Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Алгебра и аналитическая геометрия

Под редакцией проф. И. С. Ломова

Учебно-методическое пособие для студентов 1 курса

Москва
МАКС Пресс
2009

ББК 22.143
УДК 512.6+514.1
Л75

Печатается по решению редакционно-издательского совета факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова

Коллектив авторов:

А. Н. Дарьин, Н. Б. Есикова, Н. И. Ионкин, Г. Д. Ким, Л. В. Крицков, В. А. Морозова, В. С. Панфёров, И. В. Рублёв, Е. Е. Тыртышников, А. И. Фалин, А. С. Фурсов

Л75 **Алгебра и аналитическая геометрия:** учебно-методическое пособие / под ред. И. С. Ломова – М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2009. – 48 с.
ISBN 978-5-89407-386-6.

Настоящее пособие содержит методические материалы, сопровождающие учебный процесс: программа курса, планы семинарских занятий, экзаменационные вопросы, образцы контрольных работ, зачётных заданий.

ББК 22.143
УДК 512.6+514.1

ISBN 978-5-89407-386-6

Содержание

Об учебном плане

Дисциплина «Алгебра и аналитическая геометрия» знакомит студентов с фундаментальными методами исследования современной алгебры и аналитической геометрии. В процессе обучения студенты должны усвоить методику построения алгебраических структур, внутреннюю логику, связывающую линейную алгебру и аналитическую геометрию, приобрести навыки исследования и решения задач.

Дисциплина относится к обязательным курсам для студентов первого курса факультета ВМК МГУ. Изучается в первом и втором семестрах. По этому курсу читаются лекции (144 часа в первом семестре и 128 часов — во втором) и проводятся семинарские занятия (31–32 семинара в первом семестре и 28–29 семинаров — во втором).

В каждом семестре проводится один коллоквиум (в форме устного собеседования по теоретическому материалу) и 2–3 контрольные работы по решению задач.

По окончании семестров в рамках зачётной сессии в каждой группе проводятся зачёты. Контрольные работы и коллоквиум являются элементами зачёта. Студенты, не сдавшие зачёт в группе, обязаны сдавать его специальной зачётной комиссии.

После успешного завершения зачётной сессии студенты допускаются к экзаменам. Экзамен сдаётся в устной форме.

В 2009–10 учебном году: лекторы по курсу — Е. Е. Тыртышников, Г. Д. Ким, В. С. Панфёров; преподаватели — О. Н. Бобылёва, А. Б. Будак, А. Н. Дарьин, И. В. Дмитриева, Н. Б. Есикова, Н. И. Ионкин, Л. В. Крицков, В. А. Морозова, И. В. Рублёв, С. Г. Руднев, В. В. Сазонов, А. И. Фалин, А. С. Фурсов.

Программа курса

I семестр

Основы теории матриц. Операции над матрицами. Элементарные преобразования матрицы и матрицы элементарных преобразований. Приведение к ступенчатой, трапециевидной и диагональной формам.

Определитель. Перестановки. Построение определителя n-го порядка. Свойства определителя. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Определитель произведения матриц. Методы вычисления определителя.

Обратная матрица. Невырожденность матрицы. Понятие обратной матрицы. Критерий обратимости. Метод Гаусса–Жордана обращения матрицы.

Множества. Декартово произведение множеств. Бинарное отношение. Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности. Фактор-множество.

Отображение. Композиция отображений. Обратное отображение. Критерий обратимости.

Внутренний и внешний законы композиции. Алгебраические операции и их свойства. Обобщённая ассоциативность.

Введение в теорию линейных пространств. Понятие вещественного линейного пространства. Примеры. Арифметическое пространство. Линейная зависимость и независимость. Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора. Переход к другому базису. Матрица перехода. Линейные подпространства и линейные аффинные многообразия.

