Введение в системы счисления

А. А. Вылиток, М. О. Проскурня

Оглавление

Введение в системы счисления 1
1. Системы счисления 1
1.1. Базисные числа 2
1.2. Непозиционные системы счисления 2
1.2.1. Римская система 2
1.2.2. Египетская система 3
1.2.3. Славянская система 3
1.3. Позиционные системы счисления 3
1.3.1. Геометрический базис 4
1.3.2. Фибоначчиев базис 4
1.3.3. Факториальный базис 4
1.3.4. Какая СС удобнее для вычислительной техники 5
1.4. Преобразования из одной системы счисления в другую 5
1.4.1. Перевод из десятичной системы в q-ичную и обратно 5
1.4.2. Обратный перевод 6
1.4.3. Перевод из q-ичной системы в систему с основанием q^m и обратно 7
1.4.4. Перевод из q-ичной в p-ичную систему 8
1.4.5. Арифметические операции в q-ичной системе 8
1.5. Список литературы 10

1. Системы счисления

Абстрактные идеальные числа не имеют воплощения в природе, поэтому для их отображения необходимо определиться со способом записи. *Системой счисления* (*СС*) называется совокупность правил записи чисел. Запись подразумевает наличие алфавита символов, из которых составляются «числительные».

Простейшей системой счисления можно назвать единичную *СС*, алфавит которой состоит только из одного символа $\mathcal{A} = \{ \, | \, \}$ (штрих, черта, «палочка»). Для представления некоторого числа N выписывается подряд N штрихов. Например, число 5 в единичной системе счисления записывается как «|||||».

Главным недостатком единичной *СС* можно назвать линейную зависимость длины записи числа от величины его самого. То есть для записи чисел, превосходящих миллион, потребуется выписать более миллиона штрихов. Более того, для записи количества молекул во всей вселенной придется использовать всю доступную материю!

1.1. Базисные числа

Одним из способов сокращения длины записи является пополнение алфавита новыми символами, обозначающими масштабные числа. Этот способ хорошо проиллюстрирован в денежной системе. Так, помимо монеты, означающей элементарный денежный знак, обычно существуют монеты большего достоинства, приравненные нескольким элементарным монетам. Это позволяет представить необходимую денежную сумму в виде существенно сокращенного набора монет.

Если добавить в алфавит единичной *СС* дополнительные символы $\nabla = 5$, $\otimes = 10$, $\square = 100$, то запись числа шестнадцать вместо «||||||||||||||||» приобретет более короткую форму «$\otimes\ \nabla\ |$». Можно сказать, что до пополнения алфавита мы использовали линейное разложение исходного числа по *базису* $\mathcal{B} = \{b_k\} = \{1\}$, состоящему из одного числа — единицы:

$$N = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \qquad (1)$$

Числа, составляющие базис, называются *базисными* (или опорными). После пополнения алфавита базис также был пополнен до 4 чисел: $\{b_{1..4}\} = \{1, 5, 10, 100\}$. При этом представление «$\otimes\ \nabla\ |$» в такой *СС* по сути является сокращенной записью линейного разложения (с опущенными знаками «+») с целыми коэффициентами:

$$N = b_3 + b_2 + b_1 = 15 + 5 + 1 \;\;\Rightarrow\;\; \otimes + \nabla + | \;\;\Rightarrow\;\; \otimes\ \nabla\ | \qquad (2)$$

Далее будут рассматриваться *СС*, основанные на линейном разложении с неотрицательными целыми коэффициентами. Для обеспечения единственности представления в подобных *СС* обычно используют критерий минимального количества слагаемых в сумме разложения, хотя при этом длина самой записи может превосходить минимально возможную длину (см. «Фибоначчиев базис» в позиционных *СС*).

1.2. Непозиционные системы счисления

К непозиционным можно отнести следующие системы счисления:

- единичная,
- римская,
- египетская,
- славянская и другие.

Каждая непозиционная система опирается на конечный базис (конечное множество натуральных чисел). Напомним, что единичная система имеет базис $\{1\}$. Для любой системы с конечным базисом нетрудно найти такое N', что для всех чисел $N > N'$ длина их записи сократится по сравнению с единичной не более, чем в k раз, где k — наибольшее базисное число.

