство (2.3) выполнено. Возьмем x^0, y^0 – максиминную и минимаксную стратегии и покажем, что они образуют седловую точку. Имеем

$$F(x^0, y^0) \ge \inf_{y \in Y} F(x^0, y) = \underline{v} \overset{(2.3)}{=} \overline{v} = \sup_{x \in X} F(x, y^0) \ge F(x^0, y^0).$$

Во всех неравенствах можно поставить знаки равенств и получаем, что (x^0, y^0) – седловая точка функции $F(x,y)$. ■

Замечание. Если выполнено равенство (2.3), то множество всех седловых точек прямоугольно и совпадает с $X^0 \times Y^0$, где X^0 и Y^0 – множества всех максиминных и минимаксных стратегий игроков.

Упражнение 2.1. Докажите, что 3×3-матрица не может иметь ровно 7 седловых точек.

Пример 2.3. Найдем все седловые точки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $(\min\limits_{1\le j\le 4} a_{ij}) = (-4,2,2,-3)$ и $(\max\limits_{1\le i\le 4} a_{ij}) = (7,2,7,2)$. Отсюда $\overline{v} = \underline{v} = 2$, $X^0 = \{2,3\}$, $Y^0 = \{2,4\}$. Четыре седловые точки образуют множество $X^0\times Y^0$.

Пример 2.4. Пусть $X=Y=[0,1]$, $F(x,y) = 2x^2-3xy+2y^2$. Найдем величины $\underline{v}$ и $\overline{v}$. При фиксированном x минимум по y функции $F(x,y)$ достигается в точке $y(x) = 3x/4 \in Y$. Поэтому функция минимума – $W(x) = \min\limits_{0\le y\le 1} F(x,y) = 7x^2/8$. Отсюда $\underline{v} = 7/8$ и $x^0 = 1$ – максиминная стратегия. Зафиксируем y. Максимум функции $F(x,y)$ по x достигается в концах отрезка $[0,1]$ и равен

$$M(y) \overset{def}{=} \max_{0\le x\le 1} F(x,y) = \max[F(0,y), F(1,y)] =$$

$$= \max[2y^2, 2-3y+2y^2] = \begin{cases} 2-3y+2y^2, & 0\le y\le 2/3, \\ 2y^2, & 2/3 < y \le 1. \end{cases}$$

Минимум функции $M(y)$ достигается при $y^0 = 2/3$ и $\overline{v} = M(y^0) = 8/9 > \underline{v} = 7/8$. Следовательно, функция $F(x,y)$ не имеет седловой точки.

Упражнение 2.2. Найдите максиминную и минимаксную стратегии, а также нижнее и верхнее значения игры Γ, в которой

$$X=[-2,3],\ Y=[-1,2],\ F(x,y) = -x^2+4xy-5y^2+3x-2y.$$

Иногда в выражениях

$$\underline{v} = \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} F(x,y),\quad \overline{v} = \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} F(x,y)$$

внешние sup и inf не достигаются, но

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} F(x,y) = \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} F(x,y). \tag{2.4}$$

Тогда максиминная (или минимаксная) стратегия не существует и седловой точки нет. Возможен другой случай, когда $\underline{v} < \overline{v}$, но эти величины близки. В подобных случаях используют понятие *ε-седловой точки.*

Определение. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Пара $(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \in X\times Y$ называется ε-седловой точкой функции $F(x,y)$ на $X\times Y$, если

$$F(x,y^\varepsilon) - \varepsilon \le F(x^\varepsilon,y^\varepsilon) \le F(x^\varepsilon,y) + \varepsilon\ \ \forall\, x\in X,\ \ \forall\, y\in Y.$$

Упражнение 2.3. Пусть x^0, y^0 – максиминная и минимаксная стратегии, а $\varepsilon = \overline{v} - \underline{v} > 0$. Доказать, что (x^0,y^0) – ε-седловая точка функции $F(x,y)$.

Определение. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Стратегия первого игрока x^ε называется *ε-максиминной*, если $\inf\limits_{y\in Y} F(x^\varepsilon,y) \ge \underline{v} - \varepsilon$. Стратегия второго игрока y^ε называется *ε-минимаксной*, если $\sup\limits_{x\in X} F(x,y^\varepsilon) \le \overline{v} + \varepsilon$.
Эти стратегии обеспечивают игрокам получение своих наилучших гарантированных результатов с точностью до ε. Сформулируем аналог теоремы 2.1.

Теорема 2.1$'$. 1) Для того чтобы при любом $\varepsilon > 0$ функция $F(x,y)$ на $X\times Y$ имела ε-седловую точку, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство (2.4).

2) Пусть равенство (2.4) выполнено. Тогда компоненты ε-седловой точки являются 2ε-максиминной и 2ε-минимаксной стратегиями. Обратно, ε-максиминная и ε-минимаксная стратегии образуют 2ε-седловую точку.

Упражнение 2.4. Докажите теорему 2.1$'$.

Представляют интерес условия топологического характера, при которых существуют максиминные и минимаксные стратегии.

Теорема 2.2. Пусть функция $F(x,y)$ непрерывна на $X\times Y$, где X, Y – компакты метрических пространств[1]. Положим $Y(x) \overset{def}{=} \operatorname*{Argmin}\limits_{y\in Y} F(x,y)$. Тогда

[1] Недостаточно подготовленный читатель здесь и далее может заменить выражение "компакт метрического пространства"на выражение "замкнутое ограниченное множество евклидова пространства".

1) Функция минимума $W(x) = \min\limits_{y\in Y} F(x,y)$ непрерывна на X.

2) Предположим дополнительно, что при каждом $x\in X$ множество $Y(x)$ состоит из единственного элемента $y(x)$. Тогда функция $y(x)$ непрерывна на X.

Доказательство. 1) Возьмем произвольную последовательность $\{x^k\}$ элементов из X, сходящуюся к x^0. Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} W(x^k)$ существует и равен $W(x^0)$. Предположим противное. Тогда найдется такая подпоследовательность $\{k_l\}$, что $\lim\limits_{l\to\infty} W(x^{k_l}) = A \ne W(x^0)$. Возьмем последовательность $\{y^{k_l} \in Y(x^{k_l})\}$. В силу компактности множества Y можно считать, что[2] $\lim\limits_{l\to\infty} y^{k_l} = y^0$. Покажем, что $y^0\in Y(x^0)$. Действительно, по определению y^{k_l}

$$W(x^{k_l}) = F(x^{k_l}, y^{k_l}) \le F(x^{k_l}, y)\ \ \forall\, y\in Y.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $l\to\infty$ и используя непрерывность функции $F(x,y)$, получим

$$F(x^0,y^0) \le F(x^0,y)\ \ \forall\, y\in Y\ \ \Rightarrow\ \ y^0\in Y(x^0).$$

Наконец, $A = \lim\limits_{l\to\infty} F(x^{k_l}, y^{k_l}) = F(x^0,y^0) = W(x^0)$ (противоречие).

2) Покажем, что функция $y(x)$ непрерывна на X. Предположим, что она разрывна в некоторой точке $x^0\in X$. Тогда найдется такая последовательность $\{x^k\}$ элементов из X, сходящаяся к x^0, что соответствующая последовательность $\{y(x^k)\}$ не сходится к $y(x^0)$. Поэтому существует окрестность U точки $y(x^0)$, вне которой находится бесконечное число членов последовательности $\{y(x^k)\}$. В силу компактности множества $Y\backslash U$ из этой последовательности можно выделить подпоследовательность $\{y(x^{k_l})\}\subset Y\backslash U$, сходящуюся к некоторому элементу $y'\ne y(x^0)$. Но, как и в части 1), нетрудно доказать, что $y'\in Y(x^0)$. Получили противоречие с тем, что множество $Y(x^0)$ состоит из единственного элемента. ■

Замечание. В процессе доказательства теоремы мы также установили замкнутость множества $\{(x,y)\mid x\in X,\ y\in Y(x)\}$. Отметим также, что в теореме 2.2 компактность множества Y существенна.

[2] Здесь использовано следующее свойство компакта метрического пространства: из любой последовательности элементов компакта Y можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу из Y. Считаем, что $\{y^{k_l}\}$ и есть соответствующая выделенная подпоследовательность.

Пример 2.5. Пусть

$$X=[-1,1],\ \ Y=(-\infty,+\infty),\ \ F(x,y) = (y^2+1)(xy-1)^2.$$

Здесь множество Y не является компактом, а функции

$$y(x) = \begin{cases} 1/x, & x\ne 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}\quad W(x) = \min_{y\in Y} F(x,y) = \begin{cases} 0, & x\ne 0, \\ 1, & x=0, \end{cases}$$

разрывны.

Определение. Антагонистическая игра Γ называется *непрерывной*, если X, Y – параллелепипеды евклидовых пространств, а функция $F(x,y)$ непрерывна на $X\times Y$. В частности, при $X=[a,b]$, $Y=[c,d]$ будем говорить о непрерывной игре на прямоугольнике.

Из теоремы 2.2 следует, что в непрерывной игре Γ существуют максиминные и минимаксные стратегии игроков.

Теперь займемся достаточными условиями существования седловой точки функции двух переменных. Их можно сформулировать в терминах выпуклого анализа. Напомним некоторые определения.

Определение. Множество Z евклидова пространства называется *выпуклым*, если для любых точек $z'\ne z''$ из Z и любого числа $0<\lambda<1$ точка $\lambda z' + (1-\lambda)z''$ также принадлежит множеству Z.

Определение. Функция $h(z)$, определенная на выпуклом множестве Z, называется *выпуклой*, если для любых точек $z'\ne z''$ из Z и любого числа $0<\lambda<1$ выполнено неравенство

$$h(\lambda z' + (1-\lambda)z'') \le \lambda h(z') + (1-\lambda)h(z''). \tag{2.4}$$

Если последнее неравенство выполнено как строгое, то функция $h(z)$ называется *строго выпуклой*. Если вместо неравенства $\le$ в (2.4) фигурирует неравенство $\ge$ ($>$), то функция $h(z)$ называется *вогнутой (строго вогнутой)*.

Упражнение 2.5. Докажите, что функция $\sum\limits_{i=1}^m z_i^2$ строго выпукла.

Упражнение 2.6. Докажите, что строго выпуклая непрерывная функция на выпуклом компакте[1] евклидова пространства достигает минимума в единственной точке.

[1] Замкнутом ограниченном множестве.

Теорема 2.3. Пусть $X\subset E^m$ и $Y\subset E^n$ – выпуклые компакты евклидовых пространств, а функция $F(x,y)$ непрерывна на $X\times Y$. Предположим, что при любом $y\in Y$ функция $F(x,y)$ вогнута по x и при любом $x\in X$ она выпукла по y. Тогда функция $F(x,y)$ имеет на $X\times Y$ седловую точку.

Доказательство. Вначале докажем существование седловой точки в случае, когда функция $F(x,y)$ строго выпукла по y. Тогда для всякого $x\in X$ функция $F(x,y)$ достигает минимума на Y в единственной точке $y(x)$. По теореме 2.2 функции $W(x) = \min\limits_{y\in Y} F(x,y)$ и $y(x)$ непрерывны на X. Возьмем точку x^*, максимизирующую функцию $W(x)$ на X, и докажем, что пара $(x^*, y(x^*))$ является седловой точкой функции $F(x,y)$. Для любых x и $0<t<1$ положим $\tilde{y} = y((1-t)x^*+tx)$. В силу вогнутости по x функции $F(x,y)$ имеем

$$W(x^*) \ge W((1-t)x^*+tx) = F((1-t)x^*+tx, \tilde{y}) \ge$$

$$\ge (1-t)F(x^*,\tilde{y}) + tF(x,\tilde{y}) \ge (1-t)W(x^*) + tF(x,\tilde{y}).$$

Отсюда $tF(x,\tilde{y}) \le tW(x^*)$. Сократив на положительное t и устремив $t\to 0+$, получим неравенства для седловой точки

$$F(x,y(x^*)) \le W(x^*) = F(x^*,y(x^*)) \le F(x^*,y)\ \ \forall\, x\in X,\ \ \forall\, y\in Y.$$

Докажем теорему в общем случае. При $\varepsilon>0$ функция $F_\varepsilon(x,y) \overset{def}{=} F(x,y) + \varepsilon\sum\limits_{j=1}^n y_j^2$ непрерывна, вогнута по x и строго выпукла по y. По доказанному функция $F_\varepsilon(x,y)$ имеет седловую точку $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ на $X\times Y$:

$$F_\varepsilon(x,y^\varepsilon) \le F_\varepsilon(x^\varepsilon,y^\varepsilon) \le F_\varepsilon(x^\varepsilon,y)\ \ \forall\, x\in X,\ \ \forall\, y\in Y.$$

Возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$, сходящуюся к нулю. Из компактности множеств X и Y следует, что без потери общности $x^{\varepsilon_k}\to x^0$, $y^{\varepsilon_k}\to y^0$. Полагая в последних неравенствах $\varepsilon=\varepsilon_k$ и переходя к пределу при $k\to\infty$, получим неравенства (2.1) из определения седловой точки. ■

Заметим, что первая часть доказательства теоремы конструктивна: для поиска седловой точки функции $F(x,y)$, строго выпуклой по y, достаточно найти максиминную стратегию x^* и наилучший ответ на нее

$y(x^*)$ второго игрока. Аналогично, пусть в условиях теоремы 2.3 функция $F(x,y)$ строго вогнута по x, y^* – минимаксная стратегия, а $x(y^*) \in \operatorname{Arg}\max\limits_{x\in X} F(x,y^*)$ – наилучший ответ на нее первого игрока. Тогда $(x(y^*),y^*)$ – седловая точка функции $F(x,y)$.

Из первой части доказательства вытекает, что для существования седловой точки вместо строгой выпуклости функции $F(x,y)$ по переменной y достаточно потребовать при любом $x\in X$ единственность наилучшего ответа $y(x)$ второго игрока. Если последнее условие не выполнено, то пара (x^*,y^*), где $y^*\in Y(x^*)$, может не быть седловой точкой. Например, для функции $F(x,y) = xy$ на $X\times Y = [0,1]\times[0,1]$ пара $(x^*,y^*) = (0,1)$ седловой точкой не является.

Пример 2.6. $X=Y=[0,1]$, $F(x,y) = -x^2+y^3+xy^2-4y$. Здесь функция $F(x,y)$ выпукла по y и строго вогнута по x. Функция наилучшего ответа первого игрока – $x(y) = y^2/2$ и

$$M(y) = \max_{0\le x\le 1} F(x,y) = F(x(y),y) = y^4/4+y^3-4y.$$

Производная $M'(y) = y^3+3y^2-4$ обращается в нуль в точках 1,–2. Отсюда $y^0 = 1$ – минимаксная стратегия и $x(y^0) = 1/2$. Следовательно, $(1/2,1)$ – седловая точка функции $F(x,y)$.

§ 3. Смешанные расширения антагонистических игр

В предыдущем параграфе приводился пример антагонистической игры, не имеющей решения ("орлянка"). Играть в подобные игры весьма непросто. Проигравшему игроку каждый раз хочется сменить свою стратегию, но он будет бояться это сделать (а вдруг партнер догадается?). Теория игр предлагает игрокам использовать *смешанные* стратегии.

Определение. Смешанной стратегией первого игрока в игре Γ называется вероятностное распределение φ на множестве стратегий X.

Для первого игрока применить смешанную стратегию φ – это выбрать стратегию $x\in X$ как реализацию случайной величины, имеющей закон распределения φ. Далее рассматриваются три вида смешанных стратегий.

1) Пусть $X = \{1,...,m\}$, как это имеет место в матричной игре. Тогда вместо φ для обозначения смешанной стратегии будем использовать "вероятностный"вектор $p = (p_1,...,p_m)$, удовлетворяющий ограничениям

$\sum\limits_{i=1}^m p_i = 1$, $p_i\ge 0$, $i=1,...,m$. Если применяется p, то стратегия i выбирается с вероятностью p_i. Например, в игре "орлянка"опытные игроки используют смешанную стратегию $p^0 = (1/2,1/2)$, подбрасывая монету и выбирая "орел"или "решку"в зависимости результата бросания.

Вообще, одна из возможных реализаций смешанной стратегии – это бросание монет. С помощью одного бросания одной монеты можно осуществить только вероятность 1/2. С помощью двух монет или двукратного бросания одной монеты можно уже реализовать вероятности 1/2, 1/4 и 3/4. Ясно, что бросанием нескольких монет или многократным бросанием одной монеты можно реализовать широкий спектр вероятностей. Другой возможный и более удобный способ реализации смешанной стратегии – использовать рулетку. Делим круг рулетки на сектора с площадями, пропорциональными заданным вероятностям использования чистых стратегий. Затем вращаем стрелку и используем ту стратегию, в секторе которой она остановится.

2) Пусть $X=[a,b]$, как это имеет место в непрерывной игре на прямоугольнике. Здесь смешанная стратегия – функция распределения φ на отрезке $[a,b]$.

Пример 3.1. Пусть $X=[0,1]$, $c(x)$ – неубывающая дифференцируемая функция, определенная на отрезке $[1/2,1]$ и удовлетворяющая условиям $c(1/2) = 1/2$, $c(1) = 1$. Определим функцию распределения

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ 1/4, & 0\le x < 1/2, \\ c(x), & 1/2\le x\le 1, \\ 1, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Интеграл Стилтьеса от непрерывной функции $h(x)$ по функции распределения $\varphi_0(x)$ вычисляется по формуле

$$\int\limits_0^1 h(x)d\varphi_0(x) = \frac{1}{4}h(0) + \frac{1}{4}h(1/2) + \int\limits_{1/2}^1 h(x)c'(x)dx.$$

3) Пусть X – выпуклый компакт евклидова пространства. Здесь примером смешанной стратегии может служить вероятностная мера, сосре-

доточенная в конечном числе точек:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^m p_i I_{x^{(i)}}(x),\ \ \sum_{i=1}^m p_i = 1,\ \ p_i\ge 0,\ \ x^{(i)}\in X,\ i=1,...,m,$$

где

$$I_{x^{(i)}}(x) = \begin{cases} 1, & x = x^{(i)}, \\ 0, & x\ne x^{(i)}. \end{cases}$$

Отметим, что для любого *борелевского* множества B $\varphi(B) = \sum\limits_{i:x^{(i)}\in B} p_i$.
При использовании меры φ стратегия $x^{(i)}$ выбирается с вероятностью p_i. Интеграл от непрерывной функции $h(x)$ по рассматриваемой мере имеет вид

$$\int\limits_X h(x)d\varphi(x) = \sum_{i=1}^m p_i h(x^{(i)}).$$

Обозначим через $\{\varphi\}$ – множество всех смешанных стратегий первого игрока на множестве X. Можно считать, что $X\subset\{\varphi\}$. Действительно, в последнем случае стратегию x можно отождествить с вероятностной мерой I_x. Если множество X конечно, то выбор i эквивалентен выбору смешанной стратегии $p = (0,...,0,1,0,...,0)$, где единица стоит на i-м месте, а при $X=[a,b]$ стратегию $x\in[a,b]$ можно отождествить с функцией распределения, имеющей скачок 1 в точке x.

Множество X будем называть множеством *чистых* стратегий первого игрока (в противовес смешанным).

Займемся построением *смешанного расширения* антагонистической игры $\Gamma = \langle X,\ Y,\ F(x,y)\rangle$. Мы определили множество $\{\varphi\}$ смешанных стратегий первого игрока. Аналогично, пусть $\{\psi\}$ – множество смешанных стратегий второго игрока, т.е. вероятностных распределений ψ на множестве Y его чистых стратегий. При заданных стратегиях φ и ψ математическое ожидание выигрыша первого игрока определяется формулой

$$F(\varphi,\psi) = \int\limits_X\int\limits_Y F(x,y)d\varphi(x)d\psi(y).$$

Здесь предполагается, что двойной интеграл существует.

Определение. Антагонистическая игра

$$\overline{\Gamma} = \big\langle \{\varphi\},\ \{\psi\},\ F(\varphi,\psi)\big\rangle$$

называется смешанным расширением игры Γ.

Определение. Решение $(\varphi^0,\psi^0, v = F(\varphi^0,\psi^0))$ игры $\overline{\Gamma}$ называется решением исходной игры Γ в смешанных стратегиях. При этом φ^0,ψ^0 называются *оптимальными смешанными* стратегиями игроков, а v – *значением* игры Γ.

Далее будут построены смешанные расширения матричных и непрерывных игр и будет показано, что эти игры всегда имеют решение в смешанных стратегиях.

Напомним, что матричная игра Γ задается матрицей $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Множество смешанных стратегий первого игрока –

$$P = \{p = (p_1,...,p_m)\ \mid\ \sum_{i=1}^m p_i = 1,\ \ p_i\ge 0,\ i=1,...,m\},$$

множество смешанных стратегий второго игрока –

$$Q = \{q = (q_1,...,q_n)\ \mid\ \sum_{j=1}^n q_j = 1,\ \ q_j\ge 0,\ j=1,...,n\},$$

а математическое ожидание выигрыша первого игрока –

$$A(p,q) = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j.$$

Таким образом, $\overline{\Gamma} = \big\langle P,\ Q,\ A(p,q)\big\rangle$ – смешанное расширение матричной игры Γ.

Теорема 3.1 (Основная теорема матричных игр). Всякая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях.

Доказательство. Достаточно доказать ,что функция $A(p,q)$ имеет седловую точку на $P\times Q$. Множества P, Q – многогранники евклидовых пространств, а функция $A(p,q)$ билинейна и поэтому непрерывна на $P\times Q$, вогнута по p и выпукла по q. По теореме 2.3 функция $A(p,q)$ имеет на $P\times Q$ седловую точку. ■

Упражнение 3.1. Покажите, что тройка

$$(p^0,q^0,v) = ((1/2,1/2),(1/2,1/2),0)$$

– решение в смешанных стратегиях игры "орлянка".

Отметим типичные случаи, когда применяются смешанные стратегии.

1) Игра повторяется много раз. В этом случае за большое число повторений игры средний выигрыш первого игрока, использующего оптимальную смешанную стратегию, будет близок к значению игры или будет превышать его.

2) Смешанная стратегия реализуется в виде "физической смеси"чистых стратегий. Что это означает, поясним на примерах.

Пример 3.2. Игра против природы. Фермер (игрок 1) имеет участок земли, который можно засеять тремя сельскохозяйственными культурами. Год может быть нормальным, засушливым и дождливым (это три стратегии игрока 2 – природы). Пусть $H = (h_{ij})_{3\times 3}$ – матрица урожайности, а b_i – цена за единицу продукции i-го вида. Тогда $A = (b_i h_{ij})_{3\times 3}$ – матрица игры, где выигрыш фермера – стоимость произведенной продукции. Пусть $p^0 = (1/2, 1/4, 1/4)$ – оптимальная смешанная стратегия первого игрока. Реализовать ее можно, засеяв половину участка первой культурой, а оставшиеся две четверти – второй и третьей культурами.

Пример 3.3. Некоторая страна (игрок 1) использует три типа истребителей для борьбы с самолетами противника (игрока 2). Если истребитель типа i первого игрока встречается с самолетом типа j второго игрока, то он побеждает противника с вероятностью a_{ij}. Смешанная стратегия $p^0 = (1/2, 1/4, 1/4)$ первого игрока может быть реализована в виде парка истребителей с пропорциями типов 2:1:1.

3) Смешанные стратегии можно применять и при однократном повторении игры, когда игрок действует в условиях риска. При этом необходимо выигрыши заменить на их "полезности", учитывающие отношение игрока к риску.

Пример 3.4. Пусть игрок вынужден один раз сыграть в игру с матрицей $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Выигрышам 10 и 0 припишем полезности 1 и 0. Определим полезность выигрыша 5. Пусть в некоторой лотерее выигрыш 10 ожидается с вероятностью $0 < a < 1$. Первому игроку предлагается выбрать такое значение a, при котором игрок согласен купить лотерейный билет по цене 5. Выбранное значение a и будет полезностью выигрыша 5. Если $a = 1/2$, то отношение игрока к риску нейтральное, если $a > 1/2$, то игрок осторожен, а если $a < 1/2$, то игрок азартен.

Элементы теории полезности см. в конце данного параграфа.

Займемся смешанным расширением непрерывной игры Γ. Ограни-

чимся игрой на прямоугольнике $X \times Y = [a,b] \times [c,d]$. При заданных стратегиях φ и ψ – функциях распределения на отрезках X и Y – ожидаемый выигрыш $F(\varphi,\psi)$ первого игрока равен

$$F(\varphi,\psi) = \int\limits_a^b \int\limits_c^d F(x,y)d\varphi(x)d\psi(y).$$

Здесь двойной интеграл от непрерывной функции $F(x,y)$ существует. Более того, по теореме Фубини он равен повторному

$$F(\varphi,\psi) = \int\limits_a^b F(x,\psi)d\varphi(x) = \int\limits_c^d F(\varphi,y)d\psi(y),$$

где

$$F(x,\psi) = \int\limits_c^d F(x,y)d\psi(y), \quad F(\varphi,y) = \int\limits_a^b F(x,y)d\varphi(x).$$

Итак, построено смешанное расширение $\overline{\Gamma} = \langle \{\varphi\},\ \{\psi\},\ F(\varphi,\psi)\rangle$ непрерывной игры Γ на прямоугольнике. Наша ближайшая цель – доказать существование решения игры $\overline{\Gamma}$.

Нам потребуется известный результат.

Теорема 3.2. Множество смешанных стратегий $\{\varphi\}$ на отрезке $[a,b]$ является слабым компактом. Это означает, что из любой последовательности смешанных стратегий $\{\varphi^k\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\varphi^{k_l}\}$, слабо сходящуюся к некоторой стратегии φ^0, т.е. такую, что для любой непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $h(x)$ выполнено

$$\lim_{l\to\infty} \int\limits_a^b h(x)d\varphi^{k_l}(x) = \int\limits_a^b h(x)d\varphi^0(x).$$

Лемма 3.1. В непрерывной игре Γ на прямоугольнике существуют максиминная и минимаксная смешанные стратегии игроков.

Доказательство. Рассмотрим выражения

$$\underline{v} = \sup_{\varphi\in\{\varphi\}} \inf_{\psi\in\{\psi\}} F(\varphi,\psi), \quad \overline{v} = \inf_{\psi\in\{\psi\}} \sup_{\varphi\in\{\varphi\}} F(\varphi,\psi)$$

и докажем, что внешние sup и inf в них достигаются. По определению верхней грани $\underline{v}$ найдется такая последовательность смешанных стратегий $\{\varphi^k\}$, что

$$\inf_{\psi\in\{\psi\}} F(\varphi^k,\psi) \ge \underline{v} - \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k \to 0+,$$

или

$$\int\limits_X F(x,\psi)d\varphi^k(x) \ge \underline{v} - \varepsilon_k \ \ \forall\, \psi \in \{\psi\}, \quad k = 1,2,.... \qquad (3.1)$$

Выделим из $\{\varphi^k\}$ подпоследовательность $\{\varphi^{k_l}\}$, слабо сходящуюся к смешанной стратегии φ^0. Заметим, что при фиксированной стратегии ψ функция $F(x,\psi)$ непрерывна по x. Переходя в (3.1) к пределу по подпоследовательности $\{k_l\}$, получим неравенство $F(\varphi^0,\psi) \ge \underline{v} \ \ \forall\, \psi \in \{\psi\}$. Отсюда

$$\inf_{\psi\in\{\psi\}} F(\varphi^0,\psi) \ge \underline{v} \ \Rightarrow \ \inf_{\psi\in\{\psi\}} F(\varphi^0,\psi) = \underline{v}$$

и φ^0 – максиминная смешанная стратегия первого игрока. Аналогично доказывается существование минимаксной смешанной стратегии. ■

Лемма 3.2. Рассмотрим две антагонистические игры

$$\Gamma = \langle X,\ Y,\ F(x,y)\rangle, \quad \Gamma = \langle X,\ Y,\ F'(x,y)\rangle,$$

в которых функции $F(x,y)$ и $F'(x,y)$ ограничены на $X \times Y$ и при $\varepsilon > 0$ выполнено условие

$$|F(x,y) - F'(x,y)| \le \varepsilon \ \ \forall\, (x,y) \in X \times Y.$$

Тогда $|\underline{v} - \underline{v}'| \le \varepsilon, \ \ |\overline{v} - \overline{v}'| \le \varepsilon$.

Доказательство. Для всякого $x \in X$ справедливы неравенства

$$\inf_{y\in Y} F(x,y) - \inf_{y\in Y} F'(x,y) \ge \inf_{y\in Y}(F(x,y) - F'(x,y)) \ge -\varepsilon.$$

Можно получить аналогичные неравенства, меняя местами функции $F(x,y)$ и $F'(x,y)$. В результате находим, что

$$|\inf_{y\in Y} F(x,y) - \inf_{y\in Y} F'(x,y)| \le \varepsilon \ \ \forall x \in X.$$

Далее,

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} F(x,y) - \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} F'(x,y) \le \sup_{x\in X}(\inf_{y\in Y} F(x,y) - \inf_{y\in Y} F'(x,y)) \le \varepsilon.$$

Как и выше, находим, что $|\underline{v} - \underline{v}'| \le \varepsilon$. Аналогично доказывается неравенство $|\overline{v} - \overline{v}'| \le \varepsilon$. ■

Теорема 3.3 (Основная теорема непрерывных игр). Всякая непрерывная игра Γ на прямоугольнике имеет решение в смешанных стратегиях.

Доказательство. По теореме 2.1 достаточно доказать равенство величин $\underline{v} = \max\limits_{\varphi\in\{\varphi\}} \inf\limits_{\psi\in\{\psi\}} F(\varphi,\psi)$ и $\overline{v} = \min\limits_{\psi\in\{\psi\}} \sup\limits_{\varphi\in\{\varphi\}} F(\varphi,\psi)$.

Заметим, что достижимость здесь внешних максимумов и минимумов вытекает из леммы 3.1. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Из непрерывности функции $F(x,y)$ следует существование такого разбиения отрезка $X = [a,b]$ на непересекающиеся промежутки (отрезок и полуинтервалы) $X^i,\ i = 1,...,m$ и такого разбиения отрезка $Y = [c,d]$ на аналогичные промежутки $Y^j,\ j = 1,...,n$, что

$$|F(x,y) - F(x',y')| \le \varepsilon \ \ \forall\, (x,y),(x',y') \in X^i \times Y^j, \ \ \forall\, i,j. \qquad (3.2)$$

Для любых i,j возьмем точки $x^i \in X^i, \ \ y^j \in Y^j$ и определим ступенчатую функцию

$$F_1(x,y) = F(x^i,y^j) \ \ \forall\, (x,y) \in X^i \times Y^j, \ \ i = 1,...,m, \ j = 1,...,n.$$

Тогда из (3.2) следует, что

$$|F(x,y) - F_1(x,y)| \le \varepsilon \ \ \forall\, (x,y) \in X \times Y. \qquad (3.3)$$

Итак, функция $F_1(x,y)$ аппроксимирует функцию $F(x,y)$ с точностью до $\varepsilon > 0$. Непрерывная игра Γ фактически приближена игрой с матрицей $A = (a_{ij})_{m\times n} = (F(x^i,y^j))_{m\times n}$.

Всякой смешанной стратегии φ поставим в соответствие вектор

$$p = (p_1,...,p_m) : p_i = \int\limits_{X^i} d\varphi(x), \ i = 1,...,m,$$

где p_i – вероятность попадания реализации смешанной стратегии в множество X^i (мера множества X^i). Очевидно, что p является смешанной стратегией первого игрока в матричной игре, т.е. $p \in P$. Построенное отображение $\mathcal{P} : \{\varphi\} \to P$ является отображением *на* P. Действительно, для любой стратегии $p \in P$ функция распределения φ со скачками

p_i в точках x^i является прообразом p при отображении $\mathcal{P}$. Аналогично определяется отображение $\mathcal{Q} : \{\psi\} \to Q$, где Q – множество смешанных стратегий второго игрока матричной игры. Далее, для любых стратегий $\varphi,\ \psi$ и соответствующих стратегий $p = \mathcal{P}(\varphi),\ q = \mathcal{Q}(\psi)$ справедлива формула

$$F_1(\varphi,\psi) =$$

$$= \int\limits_a^b \int\limits_c^d F_1(x,y)d\varphi(x)d\psi(y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i F(x^i,y^j)q_j = A(p,q). \qquad (3.4)$$

Кроме того, используя (3.3), получим

$$|F(\varphi,\psi) - F_1(\varphi,\psi)| = |\int\limits_a^b \int\limits_c^d (F(x,y) - F_1(x,y))d\varphi(x)d\psi(y)| \le$$

$$\le \int\limits_a^b \int\limits_c^d |F(x,y) - F_1(x,y)|d\varphi(x)d\psi(y) \le \int\limits_a^b \int\limits_c^d \varepsilon d\varphi(x)d\psi(y) = \varepsilon.$$

Последнее неравенство означает, что для функций $F(\varphi,\psi)$, $F_1(\varphi,\psi)$ выполнены условия леммы 3.2. Из нее вытекают неравенства

$$|\max_{\varphi\in\{\varphi\}} \inf_{\psi\in\{\psi\}} F(\varphi,\psi) - \max_{\varphi\in\{\varphi\}} \min_{\psi\in\{\psi\}} F_1(\varphi,\psi)| \le \varepsilon, \qquad (3.5)$$

$$|\min_{\psi\in\{\psi\}} \sup_{\varphi\in\{\varphi\}} F(\varphi,\psi) - \min_{\psi\in\{\psi\}} \max_{\varphi\in\{\varphi\}} F_1(\varphi,\psi)| \le \varepsilon. \qquad (3.6)$$

Из (3.4) и основной теоремы матричных игр следует, что

$$\max_{\varphi\in\{\varphi\}} \min_{\psi\in\{\psi\}} F_1(\varphi,\psi) = \max_{p\in P}\min_{q\in Q} A(p,q) =$$

$$= \min_{q\in Q}\max_{p\in P} A(p,q) = \min_{\psi\in\{\psi\}} \max_{\varphi\in\{\varphi\}} F_1(\varphi,\psi).$$

Отсюда и из неравенств (3.5),(3.6) следует $|\underline{v} - \overline{v}| \le 2\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $\underline{v} = \overline{v}$. ■

Элементы теории полезности

Правомерность использования математического ожидания выигрыша в смешанном расширении игры вызывает сомнения. Когда игроки

применяют заданные смешанные стратегии, то выигрыш каждого является случайной величиной с заданным законом распределения. В теории полезности такую величину называют *лотереей*. Формально она задается набором параметров $(A_1,...,A_k;\ x_1,...,x_k)$, где выигрыш A_l возникает с вероятностью $x_l,\ l = 1,...,k$, и $\sum\limits_{l=1}^k x_l = 1$.

Упражнение 3.2. Указать параметры лотереи, которая соответствует паре смешанных стратегий (p,q) в матричной игре.

Оценка исхода любой игры по математическому ожиданию предполагает, что лотереи $(0;1)$, $(\$5000, \$-5000; 1/2, 1/2)$ и $(-1$*руб.*,10000 *руб.*;10000/10001,1/10001) эквиваленты для индивидуума. Можно предположить, что для многих читателей это не так. Далеко не все могут себе позволить сыграть во вторую лотерею, даже если несколько увеличить размер выигрыша. В то же время значительная часть населения участвует в лотереях, подобных третьей, даже при отрицательном среднем выигрыше: многие готовы рискнуть маленькой суммой в расчете на счастливый случай. Вообще, отношение людей к риску достаточно сложно и не до конца исследовано. Его изучением занимается теория *полезности* (в экономике функции выигрыша обычно называют функциями полезности).

