ЗАДАЧИ К ЭКЗАМЕНУ

1. Выяснить, имеет ли матрица

$$\begin{matrix} 4 & 5 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 & 5 \end{matrix}$$

седловую точку. Если да, то найти все седловые точки. Ответ:(1,3),(2,3),(4,3).

2. Может ли матрица размера 3x3 иметь ровно 7 седловых точек ? Ответ: нет.
3. Имеет ли функция $F(x,y)= -2x^2+xy+3y^2+3x-y$ на единичном квадрате седловую точку? Если да, то найти все седловые точки. Ответ: (19/25,1/25).
4. Найти максимин и максиминные стратегии для функции. $F(x,y)= x^2-xy+y^2+3x-y$ на квадрате $[-1,1]x[-1,1]$. Ответ: 7/2, $x^0=1$.
5. В задаче 4 найти минимакс и минимаксные стратегии второго игрока.Ответ: 11/3, $y^0=1/3$
6. Пусть (x^1,y^1) и (x^2,y^2) - две седловые точки функции $F(x,y)$. Будут ли пары (x^1,y^2) и (x^2,y^1) также седловыми точками этой функции ? Ответ:да.
7. Решить матричную игру с матрицей

$$\begin{matrix} 4 & 4 & 2 & 1 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 8 & 3 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{matrix}$$

Ответ: $v=2$, $p^0=(2/5,0,3/5)$, $q^0=(0,0,1,0,0)$.

8. Решить матричную игру с матрицей, транспонированной к матрице предыдущей задачи Ответ: $v=22/5$, $p^0=(4/5,0,0,0,0,1/5)$, $q^0=(3/5,2/5,0)$.
9. Решить матричную игру с матрицей

$$\begin{matrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{matrix}$$

Ответ: $v=7/5$, $p^0=q^0=(2/5,1/5,2/5)$.

10. Свести матричную игру $\begin{matrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & -1 \end{matrix}$ к паре двойственных задач линейного программирования
11. Найти все оптимальные стратегии первого игрока в игре с матрицей $\begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{matrix}$

Ответ: $1/3 \le p_1^0 \le 2/3$.

12. Найти все ситуации равновесия в чистых стратегиях биматричной игры

$$\begin{matrix} 4 & 5 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 8 \end{matrix}$$

Ответ (1,4).

13. В задаче 12 найти все парето-оптимальные ситуации. Ответ: (1,4). (3,6).
14. Найти все ситуации равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 5 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

Ответ: $p^0=(2/3,1/3)$, $q^0=(6/11,0,5/11)$.

15. Найти все ситуации равновесия игры двух лиц Г=<X,Y,F(x,y),G(x,y)>, где $F(x,y)=-2x^2+xy-y^2$, $G(x,y,)=x^2+(1/2)xy-y^2$, $X=Y=[0,1]$ Ответ: (0,0).
16. Решить биматричную игру Γ_1

$$\begin{matrix} 4 & 5 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 5 \\ 6 & 6 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{matrix}$$

Ответ: $F_1=3$, $i^0=2$.

17. Решить игру Γ_1 с функциями выигрыша $F(x,y)=x-(y-x)^2$, $G(x,y) = (x-y)^2$. $X=Y=[0,2]$. Ответ: $F_1=0$, $x^0=1$.
18. В условиях задачи 16 решить игру Γ_2. Ответ: $F_2=K=6$, $i^0(1)=3$, $i^0(j)=1$, $j\ne1$.
19. Привести пример биматричной игры Γ_2., где M>K. Ответ: G =1.
20. Найти ситуацию равновесия игры Γ_3 из задачи 16. Ответ: $i^0=3$, $j^0(3)=1$, $j^0(i)=4$, $i\ne3$.
21. Найти решение одношаговой игры с полной информацией: сначала первый игрок выбирает номер строки i матрицы

$$A=(a_{ij})_{3x6} = \begin{matrix} 4 & 5 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 2 \end{matrix}.$$

Затем второй выбирает номер столбца j , зная выбор первого игрока . Выигрыш первого игрока определяется по указанной матрице. Ответ: $v=\max_i \min_j a_{ij}=2$, $i^0=2$, $j^0(i)\in \mathrm{Argmin}_j a_{ij}$.