Геометрические векторы. Направленные отрезки и их равенство. Свободный вектор как класс эквивалентности направленных отрезков. Линейные операции над векторами. Линейное пространство геометрических векторов на прямой, на плоскости и в пространстве. Геометрический смысл линейной зависимости. Коллинеарные и компланарные векторы. Проекции вектора. Свойства линейности проекций. Координаты вектора и их связь с проекциями вектора. Линейность величины проекции вектора на ось.

Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.

Аффинная система координат. Координаты точки. Формулы преобразования координат. Преобразование прямоугольной декартовой системы координат.

Полярные, цилиндрические и сферические координаты.

Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Ранг матрицы и линейная зависимость её строк и столбцов. Ранг произведения матриц. Инвариантность ранга матрицы относительно элементарных преобразований. Эквивалентные матрицы, критерий эквивалентности. Метод Гаусса вычисления ранга матрицы.

Системы линейных алгебраических уравнений. Компактные формы записи системы. Основная и расширенная матрицы системы. Система с квадратной невырожденной матрицей, правило Крамера. Исследование и решение системы общего вида. Теорема Кронекера–Капелли. Общее решение системы. Однородная система линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений.

Элементарные преобразования уравнений. Метод Гаусса исследования и решения системы линейных алгебраических уравнений. Число арифметических операций в методе Гаусса.

Линейное подпространство множества решений однородной системы. Общее решение. Линейное аффинное многообразие множества решений неоднородной системы. Общее решение.

Прямая на плоскости и плоскость в пространстве. Алгебраические линии и поверхности. Инвариантность их порядка.

Различные виды уравнения прямой на плоскости. Критерий параллельности вектора и прямой. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Пучок прямых. Полуплоскости. Расстояние от точки до прямой. Угол между прямыми.

Различные виды уравнения плоскости в пространстве. Взаимное расположение двух плоскостей. Пучок плоскостей. Связка плоскостей. Полупространства. Расстояние от точки до плоскости. Угол между плоскостями.

Прямая в пространстве. Различные виды уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве. Связка прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости. Расстояние от точки до прямой, расстояние между скрещивающимися прямыми, угол между прямой и плоскостью.

Линии и поверхности второго порядка. Эллипс, гипербола и парабола. Общее уравнение линии второго порядка на плоскости. Инварианты линии. Приведённые уравнения. Классификация линий второго порядка на плоскости.

Общее уравнение поверхности второго порядка. Приведённые уравнения. Метод вращений. Эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды, конусы и цилиндры. Прямолинейные образующие. Классификация поверхностей второго порядка.

Группы. Определение, основные свойства, примеры. Подгруппы, смежные классы, нормальный делитель. Изоморфизм и гомоморфизм групп. Фактор-группа. Конечные группы. Теорема Лагранжа. Группа вычетов. Симметрическая и знакопеременная группы. Степени элемента. Циклическая группа, её подгруппы.

Кольцо и поле. Понятие кольца и поля. Основные свойства и примеры. Делители нуля. Изоморфизм колец и полей. Алгебраическое расширение кольца и поля. Кольцо вычетов. Характеристика поля. Поле вычетов по простому модулю. Число элементов в конечном поле.

Комплексные числа. Поле комплексных чисел. Комплексная плоскость. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Возведение в степень и извлечение корня. Корни n-й степени из единицы. Первообразные корни.

Многочлены. Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Деление многочленов, наибольший общий делитель, алгоритм Евклида. Значение многочлена и корни, теорема Безу. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.

Каноническое разложение многочлена над полем комплексных чисел. Кратность корня. Многочлены с вещественными коэффициентами. Формулы Виета. Симметрические многочлены. Многочлены как формальные выражения и как функции. Эквивалентность определений равенства многочленов для бесконечных полей.

II семестр

Линейное пространство над произвольным полем. Терминология и примеры. Ранг и база системы векторов. Базис и размерность линейного пространства. Теорема о неполном базисе. Изоморфизм линейных пространств. Линейное подпространство, линейная оболочка. Критерий эквивалентности систем векторов. Теорема о монотонности размерности. Сумма и пересечение линейных подпространств. Прямая сумма, критерии прямой суммы. Дополнительное подпространство.