1.2.1. Римская система

Базис римской системы счисления содержит 7 чисел $\mathcal{B} = \{b_{1..7}\} = \{1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000\}$. Алфавит $\mathcal{A} = \{\ \mathrm{I}_{(1)}, \mathrm{V}_{(5)}, \mathrm{X}_{(10)}, \mathrm{L}_{(50)}, \mathrm{C}_{(100)}, \mathrm{D}_{(500)}, \mathrm{M}_{(1000)}\ \}$.

Изначально в римской системе запись произвольного числа была упорядочена по убыванию базисных чисел. Например, XV = $b_3 + b_2 = 10 + 5 = 15$, DCLVII = $b_6 + b_5 + b_4 + b_2 + b_1 + b_1 = 500 + 100 + 50 + 5 + 1 + 1 = 657$.

Правда, со временем были введены некоторые изменения. Для сокращения длины записи некоторые символы размещаются с нарушением упорядоченности. В этом случае меньшее базисное число, стоящее слева от большего, входит в сумму с «отрицательным знаком», то есть вычитается из общей суммы, а не добавляется к ней. Например, вместо записи IIII для числа четыре стали использовать запись IV, вместо записи VIIII — запись IX. Не любые комбинации символов допустимы. Разрешены следующие «нарушения» :

— непосредственно перед V или X может стоять один символ I

— непосредственно перед L или C может стоять один символ X

— непосредственно перед D или M может стоять один символ C

Можно считать, что эти изменения просто дополнили базис ещё несколькими числами, а алфавит, соответственно, ещё несколькими составными «символами»: 4 (IV), 9 (IX), 40 (XL), 90 (XC), 400 (CD), 900 (CM).

1.2.2. Египетская система

Египетская система счисления опиралась на базис из 4 чисел $\mathcal{B} = \{b_{1..4}\} = \{1, 10, 100, 1000\}$, алфавит $\mathcal{A} = \{ \mathrm{I}_{(1)}, \cap_{(10)}, \int_{(100)}, \rho_{(1000)} \}$.

В этой системе, например, число 352 записывается как ∫∫∫∩∩∩∩∩ I I.

1.2.3. Славянская система

Славянская алфавитная непозиционная *СС* обладала следующим базисом $\mathcal{B} = \{b_{1..18}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900\}$.

Символ	Число	Символ	Число	Символ	Число
А (Аз)	1	И	10	Р (Рцы)	100
В (Ве́ди)	2	К (Ка́ко)	20	С (Сло́во)	200
Г (Глаго́ль)	3	Л (Лю́ди)	30	Т (Тве́рдо)	300
Д (Добро́)	4	М (Мысле́те)	40	У (Ук)	400
Е (Есть)	5	Н (Наш)	50	Ф (Ферт)	500
S (Зело́)	6	Ѯ (Кси)	60	Х (Хер)	600
З (Земля́)	7	О (Он)	70	Ѱ (Пси)	700
І (Иже)	8	П (Поко́й)	80	Ѡ (Оме́га)	800
Ѳ (Фита́)	9	Ч (Червь)	90	Ц (Цы)	900

1.3. Позиционные системы счисления

В отличие от непозиционных, позиционные *СС* обладают бесконечным базисом $\mathcal{B} = \{b_{0..\infty}\}$, где $0 < b_k < b_{k+1}$. В записи числа в позиционной системе каждому базисному числу соответствует фиксированная позиция. В этой позиции с помощью соответствующего символа алфавита указывается число вхождений базисного числа в сумму разложения по базису:

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k , \qquad (3)$$

где $a_k \in \left[0, \frac{b_{k+1}}{b_k}\right)$.

Следует сказать, что в общем случае базис может содержать не только положительные, но и отрицательные числа. Это позволяет отказаться от использования знака минус «–» перед записью отрицательного числа[1].

1.3.1. Геометрический базис

Для *СС* с базисом $\mathcal{B} = \{b_{0..\infty}\}$, базисные числа которого определяются как члены геометрической прогрессии $b_k = p^{\,k}$ с основанием $p > 1$, линейное разложение числа N по базису $\mathcal{B}$ будет являться полиномом от p некоторой степени n:

$$N = \sum_{k=1}^{n} a_k p^k = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p^1 + a_0 p^0 . \quad (4)$$

Так как $\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{p^{k+1}}{p^k} = p$, алфавит подобных *СС* содержит всего p символов для представления чисел $\{0, \ldots, p-1\}$. Наиболее известными являются позиционные *СС* с геометрическим базисом с основаниями 10, 2, 16, 8, 60.

