Теория игр.

§1. Введение.

3.09.2007

1. Антагонистич. игры
   (з-чи с неопр-тью)
2. Неантагонистич.
   2 игрока, стремящиеся
   оптимизир. прибыль
3. Многокритер. задачи

Лит-ра: Владимир Викторович

1. А.А Васин, В.В. Морозов
   "Теория игр и модели мат
   экономики
   М. Макс Пресс. 2005"
   648 13-17

   Вера Васильевна

2. В.В. Морозов А.Г Сухарев
   В.В. Федоров
   "Исследование операций в
   з-чах и упражнениях М.: ВШ 1986

! Будет к/р в середине ноября !

Глава I Антагонистические игры

§2 Седловые точки и решения антагонистич. игр.

$F(x,y)$ $x \in X, y \in Y$ $X \times Y$ - мн-ва стратегий

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

2

<u>Опр</u> $(x^0, y^0) \in X \times Y$ наз. седловой точкой ф-ции F на $X \times Y$, если
$$F(x, y^0) \le F(x^0 y^0) \le F(x^0, y) \quad \forall x \in X,\ y \in Y \quad (1)$$

Игра: два игрока 1 и 2
стратегия 1 ← 1, 2 → стратегия 2

Выборы стратегий и/з (нормальная форма игры)
$F(x, y)$ - ф-я выигрыша 1ого игрока:
1ый игрок ее максимиз.
2ой игрок ее минимиз

$\Rightarrow$ Антагонист. игра!
$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle$
игра, набор объектов

$$(x^0, y^0): \ \max_{x \in X} F(x, y^0) = F(x^0 y^0) = \min_{y \in Y} F(x^0, y) \quad (1)$$
(такая точка, это стратегия)

<u>Опр</u> Решением антагонистич. игры Γ наз-ся следующая тройка $(x^0 y^0 v)$: (x^0, y^0) - седловая точка F, $v = F(x^0, y^0)$

x^0, y^0 - опт. стратегии игроков
v - значение игры (цена)

Корректность о-ния:
м.б. несколько седловых точек
$\Rightarrow$ необх. д-ть лемму

WAŻNE NOW

Лемма 1 (x^0, y^0) и $(x^* y^*)$ – с.т. ф-ции F на $X \times Y$

Тогда, $F(x^0 y^0) = F(x^* y^*)$

(если это д-м $\Rightarrow$ корректно)

Д-во:

тк $(x^* y^*)$ с.т $\Rightarrow$

$$F(x y^*) \le F(x^* y^*) \le F(x^* y) \quad (2)$$

$\forall x \in X$

$\forall y \in Y$

$$\Rightarrow F(x^0, y^0) \overset{(1)}{\le} F(x^0 y^*) \overset{(2)}{\le} F(x^* y^*) \overset{(2)}{\le} F(x^* y^0) \underset{(1)}{\le} F(x^0 y^0)$$

чтд

Опр Антаг. игра Γ наз-ся матричной игрой, если X, Y – мн-ва стратегий – конечные, т.е. $X = \{1, 2 .. m\}$, $Y = \{1, \dots n\}$

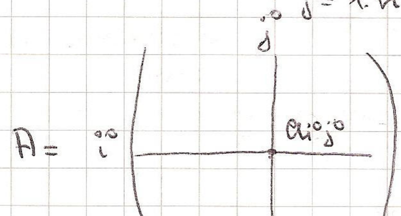
$\Rightarrow$ $i \in X$, $j \in Y$ – выбор игроков

$F(ij) = a_{ij}$ $\Rightarrow$ матрица $A = (a_{ij})_{m \times n}$

Опр (i^0, j^0) – ст., A – в терминах матр. игры с этой м-цей

$a_{ij^0} \le a_{i^0 j^0} \le a_{i^0 j}$ $\quad i = 1 .. m$

$\quad j = 1. n$



Примеры 1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

ст. $(1,1)$ $(2,1)$

$v = 0$

$a_{12} = v = 0$

$\Rightarrow$ утв-ние: $(x^0 y^0)$: $F(x^0 y^0) = v$

$\not\Rightarrow$ $(x^0 y^0)$ с.т.

4

2. $A = \begin{array}{c|cc} & o & p \\ \hline o & -1 & 1 \\ p & 1 & -1 \end{array}$ ⇒ смешанные

Орлянка

$F(x,y)$ на $X \times Y$

необх. и дост условие С.Т

Пусть 1ый игрок выбрал x

$\Rightarrow \inf\limits_{y \in Y} F(x,y)$ - гарант. результат (т.е меньше он не получит)

$= w(x)$

$$\underline{v} = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x,y)$$

нижнее значение игры.

Опр Стратегию 1ого игр $x^0 \in X$ наз. максиминной если для нее $\inf\limits_{y \in Y} F(x^0 y) = \underline{v}$

$$M(y) = \sup_{x \in X} F(x,y), \quad y \in Y$$

гарантир. проигрыш

$$\overline{v} = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x,y)$$

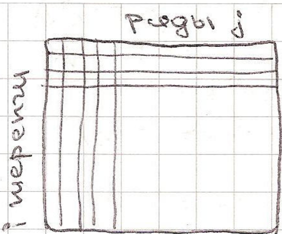
Верхнее значение игры

Опр $y^0 \in Y$ наз. минимаксной, если для нее $\sup\limits_{x \in X} F(x y^0) = \overline{v}$

Лемма 2 В $\forall$ антагонист. игре $\underline{v} \leq \overline{v}$

$$\overline{v} = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x,y)$$

$$\underline{v} = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(xy)$$



a_{ij} - рост

$\underline{v} = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$

$\bar{v} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$

Док-во: $\underbrace{\inf\limits_{y\in Y} F(x,y)}_{=W(x)} \le F(xy) \le \underbrace{\sup\limits_{x\in X} F(xy)}_{=M(y)}$

$\underline{v} = \sup\limits_{x\in X} W(x) \le M(y)$

$\underline{v} \le \bar{v} = \inf\limits_{y\in Y} M(y)$

Теорема 1.1.

1) Для того, чтобы F имела на $X\times Y$ с.т. необходимо и достаточно, чтобы

$$\max_{x\in X} \inf_{y\in Y} F(xy) = \min_{y\in Y} \sup_{x\in X} F(xy) \quad (\alpha)$$

$\Gamma: \underline{v} = \bar{v} = v$

2) (α) и (x^0y^0) с.т. $\Leftarrow\Rightarrow$ $\begin{cases} \inf F(x^0y) = \underline{v} \\ \sup F(xy^0) = \bar{v} \end{cases} (\beta)$

Д-во: Необх. Д-м (x^0y^0) с.т. $\Rightarrow (\alpha), (\beta)$

$\bar{v} = \inf\limits_{y\in Y} \sup\limits_{x\in X} F(xy) \le \sup\limits_{x\in X} F(x,y^0) \overset{(1)}{=} F(x^0y^0) \overset{(1)}{=}$

$= \inf\limits_{y\in Y} F(x^0y) \le \sup\limits_{x\in X} \inf\limits_{y\in Y} F(xy) = \underline{v}$

$\bar{v} \le \underline{v} \overset{Л2}{\le} \bar{v}$

$\Rightarrow$ условие (β) вып. и усл. (α) тоже вып.

Дост. (α) вып., $x^0, y^0 : \beta \Rightarrow (x^0y^0)$ с.т.

$F(x^0y^0) \le \sup\limits_{x\in X} F(xy^0) \overset{(\beta)}{=} \bar{v} \overset{(\alpha)}{=} \underline{v} = \inf\limits_{y\in Y} F(x^0y) \le$

$\le F(x^0y^0) \;(\beta)$

т.е. $\sup\limits_{x\in X} F(xy^0) = F(x^0 y^0) = \inf\limits_{y\in Y} F(x^0 y)$ zwig

$X^0 = \{x^0 \in X \mid (\beta)\}$ $Y^0 = \{y^0 \in Y \mid (\beta)\}$

$X^0 \times Y^0$ – мн-во всех седловых точек

Пример 1. $F(xy) = xy$ $X = Y = (-\infty, \infty)$

$(0,0)$ $0 \cdot y = 0 \cdot 0 = x \cdot 0$

$v = 0$ $\inf\limits_{y\in Y} xy = -\infty$ $x \neq 0$

$\sup\limits_{x\in X} xy = +\infty$ $y \neq 0$

2.
$$\begin{array}{c c}
A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 7 & -2 \end{pmatrix}_{4\times 4} & \begin{array}{c} W(i) = \min\limits_{1\le j\le 4} a_{ij} \\ -4 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{array} \\
M(j) = \max\limits_{1\le i\le 4} a_{ij} \quad 7 \quad 2 \quad 7 \quad 2 &
\end{array}$$

$\underline{v} = \max\limits_{1\le i\le 4} \min\limits_{1\le j\le 4} a_{ij}$ ⇒ по т-ме с.т. существует

$\underline{v} = 2$ $X^0 = \{2, 3\}$

$\overline{v} = \min\limits_{1\le j\le 4} \max\limits_{1\le i\le 4} a_{ij}$ мн-во с.т.: $(2,2)$ $(2,4)$ $(3,2)$ $(3,4)$

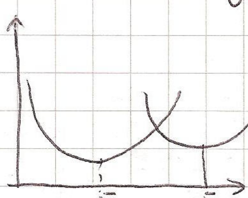
$\overline{v} = 2$ $Y^0 = \{2,4\}$

Д/з $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ $\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{matrix}$ $\underline{v} = 7$ $\{3\}$
$\quad 7\ 8\ 9$ ⇒ $\{3, 1\}$ с.т.
$\overline{v} = 7$ $\{1\}$

3. $F(xy) = 2x^3 - 3xy + y^2$ $X = Y = [0,1]$

$\underline{v} = \max\limits_{0\le x\le 1} \min\limits_{0\le y\le 1} F(x,y)$

$W(x) = \min\limits_{0\le y\le 1} F(x,y) = F(x, y(x))$



$F'_y = -3x + 2y = 0$

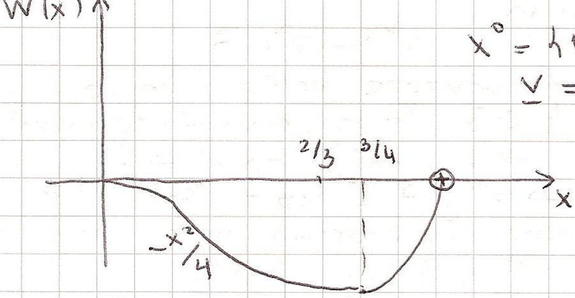
$0 \le \bar{y} = \frac{3x}{2} \le 1$ $y(x) = \bar{y}$

$0 \le x \le \frac{2}{3}$

$+\frac{2}{3} < x \le 1$ $y(x) = 1$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2}, & 0 \le x \le \frac{2}{3} \\ 1 & 2/3 < x \le 1 \end{cases} \Rightarrow W(x) = F(x, y(x)) =$$

$$= \begin{cases} -x^2/4, & 0 \le x \le 2/3 \\ 2x^2 - 3x + 1, & 2/3 < x \le 1 \end{cases}$$

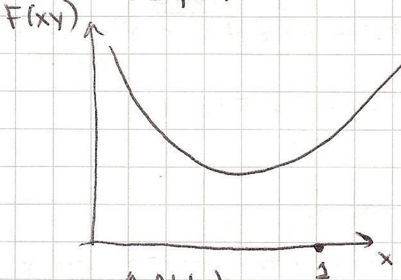


$x^0 = \{0, 1\}$

$\underline{v} = 0$

$X = Y = [0, 1]$

$$\bar{v} = \min_{0 \le y \le 1} \max_{0 \le x \le 1} F(x, y) \qquad M(y) = \max_{0 \le x \le 1} F(xy) = F(x(y)y)$$

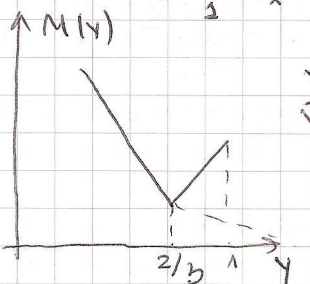


$$= \max [F(0y), F(1, y)] =$$

$$= \max [y^2, 2 - 3y + y^2]$$

$$y^2 \le \underbrace{2 - 3y + y^2}_{y \le 2/3}$$

$$M(y) = \begin{cases} 2 - 3y + y^2 & 0 \le y \le 2/3 \\ y^2 & 2/3 < y \le 1 \end{cases}$$



$y^0 = 2/3$

$\bar{v} = 4/9 > 0 = \underline{v}$

8

Опр мн-во Z в метр. пр-ве наз-ся компактным $\forall z^k$, $k = 1, 2 \dots$ $z^k \in Z$ можно выделить сх-ся подпосл-ть к элементу этого мн-ва.

$\exists z^{k_\ell}$, $\ell = 1, 2 \dots$; $z^{k_\ell} \to z^0 \in Z$

Утв Z компактное метрич. пр-во $\{z^k\} \subset Z$. Тогда, если z^0 - единств. пред. точка $\{z^k\}$, то $z^k \to z^0$

Д-во: $z^k \not\to z^0$; $\exists\, U$ окр-ть в z^0, вне которой бесконечно много эл-во z^k

$\Rightarrow z^{k_\ell} \in Z \setminus U$ $\ell = 1, 2 \dots$

$\Rightarrow \{z^{k_\ell}\} \subset Z \setminus U$ $\quad z' \in Z \setminus U$ пред. (.) $\{z^{k_\ell}\}$

$z' \neq z^0$, но z' - пред. (.) $\{z^k\}$ ~~чтд~~ (от прот)

Z, $h(z)$ $\quad \operatorname{Argmax} h(z) = \{z' \in Z \mid h(z') = \max\limits_{z \in Z} h(z)\}$

$F(x, y)$, $X \times Y$ $\qquad Y(x) = \operatorname{Argmin}\limits_{y \in Y} F(x, y)$

Теорема 1.2 $F(x, y)$ $\quad X \times Y$, где X, Y - компакты метр. пр-в.