Один из важнейших результатов этой теории состоит в следующем. Предположим, что у индивидуума есть отношение предпочтения на множестве всевозможных лотерей, т.е. для любых двух лотерей L_1, L_2 он может указать, какое из соотношений (причем только одно) выполняется: $L_1 \succ L_2$ (L_1 предпочтительней L_2), $L_2 \succ L_1$ или $L_1 \sim L_2$ (лотереи эквивалентны). Пусть эти соотношения удовлетворяют следующим (довольно естественным) аксиомам:

I. Если $L_1 \succ L_2$ и $L_2 \succ L_3$, то $L_1 \succ L_3$.

II. Если $L_1 \sim L_2$ и $L_2 \sim L_3$, то $L_1 \sim L_3$.

III. Если $L_1 \sim L_2$ и $L_2 \succ L_3$, то $L_1 \succ L_3$.

IV. Если $L_1 \succ L_2$ и $L_2 \sim L_3$, то $L_1 \succ L_3$.

V. Лотереи, которым соответствует одинаковое распределение вероятностей, являются эквивалентными.

Пусть L_1, L_2 – две лотереи, $0 \le r \le 1$. Обозначим через $rL_1 + (1-r)L_2$ лотерею, в которой с вероятностью r разыгрывается лотерея L_1, а с вероятностью $1-r$ – лотерея L_2.

Из аксиомы V вытекает, что для любых лотерей L_1, L_2, L_3 и вероятностей r, s справедливы соотношения

$rL_1 + (1-r)L_2 \sim (1-r)L_2 + rL_1,$

$rL_1 + (1-r)(L_2 + (1-s)L_3) \sim rL_1 + (1-r)L_2 + (1-r)(1-s)L_3.$

VI. Если $L_1 \sim L_2$ ($L_1 \succ L_2$), то для любой лотереи L_3 и любой вероятности $r > 0$ выполнено соотношение
$rL_1 + (1-r)L_3 \sim rL_2 + (1-r)L_3$ ($rL_1 + (1-r)L_3 \succ rL_2 + (1-r)L_3$).

VII. Если $L_1 \succ L_2 \succ L_3$, то найдется такая вероятность r, что $rL_1 + (1-r)L_3 \sim L_2$.

Аксиома VII похожа на теорему о промежуточном значении для непрерывной функции на отрезке и означает, что отношение предпочтения непрерывно в некотором смысле. Пусть, наконец, справедлива аксиома

$VIII$. Если $A_l > A_h$, то $(A_l;1) \succ (A_h;1)$.

Лемма 3.3. Пусть на множестве лотерей предпочтение индивидуума удовлетворяет аксиомам $I - VIII$ и $L_1 \succ L_2$. Тогда для любых вероятностей $\beta < \alpha$ выполнено соотношение $\alpha L_1 + (1-\alpha)L_2 \succ \beta L_1 + (1-\beta)L_2$.

Доказательство. По аксиоме VI при $L_3 = L_2$ получаем
$\alpha L_1 + (1-\alpha)L_2 \succ L_2$. Представим β в виде $\beta = \gamma\alpha$, где $\gamma \in [0,1)$. Тогда по аксиомам VI и V

$\alpha L_1 + (1-\alpha)L_2 \succ \gamma(\alpha L_1 + (1-\alpha)L_2) + (1-\gamma)L_2 \sim$

$\sim \gamma\alpha L_1 + [\gamma(1-\alpha) + 1 - \gamma]L_2 \sim \beta L_1 + (1-\beta)L_2.$ ■

Теорема 3.4. При выполнении указанных аксиом $I - VIII$ существует функция полезности $u(L)$, определенная на множестве лотерей вида $(A_1,...,A_k;x_1,...,x_k)$ и такая, что выполнены следующие свойства:

1) Для любых лотерей $L_1, L_2 \quad u(L_1) > u(L_2) \Leftrightarrow L_1 \succ L_2$.

2) Для любой лотереи $L = (A_1,...,A_k;x_1,...,x_k) \quad u(L) = \sum\limits_{l=1}^k x_l u(A_l)$.

3) Функция $u(A;1)$ монотонно возрастает по A.

Более того, эта функция единственна с точностью до линейного преобразования: если другая функция $v(L)$ удовлетворяет тем же свойствам 1)–3), то существуют такие константы $c > 0$ и b, что для любой лотереи L $v(L) = cu(L) + b$.

Утверждение теоремы означает, что для каждого индивидуума (при выполнении аксиом $I - VIII$) существует монотонное преобразование

функции выигрыша, которое позволяет оценивать любую лотерею, исходя из математического ожидания выигрыша. В частности, если в матричной игре взять преобразованную функцию выигрыша $u(a_{ij})$, то случайный исход при использовании смешанных стратегий p и q можно оценивать по математическому ожиданию $\sum\limits_{i=1}^m \sum\limits_{j=1}^n p_i u(a_{ij})q_j$. Отметим, что функция полезности $u(L)$ – своя для каждого индивидуума, поэтому игра с преобразованными матрицами выигрышей $(u_1(a_{ij}))$ и $(u_2(a_{ij}))$ вполне может оказаться неантагонистической.

Упражнение 3.3. Докажите теорему 3.4.

Указание. Без потери общности можно считать, что $A_1 \succ A_2 \succ ... \succ A_k$. Положим $u(A_1) = r_1 = 1,\ u(A_k) = r_k = 0$, а величины $u(A_l) = r_l,\ l = 2,...,k-1$ определим из соотношений $r_l(A_1) + (1-r_l)A_l \sim A_l$, $0 < r_l < 1$, используя аксиому VII. С помощью леммы 3.3 покажите, что функция

$u(L) = u(A_1,...,A_k;x_1,...,x_k) = \sum\limits_{l=1}^k x_l r_l$

удовлетворяет всем утверждениям теоремы.

§ 4. Свойства решений в смешанных стратегиях

В данном параграфе рассматриваются свойства решений в смешанных стратегиях матричных игр и непрерывных игр на прямоугольнике. Эти свойства в частных случаях позволяют находить оптимальные смешанные стратегии.

Теорема 4.1. Для того чтобы тройка (φ^0,ψ^0,v) была решением в смешанных стратегиях непрерывной игры Γ, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие

$$F(x,\psi^0) \le v \le F(\varphi^0,y) \ \ \forall\, x \in X, \ \ \forall\, y \in Y. \qquad (*)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть (φ^0,ψ^0,v) – решение непрерывной игры в смешанных стратегиях. Тогда $v = F(\varphi^0,\psi^0)$ и по определению седловой точки

$$F(\varphi,\psi^0) \le F(\varphi^0,\psi^0) = v \le F(\varphi^0,\psi) \ \ \forall\, \varphi \in \{\varphi\}, \ \ \forall\, \psi \in \{\psi\}.$$

Возьмем в последних неравенствах вместо φ и ψ чистые стратегии x и y. В результате получим условие $(*)$.

Достаточность. Пусть для тройки (φ^0,ψ^0,v) выполнено условие $(*)$. Проинтегрируем первое неравенство этого условия по любой стратегии φ, а второе – по любой стратегии ψ и получим

$$F(\varphi,\psi^0) \le v \le F(\varphi^0,\psi) \ \ \forall\, \varphi \in \{\varphi\}, \ \ \forall\, \psi \in \{\psi\}.$$

Подставляя, в частности, $\varphi = \varphi^0$ и $\psi = \psi^0$, находим, что $F(\varphi^0,\psi^0) = v$ и пара (φ^0,ψ^0) – седловая точка функции $F(\varphi,\psi)$ на $\{\varphi\} \times \{\psi\}$. ■

Отметим, что теорема 4.1 справедлива для произвольных смешанных расширений антагонистических игр.

Сформулируем аналогичную теорему для матричных игр.

Теорема 4.1′. Для того чтобы тройка (p^0,q^0,v) была решением в смешанных стратегиях игры с матрицей A, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие

$$A(i,q^0) \le v \le A(p^0,j), \quad i = 1,...m, \quad j = 1,...,m. \qquad (*)$$

Упражнение 4.1. Докажите теорему 4.1′.

Отметим, что проверка выполнения условия $(*)$ теоремы 4.1′ сводится к подсчету скалярных произведений вектора p^0 на столбцы, а также вектора q^0 на строки матрицы A и сравнению их с числом v.

Пример 4.1. Пусть матрица игры – циклическая:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & ... & c_n \\ c_n & c_1 & ... & c_{n-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_2 & ... & c_n & c_1 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $p^0 = q^0 = (1/n,...,1/n),\ v = \sum\limits_{k=1}^n c_k/n$ – решение игры в смешанных стратегиях. Действительно, условие $(*)$ здесь выполнено, поскольку все неравенства в нем выполнены как равенства. В качестве конкретного примера рассмотрим игру "мешок, камень, ножницы"с матрицей

$$A = \begin{array}{c|ccc} & \text{М} & \text{К} & \text{Н} \\ \hline \text{М} & 0 & 1 & -1 \\ \text{К} & -1 & 0 & 1 \\ \text{Н} & 1 & -1 & 0 \end{array}.$$

Можно дать следующую интерпретацию этой игры. Двое выбирают один из трех предметов: мешок, камень или ножницы. Каждый предмет против самого себя никакого выигрыша не дает, поэтому на диагонали стоят 0. Ножницы тупятся о камень, поэтому они проигрывают камню 1, а тот в свою очередь выигрывает у ножниц 1. Камень можно поместить в мешок, поэтому мешок выигрывает у камня 1, а камень проигрывает мешку 1. Ножницы режут мешок, поэтому они выигрывают у мешка 1, а мешок проигрывает ножницам 1.

Упражнение 4.2. Пусть B – матрица, полученная прибавлением константы c ко всем элементам матрицы A. Показать, что значения соответствующих матричных игр связаны соотношением $v(B) = v(A) + c$, а оптимальные смешанные стратегии игроков совпадают.

Пример 4.2. Продавец выставляет на продажу три предмета, не представляющие для него особой ценности (старые телевизоры и т.п.). Он готов их продать даже за незначительную цену. Имеются два покупателя (игрока), располагающие одинаковыми суммами денег A. Игрок становится обладателем предмета, если предлагает за него сумму, бо́льшую, чем партнер. Цель первого игрока состоит в покупке двух каких-либо предметов из трех. Цель второго игрока – воспрепятствовать этому.

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3) \in X = \{x \mid \sum\limits_{i=1}^{3} x_i = A, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$ – стратегия первого игрока, состоящая в предложении суммы x_i за i-ый предмет. Аналогичную стратегию $y = (y_1, y_2, y_3) \in Y = X$ использует второй игрок.

Будем писать $x \succ y$, если какие-либо две компоненты вектора x больше соответствующих компонент вектора y. Определим функцию выигрыша первого игрока

$$F(x,y) = \begin{cases} 1, & x \succ y, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что

$$\forall x \in X \; \exists\, y \in Y : \neg(x \succ y) \Rightarrow \underline{v} = 0;$$
$$\forall y \in Y \; \exists\, x \in X : x \succ y \Rightarrow \overline{v} = 1.$$

Отсюда следует, что игра не имеет решения в чистых стратегиях. Найдем ее решение в смешанных стратегиях.

Множество стратегий X (совпадающее с Y) изобразим на плоскости в виде равностороннего треугольника высоты A. Точка y имеет *барицентрические* координаты y_1, y_2, y_3, определяющие ее расстояния от

трех сторон треугольника. На рис. 4.1 изображены линии $x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ x_3 = y_3$.

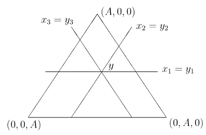

Рис. 4.1

Множество стратегий вне этих линий разобьем на два подмножества

$$X_1(y) = \{x \in X \mid x \succ y\}, \quad X_2(y) = \{x \in X \mid y \succ x\}.$$

Заметим, что $X_1(y)$ является объединением трех треугольников. Например, нижний треугольник на рис. 4.1 состоит из таких векторов x, для которых $x_2 > y_2, x_3 > y_3$.

Множество

$$C = \{x \in X \mid 0 \leq x_i \leq 2A/3,\ i = 1, 2, 3\}$$

представляет собой правильный шестиугольник с центром y^0, совпадающим с центром треугольника X (рис. 4.2).

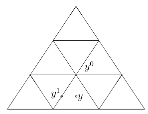

Рис. 4.2

Пусть φ^0 – равномерное распределение на C. Докажем, что тройка

$(\varphi^0, \varphi^0, 1/2)$ – решение игры в смешанных стратегиях. Для этого достаточно проверить условие $(*)$ теоремы 4.1.

Обозначим через $mes(S)$ площадь фигуры $S \subset X$. Тогда

$$F(\varphi^0, y) = \frac{mes(X_1(y) \cap C)}{mes(C)} \quad \forall y \in Y.$$

Нетрудно показать, что $mes(X_1(y) \cap C) = 0.5 mes(C)$ для всех $y \in C$. Действительно, для центра шестиугольника y^0 это утверждение очевидно. Пусть $y \neq y^0$. Определим вектор $y^1 \in C$:

$$y_1^1 = y_1,\ y_2^1 = y_2^0 = A/3,\ y_3^1 = 2A/3 - y_1.$$

Сравнивая фигуры $X_1(y) \cap C,\ X_1(y^1) \cap C$ и $X_1(y^0) \cap C$, убеждаемся, что их площади равны. Следовательно, при $y \in C$ $F(\varphi^0, y) = 1/2$. Методом сравнения площадей можно также показать, что $mes(X_1(y) \cap C) > 0.5 mes(C)$, если $y \notin C$. Итак, доказано, что $F(\varphi^0, y) \geq 1/2 \ \forall y \in Y$. Поскольку

$$F(x, \varphi^0) = \frac{mes(X_2(x) \cap C)}{mes(C)} \quad \forall x \in X,$$

для доказательства неравенства $F(x, \varphi^0) \leq 1/2 \ \forall x \in X$ достаточно заметить, что

$$mes(X_1(x) \cap C) + mes(X_2(x) \cap C) = mes(C) \ \forall x \in X. \ \blacksquare$$

Пусть $\overline{\Gamma}$ – смешанное расширение произвольной антагонистической игры Γ.

Определение. Смешанная стратегия ψ^0 второго игрока называется *выравнивающей,* если $F(x, \psi^0) \equiv const$ на множестве X.

Аналогично определяется выравнивающая стратегия первого игрока.

Утверждение 4.1. Если в игре $\overline{\Gamma}$ у обоих игроков существуют выравнивающие стратегии φ^0, ψ^0, то они оптимальны.

Доказательство. Действительно, по определению

$$F(\varphi^0, y) = c_1 \ \ \forall y \in Y, \quad F(x, \psi^0) = c_2 \ \ \forall x \in X.$$

Интегрируя эти равенства по ψ^0 и φ^0 соответственно, получим $F(\varphi^0, \psi^0) = c_1 = c_2$. При $v = F(\varphi^0, \psi^0)$ неравенства из условия $(*)$ теоремы 4.1 для тройки (φ^0, ψ^0, v) выполнены как равенства. $\blacksquare$

Доказанное утверждение можно усилить.

Упражнение 4.3. Пусть в игре $\overline{\Gamma}$ ψ^0 – выравнивающая стратегия второго игрока и найдется такая смешанная стратегия φ^0 первого игрока, что $F(\varphi^0, \psi^0) = \min\limits_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi^0, \psi)$. Докажите, что φ^0, ψ^0 – оптимальные смешанные стратегии игроков.

Упражнение 4.4. Приведите пример игры с матрицей размеров 2×3, в которой второй игрок имеет выравнивающую, но не оптимальную смешанную стратегию.

Пример 4.3. Первый игрок ведет стрельбу по цели, которая может находиться в одной из трех точек: либо в концах отрезка $[B, C]$ длины 2, либо в его середине D. Первый игрок выбирает точку прицела B, C или D. Пусть d – расстояние от точки прицела до положения цели, а вероятности ее поражения равны $1, a, 0$ для расстояний $d = 0, 1, 2$ соответственно. Выигрыш первого игрока – вероятность поражения цели. Требуется определить оптимальную стратегию стрельбы в зависимости от значения параметра $a \in (0, 1)$.

Составим матрицу игры $A = \begin{array}{c} \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$

Пусть $q^0 = (q_1^0, q_2^0, q_3^0)$ – выравнивающая стратегия второго игрока. Матрица A симметрична и смешанная стратегия $p^0 = q^0$ первого игрока также является выравнивающей. Из утверждения 4.1 вытекает, что стратегии p^0 и q^0 оптимальны. Найдем q^0. В силу симметрии концов отрезка $[B, C]$ по отношению к его середине D можно считать, что $q_1^0 = q_3^0$. Следовательно,

$$2q_1^0 + q_2^0 = 1, \ \ q_1^0 + a q_2^0 = v, \ \ 2a q_1^0 + q_2^0 = v.$$

Выпишем решение полученной системы уравнений

$$q_1^0 = \frac{1-a}{3-4a}, \ q_2^0 = \frac{1-2a}{3-4a}, \ \ v = \frac{1-2a^2}{3-4a}.$$

Из условия неотрицательности q_1^0, q_2^0 находим, что $a \leq 1/2$. При $a > 1/2$ покажите, что тройка $(p^0, q^0, v) = ((0, 1, 0), (1/2, 0, 1/2), a)$ – решение игры в смешанных стратегиях.

Упражнение 4.5. Используя выравнивающие стратегии, решите ана-

логичную игру с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \ \ 0 < a < 1.$$

Теорема 4.2. Для непрерывной игры Γ справедливы следующие два утверждения:

1) $\inf\limits_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) = \min\limits_{y \in Y} F(\varphi, y) \ \ \forall \ \ \varphi \in \{\varphi\};$

2) $\sup\limits_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi) = \max\limits_{x \in X} F(x, \psi) \ \ \forall \ \ \psi \in \{\psi\}.$

Доказательство. Докажем 1). Возьмем любую стратегию φ. Заметим, что $\min\limits_{y \in Y} F(\varphi, y)$ достигается, поскольку функция $F(\varphi, y)$ непрерывна по y. Далее,

$$\inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) \leq \min_{y \in Y} F(\varphi, y) \tag{4.1}$$

и для любого $\psi \in \{\psi\}$

$$F(\varphi, \psi) = \int\limits_Y F(\varphi, y) d\psi(y) \geq \int\limits_Y \min_{y \in Y} F(\varphi, y) d\psi(y) = \min_{y \in Y} F(\varphi, y).$$

Отсюда

$$\inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) \geq \min_{y \in Y} F(\varphi, y). \tag{4.2}$$

Из (4.1) и (4.2) следует первое утверждение теоремы. Утверждение 2) доказывается аналогично. $\blacksquare$

Следствие. Значение v непрерывной игры Γ может быть представлено в виде следующих двух формул:

$$v = \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \min_{y \in Y} F(\varphi, y) = \min_{\psi \in \{\psi\}} \max_{x \in X} F(x, \psi).$$

Доказательство. По теоремам 2.1,3.2 и 4.2 получаем

$$v = \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, y) \Rightarrow \ \ v = \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \inf_{y \in Y} F(\varphi, y).$$

Вторая формула выводится аналогично.

Упражнение 4.6. Докажите, что значение v непрерывной игры Γ удовлетворяет неравенствам

$$\underline{v} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) \leq v \leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y) = \overline{v}.$$

Теорема 4.2′. Для игры с матрицей A справедливы следующие два утверждения:

1) $\min\limits_{q \in Q} A(p, q) = \min\limits_{1 \leq j \leq n} A(p, j) \ \ \forall \ \ p \in P;$

2) $\max\limits_{p \in P} A(p, q) = \max\limits_{1 \leq i \leq m} A(i, q) \ \ \forall \ \ q \in Q.$

Докажите самостоятельно.

Следствие. Значение v игры с матрицей A может быть представлено в виде следующих двух формул:

$$v = \max_{p \in P} \min_{1 \leq j \leq n} A(p, j) = \min_{q \in Q} \max_{1 \leq i \leq m} A(i, q).$$

Теперь обсудим так называемое свойство *дополняющей нежесткости.* Определим множество $Sp(\varphi) \subset X$ – спектр смешанной стратегии φ, заданной на отрезке X.

Определение. Будем говорить, что точка $x' \in X = [a, b]$ принадлежит спектру стратегии φ, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой отрезок $[a', b']$, содержащий x', что $b' - a' < \varepsilon$ и $\varphi(b') - \varphi(a') > 0$. Множество всех точек спектра обозначим через $Sp(\varphi)$.

Упражнение 4.7. Докажите, что точки скачка функции распределения φ и точки, где ее производная существует и положительна, принадлежат спектру $Sp(\varphi)$.

Теорема 4.3 (Свойство дополняющей нежесткости). Пусть (φ^0, ψ^0, v) – решение в смешанных стратегиях непрерывной игры Γ. Тогда

1) $x \in Sp(\varphi^0) \Rightarrow F(x, \psi^0) = v;$

2) $y \in Sp(\psi^0) \Rightarrow F(\varphi^0, y) = v.$

Доказательство. Докажем утверждение 1). Предположим противное, т.е. найдется такая точка $x' \in Sp(\varphi^0)$, что $F(x', \psi^0) \neq v$. Тогда по свойству $(*)$ теоремы 4.1 будет выполнено неравенство $F(x', \psi^0) < v$. Из непрерывности функции $F(x, \psi^0)$ и определения спектра стратегии φ^0

вытекает, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой отрезок $[a', b']$, содержащий точку x', и такое число $v' < v$, что для всех $x \in [a', b']$

$$F(x, \psi^0) \leq v' < v, \quad b' - a' < \varepsilon, \ \ \varphi^0(b') - \varphi^0(a') > 0.$$

Теперь

$$F(\varphi^0, \psi^0) = \int\limits_X F(x, \psi^0) d\varphi^0(x) =$$

$$= \int\limits_{(a',b']} F(x, \psi^0) d\varphi^0(x) + \int\limits_{X \setminus (a',b']} F(x, \psi^0) d\varphi^0(x) \leq \int\limits_{(a',b']} v' d\varphi^0(x) +$$

$$+ \int\limits_{X \setminus (a',b']} v d\varphi^0(x) < (\varphi^0(b') - \varphi^0(a')) v + \int\limits_{X \setminus (a',b']} v d\varphi^0(x) = v,$$

что противоречит определению значения игры. Утверждение 2) доказывается аналогично. $\blacksquare$

Следствие. Пусть (φ^0, ψ^0, v) – решение в смешанных стратегиях непрерывной игры Γ. Тогда

1) $F(x, \psi^0) < v \Rightarrow x \notin Sp(\varphi^0);$

2) $F(\varphi^0, y) > v \Rightarrow y \notin Sp(\psi^0).$

Сформулируем аналогичную теорему для матричных игр.

Теорема 4.3′ (Свойство дополняющей нежесткости). Пусть (p^0, q^0, v) – решение в смешанных стратегиях игры с матрицей A. Тогда

1) $p_i^0 > 0 \Rightarrow A(i, q^0) = v;$

2) $q_j^0 > 0 \Rightarrow A(p^0, j) = v.$

Упражнение 4.8. Докажите теорему 4.3′.

Следствие. Пусть (p^0, q^0, v) – решение в смешанных стратегиях игры с матрицей A. Тогда

1) $A(i, q^0) < v \Rightarrow p_i^0 = 0;$

2) $A(p^0, j) > v \Rightarrow q_j^0 = 0.$

Поясним выражение "дополняющая нежесткость", заимствованное из *теории двойственности* линейного программирования. Поставим в соответствие неравенству $A(i, q^0) \leq v$ $(A(p^0, j) \geq v)$ из условия $(*)$ неравенство $p_i^0 \geq 0$ $(q_j^0 \geq 0)$ с тем же номером. Тогда если одно из этих неравенств выполнено строго ("нежестко"), то по теореме 4.3′ и ее следствию

соответствующее неравенство выполнено как равенство ("жестко"). Все это можно записать в следующей краткой форме: для решения (p^0, q^0, v) в смешанных стратегиях игры с матрицей A справедливы равенства

$$p_i^0 (v - A(i, q^0)) = q_j^0 (A(p^0, j) - v) = 0, \ \ i = 1, ..., m, \ j = 1, ..., n.$$

Пример 4.4. Решим игру с диагональной матрицей A, в которой диагональные элементы $a_i > 0$. Предположим, что все компоненты оптимальных смешанных стратегий $p^0,\ q^0$ положительны. Тогда по теореме 4.3′

$$A(i, q^0) = a_i q_i^0 = v, \ \ i = 1, ..., n, \ \ \sum_{i=1}^{n} q_i^0 = 1.$$

Решая эту систему относительно $n + 1$ неизвестных $q_i^0,\ i = 1, ..., n,\ v$, получим $q_i^0 = v / a_i, \ \ i = 1, ..., n$, где $v = 1 / \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$.

Аналогично можно найти, что $p^0 = q^0$.

Приведем одну интерпретацию этой игры. Пусть милиционер (первый игрок) ищет преступника (второго игрока) в одном из n баров. Если милиционер приходит в бар i, где находится преступник, то вероятность его задержания равна a_i. Оптимальные смешанные стратегии предписывают игрокам идти с большей вероятностью в тот бар, где вероятность задержания меньше. Поэтому оптимальная стратегия преступника естественна, а милиционера – парадоксальна. Отметим также, что мы одновременно решили следующую задачу поиска максимина:

$$v = \max_{p \in P} \min_{1 \leq i \leq n} A(p, i) = \max_{p \in P} \min_{1 \leq i \leq n} a_i p_i.$$

§ 5. Методы решения матричных игр

В этом параграфе изложены некоторые методы решения матричных игр в смешанных стратегиях. При этом наша цель будет состоять в поиске хотя бы одного решения игры.

I. *Доминирование строк и столбцов.*

Если элементы некоторой строки i_1 матрицы A меньше соответствующих элементов другой строки i_2, то интуитивно ясно, что строку i_1 первому игроку можно не использовать. Сформулируем условия доминирования строк и столбцов матрицы игры, позволяющие уменьшить ее размеры.

Определение. Будем говорить, что вектор $a = (a_1, ..., a_l)$ *слабо доминирует* вектор $b = (b_1, ..., b_l)$, если $a_i \geq b_i,\ i = 1, ..., l$. Будем говорить о *строгом доминировании,* если все нестрогие неравенства $\geq$ заменены на строгие $>$. Заметим, что слабое доминирование возможно даже в случае равенства векторов a и b.

Определение. Для векторов $a^{(i)},\ i = 1, ..., m$, евклидова пространства и чисел $p_i \geq 0,\ i = 1, ..., m, \ \ \sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$, линейная комбинация $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i a^{(i)}$ называется *выпуклой комбинацией* векторов $a^{(i)}$ с коэффициентами p_i.

Теорема 5.1 (О доминировании строк). Пусть некоторая строка матрицы A слабо доминируется выпуклой комбинацией остальных строк. Тогда эта строка входит с нулевой вероятностью в *некоторую* оптимальную смешанную стратегию первого игрока. Если указанное доминирование строгое, то эта строка входит с нулевой вероятностью в *любую* оптимальную смешанную стратегию первого игрока. Доминируемые строки можно вычеркнуть из матрицы игры.

Доказательство. Пусть строка матрицы A с номером i_1 слабо доминируется выпуклой комбинацией остальных строк с коэффициентами $p_i \geq 0,\ i \neq i_1$:

$$a_{i_1 j} \leq \sum_{i \neq i_1} p_i a_{ij}, \ j = 1, ..., n, \ \ \sum_{i \neq i_1} p_i = 1. \tag{5.1}$$

Рассмотрим матрицу $\hat{A}$, полученную из A вычеркиванием (исключением) i_1-ой строки. Пусть $(\hat{p}, q^0, v)$ – решение игры с матрицей $\hat{A}$. Положим $p^0 = (\hat{p}_1, ..., \hat{p}_{i_1 - 1}, 0, \hat{p}_{i_1 + 1}, ..., \hat{p}_m)$ и докажем, что тройка (p^0, q^0, v) – решение игры с матрицей A. Тем самым будет доказано второе утверждение теоремы и обосновано вычеркивание i_1-ой строки. Действительно, решая игру с матрицей $\hat{A}$, мы находим решение исходной игры, добавляя в $\hat{p}$ нулевую i_1-ую компоненту.

Проверим условие $(*)$ для тройки (p^0, q^0, v) в игре с матрицей A. Имеем

$$A(p^0, j) = \hat{A}(\hat{p}, j) \geq v, \ j = 1, ..., n; \ \ A(i, q^0) = \hat{A}(i, q^0) \leq v \ \ \forall \ i \neq i_1.$$

Пусть $i = i_1$. Тогда, полагая $p' = (p_i, i \neq i_1)$, получим

$$A(i_1, q^0) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_1 j} q_j^0 \leq \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i \neq i_1} a_{ij} p_i) q_j^0 = \hat{A}(p', q^0) \leq v,$$

поскольку стратегия q^0 второго игрока оптимальна в игре с матрицей $\hat{A}$. Итак, (p^0, q^0, v) – решение игры с матрицей A.

Предположим, что неравенства в (5.1) строгие. Тогда в последних выкладках первое неравенство также строгое и $A(i_1, q^0) < v$. Пусть p^* – произвольная оптимальная смешанная стратегия первого игрока. Тогда (p^*, q^0, v) – решение игры с матрицей A. Из последнего неравенства по свойству дополняющей нежесткости получаем $p^*_{i_1} = 0$. ■

Отметим, что при исключении строго доминируемых строк оптимальные смешанные стратегии первого игрока сохраняются. При слабом доминировании оптимальные стратегии могут теряться. В качестве примера достаточно рассмотреть матрицу игры с равными элементами.

Следующую теорему докажите самостоятельно.

Теорема 5.1′ (О доминировании столбцов). Пусть некоторый столбец матрицы A слабо доминирует выпуклую комбинацию остальных столбцов этой матрицы. Тогда этот столбец входит с нулевой вероятностью в *некоторую* оптимальную смешанную стратегию второго игрока. Если указанное доминирование строгое, то этот столбец входит с нулевой вероятностью в *любую* оптимальную смешанную стратегию второго игрока. Доминирующие столбцы можно вычеркнуть из матрицы игры.

Пример 5.1. Решить игру с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь полусумма первых двух строк слабо доминирует третью строку и ее можно вычеркнуть. В полученной матрице третий столбец слабо доминирует второй. После его вычеркивания получим циклическую матрицу $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ с решением $(\hat{p}, \hat{q}, v) = ((1/2, 1/2), (1/2, 1/2), 2)$. Поэтому исходная игра имеет решение

$$(p^0, q^0, v) = ((1/2, 1/2, 0), (1/2, 1/2, 0), 2).$$

Упражнение 5.1. Пусть матрица A имеет седловую точку. Показать, что после исключения слабо доминируемых строк и слабо доминирующих столбцов без использования выпуклых комбинаций редуцированная матрица имеет седловую точку матрицы A.

Упражнение 5.2. Полковнику Блотто[1] (первому игроку) поставлена задача прорыва тремя полками через два горных перевала, охраняемых двумя полками противника (второго игрока). Стратегия Блотто $(k_1, k_2) \in X = \{(3,0), (2,1), (1,2), (0,3)\}$ состоит в том, что k_1 полков направляются на первый перевал, а k_2 – на второй. Противник располагает аналогичными стратегиями $(l_1, l_2) \in Y = \{(2,0), (1,1), (0,2)\}$. Полки Блотто и противника, встретившись на перевале, взаимно уничтожают друг друга. Выигрышем Блотто является общее число его полков, прорвавшихся через два перевала, т.е. величина $\max[k_1 - l_1, 0] + \max[k_2 - l_2, 0]$. Решить матричную игру и найти оптимальную стратегию Блотто.

II. *Графический метод решения игр с матрицами размеров* $2 \times n$ *и* $m \times 2$.

Рассмотрим игру с $2 \times n$-матрицей A. Смешанная стратегия первого игрока $p = (p_1, 1 - p_1)$ определяется величиной $p_1 \in [0, 1]$. Значение игры, согласно следствию теоремы 4.2′, представимо в виде

$$v = \max_{p \in P} \min_{1 \le j \le n} A(p, j) = \max_{0 \le p_1 \le 1} \min_{1 \le j \le n} [a_{1j} p_1 + a_{2j}(1 - p_1)].$$

Для нахождения значения игры и оптимальной смешанной стратегии первого игрока достаточно на отрезке [0,1] построить графики семейства линейных функций $l_j(p_1) = a_{1j} p_1 + a_{2j}(1 - p_1)$ с угловыми коэффициентами $k_j = a_{1j} - a_{2j}$, $j = 1, ..., n$, и найти точку максимума p_1^0 функции $\min\limits_{1 \le j \le n} l_j(p_1)$ – нижней огибающей семейства (рис. 5.1).

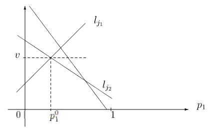

Рис. 5.1

[1]Полковник Блотто – анекдотический персонаж, действующее лицо многих иллюстративных примеров из области антагонистических игр.

Найдем оптимальную смешанную стратегию второго игрока. Разберем следующие возможности.

а) $0 < p_1^0 < 1$.

Этот случай представлен на рис. 5.1. Возьмем две прямые l_{j_1} и l_{j_2}, проходящие через точку (p_1^0, v) и имеющие угловые коэффициенты $k_{j_1} \ge 0$, $k_{j_2} \le 0$. Рассмотрим уравнение

$$k_{j_1} q^* + k_{j_2}(1 - q^*) = 0. \tag{5.2}$$

Оно имеет решение q^*, принадлежащее отрезку [0,1]. Из (5.2) следует, что угловой коэффициент прямой $l_{j_1}(p_1) q^* + l_{j_2}(p_1)(1 - q^*)$ равен нулю. Смешанная стратегия второго игрока

$$q^0 : \ q_j^0 = \begin{cases} q^*, & j = j_1, \\ 1 - q^*, & j = j_2, \\ 0, & j \ne j_1, j_2, \end{cases}$$

оптимальна, поскольку при всех $p_1 \in [0, 1]$

$$A(p, q^0) = l_{j_1}(p_1) q^* + l_{j_2}(p_1)(1 - q^*) = v.$$

б) $p_1^0 = 0$.

В этом случае чистая стратегия 2 первого игрока является оптимальной. Покажем, что у второго игрока также имеется чистая оптимальная стратегия. Действительно, найдется прямая l_{j_1}, проходящая через точку $(0, v)$ и имеющая угловой коэффициент $k_{j_1} \le 0$. Выбирая чистую стратегию j_1, второй игрок не позволит первому выиграть больше, чем v, поскольку $A(p, j_1) = l_{j_1}(p_1) \le v$ при всех $p_1 \in [0, 1]$. Итак, матрица игры имеет седловую точку $(2, j_1)$.

в) $p_1^0 = 1$.

В этом случае, аналогичном б), матрица игры также имеет седловую точку.

Пример 5.2. Решим игру с матрицей $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Построив три прямые (рис. 5.2)

$l_1(p_1) = (-1)p_1 + 2(1 - p_1) = 2 - 3p_1$,

$l_2(p_1) = (-2)p_1 + 4(1 - p_1) = 4 - 6p_1$,

$l_3(p_1) = 3p_1 + 1(1 - p_1) = 1 + 2p_1$,

найдем, что максимум нижней огибающей достигается в $p_1^0 = 1/5$ – точке пересечения прямых l_1 и l_3.

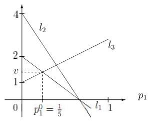

Рис. 5.2

Значение игры $v = l_1(p_1^0) = 7/5$ и $p^0 = (1/5, 4/5)$. Здесь $j_1 = 3$, $k_3 = 2$, $j_2 = 1$, $k_1 = -3$. Из уравнения $2q^* + (-3)(1 - q^*) = 0$ находим $q^* = 3/5$. Отсюда $q^0 = (2/5, 0, 3/5)$ – оптимальная стратегия второго игрока. Сделайте проверку условия $(*)$ теоремы 4.1′ для найденного решения (p^0, q^0, v).

