<u>Вариант 3</u>

<u>Задача 1</u>

Найдите все равновесия по Штакельбергу биматричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$F' = \max_{1 \le i \le 5} W'(i)$$

$$W'(i) = \max_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$$Y(i) = \operatorname{Argmax}_{1 \le j \le 6} b_{ij}$$

$$\left[\begin{aligned} & Y(1) = \{3, 5\} \leftarrow b_{13}, b_{15} = 3 \\ & Y(2) = \{2, 5\} \leftarrow b_{22}, b_{25} = 3 \\ & Y(3) = \{3, 6\} \leftarrow b_{33}, b_{36} = 2 \\ & Y(4) = \{1, 3, 5\} \leftarrow b_{41}, b_{43}, b_{45} = 2 \\ & Y(5) = \{6\} \leftarrow b_{56} = 3 \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} & W'(1) = \max\{\underset{4}{a_{13}}, \underset{1}{a_{15}}\} = 4 \\ & W'(2) = \max\{\underset{3}{a_{22}}, \underset{2}{a_{25}}\} = 3 \\ & W'(3) = \max\{\underset{0}{a_{33}}, \underset{2}{a_{36}}\} = 2 \\ & W'(4) = \max\{\underset{1}{a_{41}}, \underset{4}{a_{43}}, \underset{4}{a_{45}}\} = 4 \\ & W'(5) = a_{56} = 4 \end{aligned}\right.$$

$$F' = \max_{1 \le i \le 5} W'(i) = 4 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ <u>равнов. по Шт.</u> : $(i^0, j^0) = (1,3)$
$(4,3)$
$(4,5)$
$(5,6)$

Вариант 3

Задача 2

Найдите решение в смешанных стратегиях матричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{5} & \cancel{3} & \cancel{5} & \cancel{3} \\ \cancel{5} & \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{5} \\ 3 & 6 & \cancel{7} & \cancel{6} \\ 8 & 3 & \cancel{4} & \cancel{3} \end{pmatrix}$$

Строка дом-ется ..., то ее можно вычерк.
столбец дом-ет ..., то его можно вычерк.

---

1) 1 стр. $\leq$ 2 стр. => вычерк. 1 стр.
2) [рассм. оставшуюся матрицу, нумерацию строк / /столбцов сохраним для удобства]:
* 3 столб. $\geq$ 4 столб. => вычерк. 3 столбец
3) [...] 4 столб. $\geq$ 2 столб. => вычерк. 4 столбец
4) [...] $\underset{(5,4)}{\text{2 стр.}} < \underset{(5.5,\ 4.5)}{\tfrac{1}{2}(\text{3 стр.}) + \tfrac{1}{2}(\text{4 стр.})}$ => вычерк. 2 строку

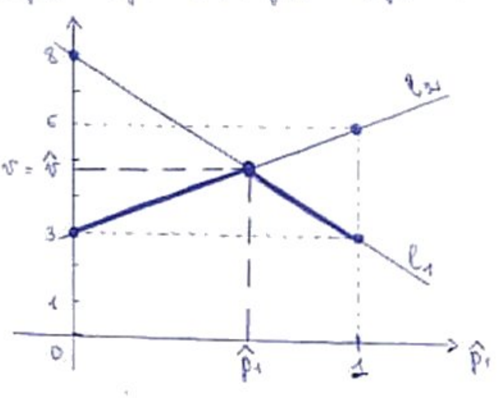
Теперь рассматриваем матрицу:

$$\hat{A} = \begin{array}{c} \\ \hat{p}_1 \\ 1-\hat{p}_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \hat{q}^* & 1-\hat{q}^* \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Постр. прямые $l_j(\hat{p}_1) = \hat{a}_{1j} \cdot \hat{p}_1 + \hat{a}_{2j}(1-\hat{p}_1)$:

$l_1(\hat{p}_1) = 3 \cdot \hat{p}_1 + 8(1-\hat{p}_1) = -5\hat{p}_1 + 8$

$l_2(\hat{p}_1) = 6\hat{p}_1 + 3(1-\hat{p}_1) = 3\hat{p}_1 + 3$



Строим нижн. огибающую.
Находим ее максимум:

$-5\hat{p}_1+8=3\hat{p}_1+3 \Rightarrow 8\hat{p}_1=5 \Rightarrow \hat{p}_1^0=\frac{5}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\hat{p}^0}=\left(\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right)$

Найдем $\hat{q}^0$:

$k_{j_1}\cdot\hat{q}^*+k_{j_2}\cdot(1-\hat{q}^*)=0$

$\hat{p}_1^0=l_1\cap l_2 \Rightarrow \begin{cases} j_1=1 \Rightarrow k_{j_1}=-5 \\ j_2=2 \Rightarrow k_{j_2}=3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow -5\hat{q}^*+3(1-\hat{q}^*)=0 \Rightarrow -8\hat{q}^*+3=0 \Rightarrow \hat{q}^*=\frac{3}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\hat{q}^0}=\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)$

Тогда, $\boxed{p^0}=(0,0,\hat{p}_1^0,\hat{p}_2^0)=\underbrace{\left(0,0,\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right)}$

$\boxed{q^0}=(\hat{q}_1^0,\hat{q}_2^0,0,0)=\underbrace{\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8},0,0\right)}$

$v=l_2\left(\frac{5}{8}\right)=3\cdot\frac{5}{8}+3=\frac{15}{8}+3=1\frac{7}{8}+3=4\frac{7}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{v=4\frac{7}{8}}$

Вариант 3

Задача 3

Используя соображения доминирования, найдите ситуации равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 5 & 6 \\ 5 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Если в A строка (строго) дом-ется ..., то ее можно вычеркнуть.

Если в B столбец (строго) дом-ется ..., то его можно вычеркнуть.

1) в B: 4 столб. $\leq$ 1 столб. $\Rightarrow$ вычерк. 4 столбцы и в A,

2) в A: 4 стр. $\leq$ 3 стр. $\Rightarrow$ вычерк. 4 строки и в A, и в B

3) в B: 1 столб. $<$ 3 столб. $\Rightarrow$ вычерк. 1 столбцы и в A, и в B

Теперь рассм. такие матрицы:

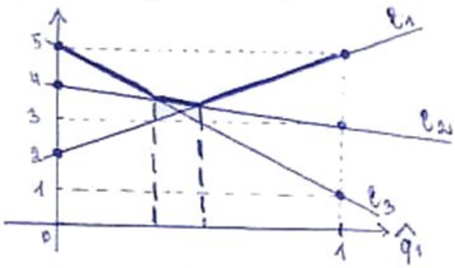
$$\hat{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \hat{q}_1 & 1-\hat{q}_1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

постр. кривые $l_i(\hat{q}_1) = \hat{a}_{i1} \cdot \hat{q}_1 + \hat{a}_{i2}(1-\hat{q}_1)$:

$l_1(\hat{q}_1) = 5\hat{q}_1 + 2(1-\hat{q}_1) = 3\hat{q}_1 + 2$

$l_2(\hat{q}_1) = 3\hat{q}_1 + 4(1-\hat{q}_1) = -\hat{q}_1 + 4$

$l_3(\hat{q}_1) = \hat{q}_1 + 5(1-\hat{q}_1) = -4\hat{q}_1 + 5$



Рассм. верхн. огибающую и точки излома

$\hat{p}_1^0 = \underline{l_2 \cap l_3}$:

$-\hat{q}_1 + 4 = -4\hat{q}_1 + 5 \Rightarrow 3\hat{q}_1 = 1 \Rightarrow \hat{q}_1^0 = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\hat{q}^0} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow$

$\hat{p}^0 = (0, \hat{p}^*, 1-\hat{p}^*) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \hat{p}^* \cdot b_{21} + (1-\hat{p}^*) b_{31} = v_2 \\ \hat{p}^* \cdot b_{22} + (1-\hat{p}^*) b_{32} = v_2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5\hat{p}^* + 8(1-\hat{p}^*) = 3\hat{p}^* + 2(1-\hat{p}^*) \Rightarrow$

$\Rightarrow -3\hat{p}^* + 8 = \hat{p}^* + 2 \Rightarrow 4\hat{p}^* = 6 \Rightarrow \hat{p}^* = \frac{6}{4} > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ эта точка не подходит

$\hat{p}_1^0 = \underline{l_1 \cap l_2}$:

$3\hat{q}_1 + 2 = -\hat{q}_1 + 4 \Rightarrow 4\hat{q}_1 = 2 \Rightarrow \hat{q}_1^0 = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\hat{q}^0} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\hat{p}^0 = (\hat{p}^*, 1-\hat{p}^*, 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\hat{p}^* + 5(1-\hat{p}^*) = 6\hat{p}^* + 3(1-\hat{p}^*) \Rightarrow$

$\Rightarrow -2\hat{p}^* + 5 = 3\hat{p}^* + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5\hat{p}^* = 2 \Rightarrow \hat{p}^* = \frac{2}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\hat{p}^0} = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$

Тогда, $\boxed{p^0} = (\hat{p}_1^0, \hat{p}_2^0, \hat{p}_3^0, 0) = \underline{\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0\right)},$

$\boxed{q^0} = (0, \hat{q}_1^0, \hat{q}_2^0, 0) = \underline{\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)},$

$v = l_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + 2 = 3\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{v = 3\frac{1}{2}}$

Вариант 4

Задача 1

Найдите нижнее и верхнее значение игры, все максиминные и минимаксные стратегии, а также все седловые точки (если ∃) матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & 7 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 7 & 9 & 6 & 8 & 1 \\ 1 & 8 & 5 & 1 & 9 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 6 & 7 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$W(i) = \min\limits_{1 \le j \le 7} a_{ij} \Rightarrow W(i) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\underline{v}} = \max\limits_{1 \le i \le 5} W(i) = \boxed{1}$ – нижн. значение игры $\Rightarrow$

$\Rightarrow X^0 = \{2, 3\} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x^0 = 2 \\ x^0 = 3 \end{matrix}}$ – максимин. стратегии

где достиг. $\max W(i)$

$M(j) = \max\limits_{1 \le i \le 5} a_{ij} \Rightarrow M(j) = (7\ 8\ 9\ 9\ 9\ 8\ 3)$

$\boxed{\overline{v}} = \min\limits_{1 \le j \le 7} M(j) = \boxed{3}$ – верхн. значение игры $\Rightarrow$

$\Rightarrow Y^0 = \{7\} \Rightarrow \boxed{y^0 = 7}$ – минимакс. стратегии

$\underline{v} = 1 < 3 = \overline{v} \Rightarrow$ нет седловых точек

Вариант 4

Задача 2

Найдите все ситуации равновесия игры на прямоугольнике:

$F(x,y) = -2x^2 - 2xy + y^2 - x - 2y$

$G(x,y) = x^2 - 4xy - y^2 - x - y$

$X = [-1, 2]$, $Y = [-1, 1]$

$$\left.\begin{aligned} F'_x = -4x - 2y - 1 &\Rightarrow F''_{xx} = -4 < 0 \Rightarrow F \text{ - строго вогн. по } x \\ G'_y = -4x - 2y - 1 &\Rightarrow G''_{yy} = -2 < 0 \Rightarrow G \text{ - строго вогн. по } y \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists$ с.р.