Тогда 1) $W(x) = \min\limits_{y \in Y} F(x, y)$ непр. на X

2) Предположим, что $Y(x)$ состоит из единств. эл-та для $\forall x$ $Y(x) = \{y(x)\}$

Тогда $y(x)$ - отображение $X \to Y$

$\Rightarrow y(x)$ - непрерывно

Д-во: 1) $W(x)$ непр. и $\exists$ем?

$$\max_{x \in X, y \in Y} F(x, y) \geq W(x) \geq \min_{x \in X, y \in Y} F(x, y)$$

$x^0 \in X \quad Y(x) = \operatorname{Argmin} F(x,y)$

$\forall x^k \to x^0 \quad W(x^k) \to W(x^0) \in Y$

(по опр-нию непр-ти по Гейне)

$\forall$ п-ть $\{W(x^k)\}$ и д-м, что у нее единств предельная точка.

$\exists W'$ - ее пред. точка

Д-м, что $W' = W(x)$

$\exists \{x^{k_\ell}\} \quad W(x^{k_\ell}) \to W' \quad \forall y^{k_\ell} \in Y(x^{k_\ell})$

$y^{k_\ell} \in Y$

считаем, что $y^{k_\ell} \to y' \in Y(x^0)$

(из о-ния компактности)

в самом деле $F(x^{k_\ell}, y^{k_\ell}) \leq F(x^{k_\ell}, y)$

$\forall y \in Y, \ \ell = 1, 2$

$\ell \to \infty$, y - фиксируем

$F(x^0, y') \leq F(x^0, y) \quad \forall y \in Y$

$y' \in Y(x^0)$

$$W(x^{k_\ell}) = F(x^{k_\ell}, y^{k_\ell}) \to F(x^0, y') = \min_{y \in Y} F(x^0 y) = W(x^0)$$

$W(x^{k_\ell}) \to W'$

$\Rightarrow W' = W(x^0)$

$\Rightarrow$ из утв $\Rightarrow W(x^k) \to W(x^0)$

2) $x^0 \in X \quad \forall x^k \to x^0 \quad y(x^k) \to y(x^0)$ - необх. д-ть

Д-м, что $y' = y(x^0)$

y': $\exists \{x^{k_\ell}\}$: $\underset{y^{k_\ell}}{y(x^{k_\ell})} \to y' \in Y(x^0) = \{y(x^0)\}$ ч.т.д.

<u>Опр</u> $\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle$ наз. непрерывной если $F(x,y)$ непр. на $X \times Y$ где X и Y - -парам. евклид пр-ва

$X \subset E^m \quad Y \in E^n$

10

<u>Следствие</u> в $\forall$ непр. игре F у игроков $\exists$ максиминная и минимаксная стратегия.

<u>Пример</u> $F(xy) = (1+y^2)(xy-1)^2$

$X = [-1,1]$ $Y = (-\infty, +\infty)$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

<u>Опр</u> Мн-во Z наз. выпуклым, если для $\forall z' \neq z''$, $z', z'' \in Z$ и для $\forall \lambda \in (0,1)$

$$\lambda z' + (1-\lambda) z'' \in Z$$

$h(z)$, Z

<u>Опр</u> $h(z)$ выпукла, если $\forall z' \neq z''$, $\forall \lambda \in (0,1)$

$$h(\lambda z' + (1-\lambda) z'') \leq \lambda h(z') + (1-\lambda) h(z'')$$

(если нер-во строгое, то "строго выпуклое")

<u>Опр</u> $h(z)$ вогнута, если —"— $\geq$ (строго "$>$") —"—

$\boxed{\text{Д/З}}$

1. $h(z) = \sum\limits_{i=1}^{m} z_i^2 = |z|^2$ Д! строго вып

2. $h(z)$ непр Z - вып. компакт
   $h(z)$ строго вып.
   Д! ее мин. достигается в единств. (·)

<u>Теорема 1.3</u> $F(x,y)$ непр $\forall$ $X \times Y$ $X \subset E^m$ - вып. компакт, $Y \subseteq E^n$ - вып. компакт

$\forall y \in Y$ $F(x,y)$ вып. по x

$\forall x \in X$ $F(xy)$ вып по y

$\Rightarrow$ F имеет на $X \times Y$ седл. точку

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Д-во: I. $F(x,y)$ строго вып. по y

$$W(x) = \min_{y \in Y} F(xy) = F(x\, y(x))$$

$$y(x) = \operatorname{Argmin}_{y \in Y} F(x,y) = \{y(x)\}$$

из Т1.2 $\Rightarrow$ $y(x)$ - непр.

$$x^*: W(x^*) = \max_{x \in X} W(x)$$

Д-м. что $(x^*, y(x^*))$ - седловая точка

$\forall x \in X \ \forall t \in (0.1)$

$$(1-t)x^* + tx \in X \ ; \ \tilde{y} \overset{\det}{=} y((1-t)x^* + tx)$$

$$W(x^*) \geq W((1-t)x^* + tx) = F((1-t)x^* + tx, \tilde{y}) \geq$$

$\geq$ {F вогн. по 1ому арг-ту} $\geq$

$$(1-t)F(x^* \tilde{y}) + tF(x\tilde{y}) \geq (1-t)W(x^*) + tF(x\tilde{y})$$

$t > 0 \Rightarrow tF(x\tilde{y}) \leq tW(x^*)$

$t \to 0+ \Rightarrow \tilde{y} \to y(x^*)$

$$F(x, y(x^*)) \leq W(x^*) = F(x^*, y(x^*)) \leq F(x^* y) \ \forall x \in X \ \forall y \in Y$$

$(x^*, y(x^*))$

$$F_\varepsilon(x,y) = F(xy) + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \quad \varepsilon > 0$$

$\Rightarrow (x^\varepsilon y^\varepsilon), F_\varepsilon(xy)$

Берем $\varepsilon_k \to 0+$ (посл-ть сходящаяся к 0)

$(x^{\varepsilon_k} y^{\varepsilon_k})$ $F_{\varepsilon_k}(xy)$

посл-ть седловых точек

$$(x^{\varepsilon_k} y^{\varepsilon_k}) \to (x^0 y^0)$$

$$F_{\varepsilon_k}(x y^{\varepsilon_k}) \leq F_{\varepsilon_k}(x^{\varepsilon_k} y^{\varepsilon_k}) \leq F_{\varepsilon_k}(x^{\varepsilon_k} y) \quad \forall x \in X \ \forall y \in Y$$

$k \to \infty \Rightarrow$ нер-во из опр-я ст

$$F(xy^0) \leq F(x^0 y^0) \leq F(x^0 y)$$

чтд

WAŻNE NOW

12

$\boxed{10.09.2007}$

мн-во $Y(x)$ состоит из 1ого эл-та.
если x^*, $y^* \in Y(x^*) \Rightarrow (x^* y^*)$ может не быть с.т

<u>Пример</u>: $F(xy) = xy$

$X^\circ = [0,1] \qquad X^\circ \times Y^\circ$

$Y^\circ = \{0\}$

$x^* = 0 \qquad Y(0) = [0,1]$

$y^* = 1$

$\Rightarrow (0,1)$ не является с.т.

Если F строго вогнута по X, то

$$X(y) = \operatorname{Argmax}_{x \in X} F(x,y) = \{x(y)\}$$

y^* - минимаксная стратегия

$(x(y^*), y^*)$ с.т

<u>Пример</u> $\angle\ F(x,y) = -x^2 + y^3 + y^2 x - 4y + 3$

$X = Y = [0,1]$

$F''_{xx} = -2 < 0 \Rightarrow$ вогн. по x строго

$F''_{yy} = +6y + 2x \geq 0$

$F'_x = -2x + y^2 = 0$

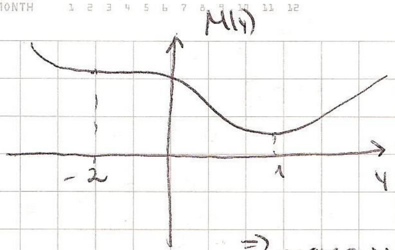
$\Rightarrow$ наилучший ответ 1ого игрока $\frac{y^2}{2} = x(y) \in [0,1]$

ф-ция максимума

$$M(y) = \max_{x \in X} F(xy) = F(x(y), y) = \frac{y^4}{4} + y^3 + 3 - 4y$$

$M'(y) = y^3 + 3y^2 - 4 \qquad y_1 = 1$

$y_{2,3} = -2$



$\Rightarrow y^* = 1$

$x(y^*) = \frac{1}{2}$

$(\frac{1}{2}, 1)$

$\Rightarrow$ искали только минимаксную стратегию, а не максиминную

§3. Смешанные расширения антагонистических игр.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ менять стратегии, чтобы противник не до

Опр Смешанной стратегией I-го игрока наз. вероятностное распределение φ на мн-ве X

Опр Применить смеш. стратегию означает выбрать x как сл. в. с распределением φ, $x \in X$

1. $X = \{1 .. m\}$

$p = (p_1 .. p_m) : \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \; p_i \geq 0 \quad i = 1..m$

вер. вектор р-ти m

$i \in X, p_i$

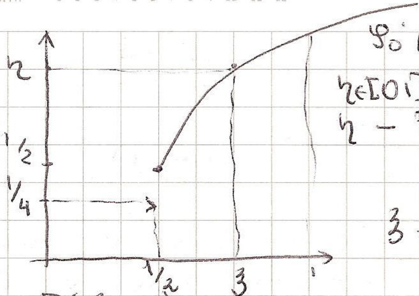
2. $X = [a, b]$

φ - функция распределения

ф-я р-ния $\varphi(x) = \mathbb{P}(\xi \leq x)$

С-ва: $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \text{неуб. ф.-я, непр. справа} & x \in [a,b] \\ 1, & x \geq b \end{cases}$

14



$\varphi_0'(x) > 0$

$\eta \in [0\ 1]$

η — р/м р-на на $[0\ 1]$

$$\xi = \begin{cases} 0 & 0 \le \eta < \frac{1}{4} \\ 1/2 & 1/4 \le \eta < \frac{1}{2} \\ \varphi_0^{-1}(\eta) & \frac{1}{2} \le \eta \le 1 \end{cases}$$

$\varphi(x) = \mathbb{P}(\xi \le x)$

$\mathbb{P}(\xi \le x) = P(\eta \le \varphi_0(x)) = \varphi_0(x)$

$h(x)$

$$\int_a^b h(x)\, d\varphi_0(x) = \frac{1}{4} h(0) + \frac{1}{4} h\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{1/2}^{1} h(x) \varphi_0'(x)\, dx$$

3. X - выпуклый компакт

$x_0 \in X$

$$I_{x_0}(x) = \begin{cases} 1, & x = x_0 \\ 0, & x \ne x_0 \end{cases}$$

мера, опр. на одноточечн. мн-ве

$x^{(i)} \in X,\ i = 1..m$

$\varphi = \sum_{i=1}^{m} p_i I_{x^{(i)}}$ $\quad p = (p_1 \dots p_m)$

/* $\int_a^b h(x)\, d\varphi_0(x) = \frac{1}{4} h(0)$ */

с вер-ю p_i выбир. x_i

обобщение случая 1

$h(x)$, X

$$\int_X h(x)\, d\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i h(x^{(i)})$$

смешанная стратегия

X, $\{\varphi\}$

X - чистые стратегии

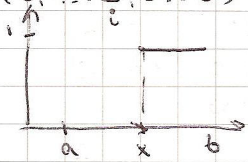
φ - смешанные стратегии

$X \subset \{\varphi\}$ - такое включение имеет место т.к.

(покажем на примерах)

1. X, i: $p = (0, \dots, \underset{i}{1}, 0 \dots 0)$

2. $X = [a, b]$



3. x, J_x

$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle$ - антагон. игра

$\{\varphi\}$ $\{\psi\}$ - см. стр. 2ого игрока

смеш. стратегии 1ого игрока

$$F(\varphi, \psi) = \int_X \int_Y F(x,y)\, d\varphi(x)\, d\psi(y)$$

интеграл Стилтьеса

$\Rightarrow \bar{\Gamma} = \langle \{\varphi\}, \{\psi\}, F(\varphi, \psi) \rangle$

смешанное расширение

Опр Если есть игра Γ, то она имеет решение $\Leftrightarrow$ $\bar{\Gamma}$, причем они совпадают

(φ^0, ψ^0, v)

(φ^0, ψ^0) с.т. $F(\varphi, \psi)$ $v = F(\varphi^0, \psi^0)$

Матричная игра

$A = (a_{ij})_{m \times n}$

$$p \in P = \{p \in E^m \mid \sum_{i=1}^m p_i = 1,\ p_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}\}$$

$$q \in Q = \{q \in E^m \mid \sum q_j = 1,\ q_j \geq 0\ j = \overline{1,n}\}$$

$$A(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j$$

16 игроки выбирают стратегию н/з друг от друга

$\Rightarrow (a_{ij})$ появл. с вер-ю $p_i q_j$

тк $p_i \leftarrow$ с вер $\leftarrow i$

j с вер p_j

$A(p,q)$ м.о

Таким образом $\bar{Г} = \langle P, Q, A(p,q) \rangle$

<u>Теорема 1.4</u> (основная т-ма матричных игр)

$\forall$ матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях

<u>Д-во:</u> $A = (a_{ij})_{n \times n}$

необх. д-ть, что $A(p,q)$ имеет СТ на $P \times Q$

опираемся на Т1.3

P, Q - замкнутые, огр. $\Rightarrow$ компакты

выпуклые (опр-со по опр)

$A(p,q)$ непр, вогн. p, вып по q

$\Rightarrow \exists (p^0, q^0) : A(p, q^0) \le A(p^0 q^0) = v \le A(p^0 q)$

$\forall p \in P, q \in Q$ <u>чтд</u>

Применение смеш. стратегий

1. Г
2. Один раз сыграно $\Rightarrow$

игрок действ в услови риска

$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ имеет смысл не риск. а полезность риска

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ? \end{pmatrix}$

? полезность

a

10 с вер. a $\quad 0<a<1$

0 с вер. $1-a$

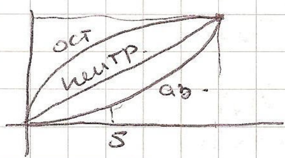
если игрок имеет нейтр. отнош к риску

$a = \frac{1}{2}$

при каком a выигрыш S экв. лотереи ?