$$\mathcal{A}_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\mathcal{A}_2 = \{0, 1\}$$

$$\mathcal{A}_{16} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}\}$$

1.3.2. Фибоначчиев базис

Если в качестве базиса позиционной *СС* использовать последовательность чисел Фибоначчи $\mathcal{B} = \{b_{1..\infty}\} = \{F_k\}$ (где $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, $F_0 = F_1 = 1$), то алфавит будет содержать всего 2 символа для чисел $\{0, 1\}$, так как отношение соседних опорных чисел не превышает 2:

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{F_{k+1}}{F_k} = \frac{F_k + F_{k-1}}{F_k} = 1 + \frac{F_{k-1}}{F_k} < 2 .$$

Одним из интересных свойств такой *СС* является отсутствие идущих подряд 1 в записи любого числа. Так, две единицы подряд означают, что в разложении имеется сумма двух соседних Фибоначчиевых чисел, но она равна следующему базисному числу.

$$N = \sum_{k=1}^{\infty} a_k F_k \quad (5)$$

1.3.3. Факториальный базис

СС с базисом $\mathcal{B} = \{b_{1..\infty}\} = \{k!\}$, элементы которого образуют факториальный ряд требуют бесконечного алфавита в общем случае, так как $\frac{b_{k+1}}{b_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$.

$$N = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k! \quad (6)$$

---

[1] За информацией по *СС* с симметричным базисом обращайтесь к дополнительной литературе.

1.3.4. Какая СС удобнее для вычислительной техники

Для использования в вычислительной технике удобны позиционные *СС* с геометрическим базисом. Для этих систем существуют эффективные алгоритмы, реализующие арифметические операции над числами. Помимо скорости выполнения операций необходимо учитывать и сложность изготовления элементной базы в зависимости от выбранного основания *СС*. Чем больше основание p, тем меньшее количество разрядов требуется для представления заданного числа, и тем больше понадобится различных символов алфавита.

Увеличение количества символов алфавита приводит к усложнению элементов памяти и функциональных элементов арифметико-логических устройств. Если оценить стоимость C представления некоторого числа x как произведение необходимого количества разрядов n_x на количество состояний каждого разряда p, то окажется, что минимум достигается при $p = 3$.

Для доказательства достаточно оценить максимальное количество представимых чисел при заданной стоимости представления $C = n_x p$. Если рассматривать максимум $\max\limits_p x = p^{n_x} = p^{\frac{C}{p}}$ как функцию $X(p)$, то экстремум она имеет в нуле своей первой производной $X'(p)$. Производная $\frac{\partial X}{\partial p} = \left(p^{\frac{C}{p}}\right)\frac{-C}{p^2}\ln p + \frac{C}{p}p^{\left(\frac{C}{p}-1\right)} = Cp^{\left(\frac{C}{p}-2\right)}\left(1-\ln p\right)$ принимает значение 0 в точке e (когда обнуляется разность в скобках). Так как слева от e производная положительна, а справа − отрицательна, значит, в точке e функция X имеет максимум. В качестве основания *СС* иррациональное число e использовать нельзя — нужно выбрать ближайшее целое. Ближе всего к e расположены целые числа 3 и 2.

1.4. Преобразования из одной системы счисления в другую

В этом разделе мы рассмотрим алгоритмы перевода записей чисел в рамках позиционных *СС* с разными геометрическими базисами. Здесь необходимо уточнить представление произвольного рационального числа x. Для этого необходимо расширить базис отрицательными степенями p^{-k} основания *СС*. Тогда представление (4) можно обобщить в виде:

$$x = a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + \ldots + a_1 p^1 + a_0 p^0 + a_{-1} p^{-1} + \ldots + a_{-m} p^{-m}, \qquad (7)$$

где n и m — число целых и дробных разрядов, соответственно.

1.4.1. Перевод из десятичной системы в *q*-ичную и обратно

При переводе чисел из десятичной системы счисления в систему с основанием $q > 1$ обычно используют следующий алгоритм (он основан на представлении (7), доказательство здесь не приводится):

1) если переводится целая часть числа, то она делится на q; в результате получаются целая часть от деления (частное) и остаток. Остаток (число от 0 до $q - 1$) изображается в виде одной q-ичной цифры и запоминается. Полученное частное вновь делится на q, остаток запоминается. Процедура продолжается до тех пор, пока частное не станет равным нулю. Остатки от деления на q выписываются в порядке, обратном их получению.