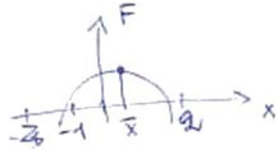
F, G - строго вогн. $\Rightarrow$ мн-ва наил. ответов для каждого игрока сост. из един. эл-тов

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x(y): \max\limits_{-1 \le x \le 2} F(x,y) = F(x(y), y) \\ y(x): \max\limits_{-1 \le y \le 1} G(x,y) = G(x, y(x)) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(y) = x \\ y(x) = y \end{cases} \Rightarrow (x^0, y^0) \text{ - с.р.}$$

Построим $x(y)$:



$F(x,y)$ - вогн. по x $\Rightarrow$

$\Rightarrow F'_x = -4x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow \bar{x} = -\dfrac{2y+1}{4}$

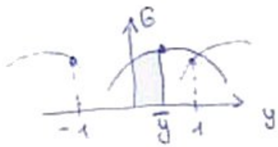
$\bar{x} \in [-1, 2] \Rightarrow -1 \le -\dfrac{2y+1}{4} \le 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -8 \le 2y + 1 \le 4 \Rightarrow -9 \le 2y \le 3 \Rightarrow -4.5 \le y \le 1.5$

$y \in [-1, 1] \Rightarrow$ ф-ия наил. ответов 1ого игрока:

$$\underbrace{x(y) = -\frac{2y+1}{4}}$$

Построим $y(x)$:



$G(x,y)$ - вогн. по y $\Rightarrow$

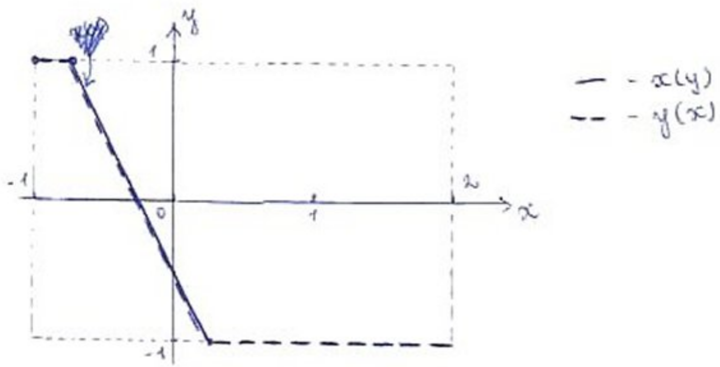
$\Rightarrow G'_y = -4x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow \bar{y} = -\dfrac{4x+1}{2}$

$\bar{y} \in [-1, 1] \Rightarrow -1 \le -\dfrac{4x+1}{2} \le 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2 \le 4x + 1 \le 2 \Rightarrow -3 \le 4x \le 1 \Rightarrow -\dfrac{3}{4} \le x \le \dfrac{1}{4}$

=> ф-ия наил. ответов 2ого игрока:

$$\underbrace{y(x)} = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in [-1, -\frac{3}{4}) \\ -\frac{4x+1}{2}, \text{ если } x \in [-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}] \\ -1, \text{ если } x \in (\frac{1}{4}, 2] \end{cases}$$



$$\begin{cases} x(y) = x \\ y(x) = y \end{cases} \Rightarrow \quad x^0 = -\frac{2y+1}{4}$$

$\underline{\text{с.р.}}$: (x^0, y^0), где $x^0 = -\frac{2y+1}{4}$
$y^0 \in [-1, 1]$

$\boxed{\text{с.р.}}$: $\begin{cases} y^0 = t \\ x^0 = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \\ t \in [-1, 1] \end{cases}$

Вариант 4

Задача 3

Решите игру Γ_2 для биматричной игры Γ:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$G_2 = \max_{1 \le j \le 5} \min_{1 \le i \le 5} b_{ij}$$

$\min\limits_{1 \le i \le 5} b_{ij} = (1\ 0\ 1\ 1\ 1) \Rightarrow G_2 = 1 \Rightarrow E = \{1, 3, 4, 5\}$

$D = \{(i,j) \mid b_{ij} > G_2 = 1\} \rightarrow$ см. в м. B - мн-во D обведено

Обведем в A мн-во, соотв. $(i,j) \in D$

$$K = \max_{(i,j) \in D} a_{ij} = 8$$

$$M = \min_{j \in E} \max_{1 \le i \le 5} a_{ij} = \min\{\overset{j=1}{5}, \overset{j=3}{5}, \overset{j=4}{6}, \overset{j=5}{8}\} = 5$$

$M = 5 < 8 = K$

наим. гарант. выигрыш 1ого игрока:

$$F_2 = \max[K, M] = 8$$

~~Ту~~ F_2 реализ. в a_{45}

$$f^{\varepsilon}(j) = \begin{cases} 4, & \text{если } j = 5 \\ 4, & \text{если } j = 1 \\ 2, & \text{если } j = 2 \\ 2, & \text{если } j = 3 \\ 5, & \text{если } j = 4 \end{cases}$$

{номер i наим. эл-та в соотв. столбце матрицы B

Вариант 5

Задача 1

Найдите все ситуации равновесия в чистых стратегиях биматричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Построим мн-ва наил. ответов:

1) для 1-ого игрока: $X(j)$ - мн-во номеров max эл-тов в j-ом столбце A (обведем кружочками)

$X(1) = \{1, 2, 5\}$

$X(2) = \{1\}$

$X(3) = \{1\}$

$X(4) = \{3\}$

$X(5) = \{5\}$

$X(6) = \{4, 5\}$

2) для 2-ого игрока: $Y(i)$ - мн-во номеров max эл-тов в i-ой строке B (обведем)

$Y(1) = \{2\}$

$Y(2) = \{5\}$

$Y(3) = \{2, 4\}$

$Y(4) = \{4\}$

$Y(5) = \{1, 2\}$

Сит. равн. - (i°, j°): $i^\circ \in X(j^\circ)$, $j^\circ \in Y(i^\circ)$

Значит, смотрим „общие кружочки":

$(i^\circ, j^\circ) = (1, 2)$

$(3, 4)$

$(5, 1)$

ситуации равновесия

Вариант 5

Задача 2

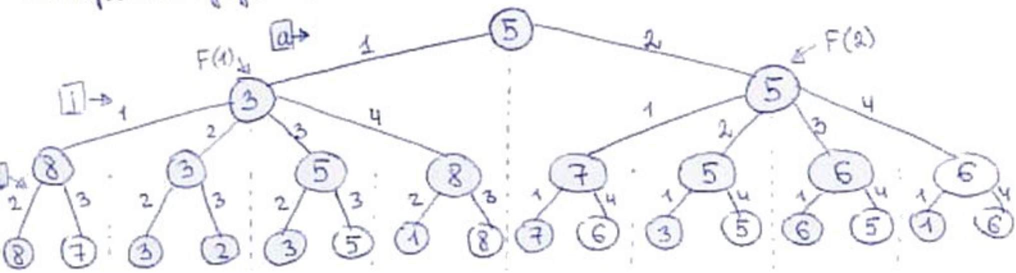
Найдите значение игры v и все оптимальные стратегии игроков в след. игре с полной информацией: сначала 1-ый игрок выбирает номер „a" мн-ва строк M_a, $a=1,2$, матрицы A, где $M_1=\{2,3\}$, $M_2=\{1,4\}$. Затем 2-ой игрок, зная выбор „a" 1-ого, выбирает номер j столбца м. A, а потом 1-ый игрок, зная предыдущие выборы „a" и j выбирает номер i строки в мн-ве M_a. Выигрыш 1-ого игрока определяется по матрице:

$$A=\begin{pmatrix}7&3&6&1\\8&3&3&1\\7&2&5&8\\6&5&5&6\end{pmatrix}$$

---

1) 1-ый игрок: 1 или 2
2) 2-ой игрок: 1, 2, 3 или 4
3) 1-ый игрок: если в п.1) выбрал 1, то 2 или 3
если в п.1) выбрал 2, то 1 или 4

Построим дерево:



Дерево строим по алгоритму (см. начало) из 3-х шагов. В листья („финальные позиции") вписываем значения, соотв. a_{ij}: – посл. „этаж" соотв. i
– предпосл. „этаж" соотв. j $\Rightarrow F(a,i,j)=a_{ij}$

(!) будем считать, что 1-ый – максимиз.,
2-ой – минимиз.

$F(a,j)=\max\limits_{i\in M_a} a_{ij}$ – т.е. заполняем предпосл. уровень вершин: max значения берём из дочерн. верш.

$F(a)=\min\limits_{1\le j\le 4} F(a,j)$ – т.е. заполн. перв. уровень вершин: берём min знач. из дочерн.

$v=\max\limits_{a\in\{1,2\}} F(a)$ – корень, т.е. $v=\max\{3,5\}=5$, $\boxed{v=5}$

Опред. оптим. стратегии 1-ого игрока:

$i^0 = i^0(a, j)$, a^0

$a^0 = \underset{a\in[1,2]}{\mathrm{Arg\,max}}\, F(a) = 2 \Rightarrow i^0 = i^0(2, j)$

$i^0(2,1) = 1$ (т.к. выбрать $a_{11} = 7$)
$i^0(2,2) = 4$ (т.к. выбрать $a_{24} = 5$)
$i^0(2,3) = 1$
$i^0(2,4) = 4$

Опред. оптим. стратегии 2-ого игрока:

$j^0 = j^0(a)$

$j^0(1) = 2$ (т.к. выбр. $\min\{8, \overset{j=2}{3}, 5, 8\}$)
$j^0(2) = 2$ (т.к. выбр. $\min\{7, \underset{j=2}{5}, 6, 6\}$)

<u>Ответ</u>: $v = 5$ – значение игры

$$\left.\begin{array}{l} a^0 = 2 \\ i^0(2,1) = 1 \\ i^0(2,2) = 4 \\ i^0(2,3) = 1 \\ i^0(2,4) = 4 \end{array}\right\} \text{ – оптим. страт. 1-ого игрока}$$

$j^0 = 2$ – оптим. страт. 2-ого игрока

Вариант 5

Задача 3

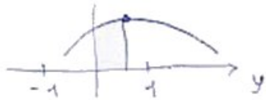
Найдите максимин и максиминную стратегию игры на прямоугольнике:

$F(x,y) = x^2 + 4xy - 3y^2 - 2x - 2y$

$X = [-1,2]$, $Y = [-1,1]$

$\underline{v} = \sup\limits_{-1\le x\le 2} \inf\limits_{-1\le y\le 1} F(x,y)$

$W(x) = \min\limits_{-1\le y\le 1} F(x,y) = F(x, y(x))$



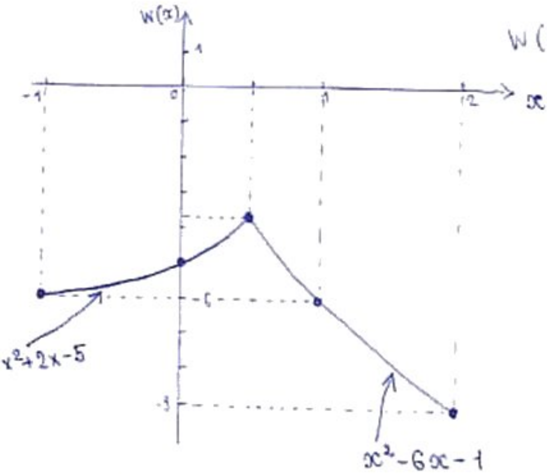
$F(x,y)$ - парабола отн. y, вогнут. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ минимум достиг. или в т. $y=-1$,
или в т. $y = 1$

$W(x) = \min\{F(x,-1), F(x,1)\} = \min\{x^2 - 6x - 1, x^2 + 2x - 5\}$

$x^2 - 6x - 1 \le x^2 + 2x - 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x \ge 4 \Rightarrow x \ge \frac{1}{2}$



$W(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 5, \text{ если } x \in [-1, \frac{1}{2}) \\ x^2 - 6x - 1, \text{ если } x \in [\frac{1}{2}, 2] \end{cases}$

$\frac{1}{4} + 1 - 5 = \frac{1}{4} - 4 = -3\frac{3}{4}$

$4 - 12 - 1 = -9$

$x^0 = \frac{1}{2}$

$\underline{v} = \max\limits_{-1\le x\le 2} W(x) = W(\frac{1}{2}) = -3\frac{3}{4}$