Линейное аффинное многообразие. Перенос в линейном пространстве. Параллельные многообразия. Пересечение линейных аффинных многообразий. Выпуклые множества в линейном пространстве.

Евклидово и унитарное пространства. Скалярное произведение векторов. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца. Длина вектора. Угол в евклидовом пространстве. Ортогональные векторы. Ортонормированный базис и ортогональные (унитарные) матрицы. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Построение ортонормированного базиса. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта, QR-разложение матрицы. Матрица Грама, критерий линейной зависимости. Ортогональное дополнение. Задача о перпендикуляре. Изометрия.

Линейное аффинное многообразие в евклидовом и унитарном пространствах. Нормальный вектор линейного многообразия. Уравнение гиперплоскости в евклидовом и унитарном пространствах..

Расстояния в евклидовом и унитарном пространствах. Понятие метрического пространства. Евклидово (унитарное) пространство как метрическое. Расстояние от вектора до подпространства и до линейного многообразия Расстояние между линейными многообразиями.

Линейные операторы. Определение, примеры. Матрица линейного оператора в паре базисов. Изменение матрицы при переходе к другой паре базисов. Эквивалентные матрицы. Линейное пространство линейных операторов и его связь с линейным пространством матриц. Произведение линейных операторов и его матрица. Образ и ядро линейного оператора. Каноническая пара базисов.

Линейные формы (функционалы). Сопряжённое пространство. Линейные формы и гиперплоскость.

Алгебра линейных операторов, действующих в одном пространстве. Матрица оператора в базисе пространства. Изменение матрицы при переходе к другому базису. Подобные матрицы. Обратный оператор. Критерии обратимости.

Структура линейного оператора в комплексном пространстве. Инвариантные подпространства. Сужение оператора. Собственные значения и собственные векторы. Характеристический многочлен. Условие существования собственных значений. Собственное подпространство. Геометрическая и алгебраические кратности собственного значения.

Операторы простой структуры. Критерии простой структуры. Диагонализуемые матрицы.

Треугольная форма матрицы линейного оператора в комплексном пространстве.

Нильпотентный оператор. Собственные значения нильпотентного оператора. Теорема о прямой сумме нильпотентного и обратимого операторов.

Корневые подпространства. Корневые векторы и корневые подпространства. Сдвиг оператора и расщепление пространства в прямую сумму корневых подпространств.

Жорданова форма матрицы линейного оператора в комплексном пространстве. Канонический базис корневого подпространства, матрица сужения оператора на корневое подпространство в каноническом базисе. Жорданов базис и жорданова форма матрицы линейного оператора в комплексном пространстве. Критерий подобия матриц. Теорема Гамильтона–Кэли. Минимальный многочлен.

Инвариантные подпространства минимальной размерностей. Вещественный аналог жордановой формы.

Линейный оператор в евклидовом и унитарном пространствах. Сопряжённый оператор. Существование и единственность. Матрица сопряжённого оператора.

Теорема Шура о треугольной форме матрицы оператора в унитарном пространстве. Базис Шура.

Нормальный оператор и нормальная матрица. Критерий нормальности оператора в унитарном пространстве. Унитарно подобные матрицы. Критерий нормальности комплексной матрицы. Квазидиагональная форма матрицы нормального оператора в евклидовом пространстве. Ортогонально подобные матрицы.

Унитарный оператор и унитарная матрица. Спектральная характеристика унитарного оператора. Каноническая форма матрицы ортогонального оператора.

Самосопряжённый оператор и его матрица. Спектральная характеристика самосопряжённого оператора в унитарном и евклидовом пространствах.

Знакоопределённые операторы и матрицы. Спектральная характеристика знакоопределённого оператора. Квадратный корень из оператора.

Эрмитово разложение оператора. Сингулярное разложение оператора. Сингулярные числа и сингулярная пара базисов. Полярное разложение оператора.