Упражнение 5.3. Найдите все оптимальные стратегии игроков в игре с матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Теперь рассмотрим игру с $m \times 2$-матрицей A. Смешанная стратегия $q = (q_1, 1 - q_1)$ второго игрока определяется величиной $q_1 \in [0, 1]$. Значение игры, согласно следствию теоремы 4.2′, представимо в виде

$$v = \min_{q \in Q} \max_{1 \le i \le m} A(i, q) = \min_{0 \le q_1 \le 1} \max_{1 \le i \le m} [a_{i1} q_1 + a_{i2}(1 - q_1)].$$

Поэтому необходимо построить верхнюю огибающую $\max\limits_{1 \le i \le m} l_i(q_1)$ семейства прямых $l_i(q_1) = a_{i1} q_1 + a_{i2}(1 - q_1)$, $i = 1, ..., m$, и найти на отрезке [0,1] точку q_1^0 ее минимума. Она будет соответствовать оптимальной смешанной стратегии второго игрока. Оптимальная стратегия первого игрока строится с использованием уравнения, аналогичного (5.2).

III. *Сведение решения матричной игры к паре двойственных задач линейного программирования.*

Сведение решения матричной игры к задачам линейного программирования – наиболее эффективный прием, позволяющий использовать алгоритм *симплекс-метода*.

Без потери общности будем предполагать, что значение матричной игры v положительно. Согласно следствию теоремы 4.2′, оно представимо в виде

$$v = \max_{p \in P} \min_{1 \le j \le n} A(p, j) = \max_{p \in P} \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}.$$

Введем вспомогательную переменную u и запишем задачу нахождения максимина как задачу линейного программирования

$v = \max\limits_{(u,p) \in B} u$, где

$B = \{(u, p) \mid \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \ge u, \ j = 1, ..., n, \ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \ p_i \ge 0, \ i = 1, ..., m\}$.

Действительно, при фиксированном $p \in P$ максимальное значение u при ограничениях $(u, p) \in B$ равно $\min\limits_{1 \le j \le n} A(p, j)$.

Поскольку $v > 0$, можно считать, что u принимает положительные значения. Сделаем замену переменных $z_i = p_i / u$, $z = (z_1, ..., z_m)$. Тогда, учитывая ограничения $(u, p) \in B$, получим

$$\sum_{i=1}^{m} z_i = 1/u, \ \ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i \ge 1, \ j = 1, ..., n, \ \ z_i \ge 0, \ i = 1, ..., m.$$

Отсюда

$$v = \max_{(u,p) \in B} u = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} z_i^0},$$

где z^0 – оптимальное решение задачи линейного программирования

$$\sum_{i=1}^{m} z_i \to min$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i \ge 1, \ j = 1, ..., n, \ \ z_i \ge 0, \ i = 1, ..., m. \tag{I}$$

По z^0 находим значение игры и оптимальную смешанную стратегию первого игрока: $v = 1 / \sum_{i=1}^{m} z_i^0$, $p^0 = v z^0$.

Аналогично можно получить, что

$$v = \min_{q \in Q} \max_{1 \le i \le m} A(i, q) = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} w_j^0},$$

где w^0 – оптимальное решение задачи линейного программирования

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \le 1, \ i = 1, ..., m, \ \ w_j \ge 0, \ j = 1, ..., n. \tag{II}$$

Здесь $q^0 = v w^0$ – оптимальная смешанная стратегия второго игрока. Задачи (I) и (II) двойственны одна по отношению к другой.

Отметим свойство дополняющей нежесткости для оптимальных решений z^0 и w^0 задач (I) и (II) :

1) $z_i^0 > 0 \ \Rightarrow \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j^0 = 1$;

2) $w_j^0 > 0 \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i^0 = 1$.

Оно непосредственно вытекает из утверждения теоремы 4.3′ после замены переменных $p^0 = v z^0$, $q^0 = v w^0$.

Пример 5.3. Решить игру с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Отметим, что стратегия $p = (1/2, 1/2)$ обеспечивает первому игроку положительный выигрыш. Поэтому $v > 0$. Выпишем задачи линейного программирования

$$z_1 + z_2 \ \to \ min$$

$$2z_2 \ge 1, \ 3z_1 + z_2 \ge 1, \ 4z_1 - 3z_2 \ge 1, \tag{I}$$

$$z_1, z_2 \ge 0;$$

$$w_1 + w_2 + w_3 \ \to \ max$$

$$3w_2 + 4w_3 \le 1, \ 2w_1 + w_2 - 3w_3 \le 1, \tag{II}$$

$$w_1, w_2, w_3 \ge 0.$$

Используя графические построения на плоскости, нетрудно найти, что $z^0 = (5/8, 1/2)$ – оптимальное решение задачи (I). Отсюда

$$v = 1/(z_1^0 + z_2^0) = 8/9, \quad p^0 = v z^0 = (5/9, 4/9).$$

Найдем оптимальное решение w^0 задачи (II). Поскольку $z_1^0, z_2^0 > 0$ и $3z_1^0 + z_2^0 > 1$, по свойству дополняющей нежесткости

$$3w_2^0 + 4w_3^0 = 1, \ 2w_1^0 + w_2^0 - 3w_3^0 = 1, \ w_2^0 = 0.$$

Поэтому $w^0 = (7/8, 0, 1/4)$, $q^0 = v w^0 = (7/9, 0, 2/9)$.

IV. *Необходимые условия для крайних оптимальных смешанных стратегий.*

Здесь рассматривается комбинаторного типа алгоритм решения игры, основанный на переборе подматриц матрицы A.

Определение. Пусть Z – выпуклое множество евклидова пространства. Точка $z^0 \in Z$ называется *крайней точкой* множества Z, если не существует таких точек $z' \ne z'' \in Z$ и такого числа $0 < \lambda < 1$, что $z^0 = \lambda z' + (1 - \lambda) z''$.

Другими словами, крайняя точка выпуклого множества Z не является внутренней точкой никакого отрезка, соединяющего две точки этого множества. Нетрудно видеть, что крайняя точка не может быть внутренней точкой множества Z. Однако не всякая граничная точка множества Z является крайней точкой этого множества. Например, у квадрата крайними точками являются только его вершины.

Упражнение 5.4. Пусть Z – выпуклый компакт евклидова пространства и $z^0 \in \mathrm{Arg}\max\limits_{z \in Z} |z|^2$. Докажите, что z^0 – крайняя точка множества Z.

Упражнение 5.5. Пусть $h(z)$ – линейная функция, определенная на выпуклом компакте Z евклидова пространства. Докажите, что $h(z)$ достигает максимума в некоторой крайней точке множества Z.

Если множество Z – многогранник, то его крайние точки называются *вершинами*. Вернемся к игре с матрицей A и рассмотрим множество оптимальных смешанных стратегий первого игрока

$$P^0 = \{p^0 \in P \mid \sum_{i=1}^{m} p_i^0 a_{ij} \ge v, \ \ j = 1, ..., n\},$$

где v – значение матричной игры. Нетрудно видеть, что P^0 – многогранник евклидова пространства.

Определение. *Крайней* оптимальной смешанной стратегией первого игрока будем называть вершину многогранника P^0.

Множество оптимальных смешанных стратегий второго игрока

$$Q^0 = \{q^0 \in Q \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^0 \le v, \ \ i = 1, ..., m\}$$

также является многогранником и его вершины – крайние оптимальные смешанные стратегии.

Теорема 5.2. Пусть в игре с матрицей $A = (a_{ij})_{m \times n}$ значение $v \ne 0$. Тогда для любой пары p^0, q^0 крайних оптимальных смешанных стратегий игроков найдется такая невырожденная подматрица $\overline{A} = (a_{i_l j_t})_{k \times k}$ матрицы A, что выполнены условия

$$\sum_{l=1}^{k} p_{i_l}^0 a_{i_l j_t} = v, \ \ t = 1, ..., k, \qquad \sum_{l=1}^{k} p_{i_l}^0 = 1, \tag{5.3}$$

$$\sum_{t=1}^{k} a_{i_l j_t} q_{j_t}^0 = v, \ \ l = 1, ..., k, \qquad \sum_{t=1}^{k} q_{j_t}^0 = 1. \tag{5.4}$$

Доказательство. Определим следующие множества чистых стратегий игроков:

$$I_1 = \{i \mid p_i^0 > 0\}, \ \ I_2 = \{i \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^0 = v\},$$

$$J_1 = \{j \mid q_j^0 > 0\}, \ \ J_2 = \{j \mid \sum_{i=1}^{m} p_i^0 a_{ij} = v\}.$$

Из свойства дополняющей нежесткости (теорема 4.3′) следует, что $I_1 \subset I_2$, $J_1 \subset J_2$. Без потери общности будем считать, что

$$I_1 = \{1, ..., r\}, \ \ I_2 = \{1, ..., d\}, \ \ J_1 = \{1, ..., s\}, \ \ J_2 = \{1, ..., h\},$$

где $r \le d$ и $s \le h$. Этого всегда можно добиться подходящей перестановкой строк и столбцов матрицы A.

Рассмотрим подматрицу $\tilde{A} = (a_{ij})_{d \times h}$ матрицы A. Докажем, что первые r строк матрицы $\tilde{A}$ линейно независимы. Предположим противное. Тогда найдутся такие числа α_i, $i = 1, ..., r$, не все равные нулю, что

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_{ij} = 0, \ \ j = 1, ..., h. \tag{5.5}$$

Покажем, что при этом

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 0. \tag{5.6}$$

Действительно, из (5.5) и из определения множества I_2 следует, что

$$0 = \sum_{j=1}^{h} (\sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_{ij}) q_j^0 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (\sum_{j=1}^{h} a_{ij} q_j^0) = v \sum_{i=1}^{r} \alpha_i.$$

Поскольку $v \ne 0$, отсюда следует (5.6). Чтобы придти к противоречию, рассмотрим ненулевой вектор $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_r, 0, ..., 0) \in E^m$ и при $\varepsilon \ne 0$ определим вектор $p^\varepsilon = p^0 + \varepsilon \alpha$. Из (5.6) следует, что сумма компонент вектора p^ε равна единице и при достаточно малом ε эти компоненты можно сделать неотрицательными. Таким образом, при малом ε вектор p^ε является смешанной стратегией первого игрока. Покажем, что при достаточно малом ε стратегия p^ε оптимальна. Действительно, используя (5.5) и определение множества J_2, при малом ε получим

$$A(p^\varepsilon, j) = \sum_{i=1}^{m} p_i^\varepsilon a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} p_i^0 a_{ij} + \varepsilon \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_{ij} \begin{cases} = v, & \text{j=1,...,h}, \\ > v, & \text{j > h}. \end{cases}$$

Следовательно, смешанная стратегия p^ε при малых ε оптимальна. Наконец, $p^0 = (p^\varepsilon + p^{-\varepsilon})/2$, что противоречит определению стратегии p^0.

Аналогично доказывается, что первые s столбцов матрицы $\tilde{A}$ линейно независимы. Обозначим через k ранг матрицы $\tilde{A}$. Из доказанного вытекает, что $k \ge \max[r, s]$. Без потери общности можно считать базисными первые k строк и первые k столбцов матрицы $\tilde{A}$. На их пересечении стоит невырожденная подматрица $\overline{A} = (a_{ij})_{k \times k}$. Для этой подматрицы справедливы равенства

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^0 a_{ij} = v, \ \ j = 1, ..., k, \qquad \sum_{i=1}^{k} p_i^0 = 1,$$

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} q_j^0 = v, \ \ i = 1, ..., k, \qquad \sum_{j=1}^{k} q_j^0 = 1,$$

которые представляют собой системы (5.3) и (5.4), если вернуться к исходной нумерации строк и столбцов. ■

Упражнение 5.6. Докажите, что условия (5.3) и (5.4) достаточны для того, чтобы оптимальные смешанные стратегии p^0 и q^0 были крайними оптимальными.

Покажем, что система $k+1$ линейных уравнений (5.3) относительно $k+1$ неизвестных $p^0_{i_l},\ l=1,...,k,\ \ v$ либо не имеет решения, либо имеет единственное решение. Действительно, расширенная матрица системы (5.3) имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{i_1j_1} & \cdots & a_{i_kj_1} & -1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 0 \\ a_{i_1j_k} & \cdots & a_{i_kj_k} & -1 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Нетрудно видеть, что ее ранг равен $k+1$. Если система (5.3) имеет решение, то по теореме Кренекера-Капелли ранг матрицы системы также равен $k+1$ и она – невырожденная. Отсюда следует единственность решения системы (5.3).

Выпишем в последнем случае решения систем (5.3) и (5.4) в явном виде. Для этого введем векторы

$$\overline{p}=(p^0_{i_l},\ l=1,...,k),\ \overline{q}=(q^0_{j_t},\ t=1,...,k),\ e=(1,...,1)\in E^k$$

и запишем систему (5.3) в матричных обозначениях

$$\overline{p}\overline{A}=ve,\ \ \langle\overline{p},e\rangle=1.$$

Умножая первое равенство справа на матрицу $(\overline{A})^{-1}$, выразим вектор $\overline{p}$ через $v:\overline{p}=ve(\overline{A})^{-1}$. Подставляя это выражение в уравнение $\langle\overline{p},e\rangle=1$, получим

$$\overline{p}=\frac{e(\overline{A})^{-1}}{\langle e(\overline{A})^{-1},e\rangle},\ \ v=\frac{1}{\langle e(\overline{A})^{-1},e\rangle}.$$

Аналогично из системы (5.4) находится

$$\overline{q}=\frac{(\overline{A})^{-1}e}{\langle(\overline{A})^{-1}e,e\rangle}.$$

Упражнение 5.7. Приведите пример 2×2-матрицы $\overline{A}$, для которой система (5.3) не имеет решения.

Рассмотрим теперь алгоритм решения матричной игры. Перебираем все невырожденные $k\times k$-подматрицы $\overline{A}$ матрицы A, начиная с $k=2$.

Для каждой подматрицы $\overline{A}$ решаем системы уравнений (5.3) и (5.4). Если решения не существует или некоторые компоненты

$$p^0_{i_l},\ l=1,...,k,\ \ q^0_{j_t},\ t=1,...,k$$

отрицательны, то переходим к следующей подматрице $\overline{A}$. Пусть указанные компоненты решений неотрицательны. Тогда определим смешанные стратегии

$$p^0\ :\ p^0_i=\begin{cases}p^0_{i_l}, & i=i_l,\\ 0, & i\neq i_l;\end{cases}\ \ q^0\ :\ q^0_j=\begin{cases}q^0_{j_t}, & j=j_t,\\ 0, & j\neq j_t.\end{cases}$$

Теперь для тройки (p^0,q^0,v) необходимо проверить условие $(*)$ теоремы $4.1'$. Если оно выполнено, то искомое решение (p^0,q^0,v) найдено. В противном случае переходим к следующей подматрице $\overline{A}$.

Пример 5.4. Рассмотрим матрицу вида

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\1&0&0&1&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Здесь нет слабо доминируемых строк (даже никакими выпуклыми комбинациями – докажите!) и слабо доминирующих столбцов . Если применить указанный выше алгоритм, то подматрица

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{15}\\a_{41}&a_{45}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

даст решение в смешанных стратегиях

$$p^0=(1/2,0,0,1/2),\ q^0=(1/2,0,0,0,1/2),\ v=1/2.$$

V. *Метод Брауна.*

В этом параграфе мы рассмотрим итерационный метод приближенного решения игры с матрицей A. Пусть задано число $\varepsilon>0$. Требуется найти значение игры с точностью до величины ε, а также ε-максиминную и ε-минимаксную смешанные стратегии игроков.

Метод Брауна состоит в многократном фиктивном разыгрывании матричной игры, при котором игроки по определенным правилам выбирают свои чистые стратегии. Пусть за k повторений игры первый игрок r_i

раз выбрал стратегию $i,\ i=1,...,m$, а второй l_j раз выбрал стратегию $j,\ j=1,...,n$. Векторы частот выбора чистых стратегий

$$p(k)=\left(\frac{r_1}{k},...,\frac{r_m}{k}\right),\ \ q(k)=\left(\frac{l_1}{k},...,\frac{l_n}{k}\right)$$

являются смешанными стратегиями игроков.

Определим итерационный процесс Брауна.

Шаг 1. Игроки выбирают произвольно стратегии i_1 и j_1.

Пусть за k повторений игры первый игрок выбрал стратегии $i_1,...,i_k$, а второй – стратегии $j_1,...,j_k$. При этом $p(k)$ и $q(k)$ – соответствующие векторы частот.

Шаг $k+1$. Игроки выбирают стратегии i_{k+1} и j_{k+1} из условий

$$A(i_{k+1},q(k))=\max_{1\le i\le m}A(i,q(k))=v_1(k),$$

$$A(p(k),j_{k+1})=\min_{1\le j\le n}A(p(k),j)=v_2(k).$$

Каждый игрок выбирает свою чистую стратегию как наилучший ответ на соответствующий вектор частот партнера. Если наилучших ответов несколько, то выбирается любой из них.

Покажем, что $v_1(k)$ и $v_2(k)$ – оценки для значения v матричной игры:

$$v_2(k)\le v\le v_1(k),\quad k=1,2,.... \tag{5.7}$$

Действительно, используя следствие теоремы $4.2'$, получим

$$v_2(k)=\min_{1\le j\le n}A(p(k),j)\le\max_{p\in P}\min_{1\le j\le n}A(p,j)=v=$$

$$=\min_{q\in Q}\max_{1\le i\le m}A(i,q)\le\max_{1\le i\le m}A(i,q(k))=v_1(k).$$

Для доказательства сходимости последовательностей $\{v_1(k)\}$, $\{v_2(k)\}$ к значению игры v нам потребуется обобщенный итерационный процесс.

Пусть $c(0)\in E^m,\ d(0)\in E^n$ – два вектора, удовлетворяющие условию $\max\limits_{1\le i\le m}c_i(0)=\min\limits_{1\le j\le n}d_j(0)$. Возьмем

$$i_1\in\ \mathrm{Arg}\max_{1\le i\le m}c_i(0),\ \ j_1\in\mathrm{Arg}\min_{1\le j\le n}d_j(0).$$

Пусть определены стратегии $i_1,...,i_k,\ j_1,...,j_k$ и векторы $c(0),c(1),...,c(k),\ d(0),d(1),...,d(k)$. Возьмем

$$i_{k+1}\in\mathrm{Arg}\max_{1\le i\le m}c_i(k),\ \ j_{k+1}\in\mathrm{Arg}\min_{1\le j\le n}d_j(k)$$

и положим для всех $i=1,...,m,\ j=1,...,n$

$$c_i(k+1)=c_i(k)+a_{ij_k},\ \ d_j(k+1)=d_j(k)+a_{i_kj}.$$

Таким образом, вектор $c(k+1)$ есть сумма вектора $c(0)$ и столбцов матрицы A с номерами $j_1,...,j_k$. Аналогично, вектор $d(k+1)$ есть сумма вектора $d(0)$ и строк матрицы A с номерами $i_1,...,i_k$. Нетрудно видеть, что

$$c_i(k)=c_i(0)+\sum_{t=1}^{k}a_{ij_t}=c_i(0)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}l_j=c_i(0)+kA(i,q(k)),$$

$$d_j(k)=d_j(0)+kA(p(k),j).$$

При нулевых векторах $c(0)$ и $d(0)$ построенный итерационный процесс совпадает с процессом Брауна. Поскольку множества $\mathrm{Arg}\max\limits_{1\le i\le m}c_i(k)$ и $\mathrm{Arg}\min\limits_{1\le j\le n}d_j(k)$ могут содержать более одного элемента, последовательности $\{c(k)\},\{d(k)\}$ определяются в ходе итерационного процесса не однозначно.

Определим, как и ранее, последовательности величин

$$v_1(k)=\max_{1\le i\le m}\frac{c_i(k)}{k},\ v_2(k)=\min_{1\le j\le n}\frac{d_j(k)}{k},\ k=1,2,....$$

Далее будет доказана их сходимость к значению игры v для любых векторов $c(0),d(0)$.

Из неравенств (см. доказательство неравенства (5.7))

$$\max_{1\le i\le m}A(i,q(k))\ge v\ge\min_{1\le j\le n}A(p(k),j),\ \ k=1,2,...,$$

следует, что

$$\varliminf_{k\to\infty}v_1(k)=\varliminf_{k\to\infty}\max_{1\le i\le m}\left[\frac{c_i(0)}{k}+A(i,q(k))\right]\ge v\ge$$

$$\ge\varlimsup_{k\to\infty}\min_{1\le j\le n}\left[\frac{d_j(0)}{k}+A(p(k),j)\right]=\varlimsup_{k\to\infty}v_2(k).$$

Отсюда

$$\varliminf_{k\to\infty}(v_1(k)-v_2(k))\ge 0. \tag{5.8}$$

Покажем, что

$$\varlimsup_{k\to\infty}(v_1(k)-v_2(k))\le 0. \tag{5.9}$$

Будем использовать обозначение

$$\Delta(k)=\max_{1\le i\le m}c_i(k)-\min_{1\le j\le n}d_j(k).$$

С помощью него условие $\max\limits_{1\le i\le m}c_i(0)=\min\limits_{1\le j\le n}d_j(0)$ можно записать в виде $\Delta(0)=0$.

Определение. Будем говорить, что i-ая строка (j-й столбец) матрицы A существенна (существенен) на отрезке шагов $[s,s+t]$, если для некоторого шага $t'\in[s,s+t]$ $\ i_{t'}=i\ \ (j_{t'}=j)$.

Лемма 5.1. Пусть все строки и столбцы матрицы A существенны на отрезке шагов $[s,s+t]$. Тогда

$$\max_{1\le i\le m}c_i(s+t)-\min_{1\le j\le n}d_j(s+t)\le 4at, \tag{5.10}$$

где $a=\max\limits_{1\le i\le m}\max\limits_{1\le j\le n}|a_{ij}|$.

Доказательство. Покажем сначала, что в условиях леммы справедливы неравенства

$$\max_{1\le i\le m}c_i(s+t)-\min_{1\le i\le m}c_i(s+t)\le 2at, \tag{5.11}$$

$$\max_{1\le j\le n}d_j(s+t)-\min_{1\le j\le n}d_j(s+t)\le 2at. \tag{5.12}$$

Докажем (5.11). Пусть для l-ой строки выполнено равенство $\min\limits_{1\le i\le m}c_i(s+t)=c_l(s+t)$. Из условия леммы вытекает, что найдется такой номер шага $t'\in[s,s+t]$, что $\max\limits_{1\le i\le m}c_i(t')=c_l(t')$. Тогда

$$\max_{1\le i\le m}c_i(s+t)-\min_{1\le i\le m}c_i(s+t)=$$

$$=\max_{1\le i\le m}c_i(s+t)-\max_{1\le i\le m}c_i(t')+c_l(t')-c_l(s+t)\le$$

$$\le\max_{1\le i\le m}(c_i(s+t)-c_i(t'))+c_l(t')-c_l(s+t)\le 2at,$$

поскольку все последние разности на превосходят at. Неравенство (5.12) доказывается аналогично. Покажем также, что справедливо неравенство

$$\min_{1\le i\le m}c_i(s+t)-\max_{1\le j\le n}d_j(s+t)\le 0. \tag{5.13}$$

Пусть v^T – значение игры с матрицей A^T, транспонированной к A. Тогда

$$\min_{1\le i\le m}A(i,q(s+t))\le\max_{q\in Q}\min_{1\le i\le m}A(i,q)=v^T=$$

$$=\min_{p\in P}\max_{1\le j\le n}A(p,j)\le\max_{1\le j\le n}A(p(s+t),j).$$

Отсюда

$$\min_{1\le i\le m}\left[\frac{c_i(0)}{s+t}+A(i,q(s+t))\right]\le\max_{1\le i\le m}\frac{c_i(0)}{s+t}+\min_{1\le i\le m}A(i,q(s+t))\le$$

$$\le\min_{1\le j\le n}\frac{d_j(0)}{s+t}+\max_{1\le j\le n}A(p(s+t),j))\le\max_{1\le j\le n}\left[\frac{d_j(0)}{s+t}+A(p(s+t),j))\right]$$

Домножая это неравенство на $s+t$, выводим (5.13). Неравенство (5.10) получается сложением неравенств (5.11)–(5.13). ■

Лемма 5.2. Для произвольной матрицы A и произвольного $\varepsilon>0$ найдется такой номер шага k_0, что для любых последовательностей $c(k),d(k),\ k=0,1,...$ итерационного процесса $\Delta(k)\le\varepsilon k$ при $k\ge k_0$.

Доказательство. Утверждение леммы верно для 1×1-матриц A, поскольку тогда $c(k)=d(k)$ для всех $k\ge 1$. Примем, что лемма верна для всех подматриц матрицы A и докажем, что она верна и для A. Выберем k_1 таким образом, чтобы для любых последовательностей $c^1(k),d^1(k),\ k=0,1,...$ итерационного процесса, соответствующего подматрице $A^1=(a_{ij})_{i\in I j\in J}$, полученной из A вычеркиванием строки или столбца, было выполнено неравенство

$$\Delta^1(k)\overset{def}{=}\max_{i\in I}c^1_i(k)-\min_{j\in J}d^1_j(k)\le\frac{1}{2}\varepsilon k,\ \ k\ge k_1.$$

Докажем, что если для матрицы A некоторая строка (столбец) несущественна (несущественен) на отрезке $[s,s+k_1]$, то справедливо неравенство

$$\Delta(s+k_1)\le\Delta(s)+\frac{1}{2}\varepsilon k_1. \tag{5.14}$$

Предположим, например, что подматрица A^1 получается вычеркиванием из A несущественной l-й строки. Положим $I=\{1,...,m\}\backslash\{l\}$,

$$d^1_j(0)=d_j(s)+\Delta(s),\ j=1,...,n,\ \ c^1_i(0)=c_i(s),\ i\in I.$$

Поскольку l-ая строка матрицы A несущественна, $\Delta^1(0)=0$ и в итерационном процессе можно взять $i^1_k=i_{s+k},\ j^1_k=j_{s+k},\ k=1,...,k_1$. Следовательно, $d^1_j(k)=d_j(s+k)+\Delta(s),\ j=1,...,n,\ c^1(k)=(c_i(s+k),i\in I),\ k=1,...,k_1$. Итерационный процесс для матрицы A^1 можно продолжать и при $k>k_1$.

На основании выбора k_1 $\ \ \Delta^1(k_1)\le\frac{1}{2}\varepsilon k_1$. Поэтому

$$\Delta(s+k_1)=\Delta^1(k_1)+\Delta(s)\le\Delta(s)+\frac{1}{2}\varepsilon k_1$$

и неравенство (5.14) доказано.

Мы можем теперь показать, что для любых последовательностей $c(k),d(k),\ k=0,1,...,$ итерационного процесса $\Delta(k)\le\varepsilon k$ при $k\ge 8ak_1/\varepsilon$.

Рассмотрим целое $k>k_1$ и представим его в виде $k=(\theta+t)k_1$, где $0\le\theta<1$, а $t>0$ – целое (θk_1 – остаток от деления k на k_1).

Случай 1. Найдется такое целое положительное число $h\le t$, что все строки и столбцы матрицы A на отрезке $[(\theta+h-1)k_1,(\theta+h)k_1]$ существенны. Беря наибольшее из таких h, имеем

$$\Delta(k)\le\Delta((\theta+h)k_1)+\frac{1}{2}\varepsilon(t-h)k_1. \tag{5.15}$$

Это неравенство получено повторным применением неравенства (5.14), поскольку на каждом из отрезков

$$[(\theta+r-1)k_1,(\theta+r)k_1],\ r=h+1,...,t,$$

некоторая строка или столбец матрицы A несущественны.

Из леммы 5.1 на основании выбора h имеем

$$\Delta((\theta+h)k_1)\le 4ak_1. \tag{5.16}$$

Из (5.15) и (5.16) получаем

$$\Delta(k)\le 4ak_1+\frac{1}{2}\varepsilon(t-h)k_1\le(4a+\frac{1}{2}\varepsilon t)k_1.$$

Случай 2. В каждом отрезке $[(\theta+h-1)k_1,(\theta+h)k_1],\ \ h=1,...,t$, некоторая строка или столбец несущественны. Следовательно, как и при выводе (5.15),

$$\Delta(k)\le\Delta(\theta k_1)+\frac{1}{2}\varepsilon tk_1\le(2a\theta+\frac{1}{2}\varepsilon t)k_1.$$

В обоих случаях, используя неравенство $tk_1\le k$, получим $\Delta(k)\le(4a+\frac{1}{2}\varepsilon t)k_1\le 4ak_1+\frac{1}{2}\varepsilon k\le\varepsilon k$ при $k\ge 8ak_1/\varepsilon$. ■

Из леммы 5.2 вытекает неравенство (5.9) и сходимость последовательностей $v_1(k),v_2(k),\ k=0,1,...,$ к значению игры v.

Вернемся к методу Брауна. Сформулируем правило остановки. Пусть задано число $\varepsilon>0$. Будем останавливаться на шаге k_0, когда впервые выполнено неравенство

$$v_1(k_0)-v_2(k_0)\le\varepsilon. \tag{5.17}$$

Из (5.7) и (5.17) следует, что величины $v_1(k_0),v_2(k_0)$ приближают значение v матричной игры с точностью до ε. Покажем, что $p(k_0)$ – ε-максиминная стратегия первого игрока. Действительно,

$$\min_{1\le j\le n}A(p(k_0),j)=v_2(k_0)\ge v-\varepsilon.$$

Аналогично, $q(k_0)$ –
ε-минимаксная стратегия второго игрока.

Теорема 5.3. В методе Брауна $\lim\limits_{k\to\infty}v_1(k)=\lim\limits_{k\to\infty}v_2(k)=v$, а любые предельные точки p^0,q^0 последовательностей $\{p(k)\}$, $\{q(k)\}$ являются оптимальными смешанными стратегиями игроков.

Доказательство. Сходимость последовательностей $\{v_1(k)\}$ и $\{v_2(k)\}$ к значению игры v вытекает из леммы 5.2. Пусть p^0 – любая предельная точка последовательности $\{p(k)\}$. Покажем, что p^0 – оптимальная смешанная стратегия первого игрока. Действительно, поскольку последовательность $\{p(k)\}$ принадлежит компакту P, без потери общности (выделяя соответствующую подпоследовательность) можно считать, что она сходится к p^0. Тогда

$$\min_{1\le j\le m}A(p(k),j)\ge v-\varepsilon_k,\ \ k=1,2,...,$$

где $\varepsilon_k\to 0+$. Переходя в этих неравенствах к пределу при $k\to\infty$, получим неравенство $\min\limits_{1\le j\le m}A(p^0,j)\ge v$, что означает оптимальность стратегии p^0 . Аналогично доказывается оптимальность для второго игрока любой предельной точки q^0 последовательности $\{q(k)\}$. ■

Оценим скорость сходимости последовательностей $\{v_1(k)\}$ и $\{v_2(k)\}$ к значению игры v.

Пусть $A^l,\ l\ge 0$ – подматрица, полученная из матрицы A вычеркиванием каких-либо l строк или столбцов, а $\{v^l_1(k)\}$, $\{v^l_2(k)\}$ – последовательности обобщенного итерационного процесса, соответствующего подматрице A^l. Обозначим через k_l число повторений игры, при котором для любой подматрицы A^l и любых начальных векторов $c^l(0),d^l(0)$ выполнено неравенство $v^l_1(k)-v^l_2(k)\le 2^{-l}\varepsilon\ \ \forall k\ge k_l$. Просматривая доказательство леммы 5.2, замечаем, что $k_{m+n-1}=1$ и $k_0\ge 8ak_1\varepsilon^{-1}$. Аналогичным неравенством связаны k_l и $k_{l+1}:k_l\ge 2^l8ak_{l+1}\varepsilon^{-1}$, $l=0,1,...,m+n-2$. Отсюда

$$k_0\ge\frac{8a}{\varepsilon}k_1\ge\left(\frac{8a}{\varepsilon}\right)^2 2k_2\ge\left(\frac{8a}{\varepsilon}\right)^3 2\cdot 2^2k_3\ge...$$

$$\ge\left(\frac{8a}{\varepsilon}\right)^{m+n-1}2^{1+2+...+m+n-2}k_{m+n-1}=\left(\frac{8a}{\varepsilon}\right)^{m+n-1}2^{\frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2}}.$$

Таким образом, при любом $k\ge k_0$ выполнены неравенства

$$v_1(k)-v_2(k)\le\varepsilon\overset{def}{=}2^{\frac{m+n-2}{2}}8a\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{m+n-1}}.$$

Итак, полученная оценка скорости сходимость процесса Брауна малоэффективна при больших размерах матрицы A. Практически наблюдаемая скорость сходимости существенно выше.

В заключение рассмотрим модификацию правила остановки по методу Брауна. Положим

$$v^*_1(k)=\min_{1\le t\le k}v_1(t),\ v^*_2(k)=\max_{1\le t\le k}v_2(t),\ \ k=1,2,...$$

Из неравенств (5.7) следует, что

$$v^*_2(k)\le v\le v^*_1(k),\ \ k=1,2,.... \tag{5.18}$$

Таким образом, $v_2^*(k), v_1^*(k)$ – наилучшие оценки снизу и сверху для значения игры v за k ее повторений. При заданном $\varepsilon > 0$ будем останавливать процесс на шаге k_0, когда впервые выполнено неравенство $v_1^*(k_0) - v_2^*(k_0) \le \varepsilon$. При этом величины $v_1^*(k_0), v_2^*(k_0)$ приближают значение игры v с точностью до ε. Пусть $v_1^*(k_0) = v_1(t_1)$, $v_2^*(k_0) = v_2(t_2)$. Покажем, что $p(t_2)$ – ε-максиминная стратегия первого игрока. Действительно, используя неравенство (5.18) при $k = k_0$, получим

$$\min_{1\le j\le n} A(p(t_2), j) = v_2(t_2) = v_2^*(k_0) \ge v - \varepsilon.$$

Аналогично, $q(t_1)$ – ε-минимаксная стратегия второго игрока.

Пример 5.5. Пусть $\varepsilon = 1/5$, а матрица игры –

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что решение игры в смешанных стратегиях имеет вид

$$p^0 = q^0 = (0, 2/3, 1/3),\ v = 1.$$

Применяя метод Брауна, найдем приближенное значение игры, а также ε-максиминную и ε-минимаксную смешанные стратегии игроков. Вычисления удобно производить в форме таблицы. В каждой ее k-ой строке подчеркнуты наибольшие значения величин $c_i(k),\ i = 1,2,3$ и наименьшие значения величин $d_j(k),\ j = 1,2,3$.

Табл. 5.1

k	i_k	$c_1(\cdot)$	$c_2(\cdot)$	$c_3(\cdot)$	$v_1(\cdot)$	j_k	$d_1(\cdot)$	$d_2(\cdot)$	$d_3(\cdot)$	$v_2(\cdot)$
1	1	$\underline{2}$	2	-1	2	1	2	1	$\underline{0}$	0
2	1	2	$\underline{5}$	-4	5/2	3	4	2	$\underline{0}$	0
3	2	2	$\underline{8}$	-7	8/3	3	6	$\underline{2}$	3	2/3
4	2	3	$\underline{8}$	-4	2	2	8	$\underline{2}$	6	1/2
5	2	4	$\underline{8}$	-1	8/5	2	10	$\underline{2}$	9	2/5
6	2	5	$\underline{8}$	2	4/3	2	12	$\underline{2}$	12	1/3
7	2	6	$\underline{8}$	5	8/7	2	14	$\underline{2}$	15	2/7
8	2	7	$\underline{8}$	$\underline{8}$	1	2	16	$\underline{2}$	18	1/4
9	3	8	8	$\underline{11}$	11/9	2	15	$\underline{5}$	15	5/9
10	3	9	8	$\underline{14}$	7/5	2	14	$\underline{8}$	12	4/5

$$v_1^*(10) = 1,\ \ v_2^*(10) = 4/5,\ \ t_1 = 8,\ \ t_2 = 10,$$
$$p(10) = (1/5, 3/5, 1/5),\ \ q(8) = (1/8, 5/8, 1/4).$$

Упражнение 5.8. Проверить 1/5-оптимальность полученных стратегий. Сделать еще 8 шагов по алгоритму и улучшить точность до $\varepsilon = 1/18$.