если осторожен $\Rightarrow a > \frac{1}{2}$

если нет $\Rightarrow < \frac{1}{2}$



$\Rightarrow$ если один раз, то необ. преобр в ф-цу полезности

3. реализацию в виде "физической" смеси

Пусть имеет фермер.

У него 3 вида культур с-х $\quad i = 1,2,3$

Против него - природа $\quad j = 1,2,3$

$j=1$ засуха

$j=2$ норм

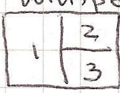
$j=3$ дожди

a_i - по какой цене продать

$H = (h_{ij})$ м-ца урожайности

$A = (a_i h_{ij})$ м-ца выигрыша

У него есть участок



4 непрерывную игру

$\Gamma = \langle X, Y, F(xy) \rangle$

$X = [a,b] \quad Y = [c,d] \qquad F(xy)$

Необходимо н-ть смеш. стратегию этой игры

$\{\varphi\}$, $\{\psi\}$
1ый игр 2ой игр

$$F(\varphi,\psi) = \int_a^b \int_c^d F(xy)\, d\varphi(x)\, d\psi(y)$$

инт. стилтьеса
$\exists$ для непр. ф-ции + + спр-ва т Фубини

$$F(x,\psi) = \int_c^d F(xy)\, d\psi(y)$$
$$F(\varphi,y) = \int_a^b F(xy)\, d\varphi(x)$$

2ойной интеграл = повторному
$$F(\varphi,\psi) = \int_a^b F(x\psi)\, d\varphi(x) = \int_c^d F(\varphi y)\, d\psi(y)$$

$$\overline{\Gamma} = \langle \{\varphi\} \{\psi\}, F(\varphi,\psi)\rangle$$

<u>Утв</u> (без док-ва)
Мн-во $\{\varphi\}$ является слабым компактом.

Это означает, что для $\forall$ п-ти φ_k $k = 1.2\ldots$ $\exists$ φ_{k_ℓ}, $\ell = 1.2\ldots$ которая $\varphi_{k_\ell} \xrightarrow{\text{слабо}} \varphi_0 \in \{\varphi\}$

: $\forall$ непр $h(x)$ на $[a,b]$ $\int_a^b h(x)\, d\varphi_{k_\ell}(x) \to \int_a^b h(x)\, d\varphi_0(x)$

<u>Лемма 3</u> В непр. игре Γ на прямоугольнике у игроков существует максим. и минимакс. смеш стратегии

$\triangle$ $\overline{\Gamma}$

$\underline{v} = \sup\limits_{\varphi\in\{\varphi\}} \inf\limits_{\psi\in\{\psi\}} F(\varphi,\psi)$ $\Rightarrow$ необх. д-ть что мин. и максим. достигаются и равны

$\overline{v} = \cancel{\sup} \inf\limits_{\psi\in\{\psi\}} \sup\limits_{\varphi\in\{\varphi\}} F(\varphi,\psi)$

Д-во: Д-м для максиминной (для минимаксной аналогично)

$\varepsilon_k \to 0+ \Rightarrow \exists$ н-ть $\{\varphi_k\}$: $\inf\limits_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi_k \psi) \geq \underline{v} - \varepsilon_{k_\ell}$

по опр. верхней грани

т.к. мн-во смеш. стратегий – сл. компакт, то можно выделить $\varphi_{k_\ell} \xrightarrow{\text{слабо}} \varphi_0$

$F(\varphi_{k_\ell} \psi) = \int_a^b F(x, \psi) d\varphi_{k_\ell}(x) \geq \underline{v} - \varepsilon_k$

непр. по x

перейдем к пределу при $\ell \to \infty$
$\Rightarrow$ из слабой сходимости

лит $\longrightarrow \int_a^b F(x\psi) d\varphi_0(x) \geq \underline{v}$

Это означает, что $F(\varphi_0 \psi) \geq \underline{v} \;\; \forall \psi \in \{\psi\}$
раз для $\forall \psi \Rightarrow \inf\limits_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi_0 \psi) \geq \underline{v}$

из о-ния строго нер-ва быть не может $\Rightarrow \inf F(\varphi_0 \psi) = \underline{v} \Rightarrow$ нижн. грань достигается

ч.т.д.

<u>Лемма 4</u> $\Gamma = \langle X, Y, F(xy) \rangle$
$\Gamma' = \langle X, Y, F'(xy) \rangle$

Γ, Γ' – ограничены

$$|F(xy) - F'(xy)| \leq \varepsilon \quad \forall (xy) \in X \times Y \quad (A)$$

Тогда $|\underline{v} - \underline{v}'| \leq \varepsilon$
$|\overline{v} - \overline{v}'| \leq \varepsilon$

Д-во: д-м 1ое нер-во, остальное аналогично

Д-ть, что $\forall x \in X \quad |\inf\limits_{y \in Y} F(xy) - \inf\limits_{y \in Y} F'(xy)| \leq \varepsilon \quad (1)$

$$\inf_{y \in Y} F(xy) - \inf_{y \in Y} F'(xy) \geq \inf(F(xy) - F'(xy)) \underset{\text{из A}}{\geq} -\varepsilon$$

из элемент. нер-во для нижних граней

аналогично если поменяем местами

$$\Big|\sup_{x\in X} W(x) - \sup_{x \in X} W'(x)\Big| \le \varepsilon$$

$$\underset{\underline{V}}{\shortparallel} \qquad \underset{\underline{V}'}{\shortparallel}$$

1ое д-ли чтд

Теорема 1.5 (Основная теорема непрерывных игр)

Всякая непрерывная игра Γ на прям-ке имеет решение в смешанных стратегиях

Док-во: $\bar{\Gamma}$, $F(\varphi, \psi)$, Д-м $\exists$ ние ст

по т 1.1. необх д-ть, что

$$\underline{v} = \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi)$$

$$\shortparallel$$

$$\bar{v} = \min_{\psi \in \{\psi\}} \sup_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi)$$

по лемме они достигаются

$F(xy)$ - непр. на $X \times Y$

$X = [a, b]$ $Y = [c, d]$

она р/но непр-на $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$

разбиение $[a, b]$ на X^i $i = \overline{1..n}$

$[a][ ][ ][ ]b$

$\exists$ разбиение $[cd]$ на Y^j

$c[ ][ ][ ] \dots]d$ $j = \overline{1.k}$

что вып. нер-во

$$|F(xy) - F(x'y')| \le \varepsilon \qquad (1)$$

$$\forall (xy)(x'y') \in X^i \times Y^j$$

$$i = \overline{1.m}$$

$$j = \overline{1..n}$$

Возьмем в каждом $X^i \ni x_i$, $Y^j \ni y_j$

и определим ступенчатую ф-ю:

$F_1(xy) = F(x_i y_j)$, если $x_i y_j \in X^i \times Y^j$

на мал. кусочке F приним. пост. зн. е

из нер-ва (1) =>

$$|F(xy) - F_1(xy)| \le \varepsilon \quad \forall (xy) \in X \times Y \qquad (2)$$

аппроксимацию ступенчатой ф-ей

=> свели к матричной игре

$$a_{ji} = F(x^i y^j)$$

$A = (a_{ij})_{n \times m}$

Сопоставим смеш. стратегию 1ого игрока с аналогичной в матричной игре

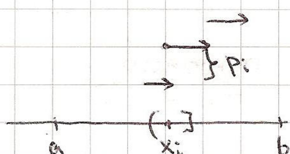
$$\varphi \to p = (p_1 \ldots p_m)$$

$$p_i = \int_{X^i} d\varphi(x) \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

=> построим отображение $\{\varphi\} \xrightarrow{\text{на}} P$

$\forall p \in P \ \exists \varphi \to p$

Вер-ть попадания в X^i: p_i равна величине скачка p_i



Аналогично $\{\psi\} \xrightarrow{\text{на}} Q$

$$F_1(\varphi, \psi) = \int_a^b \int_c^d F_1(xy)\, d\varphi(x)\, d\psi(y) = \{ \text{он по оп-нию} \qquad (3)$$

через ступенчатые ф-ии $\} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i \underbrace{a_{ij}}_{F(x^i y^j)} q^j = A(pq)$

$X^i \times Y^j \quad F(x^i y^j) = a_{ij}$

$p_i \quad q_j$

в-ти попадания в мн-ва

Еще есть $F(\varphi \psi)$: отличается от F_1 не более чем на ε =>

соответ. м.о отличаются не более чем на ε

$$|F(\varphi\psi) - F_1(\varphi\psi)| = \left|\int_a^b \int_c^d (F(xy) - F_1(xy))\, d\varphi(x)\, d\psi(y)\right|$$

$$\le \int_a^b \int_c^d |F(xy) - F_1(xy)|\, d\varphi(x)\, d\psi(y) \overset{(2)}{\le} \varepsilon$$

при $\forall\ \varphi \in \{\varphi\},\ \psi \in \{\psi\}$

а это есть условие А

т.к. они близки $\Rightarrow$ восп. №4

$$\Big|\underbrace{\max_{\varphi \in \{\varphi\}} \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi)}_{= \underline{v}} - \underbrace{\max_{\varphi \in \{\varphi\}} \min_{\psi \in \{\psi\}} F_1(\varphi, \psi)}_{= \max\limits_{p \in P} \min\limits_{q \in Q} A(pq) = \underline{v}(A)}\Big| \le \varepsilon$$

ф-я $A(pq)$ имеет с.т. $\Rightarrow$ $\underline{v}(A)$

$\Rightarrow |\underline{v} - v(A)| \le \varepsilon$

аналогично $|\bar{v} - v(A)| \le \varepsilon$

$|\underline{v} - \bar{v}| \le 2\varepsilon\ \ \forall \varepsilon > 0$, значит $\underline{v} = \bar{v}$

ч.т.д.

§4 Свойства решений смешанных стратегий.

Теорема 1.6 для того чтобы $(\varphi^\circ, \psi^\circ, v)$ была решением смеш. стратегий непрерывной игры Γ на прямоуг. необходимо и достаточно выполнение нер-ва

$$F(x\psi^\circ) \le v \le F(\varphi^\circ y) \quad \forall x \in X,\ \forall y \in Y \quad (4)$$

Д-во: чтобы проверить: $\max\limits_{x \in X} F(x\psi^\circ) \le v \le \min\limits_{y \in Y} F(\varphi^\circ y)$

т.е. необх. решить эти экстрем. задачи

<u>Необх.</u> $(\varphi^\circ \psi^\circ v)$ – реш. в смеш. страт. $(\varphi^\circ \psi^\circ)$ $F(\varphi, \psi)$ $\Rightarrow (*)$

$$F(\varphi, \psi^\circ) \le F(\varphi^\circ \psi^\circ) \le F(\varphi^\circ \psi) \quad \forall \varphi \in \{\varphi\}, \ \forall \psi \in \{\psi\}$$

$\Downarrow$

возьмем чистую стратегию

$$F(x\psi) \le v \le F(\varphi^\circ y) \quad \forall x \in X, \ y \in Y \Rightarrow (*)$$

<u>Дост</u> $(*) \Rightarrow (\varphi^\circ \psi^\circ v)$ реш. в смеш. стратегиях игры Γ

Возьмем $\forall$ см. стр. $\varphi \in \{\varphi\}$

$$F(\varphi, \psi^\circ) = \int_a^b F(x, \psi^\circ)\, d\varphi(x) \overset{(*)}{\le} v \le$$

д-ся аналогично $\le F(\varphi^\circ, \psi)$

Ост. д-ть, что $v = F(\varphi^\circ, \psi^\circ)$

Для этого возьмем $\varphi = \varphi^\circ$; $\psi = \psi^\circ \Rightarrow$

$F(\varphi^\circ \psi^\circ) \le v \le F(\varphi^\circ \psi^\circ)$ те $v = F(\varphi^\circ \psi^\circ)$

те $(\varphi^\circ \psi^\circ)$ с.т., значение в с.т. это v

$\Rightarrow (\varphi^\circ \psi^\circ v)$ решение см. стр Γ

ЧТД

<u>Замечание</u> не важно на промежут. или нет мы р-ем,

верно для $\forall$ непр. игры для кот. $\exists$ смешанное расширение и справедлива т. Фубини

<u>Теорема 1.6'</u> Пусть имеет игра с матрицей A, тогда $(p^\circ q^\circ v)$ решение смеш. стр. $\Leftrightarrow$ $A(i q^\circ) \le v \le A(p^\circ j)$ $(*)$

$$i = 1..m$$
$$j = 1..n$$

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$$A(iq^0) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^0$$

$$A = i\left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array}\right)_{j} \qquad A(p^0 j) = \sum_{i=1}^{m} p_i^0 a_{ij}$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \dots a_n \\ a_n a_1 \dots a_{n-1} \\ \\ a_2 \dots a_n a_1 \end{pmatrix} \qquad p^0 = \left(\frac{1}{n} \dots \frac{1}{n}\right) = q^0$$

$$v = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

$$A(p^0 j) = v = A(iq^0)$$

$\Rightarrow$ усл-е (*) вып. как р-во

т.е v - значение игры

Теорема 1.7 непр. игра Γ на пр-ке спр-во

1) $\forall \varphi \in \{\varphi\} \quad \inf\limits_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi\psi) = \min\limits_{y \in Y} F(\varphi y)$

2) $\forall \psi \in \{\psi\} \quad \sup\limits_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi\psi) = \max\limits_{x \in X} F(x\psi)$

Д-во: 1) $\inf\limits_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi\psi) \le \min\limits_{y \in Y} F(\varphi y)$ (I)

$Y \subset \{\psi\} \Rightarrow$ ф-но берется нижняя грань по более широкому мн-ву

Теперь д-м $\geq$

$$F(\varphi\psi) = \int_c^d F(\varphi, y)\, d\psi(y) \geq \min_{y \in Y} F(\varphi y)$$

$\geq \min\limits_{y \in Y} F(\varphi y)$ - конст

Поэтому и $\inf\limits_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi\psi) \geq \min\limits_{y \in Y} F(\varphi y)$ (II)