$\boxed{x^0 = \frac{1}{2}}$ - максимин. стратегия

$\boxed{\underline{v} = -3\frac{3}{4}}$ - максимин

Вариант 14

Задача 1

Найдите наилучший гарантированный результат F_1 и все оптимальные стратегии 1ого игрока иерархической игры Γ_1 для биматричной игры Γ:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \max_{1 \le i \le 5} \min_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$$Y(i) = \operatorname{Arg} \max_{1 \le j \le 6} b_{ij}$$

$$w(i) = \min_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$$\left[\begin{array}{l} Y(1) = \{2, 5, 6\} \leftarrow b_{12}, b_{15}, b_{16} = 3 \\ Y(2) = \{5\} \leftarrow b_{25} = 4 \\ Y(3) = \{1, 2\} \leftarrow b_{31}, b_{32} = 4 \\ Y(4) = \{2, 4\} \leftarrow b_{42}, b_{44} = 4 \\ Y(5) = \{3, 4\} \leftarrow b_{53}, b_{54} = 3 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} w(1) = \min\{\underset{=1}{a_{12}}, \underset{=3}{a_{15}}, \underset{=3}{a_{16}}\} = 1 \\ w(2) = a_{25} = 2 \\ w(3) = \min\{\underset{=3}{a_{31}}, \underset{=0}{a_{32}}\} = 0 \\ w(4) = \min\{\underset{=3}{a_{42}}, \underset{=0}{a_{44}}\} = 0 \\ w(5) = \min\{\underset{=4}{a_{53}}, \underset{=2}{a_{54}}\} = 2 \end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$F_1 = \max_{1 \le i \le 5} w(i) = 2 \Rightarrow \underline{i^\circ = 2}, \ \underline{i^\circ = 5} \text{ — оптим. стратегии}$$

$\underline{F_1 = 2}$ — наил. гарант. результат

Вариант 14

Задача 2

Найдите решение в смешанных стратегиях матричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 2 & 2 \\ \cancel{6} & \cancel{3} & \cancel{2} & 3 \\ \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{6} & \cancel{6} \end{pmatrix}$$

Строка дом-ется нез вып. мин. комб. -> ее можно вычерк

Столбец дом-ет нез вып. мин. комб. => ее можно вычерки.

---

1) 4 стр. < 1 стр. => вычерк. 4 строку
2) [рассм. оставш. матрицу, нумерацию сохр.]
   4 столб. ≥ 3 столб. => вычерк. 4 столбец
3) [...] 3 стр. ≤ 2 стр. => вычерк. 3 строку

Теперь рассм. матрицу:

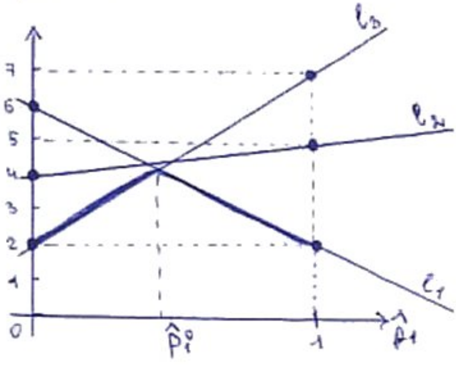
$$\hat{A} = \begin{array}{c} \hat{p}_1 \\ 1-\hat{p}_1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Рассм. прямые $l_j(\hat{p}_1) = \hat{a}_{1j} \cdot \hat{p}_1 + \hat{a}_{2j} \cdot (1-\hat{p}_1)$:

$l_1(\hat{p}_1) = 2\hat{p}_1 + 6(1-\hat{p}_1) = -4\hat{p}_1 + 6$

$l_2(\hat{p}_1) = 5\hat{p}_1 + 4(1-\hat{p}_1) = \hat{p}_1 + 4$

$l_3(\hat{p}_1) = 7\hat{p}_1 + 2(1-\hat{p}_1) = 5\hat{p}_1 + 2$



$l_1 \cap l_3: -4\hat{p}_1 + 6 = 5\hat{p}_1 + 2 \Rightarrow 9\hat{p}_1 = 4 \Rightarrow \hat{p}_1 = \frac{4}{9}$

$l_2\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{4}{9} + 4 = 4\frac{4}{9}$ (т.е. l_2 выше $l_1 \cap l_3$)

$l_1\left(\frac{4}{9}\right) = 6 - \frac{16}{9} = \frac{38}{9} = 4\frac{2}{9}$

Строим нижн. огибающую.

Находим ее max:

$\hat{p}_1^0 = l_1 \cap l_3 \Rightarrow \hat{p}_1^0 = \frac{4}{9} \Rightarrow \underline{\hat{p}^0 = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)}$

Находим $\hat{q}^0$:

$k_{j_1}\hat{q}^* + k_{j_2}(1-\hat{q}^*) = 0$

$\hat{p}_1^0 = l_1 \cap l_3 \Rightarrow \begin{cases} j_1 = 1 \Rightarrow k_{j_1} = -4 \\ j_2 = 3 \Rightarrow k_{j_2} = 5 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow -4\hat{q}^* + 5(1-\hat{q}^*) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -9\hat{q}^* + 5 = 0 \Rightarrow \hat{q}^* = \frac{5}{9} \Rightarrow \underline{\hat{q}^0 = \left(\frac{5}{9}, 0, \frac{4}{9}\right)}$

Тогда: $\boxed{p^0} = (\hat{p}_1^0, \hat{p}_2^0, 0, 0) = \underline{\left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}, 0, 0\right)}$

$\boxed{q^0} = (\hat{q}_1^0, \hat{q}_2^0, \hat{q}_3^0, 0) = \underline{\left(\frac{5}{9}, 0, \frac{4}{9}, 0\right)}$

$\boxed{v} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p_i^0 a_{ij} q_j^0 = \sum_{i=1}^{4}\left(p_i^0 a_{i1} \cdot \frac{5}{9} + p_i^0 a_{i3} \cdot \frac{4}{9}\right) =$

$= \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot a_{11} + \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot a_{13} + \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot a_{21} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot a_{23} =$

$= \frac{20}{81} \cdot 2 + \frac{16}{81} \cdot 7 + \frac{25}{81} \cdot 6 + \frac{20}{81} \cdot 2 = \frac{80 + 112 + 150}{81} = \frac{342}{81} = \boxed{\frac{38}{9}}$

Вариант 14

Задача 3

Найдите минимакс и минимаксную стратегию игры на прямоугольнике:

$$F(x,y) = -3x^2 + 3xy - 3y^2 - x + y\,,\quad X = [-1,1]\,,\quad Y = [-1,1]$$

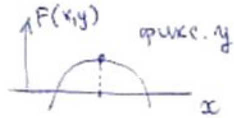
$$\overline{v} = \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} F(x,y)$$

$y^0 \in Y$ - минимакс. стратегия, если $\sup_{x\in X} F(x,y^0) = \overline{v}$

$$M(y) = \sup_{x\in X} F(x,y) = F(x(y), y)$$

Найдем $M(y)$:

$$M(y) = \max_{-1\le x\le 1} F(x,y) = F(x(y),y)$$



$$F(x,y) = -3x^2 + x(3y-1) + (-3y^2 + y)$$

Вершина этой параболы:

$$x = \frac{3y-1}{6} = \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}$$

$$-1 \le x \le 1 \Rightarrow -1 \le \frac{3y-1}{6} \le 1 \Rightarrow -6 \le 3y - 1 \le 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5 \le 3y \le 7 \Rightarrow -\frac{5}{3} \le y \le \frac{7}{3} \Rightarrow$$

т.к. $y \in Y = [-1,1] \Rightarrow$ максимум достиг. при $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}$

$$M(y) = F\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{6}, y\right) =$$

$$= -\cancel{3}\cdot\frac{(3y-1)^2}{\cancel{36}\,12} + 3\cdot\frac{3y-1}{6}y - 3y^2 - \frac{3y-1}{6} + y =$$

$$= -\frac{1}{12}\cdot(3y-1)^2 + \frac{1}{6}(3y-1)\cdot(3y-1) - y(3y-1) =$$

$$= \frac{(3y-1)}{12}\left(-3y + 1 + 6y - 2 - 12y\right) =$$

$$= \frac{3y-1}{12}\cdot(-9y-1) = \frac{1}{12}\left(-27y^2 + 6y + 1\right) = -\frac{9}{4}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{12}$$

$M(y) = -\frac{9}{4}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{12}$ - это парабола

Значит, минимум достигается или в $y=-1$, или в $y = 1$

$$\overline{v} = \min\{M(-1), M(1)\} =$$

$$= \min\left\{-\frac{9^{\backslash 3}}{4} - \frac{1^{\backslash 6}}{2} + \frac{1}{12},\ -\frac{9^{\backslash 3}}{4} + \frac{1^{\backslash 6}}{2} + \frac{1}{12}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{-27-6+1}{12},\ \frac{-27+6+1}{12}\right\} = \min\left\{-\frac{32}{12},\ -\frac{20}{12}\right\} = -\frac{32}{12} = -\frac{8}{3}$$

$\boxed{\overline{v} = -\frac{8}{3}}$ – минимакс

$\boxed{y^0 = -1}$ – минимакс. стратегия

Вариант 15

Задача 1

Найдите все равновесие по Штакельбергу биматричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Равнов. по Шт.:

$$(i^0, j^0): \quad W'(i^0) = \max_{1 \le i \le 5} W'(i) - F'$$

$$W'(i) = \max_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$$Y(i) = \operatorname{Arg} \max_{1 \le j \le 6} b_{ij}$$

$Y(1) = \{3\} \leftarrow b_{13}$

$Y(2) = \{4, 6\} \leftarrow b_{24}, b_{26}$

$Y(3) = \{1, 4\} \leftarrow b_{31}, b_{34}$

$Y(4) = \{3\} \leftarrow b_{43}$

$Y(5) = \{2, 3, 6\} \leftarrow b_{52}, b_{53}, b_{56}$

$W'(1) = a_{13} = 1$

$W'(2) = \max\{\underset{=0}{a_{24}}, \underset{=2}{a_{26}}\} = 2$

$W'(3) = \max\{\underset{=1}{a_{31}}, \underset{=1}{a_{34}}\} = 1$

$W'(4) = a_{43} = 0$

$W'(5) = \max\{\underset{=3}{a_{52}}, \underset{=4}{a_{53}}, \underset{=2}{a_{56}}\} = 4$

$\Downarrow$ $W'(i^0) = \max\{1, 2, 1, 0, 4\} = 4$

Равнов. по Шт.: $(i^0, j^0) = (5, 3)$

Вариант 15

Задача 2

Найдите решение в смешанных стратегиях матричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ 8 & 2 & 7 & 9 \\ 5 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

---

a дом-ет b, если $a_i \geq b_i$

строка дом-ся ... => ее можно вычеркнуть

столбец дом-ет ... => его можно вычеркнуть

---

1) 4 строка дом-ся ($\leq$) 1 строкой =>
=> 4 строку вычерк.

2) [рассм. оставшуюся матрицу, для удобства сохраним нумерацию]
4 столбец дом-ет ($\geq$) 2 столбец =>
=> вычерк. 4 столб.

3) [...] 1 столбец дом-ет ($\geq$) 2 столбец =>
=> вычерк. 1 столбец

4) [...] $\underset{(3,5)}{1 \text{ строка}}$ дом-ся ($\leq$) $\frac{1}{2}\underset{(3,5)}{(2 \text{ стр})} + \frac{1}{2}(3 \text{ стр})$ =>
=> 1 строку вычерк.