2) если переводится дробная часть числа, то она умножается на q, после чего целая часть запоминается (в виде q-ичной цифры) и отбрасывается. Вновь полученная дробная часть умножается на q и т. д. Процедура продолжается до тех пор, пока не выполнится

одно из условий: а) дробная часть равна нулю; б) обнаружен период — повторяющаяся последовательность целых частей. Целые части выписываются после двоичной запятой в порядке их получения. Результатом может быть либо конечная, либо периодическая q-ичная дробь. Поэтому, когда дробь является периодической и период слишком велик, приходится обрывать умножение на каком-либо шаге и довольствоваться приближенной записью исходного числа в системе с основанием q. Конечной десятичной дроби в q-ичной системе может соответствовать периодическая дробь, например: $0{,}1_{10} = 0{,}(0022)_3$.

Пример 1

Перевести данное число из десятичной системы счисления в двоичную: а) 464_{10}; б) $380{,}1875_{10}$; в) $115{,}94_{10}$ (получить пять знаков после запятой в двоичном представлении).

Решение

```
464  |  0                    380  |  0     |1875          115  |  1       |94
232  |  0                    190  |  0    0|375            57  |  1      1|88
116  |  0                     95  |  1    0|75             28  |  0      1|76
 58  |  0                     47  |  1    1|5              14  |  0      1|52
 29  |  1                     23  |  1    1|0               7  |  1      1|04
 14  |  0                     11  |  1                      3  |  1      0|08
  7  |  1                      5  |  1                      1  |  1      0|16
  3  |  1                      2  |  0
  1  |  1                      1  |  1
```

а) $464_{10} = 111010000_2$;

б) $380{,}1875_{10} = 101111100{,}0011_2$;

в) $115{,}94_{10} \approx 1110011{,}11110_2$ (в последнем случае было получено шесть знаков после запятой, после чего результат был округлен).

Если исходное число дано с точностью до 10^{-n}, то чтобы сохранить точность при переводе в q-ичную систему, необходимо получить k цифр, где k — наименьшее среди чисел, удовлетворяющих неравенству $q^{-k} \le 10^{-n}$.

1.4.2. Обратный перевод

При переводе чисел из системы счисления с основанием q в десятичную систему счисления необходимо пронумеровать разряды целой части справа налево, начиная с нулевого, и в дробной части, начиная с разряда сразу после запятой слева направо (начальный номер −1). Затем вычислить сумму произведений соответствующих значений разрядов на основание системы счисления в степени, равной номеру разряда. Это и есть представление исходного числа в десятичной системе счисления. Другими словами, вычислить по правилам десятичной арифметики значение выражения (7), в котором q и коэффициенты a_i записаны в десятичной системе.

Пример 2

Перевести данное число в десятичную систему счисления.

а) 1000001_2.

6	5	4	3	2	1	0
1	0	0	0	0	0	1

$$1000001_2 = 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 64 + 1 = 65_{10}.$$

Замечание. Очевидно, что если в каком-либо разряде стоит нуль, то соответствующее слагаемое можно опускать.

б) $1000011111{,}0101_2$.

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1

$$1000011111{,}0101_2 = 1\cdot 2^9 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-4} = 512 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + 0{,}25 + 0{,}0625 = 543{,}3125_{10}.$$

в) $1216{,}04_8$.

$$1216{,}04_8 = 1\cdot 8^3 + 2\cdot 8^2 + 1\cdot 8^1 + 6\cdot 8^0 + 4\cdot 8^{-2} = 512 + 128 + 8 + 6 + 0{,}0625 = 654{,}0625_{10}.$$

г) $29A{,}5_{16}$.

$$29A{,}5_{16} = 2\cdot 16^2 + 9\cdot 16^1 + 10\cdot 16^0 + 5\cdot 16^{-1} = 512 + 144 + 10 + 0{,}3125 = 666{,}3125_{10}.$$

Перевод из q-ичной системы в десятичную — это по сути вычисление значения многочлена в точке q. Для таких вычислений известен быстрый алгоритм — схема Горнера:

$$a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \ldots + a_1 q^1 + a_0 = (((a_{n-1}q + a_{n-2})\,q + \ldots)\,q + a_1)\,q + a_0 \qquad (8)$$

1.4.3. Перевод из q-ичной системы в систему с основанием q^m и обратно

Для некоторых частных случаев, проанализировав представление числа в виде разложения по степеням основания *СС* (7), можно получить более простые способы перевода.