(I)(II) $\Rightarrow$ чтд

2) д-ся аналогично

WAŻNE NOW

Следствие 1 непр. игре Г на прямоугольнике значение V можно записать

$$V = \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \min_{y \in Y} F(\varphi y) = \min_{\psi \in \{\psi\}} \max_{x \in X} F(x \psi)$$

Д-во:

Т1.1 $\quad v = \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi \psi) = \min_{\psi \in \{\psi\}} \sup_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi)$

по т1.7 $\quad \min_{y \in Y} F(\varphi y) \qquad \max_{x \in X} F(x \psi)$

$\boxed{Д/з}$ Д! $\underline{V} = \max_x \min_y F(xy) \le v \le \min_y \max_x \overline{F(xy)} = \overline{V}$ чтд

Теорема 1.7' Имеется игра с матрицей A.
Справедливы утв-ия
1) $\forall p \in P \quad \min_{q \in Q} A(pq) = \min_{1 \le j \le n} A(p, j)$
2) $\forall q \in Q \quad \max_{p \in P} A(pq) = \max_{1 \le i \le n} A(i q)$

Следствие 2

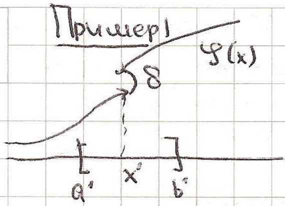
$$v = \max_{p \in P} \min_{1 \le j \le n} A(p j) = \min_{q \in Q} \max_{1 \le i \le n} A(iq)$$

/* Опр \ φ смеш. стратегия 1ого игрока на [ab] Спектром */

Опр Б. т. $x' \in S_p(\varphi)$ - спектру см. стр φ если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists [a'b'] : x' \in [a'b']$
$b' - a' < \varepsilon$ и разность $\varphi(b') - \varphi(a') > 0$
(Вероятность попадания в $[a'.b'] > 0$)
(·) спектра - (·) роста

Упр Мн-во (·) спектра - замкнут. мн-во

Пример1



$\varepsilon > 0$

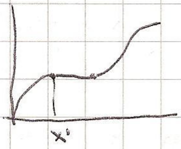
$\varphi(b') - \varphi(a') > \delta$

$b' - a' < \varepsilon$

Пример2 $x' : \varphi'(x') > 0$

Д! это точка спектра

м.б. $\varphi'(x') = 0$, но x' - т. спектра



17.09.07

Теорема 1.8 (св-во дополняющей нежесткости)

Пусть $(\varphi^0, \psi^0, v)^0$ решение в смеш стратегиях непр. игры Г на квадрате $\Rightarrow$ спр-во:

1) $\forall x \in S_p(\varphi^0) \Rightarrow F(x, \psi^0) = v$

2) $y \in S_p(\psi^0) \Rightarrow F(\varphi^0, y) = v$

Д-во: $F(x, \psi^0) \le v \le F(\varphi^0, y)$ $\forall x \in X$ $\forall y \in Y$ (*)

д-м 1) $\exists x' \in S_p(\varphi^0) : F(x' \varphi^0) < v$

$F(x, \varphi^0)$ непр. по $x \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, a', b', \varepsilon : F(x, \psi^0) \le v_1 < v$ $\forall x \in [a' b']$

для остальных x $F(x \psi^0) \le v$

т.е. $\forall x$ $F(x, \psi^0) \le v$

Возьмем м.о. т.е. интеграл:

$$F(\varphi^0, \psi^0) = \int_a^b F(x \psi^0) d\varphi^0(x) < v = F(\varphi^0, \psi^0)$$

$\Rightarrow$ противоречие

2) д-во аналогично чтд

Следствие $\exists(\varphi^\circ \psi^\circ v)$ в Γ

1) $F(x, \psi^\circ) < v \Rightarrow x \notin Sp(x^\circ)$

2) $F(\varphi^\circ, y) > v \Rightarrow y \notin Sp(\psi^\circ)$

Δ матр. случай

Теорема 1.8' Пусть $(p^\circ q^\circ v)$ - реш. в матр. стратегиях игры A

Тогда

1) $p_i^\circ > 0 \Rightarrow A(i q^\circ) = v$

2) $q_j^\circ > 0 \Rightarrow A(p^\circ j) = v$

Д-во: для реш. матр. игры с-во $(*)$

$A(i q^\circ) \leq v \leq A(p^\circ j)$ $\quad i = \overline{1.m}$

$j = \overline{1.n}$ $\quad (*)$ по Т.1.6'

далее аналогично

(можем провести самостоят.)

Следствие $(p^\circ q^\circ v)$ реш. .. A Тогда

1) $A(i q^\circ) < v \Rightarrow p_i^\circ = 0$

2) $A(p^\circ j) > v \Rightarrow q_j^\circ = 0$

Замечание: $A(i q^\circ) = v \not\Rightarrow p_i^\circ > 0$

Доп. нежесткость: если в одном месте нежестко $\Rightarrow$ в другом жестко

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a_i > 0,\ i = \overline{1.n} \\ 1.2 \ldots n \\ 1 > a_i > 0 \end{matrix}$$

$p^\circ q^\circ \quad p_i^\circ > 0$

Упр. Д. ть, что в чист. стр. не имеет реш,

$\underline{v} = \max \min a_{ij} = 0 \quad \bar{v} = \min a_n > 0$

$\Rightarrow$ решим в смеш. стратегиях
$p_i^\circ > 0 \Rightarrow A(i, q^\circ) = v \quad i = 1..n$

Мент ищет преступн. в n местах и может его там найти с вер $a_i > 0$

$$\begin{cases} a_i q_i^\circ = v & i = \overline{1.n} \\ \sum_{i=1}^{n} q_i^\circ = 1 \end{cases}$$

$n+1$ неизв. и ур-ние

$$q_i^\circ = \frac{v}{a_i} \quad i = 1..n$$

$$v = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \qquad \underset{p_i^\circ}{q_i^\circ} = \frac{1}{a_i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \qquad i = \overline{1.n}$$

$$q_j > 0 \Rightarrow a_j p_j^\circ = v$$

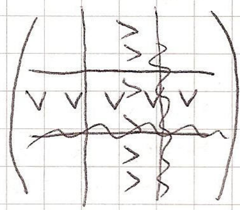
$$v \overset{\text{С1.7}^\circ}{\Longrightarrow} \max_{p \in P} \min_{1 \le i \le n} A(p, i) = \max_{p \in P} \min_{i = \overline{1.n}} a_i p_i =$$

$$= \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}$$

§5. Методы решения матричных игр.

Нахождение хотя бы 1 решения (p°, q°, v) с м-цей A

$\boxed{\text{I}}$ Доминирование строк и столбцов

$A =$ 

больше

меньше => убираем

аналогично для столбцов

$\forall$ 2 вектора: $a = (a_1 .. a_l)$
$b = (b_1 .. b_l)$

<u>Опр</u> Б.г. что вектор a <u>доминирует</u> вектор b если $a_i \geq b_i$ $i = 1..l$

<u>Опр</u> a строго доминир. b если $a_i > b_i$ $i = 1..l$

<u>Опр</u> $\forall$ $a^{(i)}$, $i = 1..m$ в некот. евклид. пр. $\mathbb{R}^l$
Вып. комбинацией в-ров $a^{(i)}$ наз лин. комб
$\sum_{i=1}^{m} p_i a^{(i)}$: $p_i \geq 0$ $i = 1..m$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$

<u>Теорема 1.9</u> (о доминировании строк)
Пусть в м-це A некот. строка доминир. некоторой комбинацией ост. строк матрицы. Тогда эта строка входит с 0 вер-ю в некот. оптим. смеш. стратегию 1ого игрока. (и ее можно выкинуть)
Если доминир. строгое, то эта строка входит с 0 вер-ю в $\forall$ оптим. см. стр. 1ого игрока

30

<u>Д-во</u>: 1. A, i_1

$$p_i \geq 0 \quad i \neq i_1 \quad \sum_{i \neq i_1} p_i = 1$$

$$a_{i_1 j} \leq \sum_{i \neq i_1} p_i a_{ij} \quad j = 1..n$$

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{\sim\sim\sim\sim} \end{pmatrix} i_1 \Rightarrow \hat{A}$$

доп. у $\hat{A}$ есть решение в смеш. страт. $(\hat{p}\, q^0 v)$ — (*)

(вычеркнули i_1-ую строку)

$\Rightarrow$ вставим вместо 0 строки i_1

$$p^0 = (\hat{p}_1 \ldots \hat{p}_{i_1-1}, 0, \hat{p}_{i_1+1} \ldots \hat{p}_m)$$

Д-м, что (p^0, q^0, v) — реш. A

$\Rightarrow$ обобщим м-д вычеркивания и 1 утв. т-мы

$$A(p^0, j) = \hat{A}(\hat{p}, j) \overset{(*)\hat{A}}{\geq} v, \; j = 1..n$$

$A(i\, q^0) \leq v$ — проверим

Возьмем $i \neq i_1 \Rightarrow A(i q^0) = \hat{A}(i q^0) \overset{(*)\text{ для } \hat{A}}{\leq} v$

Теперь возьмем $i = i_1$

$$A(i_1 q^0) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_1 j} q^0_j \leq \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i \neq i_1} p_i a_{ij}\Big) q_j \;\circleddash$$

Возможно тк $q^0_j \geq 0$

$$\circleddash \; \{p' = (p_i, i \neq i_1)\} = \hat{A}(p' q^0) \leq v$$

из нер-ва для с.т., тк q^0 — опт. смеш. стратегия 2ого игрока с $\hat{A}$

2. Если нер-ва строгие $\Rightarrow$ все то же самое +

$$A(i q^0) = \sum a_{ij} q^0_j < \sum\Big(\sum p_i a_{ij}\Big) q^0_j$$

$\triangle$ p^* — $\forall$ опт. смеш. стр 1ого игрока с м-цей A

$\Rightarrow (p^*\, q^0\, v)$ — реш. A

Восп. сл. виеш из Т1.8'

$A(i, q^0) < v \Rightarrow p_i^* = 0$

чтд

Сформулируем такую же теорему для столбцов. Д-во ее аналогичное.

Теорема 1.9' (о доминир. столбцов)

Пусть некот. столб. A доминирует вып. комб. ост. столбц.
Тогда он входит с 0 вер. в некот. стр. опт. см. 2ого игрока и его можно выкинуть
Если строгое, то он входит с 0 вер-ю в V опт. смеш. страт. 2ого игрока

Пример (в контр. будет похожий!)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \cancel{5} & \cancel{5} \\ 1 & 3 & \cancel{3} & \cancel{3} \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{3} \end{pmatrix}$$

4 столбцы

4ый домин. 3ий

3ая стр < 2ой

$\frac{1}{2} I + \frac{1}{2} II \geqslant III$ стр.

III сто > ост. $\Rightarrow$ вычерк.

$$\Rightarrow \hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\hat{p} = \hat{q} = (\frac{1}{2}\ \frac{1}{2})$ $v = 2$

делали в прошл. раз

$p^0 = q^0 = (\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0\ 0)$ $v = 2$ - решение

$\boxed{\text{II}}$

Графический м-д решения с матрицами вида $2\times n$, $m\times 2$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} p_1 \\ 1-p_1 \end{array}$$

$$p = (p_1 \ 1-p_1) \quad 0 \le p_1 \le 1$$

$$v = \max_{p\in P} \min_{1\le j\le n} A(p\,j) = \max_{0\le p_1\le 1} \min_{1\le j\le n} \underbrace{\left[a_{1j}p_1 + a_{2j}(1-p_1)\right]}_{\ell_j(p_1)}$$

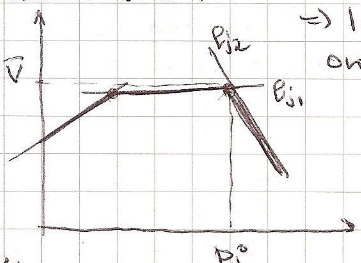
Восп. ф-лой с-ва т. 1.6

$$\ell_j(p_1) = a_{1j}p_1 + a_{2j}(1-p_1)$$

линейна по p_1, прямая

наклон $k_j = a_{1j} - a_{2j}$

$\Rightarrow$ строим ℓ_j на $[0,1]$, ф-ю min (нижнюю огибающую)



$\Rightarrow$ 1ый игрок имеет оптим. см. стр-ю

$$p^\circ = (p_1^\circ, 1-p_1^\circ)$$

Найдем о. см. стр 2ого игрока

1) $0 < p_1^\circ < 1$

$$\ell_{j_1}(p_1^\circ) = v \quad k_{j_1} \ge 0$$
$$\ell_{j_2}(p_1^\circ) = v \quad k_{j_2} \le 0$$

Ищем о. см. стр 2 иг. в таком виде:

$$q^\circ = (0 \dots \underset{j_1}{q^*} \dots 0 \dots \underset{j_2}{1-q^*} \dots 0)$$

$$k_{j_1}q^* + k_{j_2}(1-q^*) = 0 \Rightarrow$$

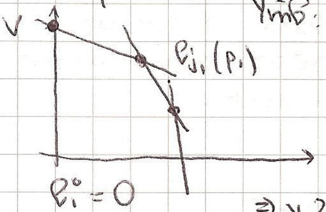
находим q^* $\Rightarrow$ получим q°

Обоснуем, что q° о. см. стр 2 игр

$$A(p, q^\circ) = \underset{k_{j_1}}{\ell_{j_1}(p_1)}q^* + \underset{k_{j_2}}{\ell_{j_2}(p_1)}(1-q^*) \equiv v$$

$\Rightarrow q^\circ$ - о. см. стр. 2 игр

2) $p_1^0 = 0$



Утв: $\exists j_1 : \ell_{j_1}(0) = v$

$k_{j_1} \le 0$ — угл. коэф. наклона

Тогда $\ell_{j_1}(p_1) \le v$

"

$A(p\, j_1) \le v$ при $\forall p \in P$

⇒ у 2 игр. есть о. см. стр j_1 ⇒ (2_{j_1}) - ст.