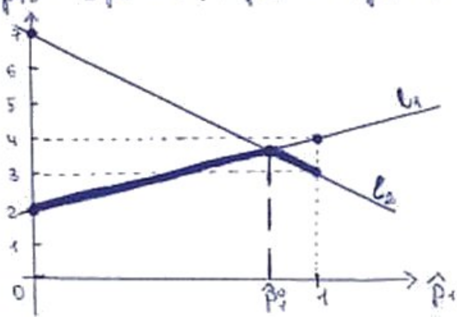
Теперь рассм. оставшуюся матрицу:

$$\hat{A} = \begin{array}{c} \\ \hat{p}_1 \\ 1-\hat{p}_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \hat{q}_1 & 1-\hat{q}_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Рассм. прямые $l_j(\hat{p}_1) = \hat{a}_{1j} \cdot \hat{p}_1 + \hat{a}_{2j} \cdot (1 - \hat{p}_1)$ =>

=> $l_1(\hat{p}_1) = 4\hat{p}_1 + 2(1-\hat{p}_1) = 2\hat{p}_1 + 2$

$l_2(\hat{p}_1) = 3\hat{p}_1 + 7(1-\hat{p}_1) = -4\hat{p}_1 + 7$



Строим нижнюю огибающую (—)

Находим ее точку max:

$2\hat{p}_1 + 2 = -4\hat{p}_1 + 7 \Rightarrow 6\hat{p}_1 = 5 \Rightarrow \hat{p}_1^0 = \frac{5}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{p}^0 = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right) \leftarrow$ это для м. $\hat{A}$

Находим $\hat{q}^0$:

$k_{j_1}\hat{q}^* + k_{j_2}(1-\hat{q}^*) = 0$

$\hat{p}_1^0 = l_1 \cap l_2 \Rightarrow \begin{cases} j_1 = 1 \Rightarrow k_{j_1} = 2 \\ j_2 = 2 \Rightarrow k_{j_2} = -4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\hat{q}^* - 4(1-\hat{q}^*) = 0 \Rightarrow 6\hat{q}^* = 4 \Rightarrow \hat{q}^* = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{q}^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \leftarrow$ это для м. $\hat{A}$

Тогда: $\boxed{p^0} = (0, \hat{p}_1^0, \hat{p}_2^0, 0) = \underline{\left(0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0\right)}$

$\boxed{q^0} = (0, \hat{q}_1^0, \hat{q}_2^0, 0) = \underline{\left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)}$

$v = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p_i^0 a_{ij} q_j^0 = \sum_{i=1}^{4}\left(p_i^0 a_{i2}\cdot\frac{2}{3} + p_i^0\cdot a_{i3}\cdot\frac{1}{3}\right) =$

$= \frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot a_{22} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot a_{23} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}a_{32} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}a_{33} =$

$= \frac{5}{9}\cdot 4 + \frac{5}{18}\cdot 3 + \frac{1}{9}\cdot 2 + \frac{1}{18}\cdot 7 = \frac{40+15+4+7}{18} = \frac{66}{18} = \frac{11}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{v = \frac{11}{3}}$

Вариант 15

Задача 3

Используя соображения доминирования, найдите ситуации равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & \cancel{5} & \cancel{7} \\ 2 & 3 & \cancel{6} & \cancel{7} \\ 1 & 4 & \cancel{5} & \cancel{6} \\ \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{5} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & \cancel{5} & \cancel{1} \\ 3 & 4 & \cancel{4} & \cancel{3} \\ 4 & 1 & \cancel{1} & \cancel{3} \\ \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{7} & \cancel{4} \end{pmatrix}$$

Если в A строка строго дом-ется (<) вып. лин. комб. ост., то она входит с 0 вер. в $\forall$ оптим. смеш. страт. 1ого игрока.

Если в B столбец ... 2ого игрока

---

1) в A: 4 стр. $< \frac{1}{2}$ (2 стр. + 3 стр.) => вычерк. 4 строку (и в A, и в B)

0 3 4 5   1.5 3.5 5.5 6.5

2) [теперь расс. оставшиеся матрицы, для удобства нумерацию сохраним]

в B: 4 столбец $\leq$ 1 столб. => 4 столб. вычерк. (и в A, и в B)

(можно потерять с.р. ...)

3) [...] в B: 3 столб. $\leq$ 2 столб. => вычерк. 3 столбец (и в A, и в B)

(...)

Теперь рассм. матрицы:

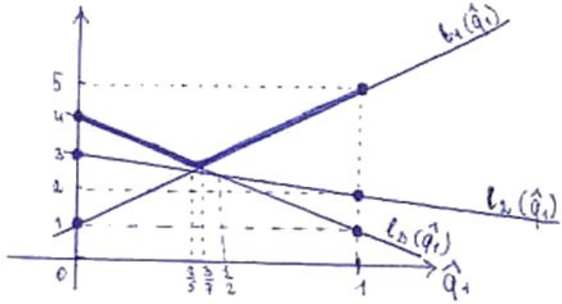
$$\hat{A} = \begin{array}{cc} \hat{q}_1 & 1-\hat{q}_1 \\ \end{array}$$
$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Постр. сем-во кривых $l_i(\hat{q}_1) = \hat{a}_{i1} \cdot \hat{q}_1 + \hat{a}_{i2}(1-\hat{q}_1)$:

$$l_1(\hat{q}_1) = 5\hat{q}_1 + 1 - \hat{q}_1 = 4\hat{q}_1 + 1$$

$$l_2(\hat{q}_1) = 2\hat{q}_1 + 3(1-\hat{q}_1) = -\hat{q}_1 + 3$$

$$l_3(\hat{q}_1) = \hat{q}_1 + 4(1-\hat{q}_1) = -3\hat{q}_1 + 4$$



$l_1 \cap l_2: \; 4\hat{q}_1 + 1 = -\hat{q}_1 + 3 \Rightarrow 5\hat{q}_1 = 2 \Rightarrow \hat{q}_1 = \frac{2}{5} \Rightarrow l = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$

$l_1 \cap l_3: \; 4\hat{q}_1 + 1 = -3\hat{q}_1 + 4 \Rightarrow 7\hat{q}_1 = 3 \Rightarrow \hat{q}_1 = \frac{3}{7} \Rightarrow l = \frac{19}{7} = 2\frac{5}{7}$

$l_2 \cap l_3: \; -\hat{q}_1 + 3 = -3\hat{q}_1 + 4 \Rightarrow 2\hat{q}_1 = 1 \Rightarrow \hat{q}_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow l = 2\frac{1}{2}$

Строим верхн. огибающую (l_3 и l_1). Рассмотрим точку излома

$l_1 \cap l_3: \; \hat{q}_1^0 = \frac{3}{7} \Rightarrow \underbrace{\hat{q}^0 = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)}$

$\hat{p}^0 = (\hat{p}^*, 0, 1 - \hat{p}^*)$ ← (т.к. $l_1 \cap l_3$)

$$\begin{cases} \hat{p}^* b_{11} + (1-\hat{p}^*) b_{31} = v_2 \\ \hat{p}^* b_{12} + (1-\hat{p}^*) b_{32} = v_2 \end{cases} \Rightarrow \quad 2\hat{p}^* + 4(1-\hat{p}^*) = 6\hat{p}^* + 1 - \hat{p}^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\hat{p}^* + 4 = 5\hat{p}^* + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7\hat{p}^* = 3 \Rightarrow \hat{p}^* = \frac{3}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\hat{p}^0 = \left(\frac{3}{7}, 0, \frac{4}{7}\right)}$$

Тогда, ситуация равновесия исх. игры:

$$\boxed{p^0} = (\hat{p}_1^0, \hat{p}_2^0, \hat{p}_3^0, 0) = \underbrace{\left(\frac{3}{7}, 0, \frac{4}{7}, 0\right)}$$

$$\boxed{q^0} = (\hat{q}_1^0, \hat{q}_2^0, 0, 0) = \underbrace{\left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0, 0\right)}$$

Вариант 17

Задача 1

Найдите все ситуации равновесия в чистых стратегиях биматричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Построим мн-ва наил. ответов:

1) для 1-ого игрока: $X(j)$ – мн-во номеров max эл-тов в j-ом столбце A (обвед. кружочками)

$X(1) = \{2, 4\}$
$X(2) = \{3, 4\}$
$X(3) = \{2, 3, 4\}$
$X(4) = \{2\}$
$X(5) = \{1, 4\}$
$X(6) = \{1\}$

2) для 2-ого игрока: $Y(i)$ – мн-во номеров max эл-тов в i-ой строке B.

$Y(1) = \{1, 2, 3\}$
$Y(2) = \{3\}$
$Y(3) = \{1\}$
$Y(4) = \{3, 5\}$
$Y(5) = \{1, 6\}$

Сит. равнов. – (i^0, j^0): $i^0 \in X(j^0)$, $j^0 \in Y(i^0)$

Значит, смотрим „общие кружочки":

$(i^0, j^0) = (2, 3)$, $(4, 3)$, $(4, 5)$ ← ситуации равновесия

Вариант 17

Задача 2

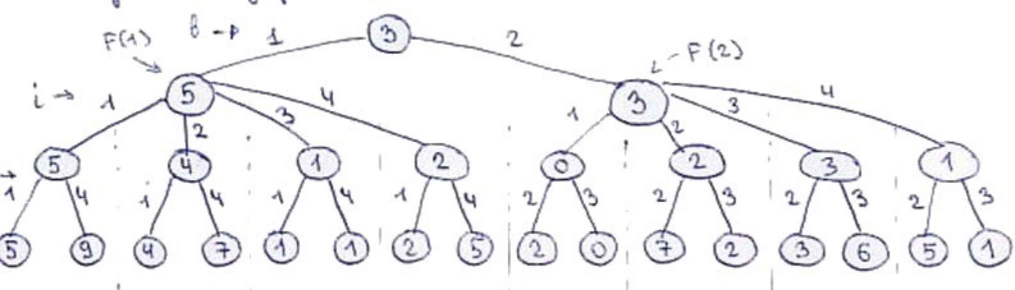
Найдите значение игры v и все оптимальные стратегии игроков в следующей игре с полной информацией: сначала 2-ой игрок выбирает номер „b" мн-ва столбцов N_b, $b=1,2$ матрицы A, где $N_1 = \{1,4\}$, $N_2 = \{2,3\}$. Затем 1-ый игрок, зная выбор „b" второго, выбирает номер i строки м. A, а потом 2-ой игрок, зная предыдущие выборы „b" и i, выбирает номер j столбца в мн-ве N_b. Выигрыш 1-го игрока определяется по матрице:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 9 \\ 4 & 7 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

---

1) 2 игрок: 1 или 2
2) 1 игрок: 1, 2, 3 или 4
3) 2 игрок: если выбрал в 1) 1, то 1 или 4
   если выбрал в 1) 2, то 2 или 3

Построим дерево:



Дерево строим по алгоритму (см. начало) из 3-х шагов.
В листья вписываем значения, соотв. a_{ij}:
- последн. „этаж" соотв. j
- предпоследн. „этаж" соотв. i $\quad F(b,i,j) = a_{ij}$

В условии не сказано, но будем считать, что:
- 1-ый игрок максимизирует
- 2-ой игрок минимизирует

$F(b,i) = \min\limits_{j \in N_b} a_{ij}$ – т.е. запоминаем предпоследний уровень вершин: берем миним. значение из дочерн. вершин

$F(b) = \max\limits_{1 \le i \le 4} F(b,i)$ – т.е. запоминаем 1-ый уровень вершин: берем максим. значение из дочерн. вершин

$v = \min\limits_{b \in \{1,2\}} F(b)$ – корень

т.е. $v = \min\{5,3\} = 3$, $\boxed{v = 3}$

Опред. оптим. стратегии 2-ого игрока:

$$j^0 = j^0(b,i), \ b^0$$

$$b^0 = \operatorname{Arg}\min_{b \in \{1,2\}} F(b) = 2 \Rightarrow j^0 = j^0(2,i)$$

$j^0(2,1) = 3$ (т.к. выбрать эл-т $a_{13} = 0$)
$j^0(2,2) = 3$ (т.к. выбрать эл-т $a_{23} = 2$)
$j^0(2,3) = 2$
$j^0(2,4) = 3$

Опред. оптим. стратегии 1-ого игрока:

$i^0 = i^0(b)$
$i^0(1) = 1$ (т.к. выбрать $\max\{\overset{i=1}{5}, 4, 1, 2\}$)
$i^0(2) = 3$ (т.к. выбрать $\max\{0, 2, \underset{i=3}{3}, 1\}$)

<u>Ответ</u>: $v = 3$ – значение игры

$\left.\begin{matrix} i^0(1) = 1 \\ i^0(2) = 3 \end{matrix}\right\}$ – оптим. страт. 1ого игрока

$\left.\begin{matrix} b^0 = 2 \\ j^0(2,1) = 3 \\ j^0(2,2) = 3 \\ j^0(2,3) = 2 \\ j^0(2,4) = 3 \end{matrix}\right\}$ – оптим. страт. 2-ого игрока

Вариант 17

Задача 3

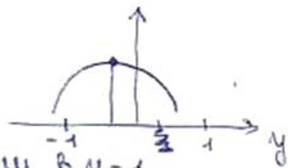
Найдите максимин и максиминную стратегию игры на прямоугольнике:

$F(x,y) = -x^2 - 4xy - 3y^2 - y$

$X = [-1, 2]$, $Y = [-1, 1]$

$v = \max\limits_{-1 \le x \le 2} \min\limits_{-1 \le y \le 1} F(x,y)$

$W(x) = \min\limits_{-1 \le y \le 1} F(x,y) = F(x, y(x))$



$F(x,y)$ – парабола отн. y, вогнут. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ минимум достиг. или в $y=-1$, или в $y=1$

$W(x) = \min\{F(x,-1), F(x,1)\} =$

$= \min\{-x^2+4x-2, -x^2-4x-4\}$

$-\cancel{x^2} + 4x - 2 \le -\cancel{x^2} - 4x - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x \le -2 \Rightarrow x \le -\frac{1}{4}$

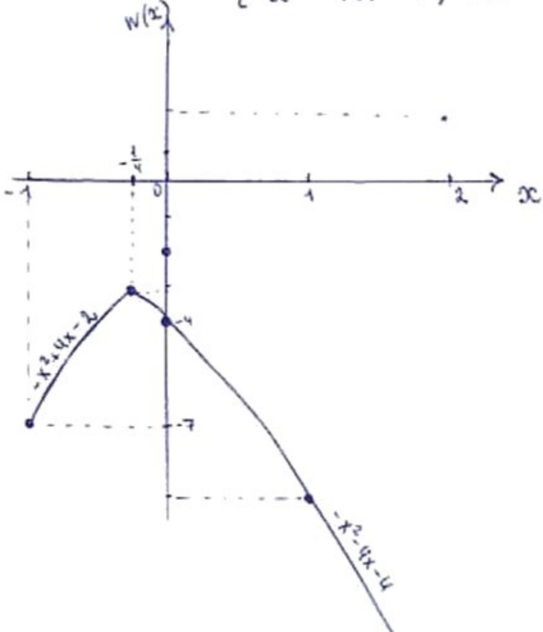
Тогда, $W(x) = \begin{cases} -x^2+4x-2, & \text{если } x \in [-1, -\frac{1}{4}] \\ -x^2-4x-4, & \text{если } x \in [-\frac{1}{4}, 2] \end{cases}$

$-\frac{1}{16} - \frac{4}{4} - 2 = -3\frac{1}{16}$

$-\frac{4}{-2} = 2 \quad -4+8-2 = 2$

$-1-4-2 = -7$

$-1-4-4$



$x^0 = -\frac{1}{4}$

$\underline{v} = \max\limits_{-1 \le x \le 2} W(x) = W(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{16} - \frac{4}{4} - 2 = -3\frac{1}{16}$

$\boxed{x^0 = -\frac{1}{4}}$ – максиминная стратегия

$\boxed{\underline{v} = -3\frac{1}{16}}$ – максимин

Вариант 22

Задача 1

Найдите наилучший гарантированный результат F_1 и все оптимальные стратегии 1ого игрока иерархической игры $Г_1$ для биматричной игры Г:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \max_{1 \le i \le 5} \min_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$$Y(i) = \operatorname{Arg} \max_{1 \le j \le 6} b_{ij}$$

$$W(i) = \min_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$Y(1) = \{2, 3\}$ ← в м. B 1строке ищем max эл-ты и записываем их номера

$Y(2) = \{1, 5, 6\}$

$Y(3) = \{2, 6\}$

$Y(4) = \{6\}$

$Y(5) = \{1, 5\}$

$W(1) = \min_{j \in Y(1)} a_{1j} = \min\{\overset{=2}{a_{12}}, \overset{=2}{a_{13}}\} = 2$

$W(2) = 0$

$W(3) = 1$

$W(4) = 1$

$W(5) = 0$

$\Downarrow$ $F_1 = \max_{1 \le i \le 5} W(i) = 2 \Rightarrow \underline{i^0 = 1}$ – оптим. страт.

$\underline{F_1 = 2}$ – наил. гарант. рез.

Вариант 22

Задача 2

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{5} & \cancel{9} & \cancel{2} \\ \cancel{6} & 3 & 2 & 6 \\ \cancel{4} & 6 & 9 & 3 \\ \cancel{7} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{6} \end{pmatrix}$$

Найдите решение в смеш. стратегиях

Строка дом-ется из вып. лин. комб. ост. =>
=> ее можно вычеркнуть

Столбец дом-ет из вып. лин. комб. ост. =>
=> его можно вычеркнуть

---

1) 1 строка ≤ 3 строка => вычеркив. 1 строку
2) [рассм. оставшуюся матрицу, нумерацию сохраним]
   1 столбец ≥ 4 столбец => вычерк. 1 столбец
3) [...] 4 строка ≤ 2 строка => вычерк. 4 строку

Теперь рассм. матрицу:

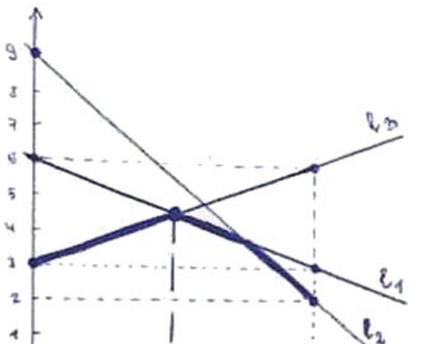
$$\hat{A} = \begin{array}{c} \hat{p}_1 \\ 1-\hat{p}_1 \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Рассм. прямые $l_j(\hat{p}_1) = \hat{a}_{1j} \cdot \hat{p}_1 + \hat{a}_{2j} \cdot (1-\hat{p}_1)$ =>

$l_1(\hat{p}_1) = 3\hat{p}_1 + 6(1-\hat{p}_1) = -3\hat{p}_1 + 6$

$l_2(\hat{p}_1) = 2\hat{p}_1 + 9(1-\hat{p}_1) = -7\hat{p}_1 + 9$

$l_3(\hat{p}_1) = 6\hat{p}_1 + 3(1-\hat{p}_1) = 3\hat{p}_1 + 3$



Строим нижнюю огибающую (—)

Находим ее точку max:

$\hat{p}_1^0 = l_1 \cap l_3$

$$-3\hat{p}_1 + 6 = 3\hat{p}_1 + 3$$

$$\Downarrow \quad 6\hat{p}_1 = 3$$

$$\Downarrow \quad \hat{p}_1^0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{p}^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$ ← это для м. $\hat{A}$.

Находим $\hat{q}^0$:

$$k_{j_1}\hat{q}^* + k_{j_2}(1-\hat{q}^*) = 0$$

$$\hat{p}_1^0 = l_1 \cap l_3 \Rightarrow \begin{cases} j_1 = 1 \Rightarrow k_{j_1} = -3 \\ j_2 = 3 \Rightarrow k_{j_2} = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\hat{q}^* + 3(1-\hat{q}^*) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\hat{q}^* = 3 \Rightarrow \hat{q}^* = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{q}^0 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

Тогда: $\boxed{p^0} = (0, \hat{p}_1^0, \hat{p}_2^0, 0) = \underline{\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)}$,

$\boxed{q^0} = (0, \hat{q}_1^0, \hat{q}_2^0, \hat{q}_3^0) = \underline{\left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)}$.

$$\boxed{v} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p_i^0 a_{ij} q_j^0 = \sum_{i=1}^{4}\left(p_i^0 a_{i2}\cdot\frac{1}{2} + p_i^0 a_{i4}\cdot\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}a_{22} + \frac{1}{2}a_{24} + \frac{1}{4}a_{32} + \frac{1}{4}a_{34} =$$

$$= \frac{1}{4}(3+6+6+3) = \boxed{\frac{9}{2}}$$

Вариант 22

Задача 3

Найдите минимакс и минимаксную стратегию игры на прямоугольнике:

$$F(x,y) = 3x^2 - 6xy - y^2 - 2x + y$$

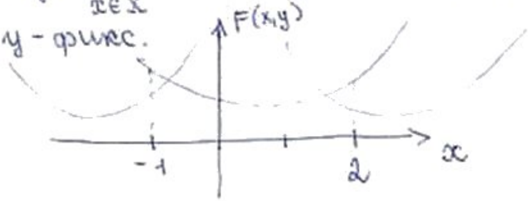
$$X = [-1, 2], \quad Y = [-1, 1]$$

$$\bar{v} = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x,y)$$

$y^0 \in Y$ – минимакс. стратегия, если $\sup\limits_{x \in X} F(x, y^0) = \bar{v}$

$$M(y) = \sup_{x \in X} F(x \quad , y) = F(x(y), y)$$

y – фикс.



$$M(y) = \max\{F(-1,y); F(2,y)\} =$$

$$= \max\{-y^2+7y+5; -y^2-11y+8\}$$

$$-y^2+7y+5 \leq -y^2-11y+8$$

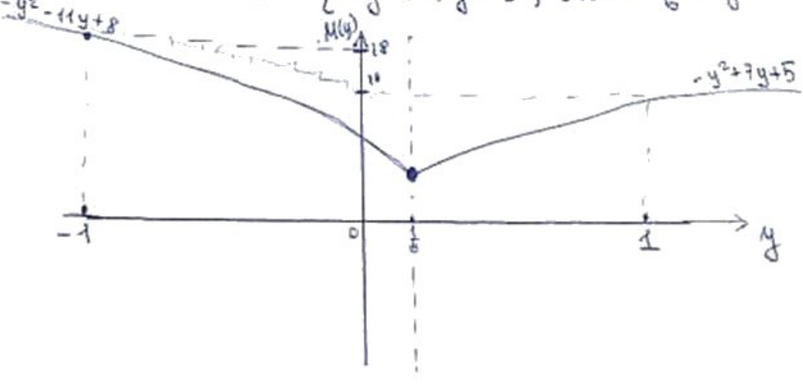
$\Updownarrow$

$$18y < 3$$

$\Updownarrow$

$$y < \frac{1}{6}$$

Значит, $M(y) = \begin{cases} -y^2-11y+8, & \text{если } -1 \leq y < \frac{1}{6} \\ -y^2+7y+5, & \text{если } \frac{1}{6} \leq y < 1 \end{cases}$



в т. $y=-1$: $-y^2-11y+8=-1+11+8=18$

в т. $y=1$: $-y^2+7y+5=-1+7+5=11$

вершина $-y^2-11y+8$: $-\frac{-11}{2\cdot(-1)}=-\frac{11}{2}=-5.5$

вершина $-y^2+7y+5$: $-\frac{7}{2\cdot(-1)}=\frac{7}{2}=3.5$

в т. $y=\frac{1}{6}$: $-\frac{1}{36}+\frac{7^{\backslash 6}}{6}+5=5+\frac{41}{36}=\frac{180+41}{36}=\frac{221}{36}=6\frac{5}{36}$