§ 6. Игры с вогнутой функцией выигрыша

Определение. Антагонистическая игра $\Gamma = \langle X, Y, F(x,y)\rangle$ называется игрой с *вогнутой функцией выигрыша*, если $X \subset E^m$, $Y \subset E^n$ – выпуклые компакты евклидовых пространств, функция $F(x,y)$ непрерывна на $X \times Y$ и при любом $y \in Y$ она вогнута по x.

Игра Γ называется игрой с *выпуклой функцией выигрыша*, если (вместо требования вогнутости) при любом $x \in X$ функция $F(x,y)$ выпукла по y.

Теорема 6.1 (Хелли). В евклидовом пространстве E^m имеется семейство $D_\alpha,\ \alpha \in \{\alpha\}$ выпуклых компактов, обладающее следующим свойством: для любых $\alpha_1, ..., \alpha_{m+1}$ $\bigcap\limits_{j=1}^{m+1} D_{\alpha_j} \ne \emptyset$. Тогда $\bigcap\limits_{\alpha\in\{\alpha\}} D_\alpha \ne \emptyset$.

Доказательство теоремы см. в Приложении П2.

Упражнение 6.1. Докажите теорему при $m = 1$.

Теорема 6.2. Для игры Γ с вогнутой функцией выигрыша справедливо равенство

$$\underline{v} = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} F(x,y) = \min_{\substack{y^j\in Y\\ j=1,...,m+1}} \max_{x\in X} \min_{1\le j\le m+1} F(x, y^j).$$

Доказательство. Обозначим последнюю величину через w. Для любых $y^1, ..., y^{m+1} \in Y$ справедливо неравенство

$$\max_{x\in X} \min_{1\le j\le m+1} F(x,y^j) \ge \max_{x\in X}\min_{y\in Y} F(x,y) = \underline{v}.$$

Следовательно, $w \ge \underline{v}$. Докажем неравенство $w \le \underline{v}$. По определению w для любых $y^1, ..., y^{m+1} \in Y$

$$\max_{x\in X} \min_{1\le j\le m+1} F(x,y^j) \ge w \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, x \in X:\ F(x,y^j) \ge w,\ j = 1, ..., m+1.$$

Введем множества $D_y = \{x \in X \mid F(x,y) \ge w\},\ y \in Y$, представляющие собой выпуклые компакты в E^m. Из последних неравенств вытекает, что $\bigcap\limits_{j=1}^{m+1} D_{y_j} \ne \emptyset$ при любых $y^1, ..., y^{m+1} \in Y$. Следовательно, выполнены условия теоремы 6.1 и $\bigcap\limits_{y\in Y} D_y \ne \emptyset$, т.е.

$$\exists\, x \in \bigcap_{y\in Y} D_y \Rightarrow F(x,y) \ge w\ \ \forall\, y \in Y \Rightarrow \min_{y\in Y} F(x,y) \ge w.$$

Отсюда $\underline{v} \ge w \Rightarrow \underline{v} = w$. ■

Положим $Q = \{q \in E^{m+1} \mid \sum\limits_{j=1}^{m+1} q_j = 1,\ q_j \ge 0,\ j = 1, ..., m+1\}$.

Теорема 6.3. Игра Γ с вогнутой функцией выигрыша имеет решение в смешанных стратегиях вида $(x^0, \psi^0, \underline{v})$, где x^0 – максиминная стратегия первого игрока,

$$\psi^0 = \sum_{j=1}^{m+1} q_j^0 I_{\overline{y}_j},\ \ q^0 = (q_1^0, ..., q_{m+1}^0) \in Q,$$

$$(\overline{y}_j, j = 1, ..., m+1) \in \operatorname{Arg} \min_{\substack{y^j\in Y\\ j=1,...,m+1}} \max_{x\in X} \min_{1\le j\le m+1} F(x,y^j),$$

а q^0 – минимаксная стратегия в задаче

$$\min_{q\in Q}\max_{x\in X} \Phi(x,q),\quad \Phi(x,q) = \sum_{j=1}^{m+1} F(x, \overline{y}^j) q_j.$$

Доказательство. По теореме 6.2 и по выбору

$$\overline{y}_j, j = 1, ..., m+1,\quad \underline{v} = w = \max_{x\in X} \min_{1\le j\le m+1} F(x, \overline{y}^j).$$

Функция $\Phi(x,q)$ непрерывна, линейна по q и вогнута по x. Следовательно, по теореме 2.3 она имеет седловую точку. Поэтому

$$\underline{v} = \max_{x\in X} \min_{1\le j\le m+1} F(x, \overline{y}^j) = \max_{x\in X}\min_{q\in Q} \Phi(x,q) =$$

$$= \min_{q\in Q}\max_{x\in X} \Phi(x,q) = \max_{x\in X} \Phi(x, q^0) =$$

$$= \max_{x\in X} \sum_{j=1}^{m+1} F(x, \overline{y}^j) q_j^0 = \max_{x\in X} \int\limits_Y F(x,y) d\psi^0(y) = \max_{x\in X} F(x, \psi^0).$$

Отсюда следуют равенства

$$\max_{x\in X} F(x, \psi^0) = \underline{v} = \min_{y\in Y} F(x^0, y)$$

и по теореме 4.1 тройка $(x^0, \psi^0, \underline{v})$ – решение игры в смешанных стратегиях. ■

Замечание. В доказательствах теорем 5.2 и 5.3 выпуклость множества Y не использовалась. Y можно было считать компактом метрического пространства.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Положим $P = \{p \in E^{n+1} \mid \sum\limits_{i=1}^{n+1} p_i = 1,\ p_i \ge 0,\ i = 1, ..., n+1\}$.

Теорема 5.4. Игра Γ с выпуклой функцией выигрыша имеет решение в смешанных стратегиях вида $(\varphi^0, y^0, \overline{v})$, где y^0 – минимаксная стратегия первого игрока,

$$\varphi^0 = \sum_{i=1}^{n+1} p_i^0 I_{\overline{x}_i},\ \ p^0 = (p_i^0,\ i = 1, ..., n+1) \in P,$$

$$(\overline{x}_i,\ i = 1, ..., n+1) \in \operatorname{Arg} \max_{\substack{x^i\in X\\ i=1,...,n+1}} \min_{y\in Y} \max_{1\le i\le n+1} F(x^i, y),$$

а p^0 – максиминная стратегия в задаче

$$\max_{p\in P}\min_{y\in Y} \Phi^1(p,y),\quad \Phi^1(p,y) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i F(\overline{x}^i, y).$$

Пример 6.1. Пусть $X = Y = [0,1]$, $F(x,y) = 1 - (x-y)^2$ – игра с вогнутой функцией выигрыша. Здесь

$$v = \underline{v} = \max_{0\le x\le 1}\min_{0\le y\le 1} [1 - (x-y)^2] = \frac{3}{4},\ x^0 = \frac{1}{2},\ \psi^0 = q_1^0 I_{\overline{y}^1} + q_2^0 I_{\overline{y}^2},$$

$$q_1^0 + q_2^0 = 1,\ q_1^0, q_2^0 \ge 0,\quad 0 \le \overline{y}^1 \le \overline{y}^2 \le 1.$$

Найдем величину

$$w = \min_{0\le y^1\le y^2\le 1} \max_{0\le x\le 1} \min[F(x,y^1), F(x,y^2)].$$

При фиксированных y^1, y^2

$$\max_{0\le x\le 1} \min[1 - (x-y^1)^2, 1 - (x-y^2)^2] = 1 - \left(\frac{y^1 - y^2}{2}\right)^2.$$

Отсюда

$$w = \min_{0\le y^1\le y^2\le 1} 1 - \left(\frac{y^1 - y^2}{2}\right)^2 = \frac{3}{4},\quad \overline{y}^1 = 0,\ \overline{y}^2 = 1.$$

Найдем теперь q_1^0, q_2^0, решая задачу

$$\min_{0\le q_1\le 1} \max_{0\le x\le 1} \Phi(x,q) = \min_{0\le q_1\le 1} \max_{0\le x\le 1} [(1 - x^2) q_1 + (1 - (x-1)^2) q_2].$$

Имеем $\Phi'_x(x,q) = -2xq_1 - 2(x-1)q_2 = 0$. Отсюда стратегия $\overline{x} = q_2$ максимизирует функцию $\Phi(x,q)$ по переменной x. Следовательно,

$$\max_{0\le x\le 1} \Phi(x,q) = 1 - q_1(1 - q_1) \ \Rightarrow\ q_1^0 = q_2^0 = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \psi^0 = \frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{2} I_1.$$

Отметим, что полученное решение игры можно было предугадать и проверить лишь условие $(*)$.

Упражнение 6.2. Решите игру с вогнутой функцией выигрыша

$$X = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_i \le 1,\ i = 1,2\},\ \ Y = X,$$

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = 1 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2.$$

Широкий класс игр с выпуклыми функциями выигрыша образуют *статистические игры*. Дадим необходимые определения.

Статистик наблюдает реализации z_i независимых, одинаково распределенных случайных величин $\mathbf{Z}_i,\ i = 1, ..., n$, имеющих плотность распределения $g(z_i|x)$, зависящую от вектора неизвестных параметров $x \in X$. Здесь X – выпуклое множество евклидова пространства. Пусть $\mathbf{Z} =$

$(\mathbf{Z}_1, ..., \mathbf{Z}_n)$ – векторная случайная величина, принимающая значения $z = (z_1, ..., z_n) \in Z$ и имеющая плотность распределения $\overline{g}(z|x) = \prod\limits_{i=1}^{n} g(z_i|x)$.

Статистик оценивает вектор x, используя *решающую функцию* $y: Z \to A = X$. Величина $a = y(z)$ называется *оценкой* вектора x из множества оценок A. Ошибка в определении вектора x задается с помощью *функции потерь* $L(x,a)$. Математическое ожидание этой функции

$$F(x,y) \stackrel{def}{=} E[L(x, y(\mathbf{Z}))] = \int\limits_Z L(x, y(z)) \overline{g}(z|x) dz$$

называется *функцией риска*.

Статистик (второй игрок) использует решающее правило (стратегию) y из некоторого множества Y и стремится минимизировать функцию риска. Природа (первый игрок) стремится ее максимизировать, выбирая $x \in X$. Построенная антагонистическая игра
$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y)\rangle$ называется статистической.

Пусть оцениваемый вектор является случайной величиной $\mathbf{X}$, принимающей значения $x \in X$ и имеющей плотность распределения f. С игровой точки зрения это означает, что природа использует смешанные стратегии $f \in \{f\}$.

Обычно используется следующий метод решения статистической игры. Сначала строится уравнивающая риск решающая функция статистика $y^0: F(x, y^0) \equiv const$ на X. Затем подбирается стратегия природы – плотность распределения f^0, относительно которой решающая функция y^0 является *байесовской*, т.е. минимизирующей функцию риска: $F(f^0, y^0) = \min\limits_{y\in Y} F(f^0, y)$. Тогда в соответствии с результатом упражнения 4.3 f^0, y^0 – оптимальные стратегии природы и статистика. Плотность распределения f^0 называется *априорной*.

Покажем, что для плотности распределения f^0 при квадратичной функции потерь $L(x,a) = |x-a|^2$ байесовская решающая функция y^0 определяется однозначно. Определим *апостериорную* плотность распределения $f^0(x|z) = \overline{g}(z|x) f^0(x)/p(z)$, где

$$p(z) = \int\limits_X \overline{g}(z|x) f^0(x) dx.$$

Утверждение 6.1. Пусть y^0 – байесовская решающая функция относительно плотности распределения f^0. Тогда при квадратичной функции

потерь

$$y^0(z) = E[\mathbf{X}|z] \stackrel{def}{=} \int\limits_X x f^0(x|z) dx\ \ \forall\ z \in Z. \tag{6.1}$$

Доказательство. Поскольку множество X выпукло, можно показать, что $y^0(z) \in A = X\ \ \forall\, z \in Z$. Для произвольной решающей функции $y \in Y$

$$F(f^0, y) = \int\limits_X \int\limits_Z L(x, y(z)) \overline{g}(z|x) dz f^0(x) dx =$$

$$= \int\limits_Z [\int\limits_X |x - y(z)|^2 f^0(x|z) dx] p(z) dz.$$

При фиксированном $z \in Z$ внутренний интеграл является квадратичной функцией от $a = y(z)$. Поэтому его минимум достигается при $a^0 = y^0(z)$ из (6.1). ■

В дальнейшем будем считать, что функция распределения g каждой случайной величины $\mathbf{Z}_i$ зависит только от одного неизвестного параметра – математического ожидания x. Дисперсию случайной величины $\mathbf{Z}_i$ обозначим через $D(x)$. Для математического ожидания часто используется *несмещенная* оценка $\overline{z} = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i/n$. Свойство несмещенности означает, что

$$E\overline{\mathbf{Z}} = \frac{E\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{Z}_i}{n} = x.$$

Поэтому естественно рассмотреть множество решающих правил вида

$$Y = \{y \mid y(z) = c_1\overline{z} + c_2,\ \ c_1, c_2 \ge 0\}.$$

Функцию потерь будем предполагать квадратичной:
$L(x,a) = (x-a)^2$. Положим $c = (c_1, c_2)$. Тогда функция риска

$$\overline{F}(x,c) \stackrel{def}{=} F(x,y) = E(x - c_1\overline{\mathbf{Z}} - c_2)^2 = c_1^2 E\overline{\mathbf{Z}}^2 + 2c_1(c_2 - x) E\overline{\mathbf{Z}} + (x - c_2)^2 =$$

$$= c_1^2\left(\frac{D(x)}{n} + x^2\right) + 2c_1(c_2 - x)x + (x - c_2)^2 = c_1^2 \frac{D(x)}{n} + (c_1 x - x + c_2)^2$$

выпукла по c.

Рассмотрим конкретные примеры статистических игр.

Пример 6.2. Пусть случайные величины $\mathbf{Z}_i$ имеют *биномиальное* распределение:

$$g(z_i|x) = \begin{cases} x, & z_i = 1, \\ 1 - x, & z_i = 0; \end{cases}$$
$$D(x) = x(1-x),\ x \in X = [0,1].$$

Положим $k = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i = n\overline{z}$. Тогда

$$\overline{g}(z|x) = x^k (1-x)^{n-k},$$
$$\overline{F}(x,c) = c_1^2\left(\tfrac{x(1-x)}{n} + x^2\right) - 2c_1 x^2 + 2c_1 c_2 x + x^2 - 2c_2 x + c_2^2 =$$
$$= \left(\frac{n-1}{n} c_1^2 - 2c_1 + 1\right) x^2 + \left(\frac{c_1^2}{n} + 2c_1 c_2 - 2c_2\right) x + c_2^2.$$

Найдем выравнивающую решающую функцию $y^0(z) = c_1^0\overline{z} + c_2^0$. Для этого решим систему уравнений

$$\frac{n-1}{n} c_1^2 - 2c_1 + 1 = 0,\ \ \frac{c_1^2}{n} + 2c_1 c_2 - 2c_2 = 0 \tag{6.2}$$

и получим

$$c_1^0 = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 1},\ \ c_2^0 = \frac{1}{2(\sqrt{n} + 1)}.$$

Второе решение

$$c_1 = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1},\ \ c_2 = \frac{1}{2(\sqrt{n} - 1)}$$

отбросим.

Рассмотрим на отрезке $X = [0,1]$ *бета-распределение* с плотностью

$$f^0(x) = \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B(p,q)},$$

где $B(p,q) = \int\limits_0^1 x_1^{p-1}(1 - x_1)^{q-1} dx_1$ – *бета-функция*, а параметры p и q положительны. Интегрируя по частям, нетрудно вывести, что

$$E\mathbf{X} = \int\limits_0^1 x f^0(x) dx = \frac{p}{p+q}.$$

Покажем, что при подходящем выборе параметров p и q решающая функция y^0 является байесовской относительно бета-распределения f^0. Найдем

$$p(z) = \int\limits_0^1 \overline{g}(z|x) f^0(x) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{x^k(1-x)^{n-k} x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B(p,q)} dx = \frac{B(k+p, n+q-k)}{B(p,q)}.$$

Отсюда условная плотность

$$f^0(x|z) = \frac{\overline{g}(z|x) f^0(x)}{p(z)} = \frac{x^{k+p-1}(1-x)^{n-k+q-1}}{B(k+p, n+q-k)}$$

задает бета-распределение с параметрами $p^* = k + p$ и $q^* = n + q - k$. Байесовская решающая функция

$$E[X|z] = \int\limits_X x f^0(x|z) dx = \frac{p^*}{p^* + q^*} = \frac{k+p}{n+p+q} = \frac{n\overline{z} + p}{n+p+q}$$

совпадает с выравнивающей функцией y^0 при $p = q = \frac{\sqrt{n}}{2}$.

Итак, доказано, что для оценки параметра биномиального распределения

$$y^0(z) = \frac{\sqrt{n}\overline{z} + 0.5}{\sqrt{n} + 1}$$

– минимаксная решающая функция.

Интересно сравнить значения функции риска при минимаксной y^0 и классической $\overline{z}$ решающих функциях. Имеем

$$F(x, y^0) \equiv \overline{v} = \frac{1}{4(1 + \sqrt{n})^2},\ \ F(x, \overline{z}) = \frac{x(1-x)}{n}.$$

Неравенство $F(x, y^0) < F(x, \overline{z})$ выполнено лишь при

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \stackrel{def}{=} \frac{\sqrt{1 + 2\sqrt{n}}}{2(1 + \sqrt{n})}.$$

Если n велико, то минимаксная оценка лучше классической лишь при значениях x, принадлежащих малой ε-окрестности точки 1/2. Однако, при малых n интервал значений x, где минимаксная оценка лучше, значительно увеличивается.

Во многих задачах не существует выравнивающей решающей функции и указанный выше метод решения статистической игры использовать нельзя. В таких случаях минимаксную стратегию статистика y^0 можно найти, решая непосредственно задачу

$$\overline{v} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x,y) = \max_{x \in X} F(x, y^0).$$

Пример 6.3. Страховая компания осуществляет страхование гражданской ответственности автомобилистов. Водители обычно разбиваются на группы по нескольким признакам (профессия, стаж вождения и т.п.). Рассмотрим некоторую группу, состоящую из n водителей. Требуется оценить среднее число x дорожных происшествий в расчете на одного водителя, которые произойдут в течение ближайшего года, исходя из информации о происшествиях прошедшего года. Задачу можно свести к решению статистической игры.

Пусть число дорожных происшествий с водителем i является случайной величиной $\mathbf{Z}_i$, распределенной по *закону Пуассона*

$$g(z_i|x) = \frac{x^{z_i} e^{-x}}{z_i!}, \ \ z_i \in Z = \{0, 1, 2, ..., \}.$$

Здесь $E\mathbf{Z}_i = x, \ \ Var\mathbf{Z}_i = D(x) = x, \ x \in X = [0, x^*]$, где x^* – верхняя грань возможных значений параметра x. Имеем

$$\overline{F}(x,c) = c_1^2 \frac{D(x)}{n} + (c_1 x - x + c_2)^2 = c_1^2 \frac{x}{n} + (c_1 x - x + c_2)^2.$$

Нетрудно проверить, что не существует выравнивающей решающей функции.

Обозначим $M(c) = \sup\limits_{0 \le x \le x^*} F(x,c)$ и найдем

$$\overline{v} = \min_{c_1, c_2 \ge 0} M(c) = M(c^0).$$

Поскольку $\overline{F}(x,c)$ выпукла по x, $\quad M(c) = \max[\overline{F}(0,c), \overline{F}(x^*,c)]$.

Утверждение 6.2. Для минимаксной стратегии $y^0(z) = c_1^0 \overline{z} + c_2^0$ выполнено условие $\overline{F}(0,c^0) = \overline{F}(x^*,c^0)$ или

$$c_2^0 = \frac{\frac{1}{n}(c_1^0)^2 + (c_1^0 - 1)^2 x^*}{2(1 - c_1^0)}.$$

Доказательство. Допустим, что $\overline{F}(x^*, c^0) > \overline{F}(0, c^0)$. Если $c_1^0 > 0$, то при малом $\varepsilon > 0$

$$\overline{F}(x^*, c^0) = \frac{(c_1^0)^2 x^*}{n} + (c_1^0 x^* + c_2^0 - x^*)^2 > \overline{F}(x^*, c_1^0 - \varepsilon, c_2^0 + \varepsilon x^*) =$$

$$= \frac{(c_1^0 - \varepsilon)^2 x^*}{n} + (c_1^0 x^* + c_2^0 - x^*)^2 > \overline{F}(0, c_1^0 - \varepsilon, c_2^0 + \varepsilon x^*) = (c_2^0 + \varepsilon x^*)^2$$

и $M(c_1^0 - \varepsilon, c_2^0 + \varepsilon x^*) < M(c^0)$ (противоречие).

Если $c_1^0 = 0$, то

$$\overline{F}(x^*, c^0) = (c_2^0 - x^*)^2 > \overline{F}(0, c^0) = (c_2^0)^2.$$

Отсюда следует, что $c_2^0 < x^*/2$. Увеличивая c_2^0 на малое $\varepsilon > 0$, придем к противоречию. Случай $\overline{F}(x^*, c^0) < \overline{F}(0, c^0)$ разбирается аналогично. ■

Из доказанного утверждения вытекает, что

$$\min_{c_1, c_2 \ge 0} M(c) = \min_{0 \le c_1 < 1} \left(\frac{\frac{1}{n}(c_1)^2 + (c_1 - 1)^2 x^*}{2(1 - c_1)} \right)^2.$$

Последний минимум достигается при

$$c_1^0 = \frac{x^* n + 1 - \sqrt{x^* n + 1}}{x^* n + 1} \Rightarrow c_2^0 = \frac{\sqrt{x^* n + 1} - 1}{n}.$$

Таким образом, при оценке параметра распределения Пуассона

$$y^0(z) = \frac{x^* n + 1 - \sqrt{x^* n + 1}}{x^* n + 1} \overline{z} + \frac{\sqrt{x^* n + 1} - 1}{n}$$

– минимаксная стратегия статистика. В частном случае при $n = 30, \ x^* = 0.5, \ \overline{z} = 0.2$ получаем оценку $y^0(z) = 0.16$.

Упражнение 6.3. Пусть все случайные величины $\mathbf{Z}_i$ имеют *нормальное* распределение с плотностью

$$g(z_i|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z_i - x)^2}{2\sigma^2}}, \ \ z_i \in E^1,$$

где дисперсия σ^2 статистику известна, а математическое ожидание x – нет: $x \in X = E^1$.

Показать, что классическая решающая функция $\overline{z}$ является выравнивающей и минимаксной стратегией статистика.

§ 7. Исследование игровых моделей

Модель "нападение-оборона".

Имеется n обороняемых пунктов с номерами $i = 1, ..., n$ возможного прорыва средств нападения. Пусть A и B – количества средств нападения и обороны. Эти средства предполагаются бесконечно-делимыми. Стратегия первого игрока (нападения) состоит в распределении своих средств по пунктам в соответствии с вектором

$$x = (x_1, ..., x_n) \in X = \{x \mid \sum_{i=1}^n x_i = A, \quad x_i \ge 0, \ i = 1, ..., n\}.$$

Второй игрок (оборона) использует аналогичную стратегию

$$y = (y_1, ..., y_n) \in Y = \{y \mid \sum_{i=1}^n y_i = B, \quad y_i \ge 0, \ i = 1, ..., n\}.$$

Пусть μ_i – количество средств нападения, которое может уничтожить одна единица средств обороны на i-ом пункте. Если $x_i > \mu_i y_i$, то через i-й пункт прорывается $x_i - \mu_i y_i$ средств нападения. Если $x_i \le \mu_i y_i$, то через этот пункт нападение не прорвется. Объединяя оба случая, находим формулу для количества средств нападения, прорвавшегося через i-й пункт: $\max[x_i - \mu_i y_i, 0]$. Определим функцию выигрыша первого игрока

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^n \max[x_i - \mu_i y_i, 0]$$

– общее количество средств нападения, прорвавшееся через все пункты.

Заметим, что функция $F(x,y)$ выпукла по y. По теореме 6.4 значение игры $v = \overline{v}$ и минимаксная стратегия y^0 обороны оптимальна. Займемся исследованием этой игры в чистых и смешанных стратегиях. Без потери общности предположим, что коэффициенты эффективности обороны μ_i упорядочены: $\mu_1 \ge \mu_2 \ge ... \ge \mu_n$ и n-й пункт обороны является слабейшим.

а) Покажем, что

$$\underline{v} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x,y) = \max[A - \mu_n B, 0], \quad x^{(n)} = (0, ..., 0, A)$$

– максиминная стратегия нападения, состоящая в нанесении "концентрированного"удара по слабейшему пункту.

Для любой стратегии нападения x определим вспомогательную стратегию обороны $\overline{y}$:

$$\overline{y}_i = B x_i \Big(\mu_i \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{\mu_k} \Big)^{-1}, \ \ i = 1, ..., n.$$

Тогда

$$\min_{y \in Y} F(x,y) \le F(x, \overline{y}) = \sum_{i=1}^n \max[x_i - \mu_i \overline{y}_i, 0].$$

Если $B \ge \sum\limits_{k=1}^n \frac{x_k}{\mu_k}$, то $\overline{y}_i \ge x_i/\mu_i, \ i = 1, ..., n \ \Rightarrow \ F(x, \overline{y}) = 0$.

В противном случае $\overline{y}_i \le x_i/\mu_i, \ i = 1, ..., n$, и

$$F(x, \overline{y}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_i \overline{y}_i) \le A - \mu_n \sum_{i=1}^n \overline{y}_i = A - \mu_n B.$$

Таким образом, для любой стратегии x

$$\min_{y \in Y} F(x,y) \le \max[A - \mu_n B, 0] = \min_{y \in Y} \max[A - \mu_n y_n, 0] = \min_{y \in Y} F(x^{(n)}, y)$$

и $x^{(n)}$ – максиминная стратегия нападения.

б) Покажем, что

$$\overline{v} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x,y) = \max[A - B\Big(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k} \Big)^{-1}, 0],$$

а

$$y^0 : \ y_i^0 = B \Big(\mu_i \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k} \Big)^{-1}, \ i = 1, ..., n,$$

– минимаксная стратегия обороны.

Сначала докажем равенство

$$\max_{x \in X} F(x,y) = \max_{1 \le i \le n} F(x^{(i)}, y) \ \ \forall \, y \in Y, \tag{7.1}$$

где $x^{(i)} = (0, ..., \underbrace{A}_{i}, 0, ..., 0)$ – стратегия нападения, состоящая в нанесении концентрированного удара по i-му пункту.

Представим стратегию x в виде $x = \sum\limits_{i=1}^n \frac{x_i}{A} x^{(i)}$. По определению выпуклой функции

$$F(x,y) \le \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{A} F(x^{(i)}, y) \le \max_{1 \le i \le n} F(x^{(i)}, y).$$

Следовательно,

$$\max_{x \in X} F(x,y) \le \max_{1 \le i \le n} F(x^{(i)}, y) \le \max_{x \in X} F(x,y)$$

и (7.1) доказано. Далее имеем

$$\overline{v} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x,y) = \min_{y \in Y} \max_{1 \le i \le n} F(x^{(i)}, y) =$$

$$= \min_{y \in Y} \max_{1 \le i \le n} \max[A - \mu_i y_i, 0] = \min_{y \in Y} \max[A - \min_{1 \le i \le n} \mu_i y_i, 0] =$$

$$= \max[A - B \max_{y \in Y} \min_{1 \le i \le n} \mu_i y_i / B, 0] = [\text{замена переменных}$$

$$p = y/B \in P = \{p = (p_1, ..., p_n) \mid \sum_{i=1}^n p_i = 1, \ \ p_i \ge 0, \ i = 1, ..., n\}] =$$

$$= \max[A - B \max_{p \in P} \min_{1 \le i \le n} \mu_i p_i, 0] =$$

$$=[\text{ см. пример 4.4}] = \max[A - B\Big(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k} \Big)^{-1}, 0].$$

При этом

$$y_i^0 = B p_i^0 = B \Big(\mu_i \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k} \Big)^{-1}, \ \ i = 1, ..., n.$$

Когда в игре существует решение в чистых стратегиях?

Если $B \ge A \sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}$, то $\overline{v} = 0 \ge \underline{v} \ge 0$ и, следовательно, $\overline{v} = \underline{v} = 0$. Для нападения любая стратегия оптимальна. В этом случае оборона так может распределить свои силы, чтобы не позволить нападению, использующему концентрированный удар, прорваться на каком-либо пункте.

Если $B < A \sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}$, то функция $F(x,y)$ седловой точки не имеет. Действительно,

$$\overline{v} = A - B\Big(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k} \Big)^{-1} > A - B\Big(\frac{1}{\mu_n} \Big)^{-1} = A - \mu_n B.$$

Заметим, что $\overline{v} > 0$. Поэтому $\overline{v} > \max[A - \mu_n B, 0] = \underline{v}$.

в) Покажем, что в игре существует решение в смешанных стратегиях вида $(\varphi^0, y^0, \overline{v})$, где y^0 – чистая минимаксная стратегия обороны, а оптимальная смешанная стратегия для нападения имеет вид

$$\varphi^0 = \sum_{i=1}^n p_i^0 I_{x^{(i)}}, \ p_i^0 = \Big(\mu_i \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k} \Big)^{-1}, \ i = 1, ..., n.$$

Поскольку функция $F(x,y)$ выпукла по y, достаточно проверить условие $(*)$ для смешанной стратегии φ^0 :

$$F(\varphi^0, y) \ge \overline{v} \ \ \forall y \in Y.$$

Имеем

$$F(\varphi^0, y) = \int_X F(x,y) d\varphi^0(x) = \sum_{i=1}^n p_i^0 F(x^{(i)}, y) =$$

$$= \sum_{i=1}^n p_i^0 \max[A - \mu_i y_i, 0] = \sum_{i=1}^n \max[p_i^0 A - \mu_i p_i^0 y_i, 0] \ge$$

$$\ge \max[\sum_{i=1}^n (p_i^0 A - \mu_i p_i^0 y_i), 0] = \max[A - \sum_{i=1}^n y_i \Big(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k} \Big)^{-1}, 0] =$$

$$= \max[A - B\Big(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k} \Big)^{-1}, 0] = \overline{v}.$$

Здесь мы воспользовались элементарным неравенством

$$\sum_{i=1}^n \max[a_i, b_i] \ge \max[\sum_{i=1}^n a_i, \sum_{i=1}^n b_i],$$

справедливом для любых вещественных чисел $a_i, b_i, \ i = 1, ..., n$.

Модель дуэли.

В дуэли принимают участие два дуэлянта (первый и второй игроки). В начальный момент времени дуэлянты находятся на расстоянии d_0 и по команде начинают сближаться. В распоряжении каждого дуэлянта имеется один выстрел, который он может произвести в противника с любого расстояния (конечно, при условии, что дуэлянт жив), он даже может подойти к противнику вплотную.

Пусть $p_k(d)$ – функция меткости k-го дуэлянта, равная вероятности поражения противника, если выстрел был произведен с расстояния d. Предположим, что функции $p_k(d)$ непрерывны и убывают на отрезке $[0, d_0]$ и без потери общности $p_k(0) = 1, \ p_k(d_0) = 0, \ k = 1, 2$.

Определим антагонистическую игру. Пусть $x \in X = [0, d_0]$ – расстояние, с которого первый игрок намечает произвести свой выстрел. Аналогично, $y \in Y = [0, d_0]$ – расстояние, с которого намечает свой выстрел второй игрок. Определим функцию выигрыша $F(x,y)$ первого игрока.

Рассмотрим сначала *шумную дуэль,* когда противники слышат выстрелы друг друга. Тогда

$$F(x,y) = \begin{cases} p_1(x), & 0 \le y \le x \le d_0, \\ 1 - p_2(y), & 0 \le x < y \le d_0. \end{cases}$$

По смыслу $F(x,y)$ есть вероятность поражения первым игроком второго. Если $x < y$ и второй игрок промахнется, то первый, услышав выстрел противника, стреляет в него с расстояния 0 вместо x. Отметим, что $F(x,y)$ является осреднением функции, принимающей значение 1 или 0 в зависимости от того, убит второй дуэлянт или нет. Итак, шумная дуэль определена как игра в нормальной форме $\Gamma = \big\langle X, Y, F(x,y) \big\rangle$.

Покажем, что шумная дуэль имеет решение в чистых стратегиях $(d^*, d^*, v = p_1(d^*))$, где d^* – единственный корень уравнения $p_1(d) = 1 - p_2(d)$. Проверим неравенства из определения седловой точки

$$F(x, d^*) \le p_1(d^*) = F(d^*, d^*) \le F(d^*, y) \ \ \forall \, x \in X, \ \ \forall \, y \in Y.$$

Имеем

$$F(x, d^*) = \begin{cases} p_1(x) \le p_1(d^*), & d^* \le x \le d_0, \\ 1 - p_2(d^*) = p_1(d^*), & 0 \le x < d^*, \end{cases}$$

$$F(d^*, y) = \begin{cases} p_1(d^*), & 0 \le y \le d^*, \\ 1 - p_2(y) \ge 1 - p_2(d^*) = p_1(d^*), & d^* < y \le d_0. \end{cases}$$

Если функции меткости игроков одинаковы, то из уравнения $p_1(d) = 1 - p_1(d)$ находим, что значение игры равно $1/2$, а d^* является корнем уравнения $p_1(d) = 1/2$.

В *бесшумной дуэли* игроки не слышат выстрелы друг друга и

$$F(x,y) = \begin{cases} p_1(x), & 0 \le y \le x \le d_0, \\ p_1(x)(1 - p_2(y)), & 0 \le x < y \le d_0. \end{cases}$$

Покажем, что бесшумная дуэль не имеет решения в чистых стратегиях. Найдем величину $\underline{v} = \sup\limits_{0 \le x \le d_0} \inf\limits_{0 \le y \le d_0} F(x,y)$. Стратегия $x = d_0$ не может быть максиминной, поскольку $F(d_0, y) = p_1(d_0) = 0$ при всех $y \in Y$. Пусть $0 \le x < d_0$. Тогда

$$\inf_{0 \le y \le d_0} F(x,y) = \min[\inf_{0 \le y \le x} F(x,y), \inf_{x < y \le d_0} F(x,y)] =$$

$$= \min[p_1(x), p_1(x)(1 - p_2(x))] = p_1(x)(1 - p_2(x)).$$

Отсюда $\underline{v} = \max\limits_{0 \le x \le d_0} p_1(x)(1 - p_2(x))$.

Упражнение 7.1. Докажите, что

$$\overline{v} = \inf_{0 \le y \le d_0} \sup_{0 \le x \le d_0} F(x,y) = p_1(d^*).$$

Таким образом, $\underline{v} = \max\limits_{0 \le x \le d_0} p_1(x)(1 - p_2(x)) <$

$$< \max_{0 \le x \le d_0} \min[p_1(x), 1 - p_2(x)] = p_1(d^*) = \overline{v}.$$

Решение бесшумных дуэлей обычно сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы ограничимся исследованием конкретного примера.