3) $p_1^0 = 1$ — аналогично

Совершенно аналогичный способ ∃ для $m \times 2$

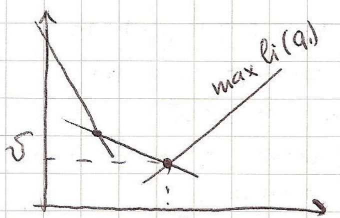
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{12} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{m2} \end{pmatrix}$$

$q = (q_1, 1-q_1)$, $0 \le q_1 \le 1$

Опять восп. ф-лой для v

$$v = \min_{q \in Q} \max_{1 \le i \le m} A(i\, q) = \min_{0 \le q \le 1} \max_{1 \le i \le m} \ell_i(q_1)$$

$$k_{i1} p^* + k_{i2}(1-p^*) = 0$$



можно ещё ее транспон. и решить со знаком "−"

<u>Пример</u>

$$A = \begin{array}{c} p_1 \\ 1-p_1 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\ell_1(p_1) = (-1)p_1 + 2(1-p_1)$

$\ell_2(p_2) = (-2)p_1 + 4(1-p_1)$

$\ell_3(p_1) = 3p_1 + 1 - p_1$

⇒ $\ell_1(p_1) = 2 - 3p_1$

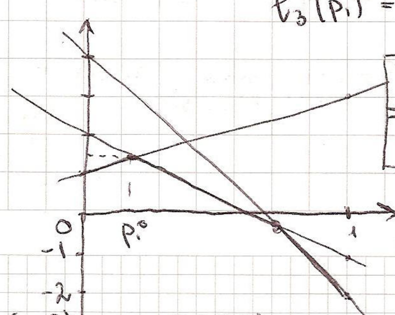
$\ell_2(p_1) = 4 - 6p_1$

$\ell_3(p_1) = 1 + 2p_1$

$2 - 3p = 1 + 2p$

$5p = 1 \quad p = \frac{1}{5}$

$v = 1\frac{2}{5}$



⇒ $\boxed{p^0 = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right) \quad v = 1\frac{2}{5}}$ о. см. стр 1ого игрока

$q^0 = (q^*, 1-q^*)$

$\boxed{q^0 = \left(\frac{2}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)}$ о. см. стр 2 игр.

$(-3)q^* + 2(1-q^*) = 0$

$q^* = \frac{2}{5}$

Проверим (*) $A(i\, q^0) \le v \le A(p^0\, j)$

III Сведение решения бескоалиционной игры к паре задач линейного программирования.

$A = (a_{ij})_{m \times n} \quad v > 0$

$B = (a_{ij} + c) \quad v(B) = v(A) + c$

$$v \overset{\text{сл } T1.7'}{=} \max_{p \in P} \underbrace{\min_{1 \le j \le n} A(p, j)}_{u} = \max_{p, u : p \in P} u =$$

$u = \min_{1 \le j \le n} A(p j)$

эти задачи экв-ны!

$$= \max_{p, u : p \in P,} u = \left[z : z_i = \frac{p_i}{u} \geq 0,\ \text{тк } u > 0,\ \text{макс зн-е} > 0 \right] \equiv$$

$$A(p, j) = \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \geq u,\ j = \overline{1, n} \qquad \left\{ \sum_{i=1}^{m} z_i = \frac{\sum p_i}{u} = \frac{1}{u} \right\}$$

$$\equiv \max \frac{1}{\sum z_i} \equiv \frac{1}{\min \sum_{i=1}^{m} z_i}$$

- - - -

I з. Л.П

$z:$

$\sum_{i=1}^{m} z_i a_{ij} \geq 1 \quad j = 1..n$

$z_i \geq 0 \quad i = 1..m$

Это з-ча ЛП. Она имеет решение тк экв исходной, которая заведомо имеет решение

$$v = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} z^0} \text{ — зн-е игры номинальное}$$

$p_i^0 = z_i^0 \cdot v \qquad i = 1..m$

II з Л.П

$$v = \min_{q \in Q} \max_{1 \le i \le m} A(i q) = \frac{1}{\max_{w:} \sum_{j=1}^{n} w_j}$$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \leq 1,\ i = 1..m$

$w_j \geq 0 \quad j = 1..n$

II ЗЛП и I ЗЛП - взаимодвойственны

$\boxed{IV}$ Необходимые условия для крайних максимальных смешанных стратегий игры

Z

<u>Опр</u> $z^0 \in Z$ - крайняя точка, если
$\nexists\, z' \neq z'' \in Z,\ \lambda \in (0,1)$, такие что
$$z^0 = \lambda z' + (1-\lambda) z''$$

<u>Упр</u> Z - вып. компакт E^m. Д! что у него есть хотя бы 1 крайняя точка

$\measuredangle$ $P^0 = \{p \in P \mid \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij}}_{=A(p,j)} \geq v,\ j = 1..n\}$

мн-во всех $\underbrace{\text{опт. см. стр}}_{\text{условие } (*)}$ 1ого игрока - многогранник

<u>Опр</u> Крайняя опт. см. стратегия (стр) крайняя точка многогранника P^0 - то есть его вершина

Аналогично: $Q^0 = \{q \in Q \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leq v,\ i = 1..m\}$

<u>Теорема 1.10</u>

$A, v \neq 0$ $p^0 q^0$ - кр. опт. см. стр. Тогда
$\exists\ B = (a_{i_\ell j_t})_{k\times k}$, $|B| \neq 0$ такая что справедливы

$$\begin{cases} \sum_{\ell=1}^{k} p^0_{i_\ell} a_{i_\ell j_t} = v & t = 1..k \\ \sum_{\ell=1}^{k} p^0_{i_\ell} = 1 \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} \sum_{t=1}^{k} a_{i_\ell j_t} q^0_{j_t} = v & \ell = 1..k \\ \sum_{t=1}^{k} q^0_{j_t} = 1 \end{cases} \quad (2)$$

<u>Д-во:</u> p^0, q^0

$I_1 = \{i \mid p_i > 0\}$ $\quad I_2 = \{i \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q^0_j = v\}$

по св-ву доп. нежестк. $I_1 \subseteq I_2$

36

$J_1 = \{j \mid q_j^0 > 0\}$ Т18' $J_1 \subseteq J_2$

$J_2 = \{j \mid \sum_{i=1}^m p_i^0 a_{ij} = v\}$

$I_1 = \{1..r\}$ $I_2 = \{1..r..d\}$

можно добиться пер. строк

Аналогично перест. строк

$J_1 = \{1..s\}$ $J_2 = \{1..s..h\}$

$\Rightarrow$ разбиение A

$$A = \begin{array}{c} \\ r \\ d \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline A_4 & A_5 & A_6 \\ \hline A_7 & A_8 & A_9 \end{array} \right) \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_4 & A_5 \end{array} \right)_{d \times h}$$

$s \quad h$

подматрица B внутри $\tilde{A}$

Д-м, что 1ые r строк $\tilde{A}$ лнз

Предположим противное $\Rightarrow$

$$\exists \alpha_1 .. \alpha_r : \sum_{i=1}^r \alpha_i a_{ij} = 0 \quad j = \overline{1.h} \qquad (3)$$

Д-м, что $\sum_{i=1}^r \alpha_r = 0$

$$0 = \sum_{j=1}^h q_j^0 \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \left(\sum_{j=1}^h a_{ij} q_j^0\right) =$$

ост. $=0$ по опр мн B

$$= \sum_{i=1}^r \alpha_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^0\right) = v \sum_{i=1}^r \alpha_i$$

$A(i, q^0) = v \neq 0$

$i \le r \le d$, по опр I_2

Определим $p^\varepsilon = p^0 + \varepsilon\alpha$

вспомогательные смеш стратегии

$\alpha = (\alpha_1 .. \alpha_r, 0, .. 0) \in E^m$

$$p_i^\varepsilon = \begin{cases} p_i^0 + \varepsilon\alpha_i \geq 0, & i = 1..r \\ 0, & i = r+1 .. \end{cases}$$

Если ε малое, то $p_i^\varepsilon \geq 0$ => это вероятн. вектор

Д-м, что при мал. ε это о.см стр I игр.

$A(p^\varepsilon, j) \geq v$

$$A(p^\varepsilon, j) = A(p^0, j) + \varepsilon \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_{ij}}_{0 \; (3)} = v, \; j = 1..h$$

$\underset{j>h}{A(p^0, j) > v}$ $\quad$ $> v$ при $j > h$

вышли из J_2 => уменьшая ε можно строгое нер-во сохр.

=> p^ε - о.см. стр. I игр

$$p^0 = \frac{p^\varepsilon + p^{-\varepsilon}}{2}, \quad p^\varepsilon \neq p^{-\varepsilon} \text{ т.к. } \alpha \neq 0$$

=> p^0 не явл. кр. точкой => противоречие

=> 1ые r строк $\tilde{A}$ лнз

Аналогично 1ые s столбцов лнз

Пусть $k = \operatorname{rang}(\tilde{A}) \geq \max[r\ s]$

не огр. общности, пусть 1 k строк и k столбцов лнз

B стоит на 1ших k стр и столбцов (то есть станет ей если верн. в исх. нумерацию)

$|B| \neq 0$

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^0 a_{ij} = v \quad j = 1..k \leq h, \; k \geq r$$ => мы внутри J_2

начиная с $r+1$ комп. $= 0$ => $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k} p_i^0 a_{ij} = v = A(p^0, j) \\ \sum\limits_{i=1}^{k} p_i^0 = 1 \end{cases}$

$k \quad h$ по опр. J_2

$$A(i, q^0) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{k} a_{ij} q_j^0 = v & i = 1..k \\ \sum\limits_{j=1}^{k} q_j^0 = 1 \end{cases} \qquad d \geq k \geq s$$

Вернемся к исходной нумерации => (1), (2)

<u>ч.т.д.</u>

38 Алгоритм:

$B = (a_{i_\ell j_t})_{k \times k}$

$k = 2, 3 \ldots$

(1) $k+1$ ур-ние, $k+1$ неизв

$p^0_{i\ell}$ $\ell = 1..k$

не всегда имеет реш:

Упр $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. при каких имеет реш?

$\measuredangle$ $p^0_{i\ell} \geq 0$ $q^0_{jt} \geq 0$

Если не вып $\Rightarrow$ другая подм.

Если вып $\Rightarrow$

$$p^0 = \begin{pmatrix} \ldots \underset{i\ell}{p^0_{i\ell}}, \underset{i \neq i\ell}{0} \ldots \end{pmatrix}$$

$$q^0 = (\ldots \underset{jt}{q^0_{jt}} \; \underset{j \neq jt}{0 \ldots 0})$$

Проверяем (*)

$A(i q^0) \leq v \leq A(p^0 j)$

В итоге приходим к подматрице, отвечающ. кр. опт. см. стр

Пример $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ игра $a_{ij} \geq v'$ 1

$< v'$ 0

примен. ал-м $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{15} \\ a_{41} & a_{45} \end{pmatrix}$

$p^0 = (\frac{1}{2} 0 0 \frac{1}{2})$

$q^0 = (\frac{1}{2} 0 0 0 \frac{1}{2})$

$v = \frac{1}{2}$

WAŻNE NOW

$\boxed{V}$ Метод Брауна

$\boxed{24.09.2007}$

$\varepsilon > 0$

определить значение игры v с точностью до ε

$p^\varepsilon : \min\limits_{1\le j\le n} A(p^\varepsilon, j) \ge v-\varepsilon$

для второго игрока:

$q^\varepsilon : \max\limits_{1\le i\le m} A(i, q^\varepsilon) \le v+\varepsilon$

второй проиграет не меньше, чем $(v+\varepsilon)$

$A = (a_{ij})_{n\times m}$

k раз повторяется игра

r_i - выбрана iая чистая стратегия : $\sum\limits_{i=1}^{m} r_i = k$

$p(k) = \left(\frac{r_1}{k} \dots \frac{r_n}{k}\right)$ вектор частот

$p(k) \in P$ - явл. вер. вектором.

l_j - ск. выбирал 2ой игрок j-ю чистую стратегию

$\sum\limits_{j=1}^{n} l_j = k$

$q(k) = \left(\frac{l_1}{k} \dots \frac{l_n}{k}\right) \in Q$

Алгоритм:

- шаг 1 :

  i_1 j_1

  иным образом игроки выбирают чистые стратегии

- шаг k : $\underbrace{i_1 \dots i_k}_{p(k)}$ $\underbrace{j_1 \dots j_k}_{q(k)}$

- шаг $k+1$

  i_{k+1} выбирается : $A(i_{k+1}, q(k)) = \max\limits_{1\le i\le m} A(i, q(k)) = v_1(k)$

  j_{k+1} —"— : $A(p(k), j_{k+1}) = \max\limits_{1\le j\le n} A(p(k), j) = v_2(k$

WAŻNE NOW минимизирует выигрыш 1ого игрока, анализирует его поведение - знач. матр. игры

Утв $v_1(k) \geq v^{\alpha} \geq v_2(k) \quad k = 1, 2 \ldots \qquad (1)$

Д-во: $v_1(k) = \max\limits_{1 \leq i \leq m} A(i, q(k)) \geq \min\limits_{q \in Q} \max\limits_{1 \leq i \leq m} A(i q) =$

$= \{ \text{сл } T 1.7' \} = v = \max\limits_{p \in P} \min\limits_{1 \leq j \leq n} \geq$

$\geq \min\limits_{1 \leq j \leq n} A(p(k) j) = v_2(k)$ чтд

Теорема 1.11

В методе Брауна $\exists$ предел:

$$\lim_{k \to \infty} v_1(k) = \lim_{k \to \infty} v_2(k) = v$$

$\exists p^0$ - $\forall$ пред точка $\{p(k)\}$

q^0 - $\forall$ -//- $\{q(k)\}$

p^0 - опт. смеш. стратегия $1^{\text{ого}}$ игрока

q^0 - опт. см. стр. $2^{\text{ого}}$ игрока

$\Rightarrow$ из теоремы вытекают правила остановки

Останавливаемся на шаге k_0: $v_1(k_0) - v_2(k_0) - \varepsilon$

$$\overbrace{v_2(k_0) \quad v \quad v_1(k_0)}^{\leq \varepsilon}$$

$\Rightarrow |v - v_1(k_0)| \leq \varepsilon$

$|v - v_2(k_0)| \leq \varepsilon \qquad (2)$

$\Rightarrow v_1, v_2$ - приближ. знач. v с точностью ε

$\min\limits_{1 \leq j \leq n} A(p(k_0), j) = v_2(k_0) \overset{(2)}{\geq} v - \varepsilon$

скорость сх-ти v_1 и v_2 к v:

теоретически ск-ть сх-ти $\underline{O}\left(\frac{1}{k^{m+n-2}}\right) \to$ медлен.