Билинейные и квадратичные формы. Билинейная форма в линейном пространстве. Матрица билинейной формы. Общий вид билинейной формы. Симметрическая и кососимметрическая билинейные формы. Вырожденная билинейная форма.

Квадратичная форма в линейном пространстве. Изменение матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису. Конгруэнтные матрицы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Метод Лагранжа.

Квадратичные формы в вещественном и комплексном пространствах. Закон инерции, сигнатурное правило Якоби, формулы Якоби. Знакоопределённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Общий вид скалярного произведения в конечномерном евклидовом и унитарном пространствах.

Квадратичные формы в евклидовом и унитарном пространствах. Приведение к главным осям. Одновременное приведение пары квадратичных форм к каноническому виду.

Геометрия квадратичных форм и поверхности второго порядка. Гиперповерхности второго порядка в евклидовом пространстве. Общее уравнение. Инварианты гиперповерхности. Приведённые уравнения гиперповерхностей второго порядка.

Классификация алгебраических поверхностей второго порядка в трёхмерном пространстве.

Линейные нормированные пространства. Нормы Гёльдера в конечномерном пространстве. Норма и скалярное произведение. Тождество параллелограмма и критерий евклидовости нормы. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. Норма и метрика. Задача о наилучшем приближении в нормированных пространствах.

Линейные операторы в нормированных пространствах. Непрерывность и ограниченность оператора. Норма оператора. Спектральная норма линейного оператора. Матричные нормы. Евклидова норма. Унитарно (ортогонально) инвариантные нормы.

Экстремальные свойства собственных значений самосопряжённого оператора. Отношение Рэлея. Теорема Куранта–Фишера. Соотношения разделения собственных значений и сингулярных чисел.

Линейные операторные уравнения в нормированном пространстве. Альтернатива Фредгольма. Теорема Фредгольма. Нормальное решение, его существование и единственность для любого разрешимого уравнения. Псевдорешение. Нормальное уравнение. Существование и единственность нормального псевдорешения. Сингулярное разложение и псевдорешение. Метод наименьших квадратов.

Семинарские занятия

Ниже приводятся планы семинарских занятий. Номера задач даны по задачникам [8, 9]. Задачи разбиты на три группы: **А** — для решения в аудитории, **Д** — для самостоятельного решения (домашняя работа), **Р** — дополнительные задачи на усмотрение преподавателя (резерв). В списке задач только для первой задачи указывается её полный номер (например, **5.**16), для следующих за ней задач указываются только последняя часть номера (например, вместо 5.17 указывается 17).

План семинарских занятий, I семестр

Семинар № 1

Операции над матрицами

1. Элементарная техника матричных операций

А: **1.**1, 3, 7, 18, 19(б,е), 35, 36, 23, 25.

Д: **1.**4, 6, 8, 11, 15, 19(в–д), 20(а–г), 27(б,в), 37, 38, **2.**1, 4, 5.

2. Умножение на строки и столбцы

А: **1.**2(а–г), 13.

Д: **1.**21, 40, 39.

3. Другой взгляд на операцию умножения матриц

А: пример 1.4; **1.**10, 14.

Д: **1.**27(г,е).

4. Умножение на диагональную матрицу

А: **1.**30, 31.

Д: **1.**28, 32.

Р: **1.**26, 36.1, **2.**7, 10, 12, 15, 18, 29, 30, 31, 36, 51.

Семинар № 2

5. Элементарные преобразования матрицы и матрицы элементарных преобразований

А: **3.**1(а,д), 2, 7, 4.

Д: **3.**1(б–г), 3, 6, 8, 19, 20.

Определение и свойства определителя

1. Перестановки

А: **4.**1, 2(б,в,д), 3(а), 6, 9(а).

Д: **4.**2(а,г,з), 3(б), 5, 7, 8, 9(б), 10.

Р: **3.**16, 23, 12, 12.1.