Пример 7.1. Рассмотрим бесшумную дуэль с одинаковыми функциями меткости игроков $p_1(d) = p_2(d) = 1 - d, \ 0 \le d \le d_0 = 1$. Тогда

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \le y \le x \le 1, \\ (1 - x)y, & 0 \le x < y \le 1. \end{cases}$$

Предположим, что оптимальные смешанные стратегии игроков $\varphi^0(x)$ и $\psi^0(y)$ имеют совпадающие спектры $Sp(\varphi^0) = Sp(\psi^0) = [0, a]$, где $a \le 1$ – параметр, подлежащий определению. Пусть на отрезке $[0, a]$ функции распределения $\varphi^0(x)$ и $\psi^0(y)$ непрерывны и имеют производные (плотности распределения) $f(x)$ и $g(y)$.

По свойству дополняющей нежесткости (теорема 4.3) $F(\varphi^0, y) = v \ \ \forall \, y \in [0, a]$ или

$$\int_0^a F(x,y) f(x) dx = \int_0^y (1 - x) y f(x) dx + \int_y^a (1 - x) f(x) dx = v. \tag{7.2}$$

Дифференцируя дважды по y интегральное уравнение (7.2), получим дифференциальное уравнение $3f(y) = (1 - y) f'(y)$, имеющее (после замены y на x) общее решение вида $f(x) = c(1 - x)^{-3}$. По определению плотности $\int\limits_0^1 f(x) dx = 1$ (условие нормировки). Отсюда

$$c \int_0^a \frac{1}{(1 - x)^3} dx = \frac{c}{2} \left[\frac{1}{(1 - a)^2} - 1 \right] = 1. \tag{7.3}$$

Найденная плотность $f(x)$ должна также удовлетворять исходному интегральному уравнению (7.2), т.е.

$$c \left[\frac{1}{1 - a} - 1 - y \right] = v. \tag{7.4}$$

Поскольку уравнение (7.4) не является тождеством по y, смешанная стратегия $\varphi^0(x)$ указанного вида не существует. Поэтому предположим, что функция распределения $\varphi^0(x)$ имеет скачок величины σ в нуле. Тогда уравнения (7.2)–(7.4) изменятся:

$$\sigma y + \int_0^y (1 - x) y f(x) dx + \int_y^a (1 - x) f(x) dx = v, \tag*{(7.2)$'$}$$

$$\sigma + \frac{c}{2} \left[\frac{1}{(1 - a)^2} - 1 \right] = 1, \tag*{(7.3)$'$}$$

$$\sigma y + c \left[\frac{1}{1 - a} - 1 - y \right] = v. \tag*{(7.4)$'$}$$

Для того чтобы уравнение $(7.4)'$ выполнялось как тождество, необходимо положить $\sigma = c$. Из уравнений $(7.3)', (7.4)'$ получаем

$$\frac{c}{2} \left[\frac{1}{(1 - a)^2} + 1 \right] = 1, \quad \frac{ca}{1 - a} = v. \tag{7.5}$$

Из свойства дополняющей нежесткости также следует, что $F(x, \psi^0) = v \ \ \forall \, x \in [0, a]$ или

$$\int_0^a F(x,y) g(y) dy = \int_0^x (1 - x) g(y) dy + \int_x^a (1 - x) y g(y) dy = v. \tag{7.6}$$

Отсюда, как и выше, получим $g(y) = c_1(1-y)^{-3}$. Подставляя $g(y)$ в уравнение (7.6), находим

$$c_1(1-x)\left[\int_0^x \frac{1}{(1-y)^3}dy + \int_x^a \frac{y}{(1-y)^3}dy\right] = v$$

или, используя условие нормировки $\int_0^1 g(y)dy = c_1\int_0^a (1-y)^{-3}dy = 1$,

$$(1-x)\left[1 - \frac{c_1}{1-a} + \frac{c_1}{1-x}\right] = v.$$

Для того чтобы последнее равенство выполнялось тождественно, необходимо, чтобы $c_1 = v = 1-a$. Отсюда и из (7.5) находим

$$a = 2-\sqrt{2}, \quad c_1 = v = \sqrt{2}-1, \quad c = \sigma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

Окончательно

$$\varphi^0(x) = \begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\left(\dfrac{1}{(x-1)^2}+1\right), & 0 \le x \le 2-\sqrt{2}, \\ 1, & 2-\sqrt{2} < x \le 1, \end{cases}$$

$$\psi^0(y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\left(\dfrac{1}{(y-1)^2}-1\right), & 0 \le y \le 2-\sqrt{2}, \\ 1, & 2-\sqrt{2} < y \le 1. \end{cases}$$

Особенность оптимальной смешанной стратегии φ^0 состоит в том, что первый игрок с вероятностью $\sigma = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ждет до полного сближения с противником. Отметим также, что значение игры $v = \sqrt{2}-1$ бесшумной дуэли меньше значения игры $v = 1/2$ шумной дуэли, что объясняется уменьшением информированности первого игрока.

§ 8. Многошаговые антагонистические игры

Определим многошаговую антагонистическую игру *с полной информацией*. Игра происходит в течение T шагов с номерами $t = 1, ..., T$. На

каждом шаге t игроки выбирают по очереди альтернативы – значения переменных x_t, y_t.

Шаг 1. Сначала первый игрок выбирает альтернативу $x_1 \in U_1$, затем второй игрок, зная выбор первого, выбирает альтернативу $y_1 \in V_1(x_1) = V_1(\cdot)$.

Пусть игроки в течение $t-1$ шагов выбрали альтернативы $x_1, ..., x_{t-1}, y_1, ..., y_{t-1}$. Положим $\overline{x}_t = (x_1, ..., x_t)$, $\overline{y}_t = (y_1, ..., y_t)$.

Шаг t. Сначала первый игрок, зная предысторию $\overline{x}_{t-1}, \overline{y}_{t-1}$, выбирает альтернативу $x_t \in U_t(\overline{x}_{t-1}, \overline{y}_{t-1}) = U_t(\cdot)$. Затем второй игрок выбирает альтернативу $y_t \in V_t(\overline{x}_t, \overline{y}_{t-1}) = V_t(\cdot)$, зная предысторию $\overline{x}_t, \overline{y}_{t-1}$, включая выбор x_t первого игрока на данном шаге.

После завершения шага T возникает пара $(\overline{x}_T, \overline{y}_T)$, называемая *партией* игры. По смыслу партия игры – это запись всех альтернатив, выбранных игроками. Для любой партии $(\overline{x}_T, \overline{y}_T)$ задается выигрыш $F(\overline{x}_T, \overline{y}_T)$ первого игрока.

Определим теперь игру в нормальной форме. На шаге t первый игрок может выбрать альтернативу x_t как значение функции $\tilde{x}_t: \ x_t = \tilde{x}_t(\overline{x}_{t-1}, \overline{y}_{t-1})$, которая должна быть определена при всевозможных значениях аргументов $\overline{x}_{t-1}, \overline{y}_{t-1}$. Обозначим множество всех таких функций $\tilde{x}_t$ через $\tilde{U}_t$. Заметим, что $\tilde{x}_1 = x_1$, поскольку на первом шаге первый игрок никакой информацией не располагает.

Стратегия первого игрока представляет собой набор функций

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_t, \ t = 1, ..., T) \in \tilde{X} = \prod_{t=1}^{T} \tilde{U}_t.$$

Аналогично, на шаге t второй игрок может выбирать альтернативу y_t как значение функции $\tilde{y}_t: \ y_t = \tilde{y}_t(\overline{x}_t, \overline{y}_{t-1})$, которая должна быть определена при всевозможных значениях аргументов $\overline{x}_t, \overline{y}_{t-1}$. Обозначим множество всех таких функций $\tilde{y}_t$ через $\tilde{V}_t$. Стратегия второго игрока представляет собой набор функций

$$\tilde{y} = (\tilde{y}_t, \ t = 1, ..., T) \in \tilde{Y} = \prod_{t=1}^{T} \tilde{V}_t.$$

Игроки могут выбрать стратегии $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ независимо друг от друга до игры, а во время игры – применять их "автоматически."Любой паре стратегий $(\tilde{x}, \tilde{y})$ однозначно соответствует партия игры:

$x_1 = \tilde{x}_1, \ y_1 = \tilde{y}_1(x_1), \ x_2 = \tilde{x}_2(x_1, y_1)$ и т.д.

Далее $F(\tilde{x}, \tilde{y}) \stackrel{def}{=} F(\overline{x}_T, \overline{y}_T)$, где $(\overline{x}_T, \overline{y}_T)$ – партия, соответствующая стратегиям $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$. Итак, многошаговая игра с полной информацией определена в нормальной форме $\Gamma = \langle \tilde{X}, \tilde{Y}, F(\tilde{x}, \tilde{y}) \rangle$.

В дальнейшем будем рассматривать два класса игр:

игра Γ', в которой все множества $U_t(\cdot), V_t(\cdot)$ конечны;

игра Γ'', в которой все множества $U_t(\cdot) \equiv U_t, \ V_t(\cdot) \equiv V_t$ не зависят от предыстории и являются компактами метрических пространств, а функция $F(\overline{x}_T, \overline{y}_T)$ непрерывна на произведении

$$U_1 \times \cdots \times U_T \times V_1 \times \cdots \times V_T.$$

Определим пару стратегий

$$\tilde{x}^0 = (\tilde{x}_t^0, t = 1, ..., T), \ \ \tilde{y}^0 = (\tilde{y}_t^0, 1, ..., T),$$

используя метод *динамического программирования*. Доопределим функцию F на всех отрезках партии вида $(\overline{x}_t, \overline{y}_{t-1})$ или $(\overline{x}_t, \overline{y}_t)$ и назовем ее *функцией Беллмана*. Компоненты стратегий $\tilde{x}_t^0$, $\tilde{y}_t^0$ будем задавать в порядке, обратном выборам игроков.

Определим сначала $\tilde{y}_T^0$. Для этого зафиксируем произвольное значение аргументов $(\overline{x}_T, \overline{y}_{T-1})$ и зададим значение функции $\tilde{y}_T^0(\overline{x}_T, \overline{y}_{T-1}) \stackrel{def}{=} y_T^0$:

$$F(\overline{x}_T, \overline{y}_{T-1}, y_T^0) = \min_{y_T \in V_T(\cdot)} F(\overline{x}_T, \overline{y}_{T-1}, y_T) \stackrel{def}{=} F(\overline{x}_T, \overline{y}_{T-1}).$$

Определим функцию $\tilde{x}_T^0$. Зафиксируем произвольное значение аргументов $(\overline{x}_{T-1}, \overline{y}_{T-1})$ и зададим значение функции $\tilde{x}_T^0(\overline{x}_{T-1}, \overline{y}_{T-1}) \stackrel{def}{=} x_T^0$:

$$F(\overline{x}_{T-1}, x_T^0, \overline{y}_{T-1}) = \max_{x_T \in U_T(\cdot)} F(\overline{x}_{T-1}, x_T, \overline{y}_{T-1}) \stackrel{def}{=} F(\overline{x}_{T-1}, \overline{y}_{T-1}).$$

Пусть определены компоненты стратегий и значения функции Беллмана

$$\tilde{y}_T^0, \tilde{x}_T^0, ..., \tilde{y}_{t+1}^0, \tilde{x}_{t+1}^0, \ F(\overline{x}_T, \overline{y}_{T-1}), ..., F(\overline{x}_t, \overline{y}_t).$$

Тогда $\tilde{y}_t^0, \tilde{x}_t^0, \ F(\overline{x}_t, \overline{y}_{t-1}), F(\overline{x}_{t-1}, \overline{y}_{t-1})$ задаются по приведенным выше формулам с заменой T на t.

Покажем, что стратегии $\tilde{x}^0$, $\tilde{y}^0$ определены корректно для игр Γ' и Γ''. Действительно, в игре Γ' все множества $U_t(\cdot)$, $V_t(\cdot)$ конечны и поэтому

максимумы и минимумы, фигурирующие в определениях $\tilde{x}^0$, $\tilde{y}^0$, достигаются. Аналогичное утверждение справедливо и для игры Γ'', поскольку по теореме 2.2 функция Беллмана непрерывна на соответствующих компактах.

Определим величину

$$\tilde{v} = \max_{x_1 \in U_1} F(x_1) \stackrel{def\ F(x_1)}{=} \max_{x_1 \in U_1} \min_{y_1 \in V_1(\cdot)} F(x_1, y_1) = ...$$

$$= \max_{x_1 \in U_1} \min_{y_1 \in V_1(\cdot)} ... \max_{x_T \in U_T(\cdot)} \min_{y_T \in V_T(\cdot)} F(\overline{x}_T, \overline{y}_T).$$

Справедлива следующая

Теорема 8.1 (Цермело). Всякая многошаговая антагонистическая игра с полной информацией Γ' (или Γ'') имеет решение $(\tilde{x}^0, \tilde{y}^0, \tilde{v})$.

Доказательство. Докажем, что функция $F(\tilde{x}, \tilde{y})$ имеет седловую точку $(\tilde{x}^0, \tilde{y}^0)$ на $\tilde{X} \times \tilde{Y}$. Для этого достаточно доказать, что

1) $F(\tilde{x}^0, \tilde{y}) \ge \tilde{v} \ \ \forall\, \tilde{y} \in \tilde{Y}$;

2) $F(\tilde{x}, \tilde{y}^0) \le \tilde{v} \ \ \forall\, \tilde{x} \in \tilde{X}$.

Докажем неравенство 1). Имеем

$$F(\tilde{x}^0, \tilde{y}) \ge \min_{y_T \in V_T(\cdot)} F(\tilde{x}^0, \tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_{T-1}, y_T) = F(\tilde{x}^0, \tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_{T-1}) =$$

$$\stackrel{def\ \tilde{x}_T^0}{=} \max_{x_T \in U_T(\cdot)} F(\tilde{x}_1^0, ..., \tilde{x}_{T-1}^0, x_T, \tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_{T-1}) =$$

$$= F(\tilde{x}_1^0, ..., \tilde{x}_{T-1}^0, \tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_{T-1}) \ge ... \ge F(\tilde{x}_1^0, \tilde{y}_1) \ge \max_{x_1 \in U_1} F(x_1) = \tilde{v}.$$

Неравенство 2) доказывается аналогично. ■

Пример 8.1. Покажем, что игра "шахматы"имеет решение. Существует такое целое число T, что в соответствии с правилами игры любая шахматная партия заканчивается не позднее хода T. Поэтому без потери общности можно считать, все партии продолжаются T ходов[1]. Шахматы являются игрой вида Γ'. $U_t(\overline{x}_{t-1}, \overline{y}_{t-1})$ есть множество разрешенных правилами альтернативных выборов хода белыми (первым игроком) на t-м ходу в позиции, определяемой предыдущими ходами игроков $(\overline{x}_{t-1}, \overline{y}_{t-1})$.

[1] Если партия заканчивается раньше, то игроки делают необходимое число фиктивных ходов, не влияющих на исход игры.

Аналогично интерпретируется множество $V_t(\overline{x}_t, \overline{y}_{t-1})$ выборов хода черными на t-м ходу. Выигрыш белых определяется по правилу

$$F(\overline{x}_T, \overline{y}_T) = \begin{cases} 1, & \text{если выиграли белые,} \\ 0, & \text{если выиграли черные,} \\ 1/2, & \text{если сыграли вничью.} \end{cases}$$

По теореме Цермело игра "шахматы"имеет решение. Практическое значение этот результат имеет для позиций эндшпиля, где обычно ищут форсированный выигрыш, либо ничью.

Пример 8.2. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Разобьем множество ее строк на подмножества $M_1 = \{1,2\}$ и $M_2 = \{3,4\}$, а множество столбцов – на подмножества $N_1 = \{1,2\}$ и $N_2 = \{3,4\}$. Определим двухшаговую игру с полной информацией.

Шаг 1. Сначала первый игрок выбирает номер $\alpha \in \{1,2\}$ множества M_α, из которого он будет на втором шаге делать выбор строки матрицы A. Затем второй игрок, зная α, выбирает номер $\beta \in \{1,2\}$ множества N_β, из которого он будет на втором шаге выбирать номер столбца матрицы A.

Шаг 2. Первый игрок выбирает номер строки $i \in M_\alpha$, зная α, β, затем второй игрок выбирает номер столбца $j \in N_\beta$, зная α, β, i.

Выигрыш первого игрока равен a_{ij}.

Для решения задачи воспользуемся *позиционной формой* игры, которую будем отображать на плоскости в виде дерева.

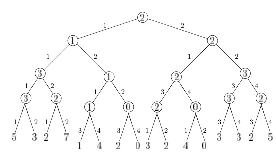

Рис. 8.1

Начальная (корневая) вершина дерева[1] соответствует первому ходу первого игрока (выбор альтернативы α), в вершинах второго уровня альтернативу β выбирает второй игрок и т.д. В финальных вершинах, отвечающих различным партиям игры, указаны выигрыши первого игрока $F(\alpha, \beta, i, j) = a_{ij}$. В вершинах четвертого уровня указаны значения функции Беллмана $F(\alpha, \beta, i) = \min_{j \in N_\beta} F(\alpha, \beta, i, j)$, в вершинах третьего уровня – $F(\alpha, \beta) = \max_{i \in M_\alpha} F(\alpha, \beta, i)$, в вершинах второго уровня – $F(\alpha) = \min_{\beta=1,2} F(\alpha, \beta)$, а в начальной вершине – значение игры $\tilde{v} = \max_{\alpha=1,2} F(\alpha) = 2$.

Укажем оптимальные стратегии игроков

$$\tilde{x}^0 = (\alpha^0, \tilde{i}^0(\alpha, \beta)), \ \ \tilde{y}^0 = (\tilde{\beta}^0(\alpha), \tilde{j}^0(\alpha, \beta, i)) :$$

$$\alpha^0 = 2, \ \ \tilde{i}^0(2,1) = 3, \ \ \tilde{i}^0(2,2) = 3, \ \ \tilde{\beta}^0(1) = 2, \ \ \tilde{\beta}^0(2) = 1,$$

$$\tilde{j}^0(1,2,1) = 3, \ , \tilde{j}^0(1,2,2) = 4, \ \tilde{j}^0(2,1,3) = \tilde{j}^0(2,1,4) = 2.$$

Отметим, что сначала мы подсчитали функцию Беллмана, а затем построили в естественном порядке компоненты оптимальных стратегий. В результате была достигнута некоторая экономия вычислений, поскольку эти компоненты необязательно следует определять при всех значениях

[1] Дерево изображено в перевернутом виде, поскольку так его удобнее рисовать.

аргументов. Например, $\alpha^0 = 2$ и значения функции $\tilde{i}^0(\alpha, \beta)$ нужно находить только при $\alpha = 2$.

Еще более существенное сокращение вычислений достигается с использованием приемов теории *искусственного интеллекта*.

Рассмотрим вопрос о программировании шахмат. В текущей позиции шахматной партии при ходе, скажем, белых дерево игры порождается на глубину нескольких ходов. В финальных вершинах дерева выигрыш белых задается с помощью *оценочной функции*, учитывающей материальные и позиционные особенности финальной позиции. После этого решается получившаяся игра с полной информацией и находится оптимальный ход белых в текущей позиции.

Обычно дерево игры порождается с помощью рекурсивной процедуры построения поддеревьев. При этом в вершинах дерева вычисляются значения функции Беллмана. Рассмотрим возможный ход белых a_1 в текущей позиции. Пусть построено поддерево игры, соответствующее этому ходу и получена оценка хода a_1 (точнее, позиции, возникающей после этого хода), равная 4. Рассмотрим другой ход белых a_2 в текущей позиции. Теперь пусть черные выбрали ход b_1 и установлено, что его оценка равна 1. Тогда оценка хода a_2 будет не больше 1 и его можно отбросить, поскольку он хуже хода a_1. Таким образом, здесь не потребовалось полное построение поддерева хода a_2. Оценка хода a_1 в данном случае называется *α-отсечением*.

Если в текущей позиции ход черных, то аналогично можно определить понятие *β-отсечения*.

Многошаговые антагонистические игры с неполной информацией.

Определим теперь более общую модель многошаговой игры, в процессе которой игроки могут не иметь полной информации о сделанных выборах. Ограничимся играми Γ' с конечными множествами $U_t(\cdot), V_t(\cdot), \ t = 1, ..., T$.

Пусть $H_t^1(H_t^2)$ – множество всех отрезков партий вида $(\overline{x}_{t-1}, \overline{y}_{t-1})$ (вида $(\overline{x}_t, \overline{y}_{t-1})$). Предположим, что множество H_t^1 разбито на непересекающиеся подмножества $H_t^1(\alpha_t), \ \alpha_t \in \mathcal{L}_t$. Перед выбором x_t первому игроку известно, что $(\overline{x}_{t-1}, \overline{y}_{t-1}) \in H_t^1(\alpha_t)$. Аналогично, пусть множество H_t^2 разбито на непересекающиеся подмножества $H_t^2(\beta_t), \ \beta_t \in \mathcal{B}_t$. Перед выбором y_t второму игроку известно, что $(\overline{x}_t, \overline{y}_{t-1}) \in H_t^2(\beta_t)$. Если, в частности, $\alpha_t = (\overline{x}_{t-1}, \overline{y}_{t-1}), \ \beta_t = (\overline{x}_t, \overline{y}_{t-1})$, а множества $H_t^1(\alpha_t)$ и $H_t^2(\beta_t)$ содержат по одному элементу α_t и β_t соответственно, то получим игру с

полной информацией.

Стратегия $\tilde{x} \in \tilde{X}$ первого игрока задается набором функций $\tilde{x}_t$ от α_t, принимающих значения $\tilde{x}_t(\alpha_t) \in U_t(\alpha_t), \ t = 1, ..., T$. Стратегия $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ второго игрока задается набором функций $\tilde{y}_t$ от β_t, принимающих значения $\tilde{y}_t(\beta_t) \in V_t(\beta_t), \ t = 1, ..., T$. По определению $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = F(\overline{x}_T, \overline{y}_T)$, где партия игры $(\overline{x}_T, \overline{y}_T)$ однозначно задается стратегиями игроков $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$. Итак, определена игра $\Gamma = \langle \tilde{X}, \ \tilde{Y}, \ F(\tilde{x}, \tilde{y}) \rangle$ в нормальной форме.

Пример 8.3. Пусть $\alpha_t = \beta_t = (\overline{x}_{t-1}, \overline{y}_{t-1})$,

$$H_t^1(\alpha_t) = \{\alpha_t\}, \ \ H_t^2(\beta_t) = \{(\overline{x}_t, \overline{y}_{t-1}) \mid x_t \in U_t(\beta_t)\}.$$

Здесь на каждом текущем шаге игроки не знают выбора друг друга, но они знают все выборы, сделанные на предыдущих шагах. При этом будем говорить об игре *с полной информацией о предыдущих шагах*. Конкретным примером может служить повторяющаяся игра "орлянка".

Упражнение 8.1. Показать, что в игре Γ с полной информацией о предыдущих шагах (пример 8.3) нижнее и верхнее значения игры задаются следующими выражениями:

$$\underline{v} = \max_{x_1 \in U_1} \min_{y_1 \in V_1} \max_{x_2 \in U_2(x_1, y_1)} \min_{y_2 \in V_2(x_1, y_1)} \cdots \max_{x_T \in U_T(\alpha_T)} \min_{y_T \in V_T(\beta_T)} F(\overline{x}_T, \overline{y}_T),$$

$$\overline{v} = \min_{y_1 \in V_1} \max_{x_1 \in U_1} \min_{y_2 \in V_2(x_1, y_1)} \max_{x_2 \in U_2(x_1, y_1)} \cdots \min_{y_T \in V_T(\beta_T)} \max_{x_T \in U_T(\alpha_T)} F(\overline{x}_T, \overline{y}_T).$$

Упражнение 8.2. Найти верхнее и нижнее значения игры из примера 8.2, предполагая полную информированность игроков о предыдущих шагах.

Если в игре Γ $\underline{v} < \overline{v}$, то игроки должны использовать смешанные стратегии. Ограничимся примерами.

Пример 8.4. Найдем решение в смешанных стратегиях игры из примера 8.2, предполагая полную информированность игроков о предыдущих шагах. На втором шаге значения α, β игрокам известны и возникает подыгра с 2×2-подматрицей $(a_{ij})_{i \in M_\alpha j \in N_\beta}$ матрицы A. Пусть $(p^0(\alpha, \beta), q^0(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta))$ – решение в смешанных стратегиях указанной подыгры. В следующей таблице эти решения приведены при всех значениях α и β.

Табл. 8.1

α	β	$p^0(\alpha, \beta)$	$q^0(\alpha, \beta)$	$v(\alpha, \beta)$
1	1	(5/7,2/7)	(4/7,3/7)	29/7
1	2	(2/5,3/5)	(4/5,1/5)	8/5
2	1	(1,0)	(0,1)	2
2	2	(1,0)	(1,0)	3

На первом шаге первый игрок стремится увеличить свой ожидаемый выигрыш, получаемый на втором шаге, а второй игрок стремится этот выигрыш уменьшить. Поэтому на первом шаге игроки участвуют в игре с матрицей

$$(v(\alpha, \beta))_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 29/7 & 8/5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение этой игры в смешанных стратегиях имеет вид

$$(p^0, q^0, v) = ((35/124, 89/124), (49/124, 75/124), 323/124).$$

Итак, первый игрок должен выбирать $\alpha = 1$ с вероятностью $35/124$, а второй игрок должен выбирать $\beta = 1$ с вероятностью $49/124$. Значение игры Γ равно $323/124$.

Пример 8.5. Ведущий телевизионного шоу предлагает участнику показать на одну из трех закрытых дверей, за которыми размещены "Мерседес"и два козла. После этого ведущий открывает какую-либо из двух невыбранных дверей, за которой находится козел, и вторично (шаг 2) предлагает участнику открыть одну из оставшихся дверей. Если за дверью стоит "Мерседес", то участник получает его в качестве приза, если – козел, то участник ничего не получает. Пусть выигрыш участника равен 1 или 0 в зависимости от того, получен им приз или нет. Найдем оптимальные стратегии участника (первого игрока) и ведущего шоу (второго игрока), а также значение игры.

Если на первом шаге первый игрок показал на дверь, за которой стоит козел, то ясно, что на втором шаге он должен открыть другую дверь и наверняка получить приз. Отсюда, используя соображения симметрии, укажем оптимальные смешанные стратегии игроков.

Определим стратегию p^0 первого игрока: на первом шаге он должен выбрать одну из трех дверей с вероятностью $1/3$, а на втором шаге открывать другую оставшуюся дверь.

Определим стратегию q^0 второго игрока: он должен поместить "Мерседес"за одной дверью из трех с вероятностью $1/3$. Если первый игрок показал на дверь с "Мерседесом", то второй игрок должен открыть одну из двух других дверей с вероятностью $1/2$.

Значение игры равно $2/3$.

Для доказательства оптимальности указанных стратегий проверим условие $(*)$. При любой чистой стратегии второго игрока первый игрок, применяя p^0, показывает на дверь с козлом с вероятностью $2/3$. На втором шаге он указывает на другую дверь и выигрывает приз. С другой стороны, пусть второй игрок применяет стратегию q^0. Покажем, что первый игрок не может выиграть приз с вероятностью, большей, чем $2/3$. Рассмотрим типичную чистую стратегию первого игрока: сначала он выбирает первую дверь, на втором шаге он открывает вторую дверь, если второй игрок открыл третью и открывает первую дверь, если второй игрок открыл вторую. Нетрудно подсчитать, что вероятности его выигрыша при размещениях МКК, КМК и ККМ равны $1/6$, $1/3$ и 0 соответственно. Таким образом, данная чистая стратегия обеспечивает выигрыш приза с вероятностью $1/2$. Если на втором шаге первый игрок указывает не на первую дверь, то выигрыш приза (только в этом случае) увеличивается до $2/3$.

Отметим, что в этом примере мы обошлись без полного описания множеств стратегий игроков и матрицы игры. Это представляет собой весьма непростую задачу, если рассмотреть обобщение игры на случай, когда имеется n дверей, за которыми располагаются один "Мерседес"и $n-1$ козел. Игра происходит в течение $n-1$ шагов. На каждом из первых $n-2$ шагов участник показывает на какую-либо закрытую дверь, а ведущий открывает другую дверь, за которой стоит козел. На шаге $n-1$ все происходит так же, как и при $n=3$. Значение игры здесь равно $(n-1)/n$. Докажите оптимальность следующей стратегии первого игрока. С равной вероятностью $1/n$ он выбирает одну из дверей, на которую показывает в течение первых $n-2$ шагов. На последнем $(n-1)$-м шаге, когда останутся две закрытые двери, он открывает другую дверь.

Пусть многошаговая игра задана в позиционной форме. Тогда информированность игроков задается с помощью *информационных множеств*.

Определение. Информационным множеством игрока называется множество вершин дерева игры, в которых очередь хода принадлежит данному игроку и имеется одинаковое число альтернатив. Игрок знает, что позиция игры соответствует одной из вершин информационного множества, но не знает какой именно. На информационное множество накла-

дывается следующее ограничение: оно не может содержать двух вершин лежащих на одном пути, ведущим из начальной вершины в финальную.

Будем считать, что все информационные множества первого игрока $I_1, ..., I_k$ пронумерованы таким образом, что если какая-то вершина множества I_i реализуется в игре раньше некоторой вершины множества I_j, то $i < j$. Все информационные множества второго игрока $J_1, ..., J_l$ пронумерованы аналогичным образом.

Стратегией первого игрока является вектор $x = (x_1, ..., x_k) \in X$, где x_i – либо альтернатива, выбираемая игроком в множестве I_i, либо $x_i = *$. Последнее означает, что выбор альтернатив $x_1, ..., x_{i-1}$ гарантирует, что в игре заведомо не будет реализована никакая вершина из множества I_i. Аналогичным образом определяются стратегии $y = (y_1, ..., y_l) \in Y$ второго игрока.

Отметим, что в игре могут встречаться *позиции случая*. Это означает, что в некоторых вершинах дерева игры выбор альтернативы не принадлежит игрокам, а осуществляется случайным образом с известным законом распределения (см. пример ниже). Тогда при выбранных стратегиях игроков x и y выигрыш первого игрока, определяемый по финальной вершине, будет случайной величиной и значение $F(x, y)$ следует определить как математическое ожидание этого выигрыша. Таким образом, мы свели позиционную форму игры к нормальной форме.

Пример 8.6. Игра "покер". Колода состоит из двух карт: старшей (с) и младшей (м). Игрокам сдается по одной карте рубашкой вверх. Первый игрок берет свою карту и имеет две альтернативы: либо пасовать (п), выплачивая второму игроку сумму $a > 0$, либо увеличивать ставку (у) до суммы $b > a$. Если первый игрок увеличивает, то второй игрок, не зная расклада карт, может либо пасовать, выплачивая первому a, либо увеличивать ставку до b. Если оба игрока увеличивают ставку, то карты открываются и игрок со старшей картой получает сумму b от партнера. На рис. 8.2 изображено дерево игры.

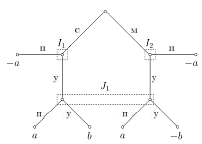

Рис. 8.2

Первый игрок имеет два информационных множества, отвечающих двум равновероятным раскладам карт. Поэтому у первого игрока четыре стратегии: (п,п),(п,у),(у,п),(у,у). Второй игрок не знает расклада карт. Он имеет единственное информационное множество и две стратегии: п и у. Матрица игры в нормальной форме имеет вид

$$A = \begin{array}{c} \\ (\text{п,п}) \\ (\text{п,у}) \\ (\text{у,п}) \\ (\text{у,у}) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad\text{п}\quad & \quad\text{у}\quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} -a & -a \\ \frac{1}{2}(-a) + \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}(-a) + \frac{1}{2}(-b) \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(-a) & \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}(-a) \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}(-b) \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} -a & -a \\ 0 & -\frac{a+b}{2} \\ 0 & \frac{b-a}{2} \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что третья строка матрицы доминирует первую и вторую строки. Вычеркивая их и решая игру с 2×2-матрицей, получим решение в смешанных стратегиях

$$p^0 = \left(0, 0, \frac{2a}{b+a}, \frac{b-a}{b+a}\right),\ q^0 = \left(\frac{b-a}{b+a}, \frac{2a}{b+a}\right),\ v = \frac{a(b-a)}{b+a}.$$

Можно сделать вывод, что чем больше значение b/a, тем с большей вероятностью первый игрок должен блефовать (увеличивать на младшей карте), а второй – ему не верить (пасовать).

Комментарий и библиография к главе I

§ 2. Основные понятия теории антагонистических игр были введены Э.Борелем (см. английский перевод [15] трех его работ 1920-х годов). Термин "физическая смесь стратегий"использовала Е.С. Вентцель в [29]. Пример 3.2 взят из книги Г.Н. Дюбина и В.Г. Суздаля [46]. Еще один пример 9.7 использования "физической смеси стратегий"в биматричной игре см. во второй главе. Основы теории полезности заложены в фундаментальном труде Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна [72]. О методах построения *функций полезности* см. [49].

Интересно проанализировать поведение первого игрока, использующего оптимальную смешанную стратегию $(a/(1+a), 1/(1+a))$ в игре с матрицей полезностей $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ примера 3.4, в зависимости от его отношения к риску. Чем более осторожен игрок (с ростом полезности a), тем ближе его стратегия к $(1/2, 1/2)$. Азартный игрок выбирает чистую вторую стратегию с тем большей вероятностью, чем меньше значение a. Сходное поведение мы наблюдали у милиционера в примере 4.4.

Теорема 2.1 доказана в книге Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна [72]. Теорема 2.2 получена М. Шифманом [104] в ходе доказательства теоремы 2.3. Пример 2.5 был сообщен автору С.А. Ашмановым. Аналогичный пример см. в [6] (с.237). Теорема 2.3 доказана С. Какутани [47] с использованием обобщения теоремы Л. Брауэра о неподвижной точке. Однако она вытекает из полученного четырьмя годами раньше следующего результата [74].

Теорема (Дж. фон Нейман). Пусть $X \subset E^m$ и $Y \subset E^n$ – выпуклые компакты евклидовых пространств, а компакты $U, V \subset X \times Y$ удовлетворяют следующему условию: для любых $x \in X$ и $y \in Y$ множества $Y(x) = \{y \in Y \mid (x, y) \in V\}$ и $X(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in U\}$ являются непустыми выпуклыми компактами. Тогда $U \cap V \neq \emptyset$.

Действительно, полагая в условиях теоремы 2.3

$$X(y) = \operatorname{Arg}\max_{x \in X} F(x, y),\ U = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in X(y)\},$$

$$Y(x) = \operatorname{Arg}\min_{y \in Y} F(x, y),\ \ V = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in Y(x)\},$$

получим, что существует пара $(x^0, y^0) \in U \cap V$ – седловая точка функции $F(x, y)$. Поэтому теорему 2.3 обычно связывают с именем Дж. фон Неймана.

Доказательства С. Какутани и М. Шифмана теоремы 2.3 можно прочесть в книге С. Карлина [48].

§ 3. С теорией интеграла Стилтьеса можно ознакомиться по учебнику А.Н. Колмогорова и С.В. Фомина [50]. Основная теорема матричных игр (теорема 3.1) была доказана Дж.фон Нейманом в 1928 году [73] методом математической индукции по размерам матрицы игры. Ранее Э. Борель [15] продемонстрировал ее справедливость для кососимметрической 3×3-матрицы. Приведенное доказательство теоремы 3.1 принадлежит С. Какутани [47]. Теорема 3.2 объединяет две теоремы Э. Хелли ([50]). Основная теорема непрерывных игр (теорема 3.3) была доказана Ж. Виллем [30].