на практике $\underline{O}\left(\frac{1}{k}\right)$

$\Rightarrow$ для ускорения модифицируем метод:

Модификация:

$v_1^*(k) := \min\limits_{1 \leq t \leq k} v_1(t) \left(\begin{matrix}\min \text{ всех верхних} \\ \text{границ}\end{matrix}\right) \overset{(1)}{\geq} v \geq$

$\geq v_2^*(k) := \max\limits_{1 \leq t \leq k} v_2(t) \left(\begin{matrix}\max \text{ среди всех} \\ \text{нижних} \\ \text{границ}\end{matrix}\right)$

остановка: $k_0 : v_1^*(k_0) - v_2^*(k_0) \leq \varepsilon$

$|v_1 - v_1^*(k_0)| \le \varepsilon, \quad |v - v_2^*(k_0)| \le \varepsilon \qquad (3)$

$v_1^*(k_0) \overset{def}{=} \min\limits_{1\le t\le k_0} v_1(t) = v_1(t_1)$

на t_1 верхняя граница была наилучшей

$v_2^*(k_0) = \max\limits_{1\le t\le k_0} v_2(t) = v_2(t_2)$

Утв $p(t_2)$ - max min смеш. стр.
$q(t_1)$ - min max

Д-во:

$\min\limits_{1\le j\le k} A(p(t_2), j) = v_2(t_2) = V_2^*(k_0) \overset{(3)}{\ge} v - \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow p(t_2)$ - ε - макс. см. стр, $q(t_1)$ док-ся анал. ч.т.д.

$\exists$ k повторений. Определим вектор $c(k) \in E^m$:

$c_i(k) = k \cdot A(i, q(k)) = k \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\ell_j}{k} = \sum\limits_{t=1}^{k} a_{ij_t}, \; j_t = j$ - ℓ_j раз

$\Rightarrow$ вектор $c(k)$ - сумма столбцов м-цы A с ном. j_t

Аналогично опред в-р $d(k) \in E^n$: $d_j(k) = kA(p(k), j) =$
$= k \cdot \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{z_i}{k} a_{ij} = \sum\limits_{t=1}^{k} a_{i_t j}$; $i_t = i$ - z_i раз

$d(k)$ - сумма строк A с номерами $i_t : t = 1..k$

$i_{k+1}: \max\limits_{1\le i\le m} \frac{c_i(k)}{k} = \frac{c_{i_{k+1}}(k)}{k} = v_1(k)$

$j_{k+1}: \min\limits_{1\le j\le n} \frac{d_j(k)}{k} = v_2(k)$

Пример $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

k	i_k	$c_1(k)$ (сумма столб)	$c_2(k)$	$v_1(k)$	j_k	$d_1(k)$ (сумма строк)	$d_2(k)$	$v_2(k)$	ε
1	1	0	4	4	1	0	2	0	4
2	2	0	8	4	1	4	3	3/2	5/2
3	2	2	9	3	2	8	4	4/3	3/2
4	2	4	10	5/2	2	12	5	5/4	1
5	2	6	11	11/5	2	16	6	6/5	7/10
6	2	8	12	2	2	20	7	7/6	$1/2 = 2 - 3/2$
7	2	10	13	13/7	2	24	8	8/7	5/14
8	2	12	14	7/4	2	28	9	9/8	$7/4 - 3/2 = 1/4$
9	2	14	15	5/3	2	32	10	10/9	1/6
10	2	16	16	8/5	2	36	11	11/10	1/10 ok!

дост. точности: $1/10 = \varepsilon$

$v_1^*(10) = 8/5 \quad v_2^*(10) = 3/2 \quad t_2 = 2$
"$v_2^*(2)$"

Нужно: $p(t_2) = p(2) = (\frac{1}{2} \; \frac{1}{2})$
$q(t_1) = q(10) = (\frac{2}{10} \; \frac{4}{5})$
2 раза был "1", 8 раз - "2"

§6 Реш-е игр с вогнутыми и выпуклыми функциями выигрыша

$\Gamma = \langle X, Y, F(xy) \rangle$

42 $F: \bigcap_x, \bigvee_y \Rightarrow$ с.т.

Теперь $\measuredangle$ когда одного из условий нет

Опр Γ с вогнутой ф-ей выигрыша, если $F(x,y)$ - непр. на $X \times Y$, $X \subset E^m$, $Y \subset E^n$ - вып. компакты

$\forall y \in Y$ $F(x,y)$ вогн. по x

$\forall x \in X$ $F(xy)$ вып. по y

Теорема 1.12 Пусть в E^m имеется семейство D_α, $\alpha \in \mathcal{L}$ - вып. компактов, $\forall \alpha_1 \dots \alpha_{m+1} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{m+1} D_{\alpha_i} \neq 0$

Тогда $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{L}} D_\alpha \neq \emptyset$. (без док-ва)

Теорема 1.13 Пусть Γ- игра с вогнутой ф-ей выигрыша.

Тогда $\underline{v} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(xy) = \min_{y^j \in Y} \overline{\max_{x \in X} \min_{1 \le j \le m+1} F(x,y^j)}$

$y^j \in Y \subset E^n$, по $(m+1) \cdot n$ переменным $1 \le j \le m+1$

Д-во: Все max и min достигаются. Док-м, что $w \geq \underline{v}$

$\measuredangle \forall$ набор $y^1 \dots y^{m+1} \Rightarrow \max_{x \in X} \min_{1 \le j \le m+1} F(xy^j) \geq \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(xy) = \underline{v} \Rightarrow w \geq \underline{v}$

Док. что $\underline{v} \geq w$: $y \in Y$; $D_y = \{x \in X \mid F(xy) \geq w\}$

$\boxed{Д/з}$ проверить, что D_y - вып. мн. во

для сем-ва $(y \in Y)$. Если $\bigcap_{j=1}^{m+1} D_{y^j} \neq \emptyset \Rightarrow$ усл. т. вып

$\max_x \overset{\to x^*}{} \min_{1 \le j \le n+1} F(x,y^j) \geq w \Rightarrow \min_{1 \le j \le n+1} F(x^*,y^j) \geq w \Rightarrow F(x^*,y^j) \geq w$, $j = \overline{1,m+1}$

$\Rightarrow x^* \in \bigcap$ этих множеств $\Rightarrow$ оно непусто.

$\exists x^0 \in \bigcap_{y \in Y} D_y \Rightarrow$ это знач. что $F(x^0,y) \geq w$ $\forall y \in Y \Rightarrow \overline{v} \geq \min_{y \in Y} F(x^0 y) \geq w \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{v} \geq w \Rightarrow \overline{v} = w$

ч.т.д.

$\bar{y}^1 \dots \bar{y}^{m+1}$: набор такой, что: $\max_{x \in X} \min_{1 \le j \le m+1} F(x,\bar{y}^j) = w$

$Q = \{q = (q_1 \dots q_{m+1}) \mid \sum_{j=1}^{m+1} q_j = 1, q_j \geq 0, j = 1..m+1\}$

$\Phi(xq) = \sum_{j=1}^{m+1} F(x,\bar{y}^j) q_j$: $\bigcap_x$, линейна по q

Теорема 1.14 В Γ с вогн. ф-ей выигрыша, где $(x^0 \psi^0 \underline{v})$ - реш в см. ср

x^0 - максим стр. 1^{ого} игр, ψ^0 - см. стр. 2^{ого}, $\psi^0 = \sum_{j=1}^{m+1} q_j^0 I_{\bar{y}^j}$

$q^0 = (q_1^0 \dots q_{m+1}^0)$, $\max_{x \in X} \Phi(xq^0) = \min_{q \in Q} \max_{x \in X} \Phi(xq)$

Д-во: $\underline{v} \overset{T1.13}{=} w = \max_{x \in X} \min_{1 \le j \le m+1} F(\bar{x},\bar{y}^j) = \max_{x \in X} \min_{q \in Q} \sum_{j=1}^{m+1} F(x,\bar{y}^j) = \max_{x \in X} \min_{q \in Q} \Phi(x,q) =$

$\overset{T1.3}{=} \min_{q \in Q} \max_{x \in X} \Phi(x,q) = \max_{x \in X} \sum_{1}^{m+1} F(x,\bar{y}^j) q_j^0 =$

$= \max_{x \in X} \int_Y F(xy)\, d\psi^0(y) = \max_{x \in X} F(x\psi^0)$;

$\max_{x \in X} F(x\psi^0) = \underline{v} = \min_{y \in Y} F(x^0 y)$

$F(x,\psi^0) \leq \underline{v} \leq F(x^0,y)$ $\forall x \in X, y \in Y$ (*)

ч.т.д.

<u>Замечание</u> Не исп. то, что Y - вып. $\Rightarrow$ теорема верна если Y - $\forall$ компакт метр. пр-ва

Пусть все-таки Y - вып. компакт евкл. пр-ва. Y^0 - мн-во кр. точек

$F(xy)$ $\cap$ (вогнуто) по x, $\cap$ по y

$$\underline{v} = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} F(xy) = \max_{x\in X}\min_{y\in Y^0} F(xy)$$

$\Rightarrow$ реш. см. стр игры $\Gamma^0 = \langle X, Y^0, F(x,y)\rangle$ совпадает с реш в см. стратегиях Γ

<u>Теорема 1.13'</u> Пусть в игре Γ с вып. ф-ей F по y. Тогда спр-во след. утв-ние:

$$\bar{v} = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} F(xy) = \max_{x^i\in X}\min_{y\in Y}\max_{1\le i\le n+1} F(x^i y) = W^1$$

Определим набор $\bar{x}^i$, $i=1..n+1$: $\min_{y\in Y}\max_{1\le i\le n+1} F(\bar{x}^i y) = W^1$

$$\Phi^1(p,y) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i F(\bar{x}^i y);\ p\in P = \{p\in E^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1, p_i \ge 0\}$$

<u>Теорема 1.15</u> Γ - игра с вып. ф-ей F по y, $\forall y \Rightarrow \exists$ реш в см. стр $(\varphi^0, y^0, \bar{v})$, y^0 - минимаксная страт

$$\varphi^0 = \sum_{i=1}^{n+1} p_i^0 I_{\bar{x}^i}$$

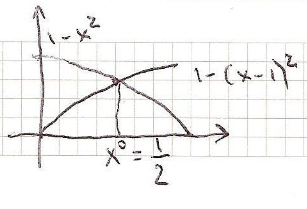
$$P^0:\ \max_{p\in P}\min_{y\in Y}\Phi^1(py) = \min_{y\in Y}\Phi^1(p^0 y)$$

<u>Пример</u> $F(xy) = 1-(x-y)^2$ $\quad F''_{xx} = -2$

$X = Y = [0,1]$

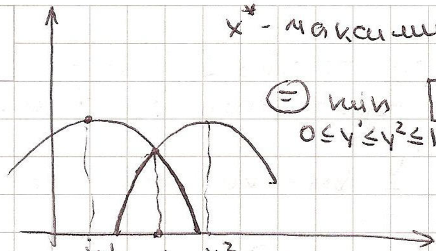
$$\underline{v} = \max_{0\le x\le 1}\min_{0\le y\le 1}[1-(x-y)^2] =$$

$$= \max_{0\le x\le 1}\min[1-x^2,\ 1-(x-1)^2] = \frac{3}{4}$$



$$W = \min_{0\le y^1\le y^2\le 1}\ \max_{0\le x\le 1}\min[1-(x-y^1)^2, 1-(x-y^2)^2$$

15



x^* - максимизирующая

$\Leftrightarrow \min\limits_{0\le y^1\le y^2\le 1}\left[1-\left(\frac{y^1-y^2}{2}\right)^2\right]$

Достигается, когда $\bar y^1 = 0,\ \bar y^2 = 1$

$y^1 \quad x \quad y^2$

$x = \frac{y^1+y^2}{2}$

$\Phi(xq) = q_1 F(x, \bar y^1) + (1-q_1)F(x\bar y^2) =$

$= q_1[1-x^2] + (1-q_1)[1-(x-1)^2]$

$\Phi'(xq) = 0 = 2q_1 x + 2(1-q_1)(x-1) \Rightarrow x(q) = 1-q_1$

максимизирующ. x

$\Rightarrow$ получим ф-ю максимума

$M(q_1) = \Phi(x(q_1)q) = q_1(1-(1-q_1)^2) + (1-q_1)(1-q_1^2) =$

$= 1 - q_1(1-q_1) \longrightarrow \min\limits_{0\le q_1\le 1}$

$q_1^\circ = \frac{1}{2}$

$x^\circ = \frac{1}{2},\ v = \underline{v} = \frac{3}{4},\ \varphi^\circ = \frac{1}{2}I_0 + \frac{1}{2}I_1$

$\boxed{\text{Упр}}$ $F(x_1 x_2 y_1 y_2) = 1-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2$

$0 \le x_i \le 1 \quad i = 1.2$ (*)

$0 \le y_i \le 1 \quad i = 1.2$

§7. Исследование игровых моделей.