$M(y)$ на $[-1,1]$ достиг. min в т. $y^0=\frac{1}{6}$ =>

=> $\boxed{y^0=\frac{1}{6}}$ - минимакс. стратегия

$\boxed{\overline{v}=6\frac{5}{36}}$ - минимакс

Вариант 23

Задача 1

Найдите все равновесия по Шт.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Равнов. по Шт.: (i^0, j^0): $w'(i^0) = \max\limits_{1 \le i \le 5} w'(i) = F'$

$$w'(i) = \max_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$$Y(i) = \operatorname{Arg}\max_{1 \le j \le 6} b_{ij}$$

$i = 1 \Rightarrow Y(1) = \{1, 3\} \leftarrow b_{11}, b_{13}$

$i = 2 \Rightarrow Y(2) = \{4\} \leftarrow b_{24}$

$i = 3 \Rightarrow Y(3) = \{6\} \leftarrow b_{36}$

$i = 4 \Rightarrow Y(4) = \{1\} \leftarrow b_{41}$

$i = 5 \Rightarrow Y(5) = \{1, 4, 6\} \leftarrow b_{51}, b_{54}, b_{56}$

$$w'(1) = \max_{j \in \{1,3\}} a_{1j} = \max\{1, 4\} = 4$$

$w'(2) = 0 \quad (= a_{24})$

$w'(3) = 0 \quad (= a_{36})$

$w'(4) = 1 \quad (= a_{41})$

$$w'(5) = \max\{\underset{a_{51}}{\underset{\shortparallel}{1}}, \underset{a_{54}}{\underset{\shortparallel}{2}}, \underset{a_{56}}{\underset{\shortparallel}{1}}\} = 2$$

$\Downarrow$

$$w'(i^0) = \max\{4, 0, 0, 1, 2\} = 4$$

$\Downarrow$

равнов. по Шт.: $(i^0, j^0) = (1, 3)$

Вариант 23

Задача 2

Найдите решение в смешанных стратегиях матричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

---

a доминирует b, если $a_i \geq b_i$

Строка дом-ется нек вып. лин. комбинацией ост., то ее можно вычеркнуть

Столбец дом-ет нек вып. лин. комбинацией ост., то его можно вычеркнуть.

Считаю, что здесь надо найти хотя бы 1 оп- тим. смеш. стратегию.
(Может, надо все?)

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{4} & \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{3} \\ \cancel{5} & \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{3} \\ \cancel{5} & 1 & 5 & \cancel{1} \\ \cancel{4} & 5 & 3 & \cancel{5} \end{pmatrix}$$

1) 1 строка дом-ся (<) $\frac{1}{2}$ (2 стр.) + $\frac{1}{2}$ (4 стр.) =>
=> вычерк. 1 строку

2) [теперь рассм. оставшуюся матрицу, но нумерацию для удобства сохраним прежнюю]
1 столбец дом-ет (≥) 3 столбец =>
=> вычерк. 1 столбец

3) [...] 4 столбец дом-ет (≥) 2 столбец (например, так) =>
=> вычерк. 4 столбец

4) [...] 2 строка дом-ся (≤) $\frac{1}{2}$ (3 стр.) + $\frac{1}{2}$ (4 стр.) =>
=> вычерк. 2 строку

$\Downarrow$

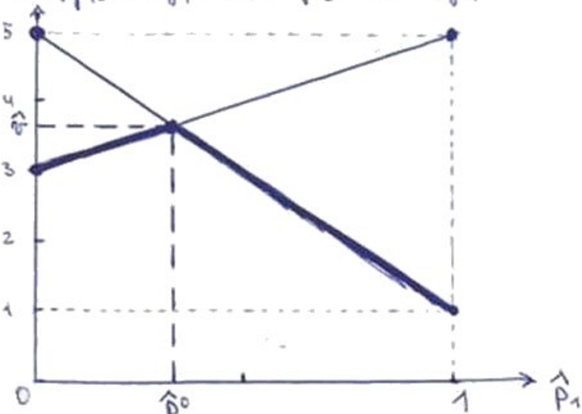
Теперь рассм. матрицу $\hat{A} = \begin{array}{c|cc} & q^* & 1-q^* \\ \hline p_1 & 1 & 5 \\ 1-p_1 & 5 & 3 \end{array}$

$$\hat{v} = \max_{0 \le p \le 1} \min_{1 \le j \le 2} \left[\hat{a}_{1j}\hat{p}_1 + \hat{a}_{2j}(1-\hat{p}_1)\right]$$

Рассм. прямые $l_j(\hat{p}_1) = \hat{a}_{1j}\hat{p}_1 + \hat{a}_{2j}(1-\hat{p}_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow l_1(\hat{p}_1) = \hat{p}_1 + 5(1-\hat{p}_1) = 5 - 4\hat{p}_1$

$l_2(\hat{p}_1) = 5\hat{p}_1 + 3(1-\hat{p}_1) = 3 + 2\hat{p}_1$



Строим нижнюю огибающую (см. рис. - „▬“) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ находим её точку max:

$5 - 4\hat{p}_1 = 3 + 2\hat{p}_1$

$6\hat{p}_1 = 2 \Rightarrow \hat{p}_1^0 = \frac{1}{3} \Rightarrow \hat{p}^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

← это для м. $\hat{A}$

Находим $\hat{q}^0$:

$k_{j_1}\hat{q}^* + k_{j_2}(1-\hat{q}^*) = 0$

$\hat{p}_1^0 = l_1 \cap l_2 \Rightarrow \begin{cases} j_1 = 1 \Rightarrow k_{j_1} = -4 \\ j_2 = 2 \Rightarrow k_{j_2} = 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow -4\hat{q}^* + 2(1-\hat{q}^*) = 0 \Rightarrow 6\hat{q}^* = 2 \Rightarrow \hat{q}^* = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{q}^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ← это для м. $\hat{A}$

Тогда: $\underline{p^0} = (0, 0, \hat{p}_1^0, \hat{p}_2^0) = \underbrace{\left(0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}$ ← это уже

$\underline{q^0} = (0, \hat{q}_1^0, \hat{q}_2^0, 0) = \underbrace{\left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)}$ ↙ для м. A

$v = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p_i^0 a_{ij} q_j^0 = \sum_{i=1}^{4}\left(p_i^0 a_{i2}\cdot\frac{1}{3} + p_i^0 a_{i3}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}a_{32} + \frac{2}{9}a_{33} + \frac{2}{9}a_{42} + \frac{4}{9}a$ =

$= \frac{1}{9}\cdot 1 + \frac{2}{9}\cdot 5 + \frac{2}{9}\cdot 5 + \frac{4}{9}\cdot 3 = \frac{1}{9} + \frac{10}{9} + \frac{10}{9} + \frac{12}{9} = \frac{33}{9} = \frac{11}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{v = \frac{11}{3}}$

Вариант 23

Задание 3

Используя соображения доминирования, найдите ситуации равновесия в смешанных стратегиях:

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{5} \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 1 & 7 & 7 \\ \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{5} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{4} & \cancel{3} \\ 7 & 3 & 3 & 6 \\ 3 & 7 & 7 & 3 \\ \cancel{6} & \cancel{6} & \cancel{5} & \cancel{6} \end{pmatrix}$$

Если в <u>А</u> <u>строка</u> строго дом-ется$^{(<)}$ выпукл. лин. комбинацией остальных, то она входит с нулевой вер. в $\forall$ оптим. смеш. страт. 1ого игрока (т.е. ее можно вычеркнуть)

Если в <u>В</u> <u>столбец</u> строго дом-ется$^{(<)}$ вып. лин. комб. ост., то он входит с 0 вер. в $\forall$ опт. смеш. страт. 2ого игр. (т.е. его можно вычеркнуть)

---

1) в А: 1 строка $< \frac{1}{2}$ (2 стр.) $+ \frac{1}{2}$ (3 стр.) =>
(3 2 5 5) (4 2.5 6.5 6.5)
=> вычеркив. 1 строку и в А, и в В

2) в А: 4 строка $< \frac{1}{2}$ (2 стр.) $+ \frac{1}{2}$ (3 стр.) =>
=> вычеркив. 4 строку и в А, и в В.

← здесь не теряем сит. равнов.
[при нестрогом доминировании можно вычеркнуть еще 3 и 4 столбцы, но попробуем так]
[или 2 и 4 стол.]?

Теперь рассм. такие матрицы:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{array}{c} \hat{p}_1 \\ 1-\hat{p}_1 \end{array} \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 & 6 \\ 3 & 7 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Строим прямые $l_j(\hat{p}_1) = \hat{p}_1 \cdot \hat{b}_{1j} + (1-\hat{p}_1) \cdot \hat{b}_{2j}$:

$l_1(\hat{p}_1) = 7\hat{p}_1 + 3(1-\hat{p}_1) = 4\hat{p}_1 + 3$

$l_2(\hat{p}_1) = 3\hat{p}_1 + 7(1-\hat{p}_1) = -4\hat{p}_1 + 7$

$l_3(\hat{p}_1) = 3\hat{p}_1 + 7(1-\hat{p}_1) = -4\hat{p}_1 + 7$

$l_4(\hat{p}_1) = 6\hat{p}_1 + 3(1-\hat{p}_1) = 3\hat{p}_1 + 3$

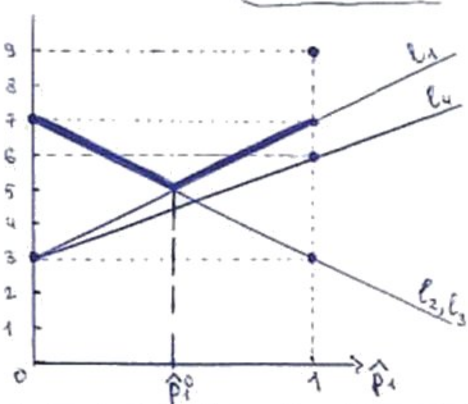
Рассм. верхнюю огибающую и точки излома (▬)

<u>2</u> т. излома $\hat{p}_1^i = l_1 \cap l_2,\ l_1 \cap l_3$
($l_2 = l_3$ же)

Найдем $\hat{p}_1^i$:

$4\hat{p}_1 + 3 = -4\hat{p}_1 + 7$ =>

=> $8\hat{p}_1 - 4$ => $\hat{p}_1^0 = \frac{1}{2}$ => $\underbrace{\hat{p}^0}_{\text{это для м. } \hat{A}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$



$$\hat{A} = \left(\begin{array}{cccc} \hat{q}^* & 1-\hat{q}^* & 0 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{4} & 6 & 6 \\ \boxed{6} & \boxed{1} & 7 & 7 \end{array}\right)$$

$\underline{l_1 \cap l_2}$ => рассм. 1 и 2 столбцы

по строкам:

$$\begin{cases} 2\hat{q}^* + 4(1-\hat{q}^*) = \hat{v}_1 \\ 6\hat{q}^* + 1 - \hat{q}^* = \hat{v}_1 \end{cases} \Rightarrow 2\hat{q}^* + 4(1-\hat{q}^*) = 6\hat{q}^* + 1 - \hat{q}^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\hat{q}^* + 4 = 5q^* + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7\hat{q}^* = 3 \Rightarrow \hat{q}^* = \frac{3}{7} \Rightarrow \hat{q}^0 = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0, 0\right) = q^0$$

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{cccc} \hat{q}^* & 0 & 1-\hat{q}^* & 0 \\ \boxed{2} & 4 & \boxed{6} & 6 \\ \boxed{6} & 1 & \boxed{7} & 7 \end{array}\right)$$

$\underline{l_1 \cap l_3}$ => рассм. 1 и 3 столбцы

по строкам:

$$\begin{cases} 2\hat{q}^* + 6(1-\hat{q}^*) = \hat{v}_1 \\ 6\hat{q}^* + 7(1-\hat{q}^*) = \hat{v}_1 \end{cases} \Rightarrow 2\hat{q}^* + 6(1-\hat{q}^*) = 6\hat{q}^* + 7(1-\hat{q}^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4\hat{q}^* + 6 = -\hat{q}^* + 7 \Rightarrow 3q^* = -1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \hat{q}^* < 0 \Rightarrow$ это точка не подходит

[т.е. если бы мы вычеркнули еще 2 и 4 столбцы, то не нашли бы ситуацию равновесия ?!]

$$\boxed{p^0} = (0, \hat{p}^0_1, \hat{p}^0_2, 0) = \underbrace{\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)},$$

$$\boxed{q^0} = \underbrace{\left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0, 0\right)}$$

$\underline{\text{с.р.}}$

[этот алгоритм вообще-то не находит $\underline{\text{все}}$ с.р., но требуют ли этого в этом задании?]