§ 4. Свойства решений в смешанных стратегиях матричных и непрерывных игр излагаются в большинстве книг по теории игр (см., например, [45, 63]). Пример 4.2 принадлежит Э. Борелю [16]. Он также рассматривал дискретный вариант игры с $A = 7$, которому дал следующую интерпретацию. Игроки набирают по семь карт. Каждая карта может быть одной из трех мастей (содержащих по 14 карт): трефы, бубны или червы. Первый игрок побеждает, если в каждой из каких-либо двух мастей он имеет больше карт, чем противник. О других решениях этой игры см. [78].

Выравнивающие стратегии впервые использовал Э. Борель [15] для доказательства существования решения в смешанных стратегиях игры с кососимметрической 3×3-матрицей. Игры с диагональными и циклическими матрицами, а также некоторые их обобщения см. в [48].

§ 5. Понятия доминирования строк и столбцов в матричных играх использовались многими авторами. В форме теорем они, по-видимому, впервые были сформулированы М. Дрешером в 1951 году в отчете корпорации РЭНД (см. его книгу [45]). Графический метод решения игр с 2×2-матрицами использовал еще Э. Борель. Более общий метод "двойного описания"см. в работе [70]. Эквивалентность решения матричной игры задаче линейного программирования была продемонстрирована Г. Данцигом [43]. Теорема 5.2 о крайних оптимальных смешанных стратегиях доказана Л.С. Шепли и Р. Сноу [101].

Итерационный метод решения матричной игры был сформулирован Г. Брауном в [17]. Сходимость процесса Брауна доказана Джулией Робинсон [84]. Она использовала более общий итерационный процесс с ненулевыми начальными векторами $c(0)$ и $d(0)$, называемый в литературе

процессом Брауна-Робинсон. Оценка скорости сходимости $O(k^{-\frac{1}{m+n-2}})$ была получена Г.Н. Шапиро в [100]. Модификация условия остановки по методу Брауна была предложена Ю.Б. Гермейером в [36]. О других игровых процессах типа Брауна-Робинсон см. [8].

§ 6. Теорема 6.1 о пересечении выпуклых компактов евклидова пространства была открыта Э. Хелли в 1913 году и сообщена И. Радону, опубликовавшему ее доказательство в [83] как следствие собственных результатов. Геометрическое (и более наглядное) доказательство методом математической индукции по размерности пространства было опубликовано Э. Хелли в [94]. Многочисленные обобщения и приложения теоремы Хелли см. в [42].

Структура решений в смешанных стратегиях игр с вогнутыми и выпуклыми выигрышами установлена Х.Ф. Боненбластом, С. Карлином и Л.С. Шепли в [12]. Приводимые здесь конструктивные доказательства теорем 6.2 и 6.3 принадлежат Э.Г. Давыдову [41], который опирался на результат 1938 года Л.Г. Шнирельмана [106], придав ему современный вид [1].

Основы теории статистических решений были заложены А. Вальдом [21] (см. также [11, 20]), где, в частности, введена функция риска. С приложениями теории статистических игр можно ознакомиться в [40]. Минимаксная оценка параметра биномиального распределения получена Дж. Ходжесом и Е. Леманом [96], а аналогичная оценка математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии получена И. Вольфовицем [33].

§ 7. Модель "нападение-оборона"определена и изучена Ю.Б. Гермейером [36]. Она является модификацией модели О. Гросса, в которой функция выигрыша нападения имеет вид $F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} k_i \max[x_i - y_i, 0]$, а k_i интерпретируются как коэффициенты важности пунктов. В.А. Горелик предложил сходную игровую модель производства бензина [39].

Приводимые здесь шумная и бесшумная модели дуэлей исследованы Ю.Б. Гермейером [36]. В классических моделях [48] $F(x, y)$ получается осреднением функции, принимающей значение 1, если убит второй дуэлянт, а первый остался жив, значение -1, если убит первый дуэлянт, а второй остался жив и значение 0 в остальных случаях (оба дуэлянта

[1] Шнирельман доказал теорему 6.2 в терминах выпуклых множеств, не используя понятие вогнутой функции.

живы или оба убиты). Методы решения игр *с выбором момента времени* (дуэльного типа), основанные на использовании интегральных и дифференциальных уравнений, см. в [9, 48].

§ 8. Теорема существования решения многошаговой игры с полной информацией с целью применения к шахматной игре доказана Э.Цермело в 1912 году [97]. Основные понятия теории позиционных игр определены Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном в [72]. Полная формализация этих игр проведена Г.У. Куном [58]. Пример 8.5 был сообщен автору Н.М. Новиковой. Пример 8.6 простейшей модели покера принадлежит Э. Борелю [16].

ГЛАВА II. ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ

§9. Ситуации равновесия в играх двух лиц

Понятие антагонистической игры можно значительно расширить. В игре двух лиц интересы игроков необязательно бывают противоположными. Рассматривают и игры многих лиц. Им посвящена третья глава.

Определим игру двух лиц. Пусть первый игрок имеет в своем распоряжении стратегии x из множества стратегий X, а второй игрок – стратегии y из множества стратегий Y. Будем рассматривать игру в *нормальной форме*. Это означает, что каждый из игроков выбирает стратегию, не зная выбора партнера. Пару стратегий (x, y) будем называть *ситуацией*. У первого игрока имеется функция выигрыша $F(x, y)$, а у второго – функция выигрыша $G(x, y)$, определенные на множестве всех ситуаций $X \times Y$. Каждый игрок стремится, по возможности, максимизировать свою функцию выигрыша. Таким образом, игра двух лиц в нормальной форме задается набором $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y), G(x, y)\rangle$.

В антагонистической игре понятие решения мы связывали с седловой точкой функции выигрыша первого игрока. В произвольной игре двух лиц аналогом седловой точки является понятие *ситуации равновесия*.

Определение. Ситуация (x^0, y^0) называется ситуацией равновесия (равновесием по Нэшу) игры Γ, если

$$\max_{x \in X} F(x, y^0) = F(x^0, y^0),\ \ \max_{y \in Y} G(x^0, y) = G(x^0, y^0).$$

Стратегии x^0 и y^0, составляющие ситуацию равновесия, будем называть *равновесными*. Если оба игрока придерживаются ситуации равновесия, то одному игроку от нее невыгодно отклоняться.

Упражнение 9.1. Если $F(x, y) \equiv -G(x, y)$, то игра Γ – антагонистическая. Докажите, что в антагонистической игре ситуации равновесия – это седловые точки функции $F(x, y)$ на $X \times Y$.

Обсудим, как можно использовать понятие равновесия по Нэшу с точки зрения принятия решений. В теории игр, как и во многих других теориях, можно выделить два подхода: *нормативный* и *позитивный*. Нормативный подход состоит в том, что теория дает рекомендации, как следует действовать в той или иной конфликтной ситуации. А при позитивном подходе теория пытается описать, как на самом деле происходит

взаимодействие между игроками. Изначально теория игр развивалась как нормативная. И сейчас мы обсудим понятие равновесия по Нэшу именно с такой точки зрения. В этом случае правило принятия решения можно сформулировать следующим образом: в конфликтной ситуации, описываемой игрой в нормальной форме, каждому участнику следует использовать стратегию, которая входит в равновесие по Нэшу. Позитивный подход обсуждается в конце §10.

Ситуация равновесия в произвольной игре двух лиц может не обладать теми свойствами, которые характерны для седловой точки антагонистической игры.

В антагонистической игре, имеющей решение, компоненты седловой точки являются максиминной и минимаксной стратегиями игроков и, наоборот, любая пара таких стратегий образует седловую точку. Таким образом, в антагонистической игре принцип равновесия согласуется с принципом оптимизации игроками своих гарантированных результатов. Кроме того, во всех седловых точках выигрыш первого игрока один и тот же и равен значению игры. К сожалению, в общем случае ситуации равновесия не обладают указанными свойствами. Убедимся в этом на примерах. Предварительно введем понятие *биматричной игры*.

Определение. Игра двух лиц Γ называется биматричной, если множества стратегий игроков конечны:

$$X = \{1, ..., m\},\ \ Y = \{1, ..., n\}.$$

Здесь $i \in X$, $j \in Y$ – стратегии первого и второго игроков. Выигрыши игроков задаются двумя матрицами

$$A = (F(i, j))_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n},\quad B = (G(i, j))_{m\times n} = (b_{ij})_{m\times n}.$$

Запишем определение ситуации равновесия в обозначениях биматричной игры.

Определение. Ситуация (i^0, j^0) биматричной игры Γ называется ситуацией равновесия (равновесием по Нэшу), если

$$a_{ij^0} \le a_{i^0j^0},\ i = 1, ..., m,\quad b_{i^0j} \le b_{i^0j^0},\ j = 1, ..., n.$$

Всегда ли в игре двух лиц существует ситуация равновесия? В общем случае ответ – отрицательный, поскольку, например, в антагонистической игре не всегда существует седловая точка.

Приведем пример неантагонистической игры, не имеющей ситуации равновесия.

Пример 9.1. Покупатель (игрок 2) приходит на рынок за яблоками. Продавец, торгующий яблоками (игрок 1), использует пружинные весы. У него есть две стратегии:

1) честно взвесить 1 кг яблок;

2) подкрутить пружинку и обвесить покупателя на 200 грамм.

Назовем эти стратегии "честность"и "обман"соответственно.

Покупатель также имеет две стратегии:

1) поверив продавцу, заплатить деньги и уйти;

2) взвесить купленные яблоки на контрольных весах и в случае обнаружения обмана звать кого-то и доказывать, что его обвесили.

Назовем эти стратегии "поверить"и "проверить"соответственно.

Определим выигрыши продавца и покупателя в каждой ситуации:

а) Продавец честно взвесил, а покупатель ему поверил. Соответствующие выигрыши обоих, равные 0, выберем в качестве начала отсчета.

б) Продавец обманул, а покупатель ему поверил. Выигрыш продавца равен 1, так как он получил дополнительную прибыль. Выигрыш покупателя равен -1, поскольку он получил меньше яблок.

в) Продавец честно взвесил, а покупатель его проверил. Выигрыш продавца равен 0. Выигрыш покупателя равен $-1/2$: он, во-первых, зря потратил время, а, во-вторых, глупо себя чувствует.

г) Продавец обманул, а покупатель его проверил. Выигрыш продавца равен -1, так как обнаружение обмана грозит ему определенными неприятностями (например, его могут лишить лицензии на торговлю на этом рынке). Выигрыш покупателя равен $1/2$, так как, во-первых, ему возместили обвес, а, во-вторых, он испытывает моральное удовлетворение от разоблачения обманщика.

Получается следующая биматричная игра:

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{честн} \\ \text{обман} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{пов} & \text{пров} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad B = \begin{array}{c} \\ \text{честн} \\ \text{обман} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{пов} & \text{пров} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Легко проверить, что здесь нет равновесий по Нэшу.

В приведенном примере элементы матриц A и B удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{12} \\ \wedge & & \vee \\ a_{21} & & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{11} & > & b_{12} \\ & & \\ b_{21} & < & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Упражнение 9.2. Проверить, что если элементы в матрицах выигрышей игроков связаны такими соотношениями, то в игре не существует равновесий по Нэшу.

Игры, подобные примеру 9.1, распространены в моделях, описывающих экономические и экологические взаимодействия. Рассмотрим пример игры, имеющей две ситуации равновесия.

Пример 9.2. Игра "семейный спор":

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{ф} \\ \text{т} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{ф} & \text{т} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}, \quad B = \begin{array}{c} \\ \text{ф} \\ \text{т} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{ф} & \text{т} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Интерпретация. Жена и муж (первый и второй игроки) обсуждают вопрос, куда пойти развлечься: на футбол (стратегия 1) или в театр (стратегия 2). Если идут на футбол, то жена получает 1 единицу, а муж – 2 единицы "удовольствия."Если идут в театр, то выигрыш жены – 2, а мужа – 1. Если оба идут в разные места, то выигрыши игроков – нулевые.

В игре существует две ситуации равновесия: (1,1) и (2,2). Первая из них предпочтительней второму игроку, а вторая – первому. Если игроки будут действовать независимо, то первый выберет стратегию 2, а второй – стратегию 1. В результате оба получат по нулю. Пример 9.2 показывает, что необходим какой-то механизм координации при выборе стратегии, если существует несколько равновесий по Нэшу. Поэтому игры, подобные примеру 9.2, называют также "играми на координацию".

Использование ситуаций равновесия на практике часто связывается со следующим сценарием поведения игроков. Они сначала должны договориться о ситуации равновесия, затем всякие переговоры запрещаются и игроки независимо выбирают свои стратегии, возможно нарушая принятое соглашение. Заметим, что одному игроку будет невыгодно отклоняться от своей равновесной стратегии. Если игроки придерживаются в игре такого сценария поведения, то игра Г называется *бескоалиционной*.

Приведем еще один пример "игры на координацию".

Пример 9.3. Игроками являются два водителя, которым надо проехать через перекресток, к которому они подъехали одновременно. Есть две стратегии пересечения перекрестка: использовать "правило правой руки", согласно которому водитель должен пропустить помеху справа

(стратегия 1), или "правило левой руки", согласно которому водитель должен пропустить помеху слева (стратегия 2). Если оба водителя придерживаются одного правила, то они успешно разъедутся, но если один из них использует "правило правой руки", а другой "правило левой руки", то может возникнуть авария. Следовательно, для благоприятного исхода в таких играх у всех игроков должен быть одинаковый подход к выбору правил поведения.

Упражнение 9.3. Объяснить (см. рис. 9.1), почему выигрыши игроков в последнем примере можно задать следующими матрицами:

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{пр.р} \\ \text{лев.р} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{пр.р} & \text{лев.р} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad B = \begin{array}{c} \\ \text{пр.р} \\ \text{лев.р} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{пр.р} & \text{лев.р} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

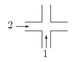

Рис. 9.1

Рассмотренные в примерах 9.2 и 9.3 игры характеризуются следующими соотношениями элементов матриц выигрыша:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{12} \\ \vee & & \wedge \\ a_{21} & & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{11} & > & b_{12} \\ & & \\ b_{21} & < & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Упражнение 9.4. Проверить, что при выполнении таких соотношений в игре всегда существует два равновесия по Нэшу.

Приведем пример, который показывает, что равновесие по Нэшу может быть неэффективным с точки зрения интересов игроков.

Пример 9.4. Игра "дилемма заключенного":

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{пр} \\ \text{нет} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{пр} & \text{нет} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -10 & -1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad B = \begin{array}{c} \\ \text{пр} \\ \text{нет} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{пр} & \text{нет} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Интерпретация. Два бандита (игроки 1 и 2), подозреваемые в совершении тяжкого преступления, находятся изолированно друг от друга в предварительном заключении. Ввиду отсутствия прямых улик успех или неуспех обвинения зависит от признания (стратегия 1) или непризнания (стратегия 2) самих бандитов. Если оба бандита признаются (ситуация (1,1)), то они будут признаны виновными и приговорены к 8 годам тюрьмы. Если ни один из них не признается (ситуация (2,2)), то по обвинению в главном преступлении они будут оправданы, но обвинителю все-таки удастся доказать их виновность в некотором сопутствующем менее тяжком преступлении, например, в ношении оружия, в результате чего они будут приговорены к 1 году тюрьмы. Если, наконец, признается только один из них (ситуации (2,1) и (1,2)), то признавшийся будет освобожден (за помощь следствию), а непризнавшийся будет приговорен к отбытию максимального срока – 10 лет.

В этой игре имеется единственная ситуация равновесия (1,1): обоим признаться. Однако есть ситуация (2,2), более выгодная обоим игрокам, но не являющаяся ситуацией равновесия. Следовательно, равновесия по Нэшу могут быть неэффективны в том смысле, что за счет отклонения обоих игроков от ситуации равновесия можно улучшить выигрыши каждого из них.

Описанная в примере 9.4 игра имеет следующую структуру:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{12} \\ \vee & & \vee \\ a_{21} & & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{11} & > & b_{12} \\ & & \\ b_{21} & > & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Упражнение 9.5. Проверить, что при выполнении таких соотношений в игре всегда существует единственное равновесие по Нэшу.

В связи с последним примером дадим определение ситуации, *оптимальной по Парето*.

Определение. Ситуация (x^0, y^0) игры Г называется оптимальной по Парето, если не существует такой ситуации (x, y) что выполнены неравенства

$$F(x,y) \geq F(x^0, y^0), \;\; G(x,y) \geq G(x^0, y^0)$$

и при этом хотя бы одно из них – строгое.

В примере 9.4 в ситуации (2,2) оба игрока получают по -1, что больше, чем их выигрыш -8 в ситуации равновесия (1,1). Следовательно, ситуация равновесия не является оптимальной по Парето.

Упражнение 9.6. Докажите, что в антагонистической игре любая ситуация оптимальна по Парето.

Следующий пример показывает, что не всегда равновесные стратегии являются максиминными.

Пример 9.5. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Здесь (1,1) – единственная ситуация равновесия, но стратегия 1 первого игрока не является максиминной. Действительно,

$$W(1) = \min_{1 \leq j \leq 3} a_{1j} = 0, \quad W(2) = \min_{1 \leq j \leq 3} a_{2j} = 2.$$

Стратегия 1 второго игрока также не является максиминной. Если игрок неблагожелательно настроен по отношению к партнеру, то он может нарушить соглашение и вместо равновесной стратегии выбрать максиминную. В результате он получит тот же выигрыш 2, что и в ситуации равновесия, а партнер получит 0.

Мы отметили три недостатка понятия равновесия по Нэшу:

1) равновесий по Нэшу в игре может не существовать;

2) равновесие по Нэшу может быть не единственно;

3) равновесие по Нэшу может быть неэффективно.

Но, несмотря на эти недостатки, указанное понятие играет центральную роль в теории принятия решений в конфликтных ситуациях.

Приведем теорему существования ситуации равновесия в игре двух лиц, которая является обобщением теоремы 2.3. Предварительно сформулируем топологическую теорему о *неподвижной точке*.

Теорема 9.1 (Брауэр). Пусть $f : Z \to Z$ – непрерывное отображение в себя выпуклого компакта Z конечномерного евклидова пространства. Тогда у него существует неподвижная точка $z^0 : f(z^0) = z^0$.

Доказательство теоремы см. в Приложении (П3,П4).

Упражнение 9.7. Докажите теорему для $X = [0, 1]$.

Отметим, что все условия теоремы существенны. Например, если множество Z – невыпуклое, то утверждение теоремы может быть неверным. Действительно, если Z – окружность, а f – ее поворот на угол $\alpha < 2\pi$, то f неподвижной точки не имеет.

Упражнение 9.8. Постройте контрпримеры к утверждению теоремы, если

1) $Z = [0, \infty)$;

2) $Z = (0, 1]$;

3) $Z = [0, 1]$, но функция f разрывна.

Теорема 9.2. Пусть в игре двух лиц Г множества X и Y – выпуклые компакты евклидовых пространств E^m и E^n. Предположим, что функции $F(x,y)$ и $G(x,y)$ непрерывны на $X \times Y$, функция $F(x,y)$ вогнута по x при любом фиксированном y, а функция $G(x,y)$ вогнута по y при любом фиксированном x. Тогда в игре Г существует ситуация равновесия.

Доказательство. Вначале предположим, что функции $F(x,y)$ и $G(x,y)$ непрерывны на $X \times Y$ и строго вогнуты по "своим"переменным x и y соответственно. Тогда для любых стратегий y и x множества наилучших ответов игроков

$$X(y) \overset{def}{=} \operatorname{Arg} \max_{x \in X} F(x,y) = \{x(y)\}, \;\; Y(x) \overset{def}{=} \operatorname{Arg} \max_{y \in Y} G(x,y) = \{y(x)\}$$

содержат по одному элементу $x(y)$ и $y(x)$. Согласно теореме 2.2, функции $x(y)$ и $y(x)$ непрерывны. Будем называть их *функциями наилучшего ответа* первого и второго игроков соответственно.

Положим $Z = X \times Y$ и рассмотрим отображение $f : Z \to Z$, $f(x,y) = (x(y), y(x))$. По теореме 9.1 отображение f имеет неподвижную точку $z^0 = (x^0, y^0) : f(z^0) = z^0$ или $x(y^0) = x^0, \; y(x^0) = y^0$. Следовательно, (x^0, y^0) – ситуация равновесия.

Теперь предположим, что функции $F(x,y)$ и $G(x,y)$ вогнуты по "своим"переменным x и y, но необязательно строго. Положим

$$F_\varepsilon(x,y) = F(x,y) - \varepsilon \sum_{i=1}^{m} x_i^2, \quad G_\varepsilon(x,y) = G(x,y) - \varepsilon \sum_{j=1}^{m} y_j^2,$$

где $\varepsilon > 0$. Функции $F_\varepsilon(x,y)$ и $G_\varepsilon(x,y)$ непрерывны на $X \times Y$, $F_\varepsilon(x,y)$ строго вогнута по x, а $G_\varepsilon(x,y)$ строго вогнута по y. По доказанному в игре $\Gamma^\varepsilon = \langle X, Y, F_\varepsilon(x,y), G_\varepsilon(x,y) \rangle$ существует ситуация равновесия $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$. Пусть $\{\varepsilon_h\}$ – такая последовательность чисел, что $\varepsilon_h \to 0+$ и соответствующая последовательность ситуаций равновесия $\{(x^{\varepsilon_h}, y^{\varepsilon_h})\}$ сходится к некоторой ситуации (x^0, y^0). По определению $(x^{\varepsilon_h}, y^{\varepsilon_h})$

$$F_{\varepsilon_h}(x, y^{\varepsilon_h}) \leq F_{\varepsilon_h}(x^{\varepsilon_h}, y^{\varepsilon_h}) \;\; \forall \, x \in X,$$

$$G_{\varepsilon_h}(x^{\varepsilon_h}, y) \leq G_{\varepsilon_h}(x^{\varepsilon_h}, y^{\varepsilon_h}) \;\; \forall \, y \in Y.$$

Переходя в этих неравенствах при фиксированных x и y к пределу при $h \to \infty$, получим

$$F(x, y^0) \leq F(x^0, y^0) \;\; \forall \, x \in X, \;\; G(x^0, y) \leq G(x^0, y^0) \;\; \forall \, y \in Y,$$

Это означает, что (x^0, y^0) – ситуация равновесия игры Г. ■

Рассмотрим метод поиска ситуации равновесия с использованием множеств наилучших ответов $X(y) = \operatorname{Arg} \max_{x \in X} F(x,y)$ и $Y(x) = \operatorname{Arg} \max_{y \in Y} G(x,y)$. Он состоит в решении системы включений

$$x^0 \in X(y^0), \;\; y^0 \in Y(x^0). \tag{9.1}$$

В случае, когда у игроков существуют непрерывные функции наилучшего ответа $x(y)$ и $y(x)$ (см. первую часть доказательства теоремы 9.2), система включений (9.1) эквивалентна системе уравнений $x(y^0) = x^0$, $y(x^0) = y^0$.

Пример 9.6. Найдем все ситуации равновесия игры Г :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \underline{3} & \underline{5} & -1 \\ \underline{4} & -2 & 3 & \underline{4} \\ 2 & 1 & \underline{5} & \underline{4} \\ -1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \;\; B = \begin{pmatrix} \underline{7} & 5 & 4 & \underline{7} \\ 4 & \underline{5} & \underline{5} & 4 \\ -3 & \underline{6} & \underline{6} & 2 \\ \underline{8} & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

В матрице A подчеркнуты наибольшие элементы в столбцах, а в матрице B – наибольшие элементы в строках. Общий подчеркнутый элемент соответствует (3,3) – единственной ситуации равновесия.

Пример 9.7. Рассмотрим игру двух лиц $\Gamma = \langle X, Y, F(x,y), G(x,y) \rangle$, где X, Y и $F(x,y), G(x,y)$ – множества стратегий и функции выигрыша первого и второго игроков. Пусть

$$X = Y = [0, 1], \;\; F(x,y) = -3x^2 + 2y^2 + 7xy, \;\; G(x,y) = -(x + y - 1)^2.$$

Функции $F(x,y)$ и $G(x,y)$ строго вогнуты по переменным x и y соответственно. Функции наилучшего ответа –

$$x(y) = \begin{cases} 7y/6, & 0 \leq y \leq 6/7, \\ 1, & 6/7 < y \leq 1, \end{cases} \;\; y(x) = 1 - x.$$

Решая систему $x(y) = x, \; y(x) = y$, находим $x^0 = 7/13, \; y^0 = 6/13$.

Для численного решения системы включений (9.1) часто применяется *процедура нащупывания по Курно*. Она заключается в построении последовательности стратегий:

$x^1 \in X, \; y^1 \in Y(x^1), \; x^2 \in X(y^1), \; y^2 \in Y(x^2)$ и т.д.

Пусть последовательности стратегий $\{x^k\}, \;\; \{y^k\}$ сходятся соответственно к x^0 и y^0. Тогда (x^0, y^0) – ситуация равновесия, поскольку для (x^0, y^0) справедлива система включений (9.1) (см. доказательство теоремы 2.2). Однако последовательности $\{x^k\}, \; \{y^k\}$ сходятся не всегда.

Пример 9.8. Рассмотрим антагонистическую игру $\Gamma = \langle X, \; Y, \; F(x,y) \rangle$, в которой

$$X = Y = [-1, 1], \;\; F(x,y) = -x^2 + 2axy + y^2,$$

где $a \in (0, 1]$ – параметр. Функция $F(x,y)$ строго вогнута по x, строго выпукла по y и имеет единственную седловую точку $(0, 0)$. Функции наилучшего ответа игроков равны $x(y) = ay, \; y(x) = -ax$. Пусть $x^1 \neq 0$. Тогда процедура нащупывания по Курно порождает последовательности $\{x^k = (-a)^{k-1} x^1\}$, $\{y^k = (-a)^k x^1\}$, сходящиеся при $0 < a < 1$ и расходящиеся при $a = 1$.

Следующий пример показывает, что для поиска равновесия по Нэшу можно использовать необходимые условия оптимальности первого порядка.

Пример 9.9. Модель *дуополии*. Две фирмы выпускают бесконечноделимый товар для продажи на рынке. Пусть x и y – количества товара, выпускаемого первой и второй фирмами, а $0 < c_1 \leq c_2$ – затраты на его производство, т.е. себестоимости единицы товара для обеих фирм. Цена товара $p(x + y)$ зависит от общего выпуска $x + y$. Функции выигрыша фирм $F(x,y) = (p(x+y) - c_1)x$ и $G(x,y) = (p(x+y) - c_2)y$ – прибыли, полученные от реализации произведенной продукции.

Пусть цена на продукцию определяется по следующей формуле $p(x + y) = K/(x + y)^\alpha$, где $1 \geq \alpha > 0$. Тогда можно считать, что $X = [0, (K/c_1)^{1/\alpha}]$, поскольку при $x > (K/c_1)^{1/\alpha}$ первая фирма терпит убытки. Аналогично $Y = [0, (K/c_2)^{1/\alpha}]$.

Заметим, что для полученной игры выполнены условия теоремы 9.2 и ситуация равновесия (x^0, y^0) существует. Пусть $x^0 > 0, \; y^0 > 0$. Тогда

равновесные стратегии $x^0, \; y^0$ находятся из системы уравнений

$$F'_x(x^0, y^0) = \frac{K}{(x^0 + y^0)^\alpha} - c_1 - \frac{\alpha K x^0}{(x^0 + y^0)^{\alpha+1}} = 0,$$

$$G'_y(x^0, y^0) = \frac{K}{(x^0 + y^0)^\alpha} - c_2 - \frac{\alpha K y^0}{(x^0 + y^0)^{\alpha+1}} = 0.$$

Складывая уравнения, находим сначала сумму

$$x^0 + y^0 = \Big(\frac{(2 - \alpha)K}{c_1 + c_2} \Big)^{1/\alpha}, \quad \text{а затем}$$

$$(x^0, y^0) = \frac{1}{\alpha(2 - \alpha)K} \Big(\frac{(2 - \alpha)K}{c_1 + c_2} \Big)^{(\alpha+1)/\alpha} \Big(c_2 + (\alpha - 1)c_1, c_1 + (\alpha - 1)c_2 \Big).$$

Поскольку $y^0 > 0$, то необходимо $c_1 + (\alpha - 1)c_2 > 0$. Если выполнено неравенство $c_1 + (\alpha - 1)c_2 \leq 0$, то первая фирма является на рынке монополистом и равновесные стратегии имеют вид

$$x^0 = \Big(\frac{(1 - \alpha)K}{c_1} \Big)^{1/\alpha}, \;\; y^0 = 0.$$

Байесовское равновесие

Пусть в игре двух лиц $\Gamma = \langle X, \; Y, \; F(x,y,c), \; F(x,y,c) \rangle$ функции выигрыша игроков $F(x,y,c)$ и $G(x,y,c)$ зависят не только от ситуации (x,y), но и от случайного вектора параметров $c = (c_1, c_2) \in C$. Предположим, что множество C конечно и $p(c), \; c \in C$ – вероятностное распределение на C, известное всем игрокам. Пусть C_k – множество значений, принимаемых параметром c_k, когда вектор c пробегает множество C. Игроку k перед выбором стратегии становится известным значение "своего"параметра $c_k, \;\; k = 1, 2$. Поэтому стратегией первого игрока является функция $\tilde{x} : C_1 \to X$, а второго – функция $\tilde{y} : C_2 \to Y$, Множество всех таких функций $\tilde{x}$ обозначим через $\tilde{X}$, а функций $\tilde{y}$ – через $\tilde{Y}$.

Определим осредненные функции выигрыша игроков

$$\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{c \in C} p(c) F(\tilde{x}(c), \tilde{y}(c), c), \;\; \tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{c \in C} p(c) G(\tilde{x}(c), \tilde{y}(c), c).$$

Определение. Игра $\tilde{\Gamma} = \langle \tilde{X}, \; \tilde{Y}, \; \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}), \; \tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{y}) \rangle$ и ситуации равновесия в ней называются *байесовскими*.

Пример 9.10. В продолжение примера 9.9 рассмотрим модель *дуополии* с функциями выигрыша игроков $F(x,y,c_1) = (p(x+y) - c_1)x$, $G(x,y,c_2) = (p(x+y)-c_2)y$ и линейной функцией цены $p(x+y) = a-x-y$. Пусть себестоимость c_1 известна обоим игрокам, а себестоимость c_2 представляет собой случайную величину, принимающую значения c_2^1 и c_2^2 с вероятностью $1/2$. В этих предположениях стратегия $\tilde{x}$ игрока 1 является функцией-константой и совпадает с x. Положим $y^i = \tilde{y}(c_2^i)$, $i = 1,2$. Тогда в байесовской игре функции выигрыша игроков имеют вид

$$\tilde{F}(\tilde{x},\tilde{y}) = \Big(a - x - \Big(\frac{y^1+y^2}{2}\Big) - c_1\Big)x,$$

$$\tilde{G}(\tilde{x},\tilde{y}) = \frac{1}{2}(a-x-y^1-c_2^1)y^1 + \frac{1}{2}(a-x-y^2-c_2^2)y^2.$$

Найдем байесовскую ситуацию равновесия $(x^0,(y^{01},y^{02}))$ при $a > 2\max[c_1,c_2^1,c_2^2]$. Функции наилучшего ответа игроков имеют вид

$$\tilde{x}^*(y^1,y^2) = \max\left[\frac{a-c_1}{2} - \frac{y^1+y^2}{4}, 0\right],$$

$$\tilde{y}^*(c_2^i,x) = \max\left[\frac{a-c_2^i}{2} - \frac{x}{2}, 0\right],\ i = 1,2.$$

Решая систему уравнений

$$\tilde{x}^*(y^1,y^2) = x,\ \tilde{y}^*(c_2^i,x) = y^i,\ i = 1,2,$$

находим ситуацию равновесия

$$x^0 = \frac{1}{3}\left(a - 2c_1 + \frac{c_2^1+c_2^2}{2}\right),$$

$$y^{01} = \frac{1}{3}\left(a + c_1 - \frac{7}{4}c_2^1 - \frac{1}{4}c_2^2\right),\ y^{02} = \frac{1}{3}\left(a + c_1 - \frac{7}{4}c_2^2 - \frac{1}{4}c_2^1\right).$$

§ 10. Ситуации равновесия в биматричных играх

Перейдем к смешанным расширениям биматричных игр Γ, задаваемых матрицами

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, \quad B = (b_{ij})_{m\times n}.$$

Смешанные стратегии игроков здесь такие же, как и в матричной игре: $p \in P$, $q \in Q$. Ожидаемые выигрыши игроков –

$$A(p,q) = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j,\ \ B(p,q) = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n p_i b_{ij} q_j.$$

В результате получили смешанное расширение биматричной игры

$$\overline{\Gamma} = \big\langle P, Q, A(p,q), B(p,q)\big\rangle.$$

Ситуации равновесия игры $\overline{\Gamma}$ будем называть ситуациями равновесия в смешанных стратегиях (или смешанными равновесиями по Нэшу) исходной игры Γ.

Множества смешанных стратегий P и Q – выпуклые компакты евклидовых пространств, а функции $A(p,q)$ и $B(p,q)$ билинейны. По теореме 9.2 в игре Γ существует ситуация равновесия с смешанных стратегиях (p^0,q^0). Для нее по определению выполнены неравенства

$$A(p,q^0) \le A(p^0,q^0)\ \ \forall\, p \in P, \quad B(p^0,q) \le B(p^0,q^0)\ \ \forall\, q \in Q.$$

Рассмотрим свойства ситуаций равновесия в смешанных стратегиях, аналогичные свойствам решений матричных игр.

Лемма 10.1. Для того чтобы ситуация (p^0,q^0) была ситуацией равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры Γ, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие

$$\begin{cases} A(i,q^0) \le A(p^0,q^0), & i = 1,...,m,\\ B(p^0,j) \le B(p^0,q^0), & j = 1,...,n.\end{cases} \tag{$*$}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть (p^0,q^0) – ситуация равновесия. Тогда $A(p,q^0) \le A(p^0,q^0)\ \ \forall\, p \in P$. Полагая $p = (0,...0,1,0,...,0)$, получим неравенства условия $(*)$ для матрицы A. Аналогично выводятся неравенства для матрицы B.

Достаточность. Пусть ситуация (p^0,q^0) удовлетворяет условию $(*)$. Возьмем произвольную смешанную стратегию p первого игрока, домножим неравенства $A(i,q^0) \le A(p^0,q^0)$ на p_i и сложим их. В результате получим неравенство $A(p,q^0) \le A(p^0,q^0)$. Аналогично, для любой смешанной стратегии q второго игрока справедливо неравенство $B(p^0,q) \le B(p^0,q^0)$. ■

Теорема 10.1 (свойство дополняющей нежесткости). Пусть (p^0,q^0) – ситуация равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры Γ. Тогда

1) $p_i^0 > 0 \ \Rightarrow\ A(i,q^0) = A(p^0,q^0)$;

2) $q_j^0 > 0 \ \Rightarrow\ B(p^0,j) = B(p^0,q^0)$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Предположим, что для некоторого i_1 $\ p_{i_1}^0 > 0$ и $A(i_1,q^0) < A(p^0,q^0)$. В условии $(*)$ каждое неравенство $A(i,q^0) \le A(p^0,q^0)$, $i = 1,...,m$ умножим на p_i^0 и сложим их. Поскольку i_1-е неравенство сохранится строгим, получим $A(p^0,q^0) < A(p^0,q^0)$ (противоречие). Утверждение 2) доказывается аналогично. ■

Следствие. Пусть (p^0,q^0) – ситуация равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры Γ. Тогда

1) $A(i,q^0) < A(p^0,q^0) \ \Rightarrow\ p_i^0 = 0$;

2) $B(p^0,j) < B(p^0,q^0) \ \Rightarrow\ q_j^0 = 0$.