Если необходимо перевести число из двоичной системы счисления в систему счисления, основанием которой является степень двойки, достаточно объединить цифры двоичного числа в группы по столько цифр, каков показатель степени, и использовать приведенный ниже алгоритм. Например, если перевод осуществляется в восьмеричную систему, то группы будут содержать три цифры ($8 = 2^3$). Итак, в целой части будем производить группировку справа налево, в дробной — слева направо. Если в последней группе недостает цифр, дописываем нули: в целой части — слева, в дробной — справа. Затем каждая группа заменяется соответствующей цифрой новой системы. Соответствия приведены в таблицах.

q	2	00	01	10	11
	4	0	1	2	3

q	2	000	001	010	011	100	101	110	111
	8	0	1	2	3	4	5	6	7

q	2	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
	16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

Переведем из двоичной системы в шестнадцатеричную число $1111010101{,}11_2$.

$\underline{0011}\ \underline{1101}\ \underline{0101},\underline{1100}_2 = 3D5,C_{16}$.

Легко обобщить этот способ и на другие основания. Например, при переводе из троичной в 27-ричную систему, понадобится группировка по три цифры и замена каждой тройки одной 27-ричной цифрой. Для изображения цифр, значения которых больше девяти, обычно используются буквы латинского алфавита: десять — A, одиннадцать — B и т. д.

При обратном переводе каждую цифру q^m-ичной системы записывают соответствующей m-кой q-ичных цифр. Незначащие нули из получившейся записи можно удалить.

Пример

$7401,1_8 = \underline{111}\ \underline{100}\ \underline{000}\ \underline{011},\underline{001}_2$;

$1A0,4_{16} = \underline{0001}\ \underline{1010}\ \underline{0000},\ \underline{0100}_2 = 110100000,01_2$

1.4.4. Перевод из q-ичной в p-ичную систему

Перевод из q-ичной в p-ичную систему можно осуществить через перевод из из q-ичной в десятичную, а затем из десятичной в p-ичную систему. Можно напрямую: записать основание q и коэффициенты в представлении (7) в p-ичной системе и вычислить значение выражения, пользуясь таблицами сложения и умножения для p-ичной системы.

1.4.5. Арифметические операции в q-ичной системе

Для выполнения арифметических операций в системе счисления с основанием q необходимо иметь соответствующие таблицы сложения и умножения. Для $q = 2$, 8 и 16 таблицы представлены ниже.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Пример 3

Сложить числа:

а) $10000000100_2 + 111000010_2 = 10111000110_2$

б) $223{,}2_8 + 427{,}54_8 = 652{,}74_8$

в) $3B3{,}6_{16} + 38B{,}4_{16} = 73E{,}A_{16}$

```
-  10000000100      -   223,2       -   3B3,6
     111000010         427,54           38B,4
 -------------      --------        --------
   10111000110         652,74           73E,A
```

Пример 4

Выполнить вычитание:

а) $1100000011{,}011_2 - 101010111{,}1_2 = 110101011{,}111_2$.

б) $1510{,}2_8 - 1230{,}54_8 = 257{,}44_8$.

в) $27D{,}D8_{16} - 191{,}2_{16} = EC{,}B8_{16}$.

```
-  1100000011,011     -   1510,2      -   27D,D8
     101010111,1         1230,54          191,2
 ----------------     ---------       --------
     110101011,111        257,44           EC,B8
```

Пример 5

Выполнить умножение:

а) $100111_2 \times 1000111_2 = 101011010001_2$

б) $1170{,}64_8 \times 46{,}3_8 = 57334{,}134_8$

в) $61{,}A_{16} \times 40{,}D_{16} = 18B7{,}52_{16}$

```
×        100111       ×   1170,64      ×     61,A
        1000111              46,3            40,D
 --------------       ----------       ---------
+        100111       +   355 234      +    4F 52
+       100111        +  7324 70          1868
+      100111           47432 0        ---------
   100111             ----------          18B7,52
 --------------          57334,134
   101011010001
```

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

1.5. Список литературы

[1] Фомин С.В. Системы счисления. — 5-е изд. — М.: Наука, 1987.
[2] Яглом И.М. Системы счисления. — Квант, 1991 № 12, с. 14–22.