Вариант 24

Задача 1

Найдите нижнее и верхнее значение игры, все максиминные и минимаксные стратегии, а также все седловые точки (если ∃) матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 6 & 9 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 9 & 0 & 8 & 1 & 9 & 2 & 7 \\ 5 & 0 & 8 & 0 & 8 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 9 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$W(i) = \min\limits_{1 \le j \le 7} a_{ij} \Rightarrow W(i) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\underline{v}} = \max\limits_{1 \le i \le 5} W(i) = \boxed{4} \Rightarrow$

нижн. знач. игры

$\Rightarrow \boxed{X^\circ = \{1\}}$ ← максимин. страт.: $x^\circ = 1$

где достиг. $\max W(i)$

$M(j) = \max\limits_{1 \le i \le 5} a_{ij} \Rightarrow M(j) = (9\ 5\ 8\ 9\ 9\ 6\ 7) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\overline{v}} = \min\limits_{1 \le j \le 7} M(j) = \boxed{5}$ ← верхн. знач. игры $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{Y^\circ = \{2\}}$ ← минимакс. страт.: $y^\circ = 2$

$\underline{v} = 4 < \overline{v} = 5 \Rightarrow$ нет седловых точек

Вариант 24

Задача 2

Найдите все ситуации равновесия игры на прямоугольнике:

$F(x,y) = -x^2 + 2xy - 3y^2 - x - y$

$G(x,y) = -x^2 - 4xy - 3y^2 + 2x - y$

$X = [-1, 2]$, $Y = [-1, 1]$

$F'_x = -2x + 2y - 1 \Rightarrow F''_{xx} = -2 < 0 \Rightarrow F$ - строго вогн. по x

$G'_y = -4x - 6y - 1 \Rightarrow G''_{yy} = -6 < 0 \Rightarrow G$ - строго вогн. по y $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ с.р.

F, G - строго вогн. $\Rightarrow$ мн-ва наил. ответов состоят из един. эл-та

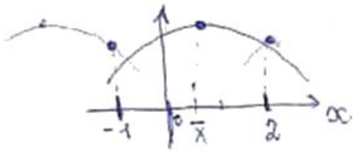
$\Downarrow$

$$\begin{cases} x(y): \max\limits_{-1 \le x \le 2} F(x,y) = F(x(y), y) \\ y(x): \max\limits_{-1 \le y \le 1} G(x,y) = G(x, y(x)) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x(y) = x \\ y(x) = y \end{cases} \Rightarrow (x^\circ, y^\circ) - \text{с.р.}$$

Построим $x(y)$:



F - вогн. по x $\Rightarrow$

$\Rightarrow F'_x = -2x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow \bar{x} = y - \frac{1}{2}$

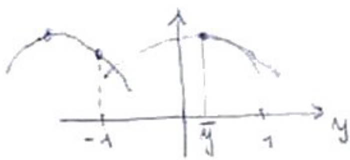
$\bar{x} \in [-1, 2] \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 \le y - \frac{1}{2} \le 2 \Rightarrow -\frac{1}{2} \le y \le \frac{5}{2}$ 1

Ф-ия наил. ответа для 1-го игрока:

$$x(y) = \begin{cases} -1, \text{ если } -1 \le y < -\frac{1}{2} \quad (\text{т.е. } \bar{x} < -1) \\ y - \frac{1}{2}, \text{ если } -\frac{1}{2} \le y \le 1 \quad (\text{т.е. } -1 \le \bar{x} \le 2) \end{cases}$$

Построим $y(x)$:



G - вогнут. по y $\Rightarrow$

$\Rightarrow G'_y = -4x - 6y - 1 = 0 \Rightarrow \bar{y} = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$

$\bar{y} \in [-1, 1] \Rightarrow -1 \le -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6} \le 1 \Rightarrow$

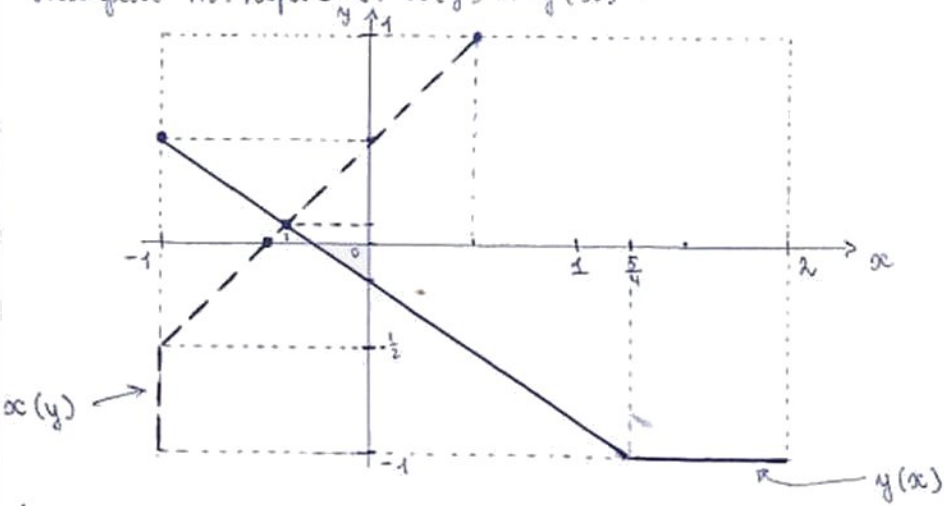
$\Rightarrow -\frac{5}{6} \le -\frac{1}{3}x \le \frac{7}{6} \Rightarrow \underbrace{-\frac{7}{4}}_{<-1} \le x \le \frac{5}{4}$

$\overline{y} < -1 \Rightarrow -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6} < -1 \Rightarrow -\frac{2}{3}x < -\frac{5}{6} \Rightarrow x > \frac{5}{4}$

Ф-ия наил. ответа для 2ого игрока:

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}, \text{ если } -1 \le x \le \frac{5}{4} \\ -1, \text{ если } \frac{5}{4} < x \le 2 \end{cases}$$

Найдем т. пересеч. $x(y)$ и $y(x)$:



$$\left(\begin{aligned} y(-1) &= \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ y\left(\frac{5}{4}\right) &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} - \frac{1}{6} = -\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = -1 \end{aligned} \right)$$

т. пересеч.:

$$\begin{cases} y - \frac{1}{2} = x \\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = \frac{1}{10} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\underbrace{(x^0, y^0)} = \left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{10}\right)$ – ситуация равновесия

Вариант 24

Задача 3

Решите игру Γ_2 для биматричной игры Γ:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G_2 = \max_{1 \le j \le 5} \min_{1 \le i \le 5} b_{ij}$$

$$\min_{1 \le i \le 5} b_{ij} = (0\ 0\ 0\ 0\ 0) \Rightarrow G_2 = 0 \Rightarrow E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$\mathcal{D} = \{(i,j) \mid b_{ij} > \underbrace{G_2}_{=0}\} \rightarrow$ см. м. B – мн-во $\mathcal{D}$ обведено

$$\boxed{K} = \max_{(i,j) \in \mathcal{D}} a_{ij} = \boxed{6}$$

(обведем мн-во в м. A, соотв. $(i,j) \in \mathcal{D}$

$$M = \min_{j \in E} \max_{1 \le i \le 5} a_{ij} = \min_{1 \le j \le 5} \max_{1 \le i \le 5} a_{ij}$$

$$\max_{1 \le i \le 5} a_{ij} = (5\ 4\ 6\ 6\ 6) \Rightarrow \boxed{M = 4}$$

$$4 = M < K = 6$$

$$\left[\begin{array}{l} f^{\varepsilon}(y) = \begin{cases} x^{\varepsilon}, & \text{если } y = y^{\varepsilon} \leftarrow \text{т.е. } G(x^{\varepsilon}, y^{\varepsilon}) > G_2 \\ f^{M}(y), & \text{если } y \ne y^{\varepsilon} \leftarrow \text{т.е. } G(f^{M}(y), y) \le G_2 \end{cases} \\ (x^{\varepsilon}, y^{\varepsilon}) \in \mathcal{D} \end{array}\right.$$

наил. гарант. выигр. 1ого игрока:

$$F_2 = \max[K, M] = 6$$

Пусть, F_2 реализуется в a_{13}

$$f^{\varepsilon}(j) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = 3 \\ 4, & \text{если } j = 1 \\ 3, & \text{если } j = 2 \\ 1, & \text{если } j = 4 \\ 2, & \text{если } j = 5 \end{cases}$$

номер i наим. эл-та в соотв. столбце м. B

???

Вариант 36

Задача 1

Найдите нижнее и верхнее значение игры, все максиминные и минимаксные стратегии, а также все седловые точки (если ∃) матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 8 & 1 & 8 & 8 & 3 \\ 4 & 9 & 9 & 5 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 9 & 7 & 4 & 8 & 9 & 9 \\ 8 & 9 & 2 & 6 & 5 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$W(i) = \min_{1 \le j \le 7} a_{ij} \Rightarrow W(i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\underline{v}} = \max\limits_{1 \le i \le 5} W(i) = \boxed{4}$ – нижн. знач. игры $\Rightarrow$

$\Rightarrow X^0 = \{4\} \Rightarrow \boxed{x^0 = 4}$ – максимин. стратегия

где достиг. $\max W(i)$

$M(j) = \max\limits_{1 \le i \le 5} a_{ij} \Rightarrow M(j) = (9\ 9\ 9\ 7\ 8\ 9\ 9)$

$\boxed{\overline{v}} = \min\limits_{1 \le j \le 7} M(j) = \boxed{7}$ – верхн. знач. игры $\Rightarrow$

$\Rightarrow Y^0 = \{4\} \Rightarrow \boxed{y^0 = 4}$ – минимакс. стратегия

$\underline{v} = 4 < 7 = \overline{v} \Rightarrow$ нет седловых точек

Вариант 36

Задача 3

Решите игру Γ_2 для биматричной игры Γ:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 7 & 4 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 8 & 0 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 7 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G_2 = \max_{1 \le j \le 5} \min_{1 \le i \le 5} b_{ij}$$

$$\min_{1 \le i \le 5} b_{ij} = (0\ 0\ 1\ 0\ 0) \Rightarrow G_2 = 1 \Rightarrow E = \{3\}$$

$D = \{(i,j) \mid b_{ij} > \underset{=1}{G_2}\}$ → см. м. B – мн-во D обведено

обведем мн-во в м. A, соотв. $(i,j) \in D \Rightarrow$

$$K = \max_{(i,j) \in D} a_{ij} = 8$$

$$M = \min_{j \in E} \max_{1 \le i \le 5} a_{ij} = \max_{1 \le i \le 5} a_{i3} = 7$$

$$7 = M < K = 8$$

$$\left[\begin{array}{l} f^{\varepsilon}(y) = \begin{cases} x^{\varepsilon}, \text{ если } y = y^{\varepsilon} \leftarrow \text{т.е. } G(x^{\varepsilon}, y^{\varepsilon}) > G_2 \\ f^{н}(y), \text{ если } y \ne y^{\varepsilon} \leftarrow \text{т.е. } G(f^{н}(y), y) \le G_2 \end{cases} \\ (x^{\varepsilon}, y^{\varepsilon}) \in D \end{array} \right.$$

Наил. гарант. выигрыш 1ого игрока:

$$F_2 = \max[K, M] = 8$$

Пусть, F_2 реализ. в a_{32}

$$f^{\varepsilon}(j) = \begin{cases} 3, \text{ если } j = 2 \\ 1, \text{ если } j = 1 \\ 5, \text{ если } j = 3 \\ 2, \text{ если } j = 4 \\ 4, \text{ если } j = 5 \end{cases}$$

номер i наим. эл-та в соотв. столбце матрицы B

Вариант 36

Задача 2

Найдите все ситуации равновесия игры на прямоугольнике:

$F(x,y) = -3x^2 + 3xy - 2y^2 + 2x$

$G(x,y) = -2x^2 - 5xy - 3y^2 - y$

$X = [-1,1]$, $Y = [-1,1]$

$F'_x = -6x + 3y + 2 \Rightarrow F''_{xx} = -6 < 0 \Rightarrow F$ - строго вогн. по x $\Big\}$ $\Rightarrow$

$G'_y = -5x - 6y - 1 \Rightarrow G''_{yy} = -6 < 0 \Rightarrow G$ - строго вогн. по y

$\Rightarrow \exists$ с.р.