Теорема 10.2. Для того чтобы ситуация (p^0,q^0) была ситуацией равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры Γ, необходимо и достаточно, чтобы нашлись множества $X^0 \subseteq X$, $Y^0 \subseteq Y$ и числа v_1, v_2, для которых выполнены условия

$$\begin{cases} \sum\limits_{j\in Y^0} a_{ij}q_j^0 = v_1 & \forall\, i \in X^0,\\ \sum\limits_{j\in Y^0} a_{ij}q_j^0 \le v_1 & \forall\, i \notin X^0,\\ \sum\limits_{j\in Y^0} q_j^0 = 1,\ q_j^0 \ge 0 & \forall\, j \in Y^0,\end{cases} \tag{10.1}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in X^0} p_i^0 b_{ij} = v_2 & \forall\, j \in Y^0,\\ \sum\limits_{i\in X^0} p_i^0 b_{ij} \le v_2 & \forall\, j \notin Y^0,\\ \sum\limits_{i\in X^0} p_i^0 = 1,\ p_i^0 \ge 0 & \forall\, i \in X^0.\end{cases} \tag{10.2}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть (p^0,q^0) – ситуация равновесия. Положим $v_1 = A(p^0,q^0)$, $v_2 = B(p^0,q^0)$,

$$X^0 = \{i \in X \mid p_i^0 > 0\},\ Y^0 = \{j \in Y \mid q_j^0 > 0\}.$$

Условия (10.1) и (10.2) вытекают из леммы 10.1 и теоремы 10.1.

Достаточность. Пусть для ситуации (p^0,q^0) выполнены условия (10.1) и (10.2). Покажем, что тогда необходимо $A(p^0,q^0) = v_1$. Действительно, из (10.1)

$$\sum_{j\in Y^0} a_{ij}q_j^0 = \sum_{j=1}^n a_{ij}q_j^0 = v_1\ \ \forall\, i \in X^0.$$

Умножая эти равенства на p_i^0, $i \in X^0$, и складывая их, получим $A(p^0,q^0) = v_1$. Аналогично доказывается, что $B(p^0,q^0) = v_2$. По лемме 10.1 (p^0,q^0) является ситуацией равновесия. ■

Упражнение 10.1. Докажите, что в игре Γ с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\ \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

существует единственное равновесие по Нэшу

$$(p^0,q^0) = ((1/3,1/3,1/3),(1/3,1/3,1/3)).$$

Сформулируем условие, обеспечивающее равенство $|X^0| = |Y^0|$[1]. В этом случае матрицы систем (9.7) и (9.8)

$$\overline{A} = (a_{ij})_{i\in X^0 j\in Y^0},\ \ \overline{B} = (b_{ij})_{i\in X^0 j\in Y^0}$$

являются квадратными.

Определение. Говорят, что система векторов $a^{(i)} \in E^m$, $i \in X^0$, $|X^0| \ge m+1$ имеет *максимальный аффинный ранг*, если найдутся такой номер $i_0 \in X^0$ и такое множество $X^1 \subset X^0$, $i_0 \notin X^1$, $|X^1| = m$, что векторы $a^{(i)} - a^{(i_0)}$, $i \in X^1$ линейно независимы. Например, при $m = 2$ система точек на плоскости тогда и только тогда имеет максимальный аффинный ранг, когда точки не лежат на одной прямой.

Определение. Говорят, что матрица A (матрица B) находится в *общем положении*, если система строк (столбцов) любой ее подматрицы $\overline{A} =$

[1] Множества X^0 и Y^0 содержат равное число элементов.

$(a_{ij})_{i\in X^0 j\in Y^0}$ с $|X^0| > |Y^0|$ (подматрицы $\overline{B} = (b_{ij})_{i\in X^0 j\in Y^0}$ с $|X^0| < |Y^0|$) имеет максимальный аффинный ранг.

Отметим, что для любых двух матриц A и B найдутся сколь угодно поэлементно близкие матрицы A' и B', для которых выполнено условие общности положения. Это утверждение можно доказать, используя непрерывность определителя матрицы как функции ее элементов.

Теорема 10.3. Пусть матрицы A и B игры Γ находятся в общем положении. Тогда для *любой* ситуации равновесия (p^0,q^0) в смешанных стратегиях найдутся такие множества $X^0 \subseteq X$, $Y^0 \subseteq Y$ и такие числа v_1, v_2, что выполнены условия (10.1), (10.2) и $|X^0| = |Y^0|$.

Доказательство. Пусть (p^0,q^0) – произвольная ситуация равновесия в смешанных стратегиях. Тогда по теореме 10.2 найдутся такие множества $X^0 \subseteq X$, $Y^0 \subseteq Y$ и такие числа v_1, v_2, что выполнены условия (10.1) и (10.2).

Докажем, что $|X^0| = |Y^0|$. Предположим, что $|X^0| > |Y^0|$. Рассмотрим подматрицу $\overline{A} = (a_{ij})_{i\in X^0 j\in Y^0}$, отвечающую системе уравнений (10.1). Из условия общности положения найдутся такой номер $i_0 \in X^0$ и такое множество $X^1 \subset X^0$, $i_0 \notin X^1$, $|X^1| = |Y^0|$, что матрица $(a_{ij} - a_{i_0 j})_{i\in X^1 j\in Y^0}$ – невырожденная.

Из (10.1) получаем систему уравнений

$$\sum_{j\in Y^0} (a_{ij} - a_{i_0 j})q_j^0 = 0\ \ \forall\, i \in X^1,$$

имеющую нулевое решение $q_j^0 = 0$, $j \in Y^0$, что противоречит равенству $\sum\limits_{j\in Y^0} q_j^0 = 1$.

Аналогично приходим к противоречию, предполагая, что $|X^0| < |Y^0|$. ■

Условие общности положения для матриц A и B трудно проверить. Отказавшись от него, можно получить утверждение, более слабое, чем теорема 10.3.

Теорема 10.3′. В любой биматричной игре Γ для *некоторой* ситуации равновесия (p^0,q^0) в смешанных стратегиях найдутся такие множества $X^0 \subseteq X$, $Y^0 \subseteq Y$ и такие числа v_1, v_2, что выполнены условия (10.1), (10.2) и $|X^0| = |Y^0|$.

Доказательство. Для матриц A и B найдутся такие последовательности матриц $\{A^k\}$, $\{B^k\}$, удовлетворяющих условию общности положения, что поэлементно $A^k \to A$, $B^k \to B$.

Возьмем последовательность ситуаций равновесия $\{(p^k,q^k)\}$ игр Γ^k с матрицами A^k, B^k. По теореме 10.3 найдутся такие множества $X^k \subseteq X$, $Y^k \subseteq Y$ и числа v_1^k, v_2^k, что $|X^k| = |Y^k|$ и выполнены условия

$$\begin{cases} \sum\limits_{j\in Y^k} a_{ij}^k q_j^k = v_1^k & \forall\, i \in X^k,\\ \sum\limits_{j\in Y^k} a_{ij} q_j^k \le v_1^k & \forall\, i \notin X^k,\\ \sum\limits_{j\in Y^k} q_j^k = 1,\ q_j^k \ge 0 & \forall\, j \in Y^k,\end{cases} \quad \begin{cases} \sum\limits_{i\in X^k} p_i^k b_{ij}^k = v_2^k & \forall\, j \in Y^k,\\ \sum\limits_{i\in X^k} p_i^k b_{ij} \le v_2^k & \forall\, j \notin Y^k,\\ \sum\limits_{i\in X^k} p_i^k = 1,\ p_i^k \ge 0 & \forall\, i \in X^k.\end{cases}$$

Без потери общности (выделяя соответствующие подпоследовательности) можно считать, что $p^k \to p^0$, $q^k \to q^0$ и $X^k = X^0$, $Y^k = Y^0$ при всех k. Переходя в последних уравнениях и неравенствах к пределу при $k \to \infty$, получим условия (10.1),(10.2) для смешанных стратегий p^0, q^0. По теореме 10.2 ситуация (p^0,q^0) будет равновесием по Нэшу. ■

Рассмотрим алгоритм поиска ситуаций равновесия в смешанных стратегиях. Перебираем квадратные подматрицы

$$\overline{A} = (a_{ij})_{i\in X^0 j\in Y^0},\ \ \overline{B} = (b_{ij})_{i\in X^0 j\in Y^0}$$

и решаем системы уравнений из (10.1),(10.2). Если решения этих систем p_i^0, $i \in X^0$, v_1 и q_j^0, $j \in Y^0$, v_2 удовлетворяют неравенствам из условий 10.1 и 10.2, то, добавляя компоненты $p_i = 0$, $i \notin X^0$, $q_j = 0$, $j \notin Y^0$, получим ситуацию равновесия (p^0,q^0). Из теоремы 10.3′ вытекает, что через конечное число шагов алгоритм приводит к ситуации равновесия.

Проиллюстрируем работу алгоритма для игр с матрицами размеров $2\times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2n}\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & \cdots & b_{2n}\end{pmatrix}.$$

В данном случае смешанная стратегия первого игрока имеет вид $p = (p_1, 1-p_1)$, где $0 \le p_1 \le 1$. Перебирать нужно 2×2-подматрицы. Каждая из них задается номерами двух столбцов j_1, j_2. Запишем систему (10.2)

$$p_1^0 b_{1j_1} + (1-p_1^0)b_{2j_1} = v_2, \quad p_1^0 b_{1j_2} + (1-p_1^0)b_{2j_2} = v_2,$$

$$p_1^0 b_{1j} + (1-p_1^0)b_{2j} \le v_2 \quad \forall\, j \ne j_1, j_2,\ 0 \le p_1^0 \le 1.$$

Если эта система несовместна, то перейдем к другой паре j_1, j_2. Если решение p_1^0, v_1 системы (10.2) существует, то рассмотрим систему (10.1)

$$a_{1j_1}q^* + a_{1j_2}(1-q^*) = v_1, \quad a_{2j_1}q^* + a_{2j_2}(1-q^*) = v_1,\ \ 0 \le q^* \le 1.$$

Пусть существует ее решение[1] q^*, v_1. Определим стратегию

$$q^0:\ \ q_j^0 = \begin{cases} q^*, & j = j_1,\\ 1-q^*, & j = j_2,\\ 0, & j \ne j_1, j_2,\end{cases}$$

и ситуация (p^0,q^0) будет смешанным равновесием по Нэшу.

Здесь алгоритму можно дать геометрическую интерпретацию. На отрезке $0 \le p_1 \le 1$ строим прямые $l_j(p_1) = b_{1j}p_1 + b_{2j}(1-p_1)$, $j = 1,...,n$. Точки излома верхней огибающей семейства прямых l_j соответствуют парам j_1, j_2, для которых существует решение p_1^0, v_2 системы (10.2). Поэтому последовательно перебираем точки верхней огибающей и решаем систему уравнений из (10.1) с проверкой неравенств $0 \le q^* \le 1$.

При $n = 2$ обе матрицы A и B имеют размеры 2×2. В этом случае прямые $l_1(p_1) = b_{11}p_1 + b_{21}(1-p_1)$ и $l_2(p_1) = b_{12}p_1 + b_{22}(1-p_1)$ тогда и только тогда пересекаются в точке $0 \le p_1^0 \le 1$, когда выполнено неравенство (рис. 10.1)

$$(b_{22}-b_{21})(b_{11}-b_{12}) \ge 0. \tag{10.3}$$

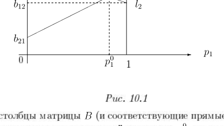

Рис. 10.1

Если столбцы матрицы B (и соответствующие прямые l_1 и l_2) не совпадают, то компоненты смешанной стратегии p^0, удовлетворяющей системе (10.2), можно записать в явном виде

$$p_1^0 = \frac{b_{22}-b_{21}}{b_{22}-b_{21}+b_{11}-b_{12}},\ \ p_2^0 = \frac{b_{11}-b_{12}}{b_{22}-b_{21}+b_{11}-b_{12}}. \tag{10.4}$$

[1] В противном случае переходим к другой паре j_1, j_2.

Для системы (10.1), из которой вычисляется смешанная стратегия второго игрока, все рассуждения проводятся аналогичным образом. В результате мы получим следующее условие на матрицу первого игрока, обеспечивающее существование решения системы (10.1):

$$(a_{22}-a_{12})(a_{11}-a_{21}) \ge 0. \tag{10.5}$$

Это условие можно выписать и сразу, исходя из следующих соображений: надо заменить второго игрока первым и учесть, что второй игрок выбирал свои стратегии по столбцам, а первый выбирает их по строкам. Поэтому, чтобы выписать условие существования решения, надо выписать условие (10.3), заменив одну матрицу на другую, а строки на столбцы. Если строки матрицы A не совпадают, то компоненты смешанной стратегии q^0, удовлетворяющей системе (10.1), можно записать в явном виде

$$q_1^0 = \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{22}-a_{12}+a_{11}-a_{21}},\ \ q_2^0 = \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{22}-a_{12}+a_{11}-a_{21}}. \tag{10.6}$$

Пример 10.1. Модель технического контроля за качеством продукции.

Завод выпускает автомобили партиями по 100 штук. За каждую автомашину завод получает от концерна 1.3 ед. оплаты, из которых 1 ед. составляют премиальные, а 0.3 ед. предназначены для операций технического контроля (ОТК). Завод (игрок 1) может выпускать партию автомобилей либо с ОТК (стратегия 1), либо без ОТК (стратегия 2), увеличивая сумму премиальных. При использовании первой стратегии итоговая сумма премиальных, полученная заводом за партию, составляет 100 ед., при использовании второй стратегии – 130 ед.

С целью уменьшения производственного брака концерн решил привлечь независимую фирму, осуществляющую технический контроль за качеством продукции. Стоимость проверки автомобиля для фирмы составляет 0.12 ед. Если ОТК заводом не проводится, то автомобиль неисправен с вероятностью 4/5. В случае обнаружения неисправностей завод обязан их устранить, затратив 0.3 ед., и заплатить дополнительно фирме 0.2 ед. из своих премиальных. Фирма (игрок 2) может либо проверить партию (стратегия 1), либо отказаться от ее проверки (стратегия 2).

Выигрышем первого игрока является ожидаемая сумма премиальных, полученная заводом от концерна за партию автомобилей с учетом

издержек на ОТК и возможных выплат фирме. Выигрышем второго игрока является ожидаемая сумма выплат, полученных от завода при проверке партии автомобилей с учетом затрат на эту проверку. Выпишем матрицы игры

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 100\\ 90 & 130\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -12 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}.$$

Например, если завод не проводит ТК, а фирма проверяет партию, то средние премиальные равны $100(0.8(4/5) + 1.3(1/4)) = 90$ ед., а ожидаемая прибыль фирмы составит $100(0.08(4/5) - 0.12(1/5)) = 4$ ед. Нетрудно видеть, что в данной игре не существует ситуации равновесия в чистых стратегиях. Условия (10.3) и (10.5) выполнены и ситуацию равновесия находим по формулам (10.4) и (10.6)

$$(p^0,q^0) = ((1/4,3/4),(3/4,1/4)).$$

Равновесные стратегии p^0 и q^0 могут быть реализованы в виде "физических смесей": первый игрок "должен"25 автомобилей каждой партии выпускать с ОТК, второй игрок должен проверять по 75 автомобилей каждой партии.

Пример 10.2. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix},\ \ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

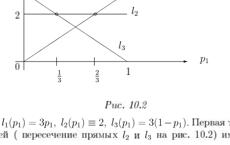

Рис. 10.2

Здесь $l_1(p_1) = 3p_1$, $l_2(p_1) \equiv 2$, $l_3(p_1) = 3(1-p_1)$. Первая точка верхней огибающей (пересечение прямых l_2 и l_3 на рис. 10.2) имеет абсциссу

$p_1^0 = 1/3$. Рассмотрим систему уравнений из 10.1

$$4q^* + 5(1-q^*) = v_1, \quad 2q^* + (1-q^*) = v_1.$$

Из нее находим $q^* = 2 > 1$, что невозможно. Переходим ко второй точке огибающей, лежащей на пересечении прямых l_1 и l_2. Она имеет абсциссу $p_1^0 = 2/3$. Система

$$2q^* + 4(1-q^*) = v_1, \quad 4q^* + 2(1-q^*) = v_1$$

имеет решение $q^* = 1/2,\ v_1 = 3$. Поэтому

$$(p^0, q^0) = ((2/3, 1/3), (1/2, 1/2, 0))$$

– искомая ситуация равновесия в смешанных стратегиях.

Отметим, что рассматриваемый алгоритм не всегда приводит к нахождению всех ситуаций равновесия.

Пример 10.3. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Здесь пересечение прямых l_1 и l_2 дает стратегию $p^0 = (1, 0)$ с нулевой компонентой (вырожденный случай). Решая систему уравнений из (10.1), находим $q^0 = (1/2, 1/2)$. Полученная ситуация равновесия не единственна. Действительно, запишем условие (10.1) для стратегии $(q^*, 1-q^*)$ второго игрока с учетом свойства дополняющей нежесткости

$$1 - q^* = v_1, \quad q^* \le v_1, \quad 0 \le q^* \le 1.$$

Отсюда $0 \le q^* \le 1/2$. Таким образом, в данном примере получили целый отрезок ситуаций равновесия $\{((1,0),(q^*, 1-q^*)) \mid 0 \le q^* \le 1/2\}$.

Для игры с матрицами размеров 3×3 поиск смешанных равновесий по Нэшу уже требует достаточно большого перебора всевозможных подматриц исходных матриц A и B. Однако в некоторых случаях, обсуждаемых в следующих двух параграфах, этот перебор можно значительно сократить.

Вполне смешанное равновесие

Определение. Ситуация равновесия называется *вполне смешанной*, если все чистые стратегии используются с положительными вероятностями.

В общих предположениях (для "почти любой биматричной игры") вполне смешанное равновесие может существовать, только если $m = n$. Это интуитивно понятно: для нахождения смешанной стратегии второго игрока, в которой все компоненты отличны от нуля, требуется решить систему уравнений из (10.1), содержащую $m+1$ уравнение с $n+1$ неизвестным (число элементов во множестве Y плюс еще одно неизвестное v_1). Следовательно, для существования решения должно выполняться условие $n \ge m$. Аналогично, смешанная стратегия первого игрока удовлетворяет системе уравнений из (10.2), содержащей $n+1$ уравнение с $m+1$ неизвестным, и для существования решения должно быть $m \ge n$. В результате получаем, что для существования решения обеих систем должно быть $m = n$, если обе системы невырожденные.

Выпишем для вполне смешанного равновесия (p^0, q^0) системы уравнений из (10.1) и (10.2) в матричном виде

$$Aq^0 = v_1 e, \ \langle q^0, e \rangle = 1, \quad p^0 B = v_2 e, \ \langle p^0, e \rangle = 1,$$

где $e = (1, ..., 1) \in E^m$.

Аналогичные системы (5.3) и (5.4) справедливы для крайних оптимальных смешанных стратегий из 5. (Там же см. и способ нахождения решения этих систем.) Пусть матрицы A и B – невырожденные. Тогда

$$q^0 = \frac{A^{-1}e}{\langle A^{-1}e, e \rangle}, \quad v_1 = \frac{1}{\langle A^{-1}e, e \rangle},$$

$$p^0 = \frac{eB^{-1}}{\langle eB^{-1}, e \rangle}, \quad v_2 = \frac{1}{\langle eB^{-1}, e \rangle}.$$

Доминирование в биматричных играх

При поиске ситуаций равновесия в биматричных играх можно использовать доминирование строк матрицы A и столбцов матрицы B.

Определение. Будем говорить, что в биматричной игре Γ стратегия первого игрока i_1 *строго доминирует* стратегию i_2 ($i_1 \succ i_2$) на множестве $\overline{Y} \subseteq Y$, если $a_{i_1 j} > a_{i_2 j}\ \forall\, j \in \overline{Y}$. Будем говорить о *слабом доминировании* ($i_1 \succeq i_2$), если $a_{i_1 j} \ge a_{i_2 j}\ \forall\, j \in \overline{Y}$.

По смыслу при строгом доминировании стратегия i_1 приносит первому игроку больший выигрыш, чем стратегия i_2, как бы ни играл второй

игрок, используя стратегии из множества $\overline{Y}$. Аналогично вводятся понятия строгого и слабого доминирования для стратегий второго игрока.

Определение. Будем говорить, что в биматричной игре Γ стратегия второго игрока j_1 строго доминирует стратегию j_2 ($j_1 \succ j_2$) на множестве $\overline{X} \subseteq X$, если $b_{ij_1} > b_{ij_2}\ \forall\, i \in \overline{X}$. Будем говорить о слабом доминировании ($j_1 \succeq j_2$), если $b_{ij_1} \ge b_{ij_2}\ \forall\, i \in \overline{X}$.

Определим *процедуру последовательного исключения строго доминируемых стратегий*. Эта процедура состоит в построении двух последовательностей вложенных множеств $X = X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots \supseteq X_k$ и $Y = Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots \supseteq Y_k$. При этом для $l = 1, ..., k-1$ выполнены следующие условия:

$\forall\, i_2 \in X_l \backslash X_{l+1}\ \ \exists\, i_1 \in X_{l+1}:\ i_1 \succ i_2$ на Y_l;

$\forall\, j_2 \in Y_l \backslash Y_{l+1}\ \ \exists\, j_1 \in Y_{l+1}:\ j_1 \succ j_2$ на X_l.

Мы описали процедуру последовательного исключения стратегий формально. Посмотрим, как эта процедура осуществляется на практике.

Шаг 1. Из множеств $X = X_1$ и $Y = Y_1$ строим множества X_2 и Y_2. Для этого выкидываем из множества X_1 все строго доминируемые на множестве Y_1 стратегии, т.е. мы ищем такие пары стратегий i_1, i_2, что строка i_1 поэлементно больше строки i_2 в матрице $A:\ a_{i_1 j} > a_{i_2 j},\ j = 1, ..., n$. Вычеркиваем все такие найденные строки i_2 в обеих матрицах. Аналогично ищем столбцы j_2 в матрице B второго игрока, которые строго доминируются другими столбцами $j_1:\ b_{ij_1} > b_{ij_2},\ i = 1, ..., m$. Вычеркиваем все такие доминируемые столбцы j_2 из обеих матриц. Предположим, что нам удалось вычеркнуть хотя бы одну строку или столбец. Тогда переходим к шагу 2.

Шаг 2. После вычеркивания строк и столбцов на первом шаге мы получили редуцированные матрицы, в которых множество строк – X_2, а множество столбцов – Y_2. При этом либо $X_2 \ne X_1$, либо $Y_2 \ne Y_1$, либо оба множества не совпадают с предыдущими. Может получиться так, что в редуцированных матрицах окажутся новые доминируемые строки и столбцы. Вычеркиваем их и переходим к следующему шагу.

И так далее. Продолжаем процедуру до тех пор, пока не вычеркнем все, что можно. Ниже доказано, что при этом сохраняются все смешанные равновесия по Нэшу.

Определение. Будем говорить, что множество $\overline{Z} = \overline{X} \times \overline{Y}$ строго доминирует множество $Z = X \times Y$ ($\overline{Z} \succ Z$), если оно получено из множества

Z последовательным исключением строго доминируемых стратегий, т.е. в описанной выше процедуре $\overline{X} = X_k,\ \overline{Y} = Y_k$. Будем говорить о слабом доминировании ($\overline{Z} \succeq Z$), если множество $\overline{Z}$ получено из множества Z последовательным исключением слабо доминируемых стратегий.

Рассмотрим понятие доминирования в смешанных стратегиях.

Определение. Будем говорить, что смешанная стратегия p строго доминирует чистую стратегию i на множестве $\overline{Y} \subseteq Y$ ($p \succ i$), если $A(p, j) > a_{ij}\ \forall\, j \in \overline{Y}$. Будем говорить о слабом доминировании на множестве $\overline{Y} \subseteq Y$ ($p \succeq i$), если $A(p, j) \ge a_{ij}\ \forall\, j \in \overline{Y}$.

Аналогично определяется доминирование в смешанных стратегиях второго игрока.

Как искать строго доминируемую стратегию?

Пример 10.4. Рассмотрим игру Γ с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём в каждом столбце первой матрицы максимальный элемент. Если максимум единственный и стоит в некоторой строке, то она не может быть строго доминируемой. Следовательно, строго доминируемой может быть только первая строка. В чистых стратегиях доминирования нет. Исследуем доминирование в смешанных стратегиях. Возьмём вторую и третью строки с коэффициентами 1/2. Видно, что эта комбинация строго доминирует первую строку.

Введём понятия доминирующих множеств для смешанных стратегий.

Определение. Будем говорить, что множество $\overline{Z} = \overline{X} \times \overline{Y}$ *строго доминирует* множество $Z = X \times Y$ в смешанных стратегиях ($\overline{Z} \succ Z$), если оно получено из множества Z последовательным исключением строго доминируемых по смешанному доминированию стратегий, т.е.

$\overline{Z} = Z_k \subset Z_{k-1} \subset \cdots \subset Z_1 = Z, \ \ Z_l = X_l \times Y_l, \ \ l = 1, ..., k,$

и выполнены условия

$\forall\, i \in X_l \backslash X_{l+1}\ \ \exists\, p \in P:\ p \succ i$ на Y_l, $\quad p_s = 0\ \ \forall\, s \notin X_{l+1}$;

$\forall\, j \in Y_l \backslash Y_{l+1}\ \ \exists\, q \in Q:\ q \succ j$ на X_l, $\quad q_k = 0\ \ \forall\, k \notin Y_{l+1}$.

Будем говорить, что множество $\overline{Z} = \overline{X} \times \overline{Y}$ *слабо доминирует* множество $Z = X \times Y$ в смешанных стратегиях ($\overline{Z} \succeq Z$), если оно получено

из множества Z последовательным исключением слабо доминируемых по смешанному доминированию стратегий, т.е.

$\overline{Z} = Z_k \subset Z_{k-1} \subset \cdots \subset Z_1 = Z, \ \ Z_l = X_l \times Y_l, \ \ l = 1, ..., k,$

и выполнены условия

$\forall\, i \in X_l \backslash X_{l+1}\ \ \exists\, p \in P:\ p \succeq i$ на Y_l, $\quad p_s = 0\ \ \forall\, s \notin X_{l+1}$;

$\forall\, j \in Y_l \backslash Y_{l+1}\ \ \exists\, q \in Q:\ q \succeq j$ на X_l, $\quad q_k = 0\ \ \forall\, k \notin Y_{l+1}$.

Как связаны различные отношения доминирования?

строгое доминирование в чистых стратегиях	$\Rightarrow$	строгое доминирование в смешанных стратегиях
$\Downarrow$		$\Downarrow$
слабое доминирование в чистых стратегиях	$\Rightarrow$	слабое доминирование в смешанных стратегиях

Вернёмся к примеру 10.4 и найдём доминирующие множества. Первую строку мы вычеркнули, так как она строго доминируема комбинацией второй и третьей строк. Рассмотрим вторую матрицу. Можно заметить, что первый столбец строго доминируется, например, вторым столбцом. Следовательно, первый столбец можно вычеркнуть. Получаем, что

$\{2, 3\} \times \{2, 3\} \succ Z$.

Теперь сформулируем теорему о связи исключения доминируемых стратегий и поиска смешанных равновесий по Нэшу.

Теорема 10.4. 1) Пусть множество $\overline{Z} = \overline{X} \times \overline{Y}$ строго доминирует множество $Z = X \times Y$ в смешанных стратегиях. Тогда для любой ситуации равновесия (p^0, q^0) выполнены условия

$i \notin \overline{X} \Rightarrow p_i^0 = 0$;

$j \notin \overline{Y} \Rightarrow q_j^0 = 0$.

2) Пусть множество $\overline{Z} = \overline{X} \times \overline{Y}$ слабо доминирует множество $Z = X \times Y$ в смешанных стратегиях и $(\overline{p}, \overline{q})$ – ситуация равновесия в игре с матрицами

$$\overline{A} = (a_{ij})_{i \in \overline{X}\ j \in \overline{Y}}, \quad \overline{B} = (b_{ij})_{i \in \overline{X}\ j \in \overline{Y}}.$$

Определим смешанные стратегии

$$p^0 \ : \ p_i^0 = \begin{cases} \overline{p}_i, & i \in \overline{X}, \\ 0, & i \in X \backslash \overline{X}; \end{cases} \quad q^0 \ : \ q_j^0 = \begin{cases} \overline{q}_j, & j \in \overline{Y}, \\ 0, & j \in Y \backslash \overline{Y}. \end{cases}$$

Тогда (p^0, q^0) – ситуация равновесия в исходной игре Γ.

Упражнение 10.2. Докажите теорему 10.4.

Обсудим смысл теоремы. Второе утверждение говорит о том, что если редуцированная игра получена путем исключения слабо доминируемых стратегий, то каждому смешанному равновесию по Нэшу $(\overline{p}, \overline{q})$ в этой редуцированной игре будет соответствовать смешанное равновесие по Нэшу (p^0, q^0) в исходной игре, определяемое по указанному правилу. Первое утверждение теоремы показывает, что при вычёркивании строк и столбцов по строгому доминированию мы не теряем равновесий по Нэшу.

Таким образом, при поиске всех равновесий по Нэшу можно вычеркнуть все строго доминируемые строки и столбцы и искать равновесие в редуцированной игре. Дополнив нулями найденное равновесие, мы получим равновесие смешанное в исходной игре. Если необходимо найти хотя бы одно смешанное равновесие по Нэшу, тогда можно вычёркивать строки и столбцы по нестрогому доминированию. Исключение строк и столбцов позволяет сократить перебор подматриц для поиска равновесий по Нэшу. В примере 10.4 после исключения строго доминируемых стратегий получим редуцированную игру

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этой игре ситуация $(\overline{p}, \overline{q}) = ((3/5, 2/5), (7/11, 4/11))$ является единственным смешанным равновесием по Нэшу. Следовательно, ситуация $(p^0, q^0) = ((0, 3/5, 2/5), (0, 7/11, 4/11))$ является смешанным равновесием по Нэшу в исходной игре Γ.

Пример 10.5. Рассмотрим игру Γ с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ищем максимальные элементы в столбцах первой матрицы. В чистых стратегиях доминирования нет. Рассмотрим доминирование в смешанных стратегиях. Видно, что четвёртая строка строго доминируется комбинацией второй и третьей строк с весами 1/2. Поэтому ее можно вычеркнуть.

Теперь найдём максимальные элементы в строках второй (редуцированной) матрицы. Второй столбец строго доминируется комбинацией первого и четвёртого столбцов с весами $1/3 - \varepsilon$ и $2/3 + \varepsilon$ при малых $\varepsilon > 0$. Мы можем вычеркнуть второй столбец. Следовательно, $\{1, 2, 3\} \times \{1, 3, 4\} \succ Z$. В результате исключения четвертой строки и второго столбца получим следующие редуцированные матрицы:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Повторяем процедуру последовательного исключения стратегий для редуцированных матриц. Ищем максимальные элементы в столбцах первой матрицы. В чистых стратегиях доминирования нет. Рассмотрим доминирование в смешанных стратегиях. Вторую и третью строку исключить невозможно, так как в них содержатся максимальные по столбцам элементы. Первая строка не содержит ни одного максимального по столбцу элемента, однако, ее также невозможно исключить, так как она не доминируется ни одной линейной комбинацией второй и третьей строки. Аналогично, невозможно исключить ни один столбец во второй матрице. Следовательно, процедура исключения по доминированию смешанными стратегиями завершена и $\{1, 2, 3\} \times \{1, 3, 4\} = \overline{Z}$.

Позитивный подход к понятию равновесия

Следует отметить, что использование смешанных стратегий с помощью механизма бросания монет или других подобных механизмов не характерно для реального поведения людей. Другая интерпретация смешанных равновесий относится к играм, соответствующим типичным конфликтным ситуациям, в которых принимают участие много индивидуумов. Такие ситуации описаны в примерах 9.1-4: множество покупателей приходит на рынок и сталкивается с множеством продавцов; различные пары водителей сталкиваются у перекрестков и т.п. Позитивный подход к равновесию в смешанных стратегиях предполагает, что каждая такая стратегия описывает распределение индивидуумов в соответствующей

роли. Например, если (p^0, q^0) – ситуация равновесия в игре "продавец-покупатель"(пример 9.1), то на практике доля p_1^0 продавцов ведет себя честно, а доля p_2^0 обманывает, доля q_1^0 покупателей не проверяет купленный товар, а остальные проверяют, и т.п. Очевидно, что лишь если распределения по стратегиям в каждой роли соответствуют смешанным равновесиям по Нэшу, то ни у кого не будет стимула поменять стратегию поведения. Формально это отражено в лемме 10.1 и теореме 10.1. Поэтому можно ожидать, что стабильные распределения по стратегиям в реальных взаимодействиях больших групп отвечают смешанным равновесиям по Нэшу. Теоретическое обоснование этого тезиса дают динамические модели поведения (см. § 14). Примером модели поведения игроков может служить метод Брауна фиктивного разыгрывания матричной игры, изложенный в § 5. Аналогичный метод можно применять и для поиска ситуаций равновесия в биматричных играх специального вида.

Определение. Игру Γ с матрицами A и B назовем *эквивалентной антагонистической*, если найдется такая матрица $A' = (a'_{ij})_{m \times n}$ (антагонистической игры) и найдутся такие числа $f_j,\ j = 1, ..., n,\ \ g_i,\ i = 1, ..., m$, что

$$a_{ij} = a'_{ij} + f_j, \ \ b_{ij} = -a'_{ij} + g_i, \ i = 1, ..., m, \ j = 1, ..., n. \tag{10.7}$$

Заметим, что матрица A' и коэффициенты $f_j,\ g_i$ здесь определяются не однозначно. Действительно, если они удовлетворяют равенствам (10.7), то для любого числа c матрица с элементами $a'_{ij} + c$ и коэффициенты $f_j - c,\ g_i + c$ также удовлетворяют (10.7).

Если игра Γ эквивалентна антагонистической, то сумма ее матриц представима в виде $A + B = (g_i + f_j)_{m \times n}$. Обратно, если такое представление имеет место, то Γ эквивалентна антагонистической игре с матрицей $A' = (a_{ij} - f_j)_{m \times n} = (-b_{ij} + g_i)_{m \times n}$.

Упражнение 10.3. Пусть биматричная игра Γ эквивалентна антагонистической игре с матрицей A', а $f_1 = 0$. Выразите элементы матрицы A' через элементы матриц A и B.

Упражнение 10.4. Пусть биматричная игра Γ эквивалентна антагонистической игре Γ'. Для того чтобы пара (p^0, q^0) была седловой точкой в смешанных стратегиях игры Γ', необходимо и достаточно, чтобы (p^0, q^0) была ситуацией равновесия игры Γ. Докажите.

Определим итерационный процесс, аналогичный процессу Брауна из § 5.

Шаг 1. Игроки выбирают произвольно стратегии i_1 и j_1.

Пусть за k повторений игры первый игрок выбрал стратегии $i_1, ..., i_k$, а второй – стратегии $j_1, ..., j_k$. При этом $p(k)$ и $q(k)$ – соответствующие векторы частот.

Шаг $k+1$. Игроки выбирают стратегии i_{k+1} и j_{k+1} из условий

$$A(i_{k+1}, q(k)) = \max_{1 \le i \le m} A(i, q(k)), \quad B(p(k), j_{k+1}) = \max_{1 \le j \le n} B(p(k), j).$$

Каждый игрок выбирает свою чистую стратегию как наилучший ответ на соответствующий вектор частот партнера. Если наилучших ответов несколько, то выбирается любой из них.