21. В условиях предыдущей задачи пусть сначала выбор делает второй игрок, а потом первый. Найти решение игры с полной информацией. Ответ: $v=\min_j \max_i a_{ij}=3$, $j^0=6$, $i^0(j)\in \mathrm{Argmax}_i\, a_{ij}$

22. Найти решение игры с полной информацией: сначала второй игрок выбирает четность j , затем первый выбирает i, затем второй выбирает j в соответствии с выбранной четностью Выигрыш первого игрока определяется по матрице

$$\begin{matrix} 1 & 8 & 2 & 6 \\ 7 & 4 & 3 & 1 \end{matrix}$$

Ответ: v=3, оптимальная стратегия первого игрока: i^0(чет)=1, i^0(нeч)=2. оптимальная стратегия второго игрока: неч. $j^0(1)=1$, $j^0(2)=3$

①

4	5	2	2	5	2
6	2	2	3	4	5
4	2	1	3	3	4
5	3	2	2	3	5

(x^0, y^0) – седловая точка $\Leftrightarrow \max\limits_{x \in X} F(x, y^0) = F(x^0, y^0) = \min\limits_{y \in Y} F(x^0, y)$

(+) $\underline{v} = \max\limits_{x \in X} \inf\limits_{y \in Y} F(x,y) = \min\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X} F(x,y) = \overline{v}$

фикс столбец, max $\{6, 5, 2, 3, 5, 5\} \Rightarrow$ min позиция $\{3\}$ $\overline{v} = 2$

фикс строку, min $\{2, 2, 1, 2\} \Rightarrow$ max позиции $\{1, 2, 4\}$ $\underline{v} = 2$

$\Rightarrow \underline{v} = \overline{v} = 2$, $X^0 = \{1, 2, 4\}$, $Y^0 = \{3\}$

Седловые точки $(1,3), (2,3), (4,3)$

---

③ $F(x,y) = -2x^2 + xy + 3y^2 + 3x - y$

фикс x

$F''_{yy} = 3 > 0 \Rightarrow$ вып по y, min достигается при

$y(x) = -\frac{b}{2a} = -\frac{x-1}{2 \cdot 3} = \frac{1-x}{6}$

$\Rightarrow W(x) = \min\limits_{0 \le y \le 1} F(x,y) = -2x^2 + x\left(\frac{1-x}{6}\right) + 3\left(\frac{1-x}{6}\right)^2 + 3x +$

$+ \frac{x-1}{6} = \dots = -\frac{25}{12}x^2 + \frac{19}{6}x - \frac{5}{36}$

$-\frac{25}{12} < 0 \Rightarrow$ max достигается при $x^0 = \frac{-b}{2a} =$

$= -\frac{-\frac{19}{6}}{2 \cdot \frac{25}{12}} = \frac{19}{25}$

фикс y

$F''_{xx} = -2 \Rightarrow$ вог по x, max достигается при

$x(y) = -\frac{b}{2a} = -\frac{y+3}{2 \cdot (-2)} = \frac{y+3}{4}$

$\Rightarrow M(y) = \max\limits_{0 \le x \le 1} F(x,y) = -2\left(\frac{y+3}{4}\right)^2 + y\frac{y+3}{4} + 3y^2 +$

$+ 3\frac{y+3}{4} - y = \dots = \frac{25}{8}y^2 - \frac{1}{4}y + \frac{9}{8}$

$\frac{25}{8} > 0 \Rightarrow$ min достигается при $y^0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{25}{8}}{2 \cdot (-\frac{1}{4})} = \frac{1}{25}$

$\Rightarrow$ Седловая точка $\left(\frac{19}{25}, \frac{1}{25}\right)$

⑥ Пусть (x_1, y_1), (x_2, y_2) – седловые точки

(x_1, y_2), (x_2, y_1) – седловые точки ???

Из опр. седл. точки для (x_1, y_1) и (x_2, y_2) имеем

$$F(x, y_1) \overset{(1)}{\le} F(x_1, y_1) \le F(x_1, y)$$

$$F(x, y_2) \underset{(3)}{\le} F(x_2, y_2) \le F(x_2, y)$$

Тогда справедливо $F(x_2, y_1) \underset{(1)}{\le} F(x_1, y_1) \underset{(2)}{\le} F(x_1, y_2) \underset{(3)}{\le} F(x_2, y_2)$

$$\underset{(4)}{\le} F(x_2, y_1)$$

$$\Rightarrow F(x_1, y_1) = F(x_1, y_2) = F(x_2, y_2) = F(x_2, y_1)$$

$$\Rightarrow \quad F(x, y_1) \le F(x_1, y_1) = F(x_2, y_1) = F(x_2, y_2) \le F(x_2, y)$$

$$F(x, y_2) \le F(x_2, y_2) = F(x_1, y_2) = F(x_1, y_1) \le F(x_1, y)$$

$\Rightarrow$ (x_2, y_1) и (x_1, y_2) также седловые точки