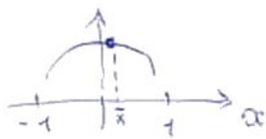
F, G - строго вогн. $\Rightarrow$ мн-ва наил. ответов состоят из един. эл-тов $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(y): \max\limits_{-1\le x\le 1} F(x,y) = F(x(y), y) \\ y(x): \max\limits_{-1\le y\le 1} G(x,y) = G(x, y(x)) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(y) = x \\ y(x) = y \end{cases} \Rightarrow (x^0, y^0) - \text{с.р.}$$

Построим $x(y)$:

F - вогн. по x $\Rightarrow$



$\Rightarrow F'_x = -6x + 3y + 2 = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}$

$\bar{x} \in [-1,1] \Rightarrow -1 \le \frac{1}{2}y + \frac{1}{3} \le 1 \Rightarrow$

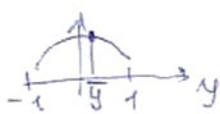
$\Rightarrow -\frac{4}{3} \le \frac{1}{2}y \le \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{8}{3} \le y \le \frac{4}{3}$

$y \in [-1,1] \Rightarrow$ ф-ия наил. ответов 1-ого игрока:

$$x(y) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}$$

Построим $y(x)$:

G - вогн. по y $\Rightarrow$



$\Rightarrow G'_y = -5x - 6y - 1 = 0 \Rightarrow \bar{y} = -\frac{5x+1}{6}$

$\bar{y} \in [-1,1] \Rightarrow -1 \le -\frac{5x+1}{6} \le 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -6 \le -5x-1 \le 6 \Rightarrow -5 \le -5x \le 7 \Rightarrow -\frac{7}{5} \le x \le 1$

$x \in [-1, 1] \Rightarrow$ ф-ие наил. ответов 2ого игрока:

$$\underbrace{y(x)} = -\frac{5x+1}{6}$$

Найдем т. пересеч. $x(y)$ и $y(x)$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{3} = x \\ -\frac{5x+1}{6} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{5x+1}{6} \\ 3\cdot\left(-\frac{5x+1}{6_2}\right) + 2 = 6x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{5x+1}{6} \\ -5x-1+4 = 12x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{17} \\ y = -\frac{1}{6}\left(\frac{15}{17}+1\right) = -\frac{32^{16}}{17\cdot 6_3} = -\frac{16}{51} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(x^0, y^0) = \left(\frac{3}{17}, -\frac{16}{51}\right)}$$ – ситуация равновесия

Вариант 38

Задача 1

Найдите наилучший гарантированный результат F_1 и все оптимальные стратегии 1-го игрока иерархической игры Γ_1 для биматричной игры Γ:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \max_{1 \le i \le 5} \min_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$$Y(i) = \operatorname{Arg} \max_{1 \le j \le 6} b_{ij}$$

$$W(i) = \min_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$$\left[\begin{array}{l} Y(1) = \{6\} \leftarrow b_{16} = 4 \\ Y(2) = \{2\} \leftarrow b_{22} = 4 \\ Y(3) = \{1, 2, 4, 6\} \leftarrow b_{31} = b_{32} = b_{34} = b_{36} = 4 \\ Y(4) = \{3\} \leftarrow b_{43} = 3 \\ Y(5) = \{2\} \leftarrow b_{52} = 4 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} W(1) = a_{16} = 2 \\ W(2) = a_{22} = 0 \\ W(3) = \min\{\underset{1}{\underset{\shortparallel}{a_{31}}}, \underset{0}{\underset{\shortparallel}{a_{32}}}, \underset{2}{\underset{\shortparallel}{a_{34}}}, \underset{2}{\underset{\shortparallel}{a_{36}}}\} = 0 \\ W(4) = a_{43} = 1 \\ W(5) = a_{52} = 4 \end{array}\right.$$

$$F_1 = \max_{1 \le i \le 5} W(i) = 4 \Rightarrow \boxed{i^0 = 5}$$ – оптим. стратегия

$\boxed{F_1 = 4}$ – наил. гарант. выигрыш 1-го игрока

Вариант 38

Задача 3

Найдите минимакс и минимаксную стратегию игры на прямоугольнике:

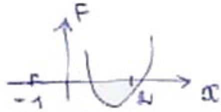
$$F(x,y) = 3x^2 + 5xy - y^2 - 2x - y$$

$$X = [-1, 2], \quad Y = [-2, 1]$$

$$\overline{v} = \inf_{-2 \le y \le 1} \sup_{-1 \le x \le 2} F(x,y)$$

$$M(y) = \sup_{-1 \le x \le 2} F(x,y) = F(x(y), y)$$

Найдем $M(y)$:



$$F(x,y) = 3x^2 + (5y-2)\cdot x + (-y^2 - y)$$

$\Rightarrow$ максимум достиг. при $x = -1$ или $x = 2$

$$M(y) = \max\{F(-1,y), F(2,y)\} =$$

$$= \max\{-y^2 - 6y + 5, -y^2 + 9y + 8\}$$

$$-y^2 - 6y + 5 < -y^2 + 9y + 8 \Rightarrow$$

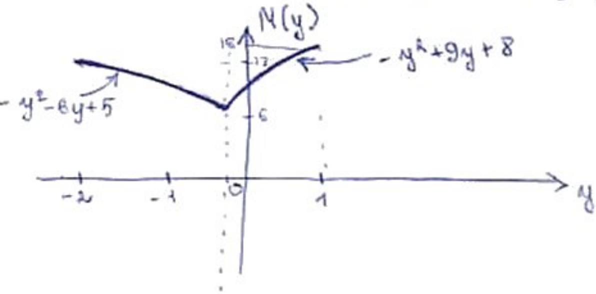
$$\Rightarrow 15y > -3 \Rightarrow y > -\frac{1}{5}$$

$$M(y) = \begin{cases} -y^2 - 6y + 5, & \text{если } -2 \le y \le -\frac{1}{5} \\ -y^2 + 9y + 8, & \text{если } -\frac{1}{5} < y < 1 \end{cases}$$

$-(-2)^2 - 6\cdot(-2) + 5 = -4 + 12 + 5 = 13$, $\quad -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2\cdot(-1)} = -3$

$-(+1)^2 + 9 + 8 = 9 + 8 - 1 = 16$, $\quad -\frac{b}{2a} = -\frac{9}{2\cdot(-1)} = 4{,}5$

$-\left(-\frac{1}{5}\right)^2 - 6\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) + 5 = -\frac{1}{25} + \frac{6}{5} + 5 = 6 + \frac{1}{5} - \frac{1}{25} = 6\frac{4}{25}$



Минимум $M(y)$ достиг. в т. $y = -\frac{1}{5}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y^0 = -\frac{1}{5}}$ – минимакс. стратегия

$\boxed{M\left(-\frac{1}{5}\right) = 6\frac{4}{25}}$ – минимакс

Вариант 38

Задача 2

Найдите решение в смешанных стратегиях матричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & \cancel{5} \\ 2 & 1 & 4 & \cancel{2} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{1} \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{3} & \cancel{4} \end{pmatrix}$$

Строка дом-ется из вып. лин. комб. => ее можно вычерк.
Столбец дом-ет из вып. лин. комб. => его можно вычерк.

---

1) 3 стр. $\leq$ 2 стр. => вычерк. 3 строку
2) 4 стр. $\leq$ 1 стр. => вычерк. 4 строку
3) 4 столб. $\geq$ 1 столб. => вычерк. 4 столбец

Теперь рассм. матрицу:

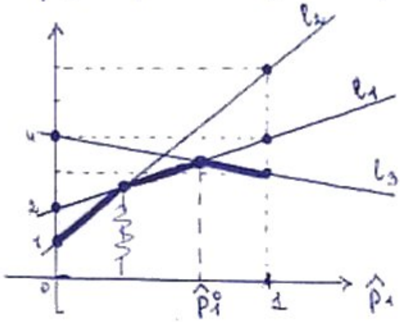
$$\hat{A} = \begin{array}{c} \hat{p}_1 \\ 1-\hat{p}_1 \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Рассм. прямые $l_j(\hat{p}_1) = \hat{a}_{1j} \cdot \hat{p}_1 + \hat{a}_{2j} \cdot (1-\hat{p}_1)$:

$l_1(\hat{p}_1) = 4\hat{p}_1 + 2(1-\hat{p}_1) = 2\hat{p}_1 + 2$

$l_2(\hat{p}_1) = 6\hat{p}_1 + 1 - \hat{p}_1 = 5\hat{p}_1 + 1$

$l_3(\hat{p}_1) = 3\hat{p}_1 + 4(1-\hat{p}_1) = -\hat{p}_1 + 4$



Строим нижнюю огибающую. Наход. ее max:

$\underline{\hat{p}_1^0 = l_1 \cap l_3}$ =>

=> $2\hat{p}_1 + 2 = -\hat{p}_1 + 4$ => $3\hat{p}_1 = 2$

=> $\hat{p}_1^0 = \frac{2}{3}$ => $\underline{\hat{p}^0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)}$

Находим $\hat{q}^{\circ}$:

$$k_{j_1}\hat{q}^* + k_{j_2}\cdot(1-\hat{q}^*) = 0$$

$$\hat{p}_1^{\circ} = \underline{l_1 \cap l_3} \Rightarrow \begin{cases} j_1 = 1 \Rightarrow k_{j_1} = 2 \\ j_2 = 3 \Rightarrow k_{j_2} = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\hat{q}^* - (1-\hat{q}^*) = 0 \Rightarrow 3\hat{q}^* = 1 \Rightarrow \hat{q}^* = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\hat{q}^{\circ} = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)}$$

Тогда, $\boxed{p^{\circ}} = \underbrace{\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right)} = (\hat{p}_1^{\circ}, \hat{p}_2^{\circ}, 0, 0)$

$$\boxed{q^{\circ}} = \underbrace{\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0\right)} = (\hat{q}_1^{\circ}, \hat{q}_2^{\circ}, \hat{q}_3^{\circ}, 0)$$

$$\boxed{v} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p_i^{\circ}\cdot a_{ij}\cdot q_j^{\circ} = \sum_{i=1}^{4}\left(p_i^{\circ}\cdot a_{i1}\cdot\frac{1}{3} + p_i^{\circ}\cdot a_{i3}\cdot\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot a_{11} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot a_{13} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot a_{21} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot a_{23} =$$

$$= \frac{2}{9}\cdot 4 + \frac{4}{9}\cdot 3 + \frac{1}{9}\cdot 2 + \frac{2}{9}\cdot 4 =$$

$$= \frac{1}{9}(8+12+2+8) = \frac{30}{9} = \frac{10}{3} = \boxed{3\frac{1}{3}}$$

Ответ: $p^{\circ} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right)$

$q^{\circ} = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0\right)$

$v = 3\frac{1}{3}$