Теорема 10.5. Пусть биматричная игра Γ эквивалентна антагонистической. Тогда любая предельная точка (p^0, q^0) последовательности $\{(p(k), q(k))\}$ итерационного процесса является ситуацией равновесия игры Γ.

Упражнение 10.5. Докажите теорему 10.5.

Если биматричная игра Γ не эквивалентна антагонистической, то утверждение теоремы 10.5 может быть неверным. Вся оставшаяся часть параграфа будет посвящена доказательству этого факта. В качестве примера рассмотрим игру Γ из упражнения 10.1 с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

в которой существует единственное смешанное равновесие по Нэшу

$$(p^0, q^0) = ((1/3, 1/3, 1/3), (1/3, 1/3, 1/3)).$$

Пусть $e^i \in E^3$ – вектор, i-ая компонента которого равна 1, а две другие равны нулю. Пусть с $(k+1)$-го по $(k+s)$-ый шаг первый игрок выбирал чистую стратегию i. Тогда

$$p(k+s) = \frac{kp(k) + se^i}{k+s} = \frac{k}{k+s}p(k) + \frac{s}{k+s}e^i.$$

Нетрудно видеть, что точка $p(k+t)$ при изменении $t = 0, 1, ..., s$, перемещается вдоль отрезка $[p(s), e^i]$ от точки $p(s)$ до точки $p(k+s)$. Аналогичная формула может быть записана и для векторов частот второго игрока.

Пусть на некотором k-ом шаге $(k > 1)$ возникла пара $(i_k, j_k) = (1,1)$. Это означает, что выполнены неравенства
$A(1, q(k-1)) \geq A(i, q(k-1)),\ i = 2,3,$
$B(p(k-1),1) \geq B(p(k-1), j),\ j = 2,3.$
Тогда

$$A(1,q(k)) = \frac{(k-1)A(1,q(k-1)) + A(1,e^1)}{k} =$$

$$= \frac{(k-1)A(1,q(k-1)) + 2}{k} > \frac{(k-1)A(2,q(k-1)) + 1}{k} = A(2,q(k)).$$

Аналогично доказывается, что $A(1, q(k)) > A(3, q(k))$. Поэтому необходимо $i_{k+1} = 1$. Далее,

$$B(p(k),1) = \frac{(k-1)B(p(k-1),1) + B(e^1,1)}{k} =$$

$$= \frac{(k-1)B(p(k-1),1) + 1}{k} > \frac{(k-1)B(p(k-1),2)}{k} = B(p(k),2)$$

и, следовательно, $j_{k+1} \neq 2$.

Таким образом, на $(k+1)$-м шаге возникнет пара (1,1) или (1,3). Причем после нескольких возможных повторений пара (1,1) обязательно перейдет в пару (1,3). Аналогично доказывается, что после пары (1,3) процесс обязательно перейдет в пару (3,3) и т.д. по схеме
$(1,1) \to (1,3) \to (3,3) \to (3,2) \to (2,2) \to (2,1) \to (1,1).$

Пусть на $(k+1)$-м шаге процесс перешел с пары (2,1) на пару (1,1) (т.е. $i_k = 2,\ j_k = 1,\ i_{k+1} = j_{k+1} = 1$), на $(k+s+1)$-м шаге – с пары (1,1) на пару (1,3), а на $(k+s+t+1)$-м шаге – с пары (1,3) на пару (3,3):

$$..., \overset{k}{(2,1)}, (1,1), ..., \overset{k+s}{(1,1)}, (1,3), ..., \overset{k+s+t}{(1,3)}, (3,3), ...$$

Тогда $A(1, q(k)) \geq A(3, q(k))$ и

$$A(3,q(k+s+t)) = \frac{kA(3,q(k)) + sa_{31} + ta_{33}}{k+s+t} \geq A(1,q(k+s+t)) =$$

$$= \frac{kA(1,q(k)) + sa_{11} + ta_{13}}{k+s+t} \geq \frac{kA(3,q(k)) + sa_{11} + ta_{13}}{k+s+t}.$$

Отсюда получаем неравенство $sa_{31} + ta_{33} \geq sa_{11} + ta_{13}$ или $t \geq 2s$.

Итак, "пребывание"процесса в его остановке на паре (1,3) будет по крайней мере в два раза продолжительнее, чем на непосредственно предшествовавшей остановке на паре (1,1). Точно так же последующая остановка на паре (3,3) по крайней мере в два раза продолжительнее, чем на паре (1,3) и т.д.

Теперь рассмотрим, как меняются стратегии игроков. Если первый игрок на некотором шаге использует стратегию 1, то в дальнейшем он ее сменит на стратегию 3, потом стратегию 3 на стратегию 2 и т.д. по следующему циклу: $1 \to 3 \to 2 \to 1$. Разобьем рассматриваемый процесс на отрезки шагов постоянного использования первым игроком своих чистых стратегий. Длина такого отрезка – это число содержащихся в нем шагов.

Лемма 10.1. Длина отрезка постоянного использования первым игроком любой чистой стратегии более, чем в три раза превышает число шагов процесса, предшествовавших данному отрезку.

Доказательство. Без потери общности будем считать, что процесс начинается с пары стратегий $(i_1, j_1) = (1,1)$. Пусть первый игрок $l_1 = 1 + s$ раз подряд, начиная с первого шага, выбирал стратегию 1 (один раз при паре (1,1) и s раз при паре (1,3)). Далее, пусть он $l_3 = t + h$ раз выбирал стратегию 3 (t раз при паре (3,3) и h раз при паре (3,2)). Затем он l_2 раза подряд выбирал стратегию 2. Тогда, согласно ранее доказанному, $s \geq 2,\ t \geq 2s,\ h \geq 2t \geq 4s \Rightarrow l_3 = t + h \geq 6s$. Но $l_1 = 1 + s \leq 3s/2 \leq l_3/4$. Следовательно, $l_3 \geq 4l_1 > 3l_1$. Аналогично можно доказать неравенство $l_2 \geq 4l_3 > 3(l_1 + l_3)$.

Итак, утверждение леммы доказано для начальных отрезков использования стратегий 1,3 и 2. Завершим доказательство индукцией по числу отрезков использования первым игроком своих стратегий.

Пусть $i_k = 3$ и, начиная с $(k+1)$-го шага, первый игрок l'_2 раз использовал стратегию 2, затем с $(k + l'_2 + 1)$-го шага он l'_1 раз использовал стратегию 1 и далее стратегию 3. Тогда $l'_1 \geq 4l'_2$ (это доказывается аналогично неравенству $l_1 \geq 4l_2$). Индуктивное предположение состоит в выполнении неравенства $l'_2 > 3k$. Но тогда $l'_1 \geq 4l'_2 > 3(l'_2 + k)$. ■

Из леммы непосредственно вытекает, что если в момент $k+1$ первый игрок меняет свою стратегию i $(i_k = i,\ i_{k+1} \neq i)$, то i-ая компонента вектора $p(k)$ больше $3/4$.

Посмотрим, как перемещается точка $p(k)$ в симплексе P – множестве всех смешанных стратегий первого игрока. Используя барицентрические

координаты, симплекс P можно изобразить на плоскости в виде равностороннего треугольника (см. комментарий к рис. 4.1). На рис. 10.3 точки $M,\ N$, и K разбивают стороны треугольника P в отношении 3:1. Отрезки $[e^1, M], [e^2, K]$ и $[e^3, N]$, пересекаясь, образуют внутренний треугольник ABC.

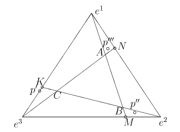

Рис. 10.3

В течение нескольких начальных шагов точка $p(k)$ находится в вершине e^1. Затем она перемещается вдоль отрезка $[e^1, e^3]$ до некоторой точки p', минуя при этом точку K. Далее точка $p(k)$ движется вдоль отрезка $[p', e^2]$ до некоторой точки p'', пересекая отрезок $[e^1, M]$. Затем она перемещается вдоль отрезка $[p'', e^1]$ до некоторой точки p''', пересекая отрезок $[e^3, N]$, и т.д. При этом точка $p(k)$ никогда не будет находиться внутри треугольника ABC, содержащего точку $p^0 = (1/3, 1/3, 1/3)$. Поэтому p^0 не является предельной точкой последовательности $\{p(k)\}$. Аналогично доказывается, что $q^0 = (1/3, 1/3, 1/3)$ не является предельной точкой последовательности $\{q(k)\}$.

§11. Иерархические игры двух лиц

Здесь мы рассматриваем игры двух лиц, в которых игроки прежде, чем выбрать стратегии $x \in X,\ y \in Y$, предварительно обмениваются информацией о своих выборах. Такого рода игры описывают взаимодействие между верхним и нижним звеньями управления (начальником и подчиненным, центром и производителем продукции и т.п.) и называются *иерархическими*. Будем считать, что первый игрок осуществляет управление вторым игроком и делает сообщение первым.

Рассмотрим исходную игру двух лиц в нормальной форме
$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y), G(x,y) \rangle$, на основе которой будем строить иерархические игры. При этом нас будет интересовать наилучший гарантированный результат (выигрыш), который может получить в игре первый игрок. В данном параграфе предполагается, что функции $F(x,y)$ и $G(x,y)$ непрерывны на произведении $X \times Y$ компактов метрических пространств.

Игра Γ_1. Первый игрок выбирает стратегию $x \in X$ и сообщает ее второму. Затем второй игрок выбирает стратегию $y \in Y$, зная x. При этом будем использовать схематичную запись $x \xrightarrow{2} y$. Смысл подобных сообщений очевиден в тех случаях, когда интересы игроков близки. Например, если вы решили с кем-нибудь встретиться, то сообщаете, куда придете. Игра Γ_1 является неантагонистической одношаговой игрой с полной информацией.

Экономическая интерпретация: первый игрок (центр) сообщает второму игроку (производителю продукции) цену x на продукцию. Второй игрок выпускает продукцию в количестве y, зная цену x.

Полезно записать игру Γ_1 в нормальной форме. Второй игрок использует стратегии вида $g : X \to Y$. Множество всех таких стратегий обозначим через $\{g\}$. Тогда

$$\Gamma_1 = \langle X, \{g\}, F(x,g), G(x,g) \rangle,$$

где $F(x,g) \overset{def}{=} F(x, g(x)),\ G(x,g) \overset{def}{=} G(x, g(x))$.

Найдем наилучший гарантированный результат F_1 первого игрока в игре Γ_1. Предположим, что второй игрок, зная x, выбирает

$$y \in Y(x) = \operatorname{Arg}\max_{y \in Y} G(x,y),$$

т.е. максимизирует свою функцию выигрыша $G(x,y)$. Первый игрок знает функцию выигрыша второго игрока, ему также известно, что второй будет выбирать стратегию из множества $Y(x)$, но он не знает конкретного выбора $y \in Y(x)$.

Величина $W(x) = \min\limits_{y \in Y(x)} F(x,y)$ называется *оценкой эффективности* (гарантированным результатом) стратегии x.

Заметим, что множество $Y(x)$ – непустое и является компактом. Следовательно, $\min\limits_{y \in Y(x)}$ достигается и наилучший гарантированный результат имеет вид

$$F_1 = \sup_{x \in X} \min_{y \in Y(x)} F(x,y).$$

Определение. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Стратегия первого игрока x^ε называется ε-оптимальной в игре Γ_1, если $W(x^\varepsilon) \geq F_1 - \varepsilon$.

В дальнейшем мы приведем пример, в котором $\sup\limits_{x \in X}$ не достигается. Решить игру Γ_1 – это значит найти величину F_1 и ε-оптимальную стратегию x^ε при заданном $\varepsilon > 0$.

Игра Γ_2. Первый игрок перед выбором x имеет полную информацию об y. Он ходит первый и сообщает второму игроку стратегию вида $f : Y \to X$. Множество всех таких стратегий обозначим через $\{f\}$. Схема сообщений в игре Γ_2 : $f \xrightarrow{2} y \xrightarrow{1} x = f(y)$.

Экономическая интерпретация: $f(y)$ – величина премии, обещаемая центром за произведенную продукцию y.

Найдем выражение для наилучшего гарантированного результата F_2 первого игрока в игре Γ_2. Предположим, что второй игрок, зная f, выбирает y из множества $Y(f) = \operatorname{Arg}\max\limits_{y \in Y} G(f(y), y)$. Множество $Y(f)$ может оказаться пустым, если функция f разрывна. В случае пустого $Y(f)$ будем считать, что второй игрок может выбрать любую стратегию $y \in Y$. Определим множество

$$Y^*(f) = \begin{cases} Y(f), & Y(f) \neq \emptyset, \\ Y, & Y(f) = \emptyset. \end{cases}$$

В сделанных предположениях второй игрок выбирает $y \in Y^*(f)$ и оценка эффективности стратегии f задается формулой

$$W(f) = \inf_{y \in Y^*(f)} F(f(y), y).$$

Наилучший гарантированный результат первого игрока имеет вид

$$F_2 = \sup_{f \in \{f\}} \inf_{y \in Y^*(f)} F(f(y), y).$$

Определение. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Стратегия f^ε называется ε-оптимальной в игре Γ_2, если $W(f^\varepsilon) \geq F_2 - \varepsilon$.

Поиск величины F_2 по указанной формуле весьма сложен, так как связан с решением оптимизационной задачи на множестве функций $\{f\}$. Мы далее упростим формулу для F_2 таким образом, чтобы оптимизация велась по исходным множествам X и Y.

Игра Γ_3. Пусть второй игрок играет против первого в игру Γ_2^*, т.е.

сообщает ему стратегию $g : X \to Y$ (функцию ответа). Первый игрок в игре Γ_3 первым сообщает второму стратегию $f_1 : \{g\} \to X$. Схема сообщений в игре $\Gamma_3 : f_1 \xrightarrow{2} g \xrightarrow{1} x = f_1(g) \xrightarrow{2} y = g(x)$.

Экономическая интерпретация: $f_1(g)$ – величина ресурса, который выделяет центр производителю продукции, когда тот сообщает ему свои производственные возможности (функцию g).

Наилучший гарантированный результат первого игрока в игре Γ_3 имеет вид

$$F_3 = \sup_{f_1 \in \{f_1\}} \inf_{g \in Y^*(f_1)} F(f_1(g), g),$$

где

$$Y^*(f_1) = \begin{cases} Y(f_1), & Y(f_1) \neq \emptyset, \\ \{g\}, & Y(f_1) = \emptyset, \end{cases} \quad Y(f_1) = \operatorname{Arg}\max_{g \in \{g\}} G(f_1(g), g).$$

Вернемся к игре Γ_2. Найдем более простую формулу для F_2. Положим $X(y) = \operatorname{Arg}\max\limits_{x \in X} F(x,y)$ – множество наилучших ответов первого игрока, $X^*(y) = \operatorname{Arg}\max\limits_{x \in X(y)} G(x,y)$ – множество наилучших ответов первого игрока, благожелательных по отношению ко второму. Определим стратегию первого игрока $f^* :\ f^*(y) \in X^*(y)\ \ \forall y \in Y$.

Лемма 11.1. Функция $G(f^*(y), y)$ полунепрерывна сверху в любой точке $y^0 \in Y$, т.е. для любой последовательности $\{y^k\}$, сходящейся к y^0, выполнено неравенство

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} G(f^*(y^k), y^k) \leq G(f^*(y^0), y^0). \quad (11.1)$$

Доказательство. Пусть в некоторой точке $y^0 \in Y$ функция $G(f^*(y), y)$ не является полунепрерывной сверху. Тогда найдется такая последовательность $\{y^k\}$, сходящаяся к y^0, что

$$G' \overset{def}{=} \overline{\lim_{k \to \infty}} G(f^*(y^k), y^k) > G(f^*(y^0), y^0). \quad (11.2)$$

Без потери общности считаем (выделяя соответствующую подпоследовательность), что $f^*(y^k) \to x'$. Из непрерывности функции $G(x,y)$ следует

$$G' = \lim_{k \to \infty} G(f^*(y^k), y^k) = G(x', y^0).$$

Покажем, что $x' \in X(y^0)$. Действительно, по определению функции f^* имеем $F(f^*(y^k), y^k) \geq F(x, y^k)\ \ \forall\, x \in X,\ k = 1, 2, ...$ Отсюда, переходя в последнем неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим

$$F(x', y^0) \geq F(x, y^0)\ \ \forall\, x \in X \ \ \Rightarrow\ \ x' \in X(y^0).$$

Итак, неравенство (11.2) можно записать в виде
$G' = G(x', y^0) > G(f^*(y^0), y^0)$. Оно противоречит тому, что
$f^*(y^0) \in X^*(y^0)$. ■

Нам потребуется следующие величины и множества:

$G_2 = \max\limits_{y \in Y} \min\limits_{x \in X} G(x,y)$ – наилучший гарантированный результат второго игрока при условии, что первый применяет по отношению к нему стратегию "наказания" $f^{\text{н}} : f^{\text{н}}(y) \in \operatorname{Arg}\min\limits_{x \in X} G(x,y)\ \ \forall\, y \in Y$;

$E = \operatorname{Arg}\max\limits_{y \in Y} \min\limits_{x \in X} G(x,y)$ – множество максиминных стратегий второго игрока;

$D = \{(x,y) \in X \times Y \mid G(x,y) > G_2\}$;

$$K = \begin{cases} \sup\limits_{(x,y) \in D} F(x,y), & D \neq \emptyset, \\ -\infty, & D = \emptyset; \end{cases}$$

$M = \min\limits_{y \in E} \max\limits_{x \in X} F(x,y)$.

Теорема 11.1 (Гермейер). В сделанных предположениях наилучший гарантированный результат первого игрока в игре Γ_2 равен
$F_2 = \max[K, M]$.

Замечание. Для нахождения F_2 необходимо решить оптимизационные задачи на исходных множествах X и Y. Оптимальные (ε-оптимальные) стратегии, обеспечивающие $\max[K, M]$, будут указаны в первой части доказательства теоремы. Результат $\max[K, M]$ довольно велик. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим частный случай. Допустим, что существует пара $(x^0, y^0) \in \operatorname{Arg}\max\limits_{(x,y) \in X \times Y} F(x,y) \cap D$. Тогда

$$K = \sup_{(x,y) \in D} F(x,y) = \max_{(x,y) \in X \times Y} F(x,y) = F_2,$$

т.е. результат F_2 равен максимуму функции $F(x,y)$ на $X \times Y$.

Доказательство. Первая часть. Построим стратегии первого игрока, обеспечивающие ему результат $\max[K, M]$. Рассмотрим два случая.

1) $K > M \ \ \Rightarrow\ \ D \neq \emptyset$. Покажем, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такая стратегия f^ε, что $W(f^\varepsilon) \geq K - \varepsilon$. По определению верхней грани K найдется такая пара $(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \in D$, что $F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \geq K - \varepsilon$. Положим

$$f^\varepsilon(y) = \begin{cases} x^\varepsilon, & y = y^\varepsilon, \\ f^{\text{н}}(y), & y \neq y^\varepsilon. \end{cases}$$

Покажем, что $W(f^\varepsilon) = F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \geq K - \varepsilon$. Действительно, второй игрок, получив сообщение о f^ε, выберет $y = y^\varepsilon$, так как в противном случае он получит выигрыш $G(f^{\text{н}}(y), y) = \min\limits_{x \in X} G(x,y) \leq G_2 < G(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$. Поскольку второй игрок максимизирует свой выигрыш, он выберет $y = y^\varepsilon$, т.е. $Y^*(f^\varepsilon) = \{y^\varepsilon\}$.

2) $K \leq M$. Укажем стратегию f^0, для которой $W(f^0) \geq M$. Положим

$$f^0(y) = \begin{cases} f^*(y), & y \in E, \\ f^{\text{н}}(y), & y \notin E, \end{cases}$$

где стратегия f^* была определена выше перед леммой 11.1. Получив сообщение о f^0, второй игрок выберет $y \in E$. Действительно, если $y \notin E$, то $G(f^{\text{н}}(y), y) = \min\limits_{x \in X} G(x,y) < G_2$. Далее, при $y \in E$ $\ G(f^0(y), y) = G(f^*(y), y) \geq \min\limits_{x \in X} G(x,y) = G_2$. Функция $G(f^*(y), y)$ полунепрерывна сверху на компакте E, поэтому $Y^*(f^0) = \operatorname{Arg}\max\limits_{y \in E} G(f^*(y), y) \subseteq E$. Отсюда

$$W(f^0) = \min_{y \in Y^*(f^0)} F(f^*(y), y) \geq$$

$$\geq \min_{y \in E} F(f^*(y), y) = \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x,y) = M.$$

Вторая часть. Докажем, что для произвольной стратегии $f \in \{f\}$ $W(f) \leq \max[K, M]$. Имеем

$$\sup_{y \in Y} G(f(y), y) \geq \max_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x,y) = G_2.$$

Рассмотрим два случая.

1) $\sup\limits_{y \in Y} G(f(y), y) > G_2$. В этом случае найдется такая стратегия второго игрока $y^0 \in Y^*(f)$, что $G(f(y^0), y^0) > G_2$, т.е. $(f(y^0), y^0) \in D$. Действительно, если $\sup\limits_{y \in Y}$ достигается, то $Y(f) \neq \emptyset$ и y^0 возьмем реализующим $\sup\limits_{y \in Y}$. Если $\sup\limits_{y \in Y}$ не достигается, то $Y^*(f) = Y$ и стратегия y^0 найдется по

определению $\sup\limits_{y \in Y}$. Отсюда

$$W(f) = \inf_{y \in Y^*(f)} F(f(y), y) \leq F(f(y^0), y^0) \leq K \leq \max[K, M].$$

2) $\sup\limits_{y \in Y} G(f(y), y) = G_2$. Покажем, что $E \subset Y^*(f)$. Действительно, пусть $y \in E$. Тогда

$$G_2 = \min_{x \in X} G(x,y) \leq G(f(y), y) \leq \sup_{y \in Y} G(f(y), y) = G_2.$$

В этой цепочке неравенства выполнены как равенства. Отсюда $y \in Y^*(f)$ и $E \subseteq Y^*(f)$. Итак,

$$W(f) = \inf_{y \in Y^*(f)} F(f(y), y) \leq$$

$$\leq \inf_{y \in E} F(f(y), y) \leq \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x,y) = M \leq \max[K, M]. \ ■$$

Сформулируем аналогичный результат для игры Γ_3. Напомним, что в игре Γ_3 второй игрок выбирает y, когда выбор стратегии x первого ему известен. Второй игрок использует стратегию $g : X \to Y$. Определим следующие величины и множество:

$G_3 = \min\limits_{x \in X} \max\limits_{y \in Y} G(x,y) = \max\limits_{y \in Y} G(x^{\text{н}}, y)$ – наилучший гарантированный результат второго игрока, когда первый применяет стратегию наказания $x^{\text{н}}$;

$D' = \{(x,y) \in X \times Y \mid G(x,y) > G_3\}$;

$$K' = \begin{cases} \sup\limits_{(x,y) \in D'} F(x,y), & D' \neq \emptyset, \\ -\infty, & D' = \emptyset. \end{cases}$$

Тогда можно доказать, что $F_3 = \max[K', F_1]$ (см. упражнения 11.1-2). Если $F_1 \geq K'$, то первый игрок применяет ε-оптимальную стратегию игры Γ_1. Пусть $F_1 < K'$. В этом случае найдется такая пара $(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \in D'$, что $F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \geq K' - \varepsilon$.

Упражнение 11.1. Докажите, что для стратегии

$$f_1^\varepsilon(g) = \begin{cases} x^\varepsilon, & g(x^\varepsilon) = y^\varepsilon, \\ x^{\text{н}}, & g(x^\varepsilon) \neq y^\varepsilon, \end{cases}$$

оценка эффективности $W(f_1^\varepsilon) \geq K' - \varepsilon$.

Упражнение 11.2. Докажите, что для любой стратегии f_1 первого игрока в игре Γ_3 $\ W(f_1) \leq \max[K', F_1]$.

Упражнение 11.3. Докажите, что в игре Γ_1 в нормальной форме всегда существует ситуация равновесия.

Упражнение 11.4. Докажите, что $F_1 \le F_3 \le F_2$.

Пример 11.1. Решим игры $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ для игры Γ с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Игра Γ_1. $F_1 = \max\limits_{1 \le i \le 3} \min\limits_{j \in Y(i)} a_{ij} = \max\limits_{1 \le i \le 3} W(i)$, $Y(i) = \mathrm{Arg} \max\limits_{1 \le j \le 3} b_{ij}$, $W(1) = W(2) = 3$, $W(3) = -5 \Rightarrow F_1 = 3$ и $i^0 = 1, 2$ – оптимальные стратегии.

Игра Γ_2. $G_2 = \max\limits_{1 \le j \le 3} \min\limits_{1 \le i \le 3} b_{ij} = 4$, $E = \{1, 2\}$, $D = \{(i,j) \mid b_{ij} > 4\}$, $K = \max\limits_{(i,j) \in D} a_{ij} = 4$, $M = \min\limits_{1 \le j \le 2} \max\limits_{1 \le i \le 3} a_{ij} = 6 \;\Rightarrow\; F_2 = M = 6$

и $f^0(j) = \begin{cases} 3, & j = 1, \\ 1, & j = 2, 3, \end{cases}$ – оптимальная стратегия.

Игра Γ_3. $G_3 = \min\limits_{1 \le i \le 3} \max\limits_{1 \le j \le 3} b_{ij} = 6$, $D' = \{(i,j) \mid b_{ij} > 6\}$,
$K' = \max\limits_{(i,j) \in D'} a_{ij} = 4 > F_1 = 3 \Rightarrow F_3 = K' = 4$

и $f_1^0(g) = \begin{cases} 2, & g(2) = 1, \\ 3, & g(2) \ne 1, \end{cases}$ – оптимальная стратегия.

Пример 11.2. Решим игры $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ для игры Γ :

$$X = Y = [0, 1], \;\; F(x, y) = 3x/4 + y/2, \;\; G(x, y) = (x - y)^2.$$

Игра Γ_1. $F_1 = \sup\limits_{0 \le x \le 1} \min\limits_{y \in Y(x)} (3x/4 + y/2)$,

$$Y(x) = \mathrm{Arg} \max_{0 \le y \le 1} (x - y)^2 = \begin{cases} \{1\}, & 0 \le x < 1/2, \\ \{0, 1\}, & x = 1/2, \\ \{0\}, & 1/2 < x \le 1. \end{cases}$$

График функции $W(x) = \min\limits_{y \in Y(x)} (3x/4 + y/2)$ см. на рис. 11.1.

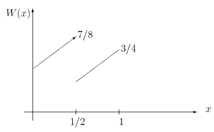

Рис. 11.1

Здесь $F_1 = 7/8$, $x^\varepsilon = 1/2 - 4\varepsilon/3$ – ε-оптимальная стратегия. Отметим, что внешняя верхняя грань в выражении для F_1 не достигается.

Игра Γ_2. $G_2 = \max\limits_{0 \le y \le 1} \min\limits_{0 \le x \le 1} (x - y)^2 = 0$, $D = \{(x, y) \mid (x - y)^2 > 0\}$,

$K = 5/4 = F_2$, $(x^\varepsilon, y^\varepsilon) = (1 - 4\varepsilon/3, 1)$, $f^\varepsilon(y) = \begin{cases} x^\varepsilon, & y = y^\varepsilon, \\ y, & y \ne y^\varepsilon, \end{cases}$

– ε-оптимальная стратегия.

Игра Γ_3. $G_3 = \min\limits_{0 \le x \le 1} \max\limits_{0 \le y \le 1} (x - y)^2 = 1/4$, $x^{\mathrm{H}} = 1/2$,
$D' = \{(x, y) \mid |x - y| > 1/2\}$, $K' = \sup\limits_{(x,y) \in D'} (3x/4 + y/2) = 1 >$

$7/8 = F_1 \Rightarrow F_3 = K'$, $(x^\varepsilon, y^\varepsilon) = (1, 1/2 - 2\varepsilon) \in K'$,

$f_1^\varepsilon(g) = \begin{cases} 1, & g(1) = 1/2 - 2\varepsilon, \\ 1/2, & g(1) \ne 1/2 - 2\varepsilon, \end{cases}$ – ε-оптимальная стратегия.

Пример 11.3. Игра перестрахования. Перестраховщик (игрок 1) и страховщик (игрок 2) заключают договор перестрахования. Пусть $\mathbf{Z}$ – суммарное возмещение страховщика клиентам, представляющее собой случайную величину с экспоненциальной плотностью распределения $e^{-z/m}/m$, $z \ge 0$. При заключении договора страховщик выбирает *предел убыточности* $y \in Y = \{y \in E^1 \mid y \ge 0\}$: если $\mathbf{Z} > y$, то сумму $\mathbf{Z} - y$ возмещает перестраховщик. Отметим, что при $y = 0$ страховщик полностью передает оплату исков перестраховщику. Величина

$$h(y) \overset{def}{=} E \max[\mathbf{Z} - y, 0] = \int\limits_y^\infty (z - y) \frac{1}{m} e^{-z/m} dz = m e^{-y/m}$$

– средняя величина выплат перестраховщика. Стоимость договора перестрахования равна $d(x, y) \overset{def}{=} (1 + x) h(y)$, где $x \ge 0$ – коэффициент надбавки за риск, устанавливаемый перестраховщиком. Будем считать, что оплата договора осуществляется страховщиком из фонда страховых платежей величины $A > m$. Договор может быть заключен лишь при выполнении неравенства $d(x, y) + y \le A$. Положим
$\hat{Y}(x) = \{y \in Y \mid d(x, y) + y \le A\}$, $X = \{x \in E^1 \mid x \ge 0, \; \hat{Y}(x) \ne \emptyset\}$. Если $y \in \hat{Y}(x)$, то договор заключается, выигрыш перестраховщика равен его ожидаемой прибыли $F(x, y) = x h(y)$, а выигрыш страховщика – гарантированной величине остатка фонда страховых платежей $G(x, y) = A - d(x, y) - y$, соответствующей случаю $\mathbf{Z} \ge y$.

Решим игру Γ_1. Напомним, что сначала первый игрок сообщает второму стратегию $x \in X$. Затем второй игрок выбирает стратегию
$y \in Y(x) = \mathrm{Arg} \max\limits_{y \in \hat{Y}(x)} G(x, y)$. Пусть $x \in X$. Максимум

$$\max_{y \in \hat{Y}(x)} G(x, y) = \max_{y \in \hat{Y}(x)} [A - (1 + x) m e^{-y/m} - y] = A - m - m \ln(1 + x)$$

достигается в единственной точке $y(x) = m \ln(1 + x)$. Отсюда вытекает, что $\hat{Y}(x) \ne \emptyset$, если $A - m - m \ln(1 + x) \ge 0$. Следовательно, $X = [0, x^0]$, где $x^0 \overset{def}{=} e^{(A - m)/m} - 1$. Отсюда

$$F_1 = \max_{x \in X} F(x, y(x)) = \max_{0 \le x \le x^0} \frac{xm}{1 + x} = \frac{x^0 m}{1 + x^0}$$

и x^0 – оптимальная стратегия первого игрока.

Упражнение 11.5. Рассмотрите игру двух фирм из примера 9.9 при $\alpha = 1$ и решите игру Γ_1. Сравните наилучший гарантированный результат первого игрока F_1 с выигрышем, который он получает в ситуации равновесия.

Равновесие по Штакельбергу

Определим теперь *равновесие по Штакельбергу* игры Γ_1. Положим $Y^*(x) = \mathrm{Arg} \max\limits_{y \in Y(x)} F(x, y)$ – множество наилучших ответов второго игрока, благожелательных по отношению к первому.

Определение. Ситуация (x^0, y^0) называется *равновесием по Штакельбергу*, если

$$x^0 \in Arg \max_{x \in X} \max_{y \in Y(x)} F(x, y), \;\; y^0 \in Y^*(x^0).$$

Здесь предполагается, что второй игрок, получив информацию о x, использует свой наилучший ответ, благожелательный по отношению к первому игроку.

Покажем, что в сделанных предположениях равновесие по Штакельбергу существует. Для этого определим стратегию второго игрока g^* : $g^*(x) \in Y^*(x) \;\; \forall x \in Y$. По лемме 11.1 функция $F(x, g^*(x))$ полунепрерывна сверху на X. Следовательно, она достигает на компакте X наибольшее значение в некоторой точке x^0. Тогда при $y^0 = g^*(x^0)$ ситуация (x^0, y^0) будет равновесием по Штакельбергу. ■

Упражнение 11.6. В условиях примеров 11.1 и 11.2 найдите равновесия по Штакельбергу.

Отметим, что использование равновесия по Штакельбергу требует от игроков сотрудничества, которое, как показывает следующий пример, не всегда возможно. В игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \;\; B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ситуация (2,2) является единственным равновесием по Штакельбергу. Однако договориться о ней игрокам будет очень сложно, поскольку в ситуации (1,2) (возникающей при решении игры Γ_1) выигрыш второго игрока существенно больше, чем в (2,2), и он едва ли согласится на ситуацию (2,2).

Комментарий и библиография к главе II

§ 9. Понятие ситуации равновесия в частном случае, еще в 19-м веке, использовалось О. Курно при анализе модели дуополии [59]. Определение ситуации равновесия для игры многих лиц принадлежит Дж. Нэшу [76]. В 1999 году Джон Нэш получил Нобелевскую премию по экономике. Критический разбор понятия ситуации равновесия (в частности, анализ игр "семейный спор"и "дилемма заключенного") сделан Р.Д. Льюсом и Х. Райфой [61]. Пример 9.3 является модификацией примера "перекресток"из [71].

Теорема 9.1 о неподвижной точке принадлежит Л. Брауэру [18]. Комбинаторное доказательство этой теоремы, использующее лемму Э. Шпернера [107], получено Б. Кнастером, К. Куратовским и С. Мазуркевичем [53] (доказательство теоремы см. в Приложении и в [79]).

Теорема существования ситуации равновесия в игре многих лиц с вогнутыми функциями выигрыша (см. также следующую главу) доказана Х. Никайдо и К. Исода [75]. Пример 9.6 является частным случаем модели О. Курно [59]. Байесовские игры введены Дж. Харшаньи [92]. Пример 9.10 взят из [91].

§ 10. Термин "биматричная игра"был предложен Н.Н. Воробьевым (см.
[34], где содержится систематическое изложение теории бескоалиционных игр). Теорема существования ситуации равновесия в биматричных играх доказана Дж. Нэшем [76][1]. Там же приведены свойства ситуаций равновесия в смешанных стратегиях. Условие общности положения для биматричных игр использовали К. Лемке и Дж. Хоусон [60] при разработке алгоритма поиска *всех* ситуаций равновесия. Теорема 10.3 имеется в книге Э. Мулена [71]. Изложенный алгоритм поиска ситуаций равновесия биматричной игры является весьма упрощенным вариантом алгоритма К. Лемке и Дж. Хоусона [60, 79].

Концепция ситуации равновесия, основанная на исключении доминируемых стратегий, предложена Э. Муленом [71]. Доказательство отсутствия сходимости итерационного процесса к ситуации равновесия игры из примера 10.1 принадлежит Л.С. Шепли [103]

§ 11. Основы теории иерархических игр с использованием принципа гарантированного результата для игрока-лидера (игрока 1) заложены Ю.Б. Гермейером [37, 38]. В частности, Ю.Б. Гермейеру принадлежит центральный результат этот теории – теорема 11.1. Аналогичный результат для игр Γ_3 (упражнения 11.1 и 11.2) получен Н.С. Кукушкиным [57]. Экономическая интерпретация иерархических игр предложена И.А. Вателем и Ф.И. Ерешко [28]. Определение равновесия по Штакельбергу сформулировано в [95]. Обзор работ по иерархическим играм см. в [52].

[1] Даже для более общих игр с конечными множествами стратегий игроков (см. главу III)