"нападение - оборона"

$A > 0$
B

$\quad 1 \quad 2 \quad n$

$x = (x_1 .. x_n) \in X = \{x \mid \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = A,\ x_i \ge 0,\ i = 1..n\}$

$x_i \quad y = (y_1 .. y_n) \in Y = \{y \mid \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = B,\ y_i \ge 0,\ i = 1..n\}$

$\mu_i > 0$ – кол-во средств нападения, кот. может уничтожить 1 ср-во защиты

$x_i > \mu_i y_i$ $x_i - \mu_i y_i$ – прорыв ср-в напад.
$x_i \le \mu_i y_i$ 0 – дост. ср-в защиты

$\max[x_i - \mu_i y_i, 0]$

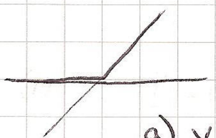
$$F(xy) = \sum_{i=1}^{n} \max[x_i - \mu_i y_i, 0]$$

по всем позициям

– вып. ф-я по x и по y $\Rightarrow \overline{v} = \underline{v}$

$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n > 0$

n – слабейший пункт (наим. эф-ть)



а) $\underline{v} = \max\limits_{x \in X} \min\limits_{y \in Y} F(xy) = \max[A - \mu_n B, 0]$

$x^0 = x^{(n)} = (0, 0 .. 0, A)$

$\forall x \in X \quad \min\limits_{y \in Y} F(xy) \leq \min\limits_{y \in Y} F(x^{(n)}, y)$

$$\min_{y \in Y} F(x,y) = \left[\overline{y} : \overline{y}_i = \left(\frac{B}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\mu_k}}\right) \frac{x_i}{\mu_i}\right] \leq F(x, \overline{y}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \max[x_i - \underset{\geq 0}{\mu_i y_i}, 0] = \begin{cases} 0, \text{ если } B \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\mu_k} \Rightarrow y_i \geq \frac{x_i}{\mu_i} \\ \Rightarrow \max = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \mu_i \overline{y}_i), \text{ если } B < \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\mu_k} \end{cases} \quad \leq$$

$x_i - \mu_i \overline{y}_i \leq 0$

$x_i - \mu_i \overline{y}_i > 0$

$\overline{y}_i \leq \dfrac{x_i}{\mu_i}$

$$\leq A - \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i \leq A - \sum_{i=1}^{n} \mu_n y_i = A - \mu_n B \leq$$

$$\leq \max\,[A - \mu_n B, 0] =$$

$$= \min_{y \in Y} \max\,[A - \mu_n y_n, 0] = \min_{y \in Y} F(x^{(n)}, y)$$

б) $\bar{v} = \min\limits_{y \in Y} \max\limits_{x \in X} F(x,y) = \max\left[A - \dfrac{B}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, 0\right]$

$$y^0 : y_i^0 = \frac{B}{\mu_i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}$$

надо направл. на тот пункт, кот меньше всего защищен.

$$x^{(i)} = (0 \ldots A, 0 \ldots 0)$$

$$\max_{x \in X} F(xy) = \max_{1 \leq i \leq n} F(x^{(i)}, y) \quad \forall y \in Y \qquad (1)$$

$$\max_{x \in X} F(xy) \geq \max_{1 \leq i \leq n} F(x^{(i)}, y) \qquad (\mathrm{I})$$

$$\forall x \in X \quad x = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{x_i}{A}}_{\lambda_i} x^{(i)}$$

$$\lambda_i = \frac{x_i}{A} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

Воспол. тем, что ф-я вып. по x

$$F(x,y) = F\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{A} x^{(i)}, y\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{A} F(x^{(i)}, y) \leq$$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq n} F(x^{(i)}, y) \quad \forall x, \forall y$$

тк считаем, что y фикс $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \max_{x \in X} F(xy) \leq \max_{1 \leq i \leq n} F(x^{(i)}, y) \qquad (\mathrm{II})$$

Вычисляем $\bar{v} = \min\limits_{y \in Y} \max\limits_{x \in X} F(xy) \overset{(1)}{=} \min\limits_{y \in Y} \max\limits_{1 \leq i \leq n} F(x^{(i)} y) =$

WAŻNE NOW $= \min\limits_{y \in Y} \max\limits_{1 \leq i \leq n} [A - \mu_i y_i, 0] =$

$$= \min_{y \in Y} \max [A - \min_{1 \le i \le n} \mu_i y_i, 0] =$$

$$= \max [A - \max_{y \in Y} \min_{1 \le i \le n} \mu_i y_i, 0] =$$

$$= \{ \text{З.п. } \bar{p}: p_i = \frac{y_i}{B}, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, p_i \geq 0, p \in P \} =$$

$$= \max [A - B \max_{p \in P} \min_{1 \le i \le n} \mu_i p_i, 0] \circledequal$$

$\measuredangle$ игру: $\begin{pmatrix} \mu_1 & & \varnothing \\ & \ddots & \\ \varnothing & & \mu_n \end{pmatrix} \Rightarrow$ Значение игры было равно такому максимину

$$\circledequal \max [A - B \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, 0]$$

Опт. стр. $p_i^0 = \dfrac{1}{\mu_i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}$ $i = 1..n$

Возвращ. к перем. y $\Rightarrow$ $y_i^0 = \dfrac{B}{\mu_i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}$

Сравним максимин и минимакс:

$$\underline{v} = \max [A - \mu_n B, 0]$$

$$\bar{v} = \max [A - \frac{B}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, 0]$$

Необх. выпол. СТ

$\boxed{1.10.2007}$

$$x \in X = \{ x \in E^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = A, x_i \geq 0, i = 1..n \}$$

$$y \in Y = \{ y \in E^n \mid \sum_{i=1}^{n} y_i = B, y_i \geq 0, i = 1..n \}$$

$$F(xy) = \sum_{i=1}^{n} \max [x_i - \mu_i y_i, 0]$$

a) $\underline{v} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(xy) = \max [A - \mu_n B, 0]$ $x^{(0)} = x^{(n)} = (0 . 0 A)$

б) $\bar{v} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(xy) = \max [A - \frac{B}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, 0]$ y^0: $y_i^0 = \dfrac{B}{\mu_i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}$ $i = \overline{1, n}$

$B \geq A\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k} \Rightarrow \bar{v} = 0 \geq \underline{v} \geq 0 \Rightarrow \bar{v} = \underline{v}$

$B < A\sum \frac{1}{\mu_k} \Rightarrow \bar{v} = A - \frac{B}{\sum \frac{1}{\mu_k}} > A - \frac{B}{1/\mu_n} = A - \mu_n B$

$\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_n$

$F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \max[x_i - \mu_i y_i, 0]$

$\bar{v} > \max[A - \mu_n B, 0] = \underline{v}$

по Т.1.15 $v = \bar{v}$

$\Rightarrow$ выпишем опт. см. стр. 1ого игрока:

$\varphi^0 = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 I_{x^{(i)}}$

д-м, что φ^0 - опт. см. стратегию для нападения

1. $F(\varphi^0, y) \geq \bar{v} \quad \forall y \in Y$

(нападение гарант. что выиграет $\geq \bar{v}$)

∠ элементарное нер-во:

$a_i \ b_i \ i = 1..n$

$\sum_{i=1}^{n} \max[a_i, b_i] \geq \max[\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{n} b_i]$ (2)

$F(\varphi^0, y) = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 F(x^{(i)}, y) = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 F(x^{(i)}, y) =$

$= \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \max[A - \mu_i y, 0] = \sum_{i=1}^{n} \max[\underbrace{p_i^0 A}_{a_i} - p_i^0 \mu_i y_i, \overset{b_i}{0}] \overset{(2)}{\geq}$

$\geq \max[\sum_{i=1}^{n} p_i^0 A - p_i^0 \mu_i y_i, 0] =$

$= \left|\text{учитывая, что } p_i^0 \mu_i = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}\right| =$

$= \max[A - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}} \sum_{i=1}^{n} y_i, 0] = \max[A - \frac{B}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, 0] = \bar{v}$

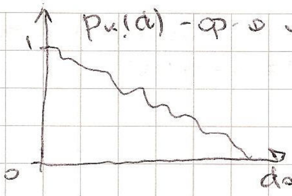
Т.о. для $(\varphi^0 y^0 \bar{v})$ вып. нер-во

$F(\varphi^0 y) \geq \bar{v} = \max_{x \in X} F(x y^0) \geq F(x y^0)$

Модель дуэли

$p_k(d), k = 1,2$

$d \in [0, d_0] \quad p_k(0) = 1 \quad p_k(d_0) = 0 \quad k = 1,2$



$p_i(d)$ - ф-я меткости $\forall$ дуэлянта ф-ции убыв. монотонно

$x \in X = [0, d_0]$
$y \in Y = [0, d_0]$

2 вида дуэли: • шумная (выстрелы слышны)
• бесшумная

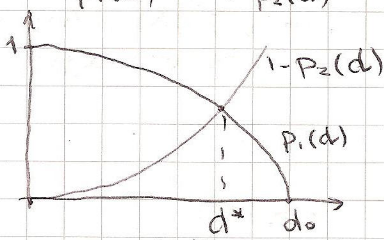
• Сначала $\measuredangle$ шумную. Тогда

$$F(xy) = \begin{cases} p_1(x), & x \geq y \\ 1 - p_2(y), & x < y \end{cases}$$

У первого дуэлянта: $f(y) = \begin{cases} x, & x \geq y \\ 0, & x < y \end{cases}$

Вдоль диагонали она разрывна, но имеет ст

$p_1(d)$ $1 - p_2(d)$



Перес. в одной точке: d^* где d^* решение $1 - p_2(d) = p_1(d)$

$\Rightarrow$ Оптимальная стратегия: $(d^*, d^*, v = p_1(d^*))$

1. $F(d^* d^*) = p_1(d^*)$
2. Д-м нер-во из определения с.т.
$\forall$ стратегии x $y := d^*$
$F(x, d^*) \leq p_1(d^*) = F(d^* d^*)$

$$F(x d^*) = \begin{cases} p_1(x), & x \geq d^* \\ 1 - p_2(d^*), & x < d^* \end{cases} \leq p_1(d^*) \text{ тк } p_1(\cdot) \text{ убывающая}$$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ " $p_1(d^*)$

Так же просто д-ся второе нер-во
$x = d^* \ \forall y \Rightarrow F(d^* y) \geq p_1(d^*)$

$$F(d^* y) = \begin{cases} p_1(d^*), & d^* \geq y \\ 1 - p_2(y), & d^* < y \end{cases}$$

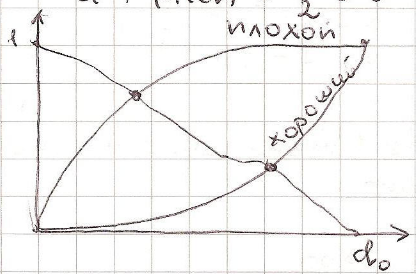
$1 - p_2(y) > 1 - p_2(d^*) = p_1(d^*)$
возр. ф-я

$\Rightarrow$ нер-во из о-ния д-но

50 Интересно отметить частные случаи:

$p_1(d) = p_2(d) \Rightarrow p_1(d) = 1 - p_1(d)$

d^*: $p_1(d) = \frac{1}{2} = v$



• Теперь ∠ бесшумную игру

$$\underline{v} = \sup_{0\le x\le d_0}\ \inf_{0\le y\le d_0} F(x,y) = \max_{0\le x\le d_0} p_1(x)(1-p_2(x))$$

$0 \le x < d_0$

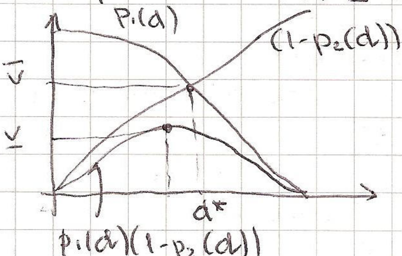
$$W(x) = \inf_{0\le y\le d_0} F(x,y) = \min\left[\inf_{0\le y\le x} p_1(x),\ \inf_{x<y\le d_0} p_1(x)(1-p_2(y))\right] = \min\left[p_1(x),\ p_1(x)(1-p_2(x))\right] = p_1(x)(1-p_2(x))$$

$$F(x,y) = \begin{cases} p_1(x), & x \ge y \\ p_1(x)(1-p_2(y)) & x < y \end{cases}$$

$$f(y) = \begin{cases} x, & x \ge y \\ 0, & x < y \end{cases} \sim x$$

$$\bar{v} = \inf_{0\le y\le d_0}\ \sup_{0\le x\le d_0} F(x,y) = p_1(d^*)$$

Теперь покажем: $\underline{v} < \bar{v}$



$\Rightarrow$ чистого решения нет $\Rightarrow$ ищем в смеш. стратегиях

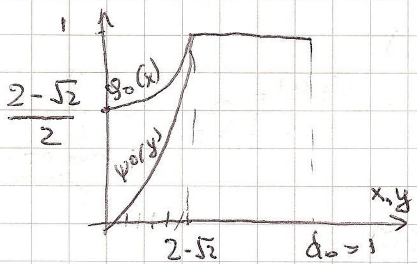
GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Пример $d_0 = 1$, $p_1(d) = p_2(d) = 1 - d$

$v = \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$

см. стр. 1ого дуэл.
$$\varphi^0(x) = \begin{cases} \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{1}{(x-1)^2} + 1\right), & 0 \le x < 2-\sqrt{2} \\ 1, & 2-\sqrt{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

см. стр. 2ого дуэл
$$\psi^0(y) = \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\left(\frac{1}{(y-1)^2} - 1\right), & 0 \le y < 2-\sqrt{2} \\ 1, & 2-\sqrt{2} \le y \end{cases}$$



§8. Многошаговые антагонистические игры с полной информацией.

(φ^0, ψ^0, S)

T – кол-во шагов

$t = 1 \ldots T$

x_t, y_t

(это опр. не игры в нормальной форме)

выбор значения ≡ выбор альтернативы

Шаг 1 $\quad x_1 \in V_1, \; y_1 \in V_1(x_1) = V_1(x_\circ)$

Шаг $t-1$ $\quad x_1 \ldots x_{t-1}\; y_1 \ldots y_{t-1} \quad \bar{x}_t = (x_1 \ldots x_t)$

$\bar{y}_t = (y_1 \ldots y_t)$

Шаг t $\quad x_t \in V_t(\bar{x}_{t-1}\, \bar{y}_{t-1}) = V_t(\circ) \quad y_t \in V_t(\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1}) = V_t(\circ)$

$\Rightarrow T$: $(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$ – партия игры

Для $\forall$ партии игры о-но $F(\bar{x}_T\, \bar{y}_T)$

ВАЖНЕ NOW

52 Стратегия — "план игры", кот. готовится до игры

$t \qquad x_t = \tilde{x}_t(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1})$

$\tilde{x}_t \in \tilde{U}_t \subseteq U_t(\cdot)$

$\Rightarrow$ мн.во стратегий: (1ого игрока)

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_t, t = \overline{1,T}) \in \tilde{X} = \times \prod_{t=1}^{T} \tilde{U}_t$$

2 игрок:

$$y_t = \tilde{y}_t(\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1})$$

$$\tilde{y}_t \in \tilde{V}_t \subseteq V_t(\cdot)$$

$$\tilde{y} = (\tilde{y}_t, t = \overline{1,T}) \in \tilde{Y} = \times \prod_{t=1}^{T} \tilde{V}_t$$

$\tilde{x}, \tilde{y}$ до игры, н/з друг от друга

Осталось опр-ть $F(\tilde{x}, \tilde{y})$

$(\tilde{x}\tilde{y}) \to (\bar{x}_T \bar{y}_T)$

$\tilde{x}_1 = x_1 \quad y_1 = \tilde{y}_1(x_1)$

$\tilde{x}_2 = \tilde{x}_2(x_1 y_1)$

$\Rightarrow$ подстановками опр-ем партию игры

$F(\tilde{x}\tilde{y}) = F(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$

$\Rightarrow$ опр. многош. игру в норм. форме

$\Gamma = \langle \tilde{X}, \tilde{Y}, F(\tilde{x}, \tilde{y}) \rangle$

$\Gamma' \quad U_t(\cdot), V_t(\cdot)$ конечные

$\Gamma'' \quad U_t(\cdot) \equiv U_t, \ V_t(\cdot) \equiv V_t \qquad t = 1..T$

компакты метр. пр-ва зависящие только от t

$F(\bar{x}_T, \bar{y}_T) \qquad (\times \prod_{t=1}^{T} U_t) \times (\times \prod_{t=1}^{T} V_t)$

$\tilde{x}^0 = (\tilde{x}_t^0 \ \ t = 1..T)$

$\tilde{y}^0 = (\tilde{y}_t^0 \ \ t = 1..T)$

$\tilde{y}_T^0, \tilde{x}_T^0, \tilde{y}_{T-1}^0, \ldots$

$$\tilde{y}_T^0 : \ \tilde{y}_T^0(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}) \stackrel{def}{=} y_T^0 : F(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}, y_T^0) = \min_{y_T \in V_T(\cdot)} F(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}, y_T) := F(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1})$$

одна из ф-ий Беллмана

Фикс. Tное значение аргументов

$$(\bar{x}_{T-1}, \bar{y}_{T-1}) : \tilde{x}^o_T(\bar{x}_{T-1}, \bar{y}_{T-1}) \overset{def}{=} x^o_T :$$

$$F(\bar{x}_{T-1}, x^o_T, \bar{y}_{T-1}) = \max_{x_T \in U_T(\cdot)} F(\bar{x}_{T-1}\ x_T\ \bar{y}_{T-1}) = F(\bar{x}_{T-1}, \bar{y}_{T-1})$$

Доп. уже определили: $\tilde{y}^o_T\ \tilde{x}^o_T\ \tilde{y}^o_{T-1} \dots \tilde{y}^o_{t+1}\ \tilde{x}^o_{t+1}$

$\Rightarrow$ по ходу опр. ли $F(\bar{x}_t, \bar{y}_t)$

$\tilde{y}^o_t, \tilde{x}^o_t$

$t \leftrightarrow T$

$$\tilde{x}^o_1 = x^o_1 : F(x^o_1) = \max_{x_1 \in U_1} F(x_1)$$

$$\tilde{v} = \max_{x_1 \in U_1} F(x_1) = \max_{x_1 \in U_1} \min_{y_1 \in V_1(\cdot)} F(x_1, y_1) = \dots =$$

последов. максимин

$$= \max_{x_1 \in U_1(\cdot)} \min_{y_1 \in V_1(\cdot)} \dots \max_{x_T \in U_T(\cdot)} \min_{y_T \in V_T(\cdot)} F(\bar{x}_T \bar{y}_T)$$

использ

<u>Теорема 1.16</u> (Цермело) Всякая многошаговая игра с полной информацией Γ' имеет решение след. вида $(\tilde{x}^o, \tilde{y}^o, \tilde{v})$

<u>Док-во</u>: 1. Д.м., что $(\tilde{x}^o, \tilde{y}^o)$ образует с.т. $F(\tilde{x}, \tilde{y})$ на $\tilde{X} \times \tilde{Y}$

1) $F(\tilde{x}^o\ \tilde{y}) \geq \tilde{v} \quad \forall \tilde{y} \in \tilde{Y}$

2) $F(\tilde{x}\ \tilde{y}^o) \leq \tilde{v} \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{X}$

Докажем 1) $\forall \tilde{y} \in \tilde{Y} \quad F(\tilde{x}^o, \tilde{y}) = F(\tilde{x}^o\ \tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_{T-1}\ \tilde{y}_T) \geq$

$$\geq \min_{y_T \in V_T(\cdot)} F(\tilde{x}^o_T\ \tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_{T-1}\ y_T) \overset{def\ \tilde{x}^o_T}{=} F(\tilde{x}^o_T\ \tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_{T-1}) =$$

$$= F(\tilde{x}^o_1 \dots \tilde{x}^o_{T-1}, \tilde{x}^o_T, \tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_{T-1}) = \max_{x_T \in U_T(\cdot)} F(\tilde{x}^o_1 \dots \tilde{x}^o_{T-1}\ x_T\ \tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_{T-1})$$

$$= F(\tilde{x}^o_1 \dots \tilde{x}^o_{T-1}\ \tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_{T-1}) \geq F(\tilde{x}^o_1\ \tilde{y}_1) \geq \min_{y_1 \in V_1(\cdot)} F(\tilde{x}^o_1\ y_1) =$$

$$= F(\tilde{x}^o_1) \overset{def}{=} \max_{x_1 \in U_1} F(x_1) = \tilde{v} \quad \text{д-но}$$

 2) д-во аналогично

zwg

Пример Шахматы

считаем, что партия продолж. T
(можно добавить фиктивные ходы)

белые игрок 1
черные игрок 2

$U_t(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1})$
$V_t(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1})$ все возм. ходы на данной позиции

$$F(\bar{x}_T, \bar{y}_T) = \begin{cases} 1 & \text{белые выигр} \\ 1/2 & \text{ничья} \\ 0 & \text{белые проигр} \end{cases}$$

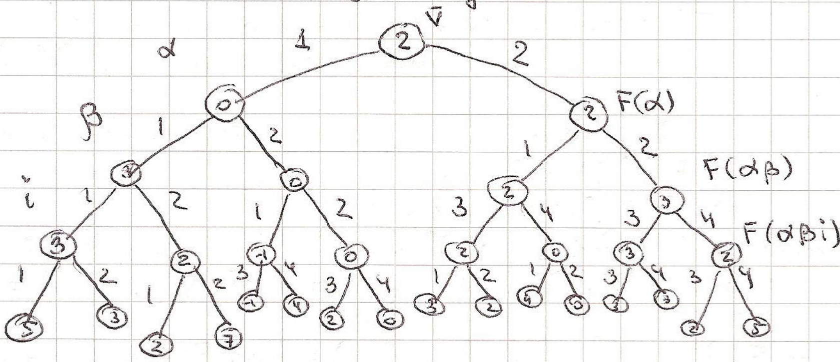
Пример

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$M_1 = \{1,2\}$ $M_2 = \{3,4\}$ строки
$N_1 = \{1,2\}$ $N_2 = \{3,4\}$ столбцы
M_α $\alpha = 1,2$
N_β $\beta = 1,2$

шаг 1: $\alpha \in \{1,2\}$ $\beta \in \{1,2\}$
шаг 2: $i \in M_\alpha$ $j \in N_\beta$

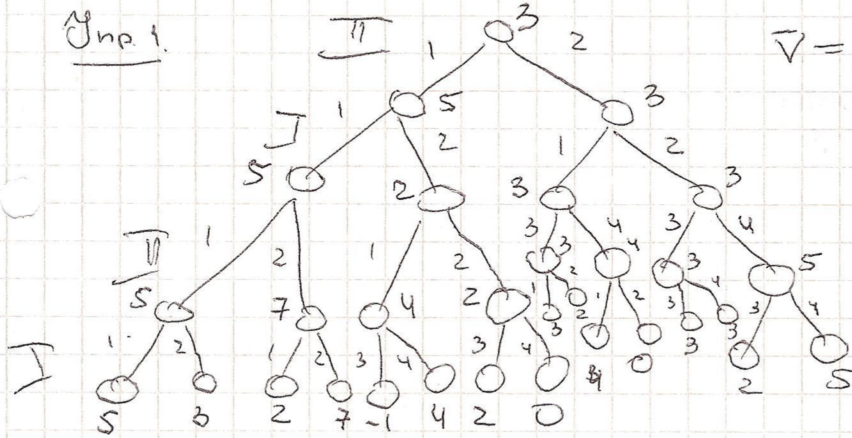
$F(\alpha\beta i j) = a_{ij}$



$$F(\alpha\beta i j) = a_{ij}$$

$$\begin{cases} F(\alpha\beta i) = \min\limits_{j \in N_\beta} a_{ij} \\ F(\alpha\beta) = \max\limits_{i \in M_\alpha} F(\alpha\beta i) \\ F(\alpha) = \min\limits_{\beta=1,2} F(\alpha\beta) \\ \bar{v} = \max\limits_{\alpha=1,2} F(\alpha) \end{cases}$$

Упр. 1.



Опт. стратегии

β^0 $\quad \tilde{j}^0(\alpha, \beta)$ $\quad \beta^0 = 2$ $\quad j^0(1,2) = 4$

$j^0(2,2) = 4, 3$

$\alpha^0(\beta)$ $\quad \check{i}(\alpha, \beta, j)$ $\quad \alpha^0(1) = 1$ $\quad i(1,1,1) = 1, 2$

$i(1,1,2) = 2$

$\alpha^0(2) = 1, 2$

$i(1,2,1) = 4$

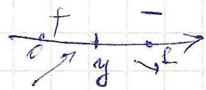
$i(1,2,2) = 3, 4$

$i(2,2,3) = 3, 4$

$i(2,2,4) = 4$

Упр 2 $\quad F(xy) = -(x-y)^2 = -(x^2 - 2xy + y^2) =$

$= -x^2 + 2xy - y^2$ – макс в верх



$F'_x = -2x + 2y = 0$ $\quad x = y$

$F(y) = -\cancel{y^2} + \cancel{2y^2} - y^2 = 0 \Rightarrow$

$V = 0$

$x = 0 \Rightarrow -y^2 = F(y)$

$F(y) \to \min$

$V = -1$

$x = 1 = -y^2 + 2y - 1 =$

$= (y-1)^2$

α^0, $\tilde{i}^0(\alpha,\beta)$ – необх. выбрать

$\alpha^0 = 2$ $\tilde{i}^0(2,1) = 3$ Стратегия 1ого игрока

$\tilde{i}^0(2,2) = 3, 4$

$\tilde{\beta}^0(\alpha)$ $\tilde{j}^0(\alpha,\beta,i)$ – необходимо выбрать

$\tilde{\beta}^0(1) = 2$ $\tilde{\beta}^0(2) = 1$

$\tilde{j}^0(1,2,1) = 3$

$\tilde{j}^0(1,2,2) = 4, 3$ – не наил. но не ошибочный

$\tilde{j}^0(2,1,1) = 2$

$\tilde{j}^0(2,1,2) = 2$ Стратегии 2ого игрока

Упр шаг 1 $\beta \in \{1\,2\}$ $\alpha \in \{1\,2\}$ Матрица
шаг 2 $j \in N_\beta$ $i \in M_\alpha$ такая же

<u>Пример</u> $F(xy) = -(x-y)^2$

$X = [0.1]$ $Y = [0.1]$

шаг 1 $x \in X$ $y \in Y$

Найти: знач. игры, оптим. стратегии

$\tilde{v} = \underline{v}$ – зн. е максимин

x^0, $y(x)$

Глава II Неантагонистические игры

Определим игру такого вида:

$$\Gamma = \langle X, Y, F(xy)\, G(xy) \rangle$$

$x \in X$ 1ый игрок макс-т F

$y \in Y$ 2ой макс. G

Если $F \equiv -G \Rightarrow$ игра антагонист.

Это игра в н.ф (н/з друг от друга)

<u>Опр</u> $(x^0 y^0)$ – ситуация равновесия (равновесие по Нэшу), если
$$\begin{cases} F(xy^0) \le F(x^0y^0) & \forall x \in X \\ G(x^0y) \le G(x^0y^0) & \forall y \in Y \end{cases}$$

$F = -G$ – с.т.

<u>Опр</u> игра Γ наз. биматричной, если мн-ва стратегий $X = \{1..m\}$ и $Y = \{1..n\}$ конечные

$i \in X$, $j \in Y$ $A = (a_{ij})_{m \times n}$

$F(ij) = a_{ij}$ $G(ij) = b_{ij}$ $B = (b_{ij})_{m \times n}$

Опр Равновесие биматричной игры в чистых стратегиях (i^0, j^0)

$$\begin{cases} a_{ij^0} \le a_{i^0 j^0} & i = 1..m \\ b_{i^0 j} \le b_{i^0 j^0} & j = 1..n \end{cases}$$

Недостатки ситуаций равновесия

Пример 1 Семейный спор

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} Ф & Т \end{array} \\ \begin{array}{c} Ф \\ Т \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} Ф & Т \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} Ф \\ Т \end{array} \end{array}$$

с.р. (1.1)
(2.2)

Пример 2 Дилемма заключенного

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} нет \\ да \end{array} & \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cc} нет & да \end{array} \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} нет \\ да \end{array} & \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -10 & -5 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cc} нет & да \end{array} \end{array}$$

ситуация р-сия: $(-5, -5)$
по всем лучше $(-2, -2)$