Семинар № 3

2. Определение определителя

А: **5.**39(а–г), 40, 42, 48, 57.

Д: **5.**39, 43, 44, 47, 49, 52, 56, 60, 61.

3. Определители 2-го и 3-го порядков

А: **5.**2, 9, 12.

Д: **5.**3, 10, 13, 16.

Р: **5.**19, 20, **8.**3.

Семинар № 4

4. Свойства определителя

А: **5.**21, 24, 29, 30, 68, 64(б), 70, 74.

Д: **5.**22, 25, 31, 33, 67, 64(а), 69, 75, 76, 81.

5. Теорема Лапласа

А: **6.**2, 8, 11, 15, 17.

Д: **6.**6, 7, 9, 12, 14, 16, 20, 27, 43, 44.

Р: **5.**79, 83, 84, **6.**40, 41, 45, **8.**4.

Семинар № 5

Методы вычисления определителя

1. Метод Гаусса

А: **7.**1, 8, 16, 26, 20, 22, 27, 41.

Д: **7.**2, 13, 17, 24, 23, 28, 37, 42, 43, 46.

2. Метод рекуррентных соотношений

А: **7.**48, 70, 56, 53, 54.

Д: **7.**59, 51, 55, 57, 72, 74, 76.

Р: **7.**44, 64, 66, 75, 75.1.

Семинар № 6

3. Определитель Вандермонда

А: **7.**82, 83, 91.

Д: **7.**84, 87, 89, 90, 93.

4. Другие методы

А: **7.**98, 107, 115, 117, 119, 125.

Д: **7.**99, 103, 110, 116, 121, 126, **8.**27, 34, 42.

Р: **7.**92, 94, 96.

Семинар № 7

5. Смешанные задачи

А: **8.**5(а), 6, 14, 15, 27, 33.

Д: **8.**5(б), 7(а), 8, 29, 13, 17, 18, 22(а).

Обратная матрица

Критерий обратимости. Метод Гаусса–Жордана обращения матрицы

А: **9.**1–3, 5, 23, 26, 31, 35, 18, 19, 48, 50.

Д: **9.**4, 6, 12, 24, 28, 33, 36, 37, 43, 49, 52, 55, 62, 78(в,г).

Р: **8.**10, 11, 19, 22(б), 23, 25, 50–54, **9.**15, 16, 56–58, 76, 77, 81, 82.

Семинар № 8

Геометрические векторы

Линейные операции над векторами. Деление отрезка в данном отношении. Радиус-вектор точки

А: **13.**1, 17, 3, 4, 9, 16, 22, 34, 29.

Д: **13.**2, 5, 7, 8, 10, 14, 16.1, 16.2, 23, 33, 35, 37.

Р: **13.**42, 45, 46.

Семинар № 9

Линейное пространство

Аксиомы линейного пространства. Примеры. Арифметическое пространство. Линейная зависимость

А: **14.**1, 5, 7, 8, **15.**1, 4, 6–8, 11, 17, 25, 29.

Д: **14.**2–4, 6, 9, **15.**2, 3, 5, 12, 20, 21, 23, 24, 26, 30.

Р: **14.**10–12, **15.**35, 36.

Семинар № 10

Ранг матрицы

1. Ранг матрицы и элементарные преобразования её строк и столбцов. Метод Гаусса вычисления ранга

А: **16.**1, 5, 10, 15, 17, 18, 20, 24, 34–36.

Д: **16.**2, 3, 7, 11, 13, 19, 23, 28.

Р: **16.**20.1, 30, 33.

Семинар № 11

2. Ранг матрицы и линейная зависимость её строк и столбцов

А: **16.**38, 39, 42, 55.

Д: **16.**37, 40, 41, 43, 60, 61.

Системы линейных алгебраических уравнений

1. Правило Крамера

А: **19.**3, 10, 17, 26, 29.

Д: **19.**2, 8, 11, 19, 30.

Р: **16.**42.1, 44, 44.1, 47, 51, 52, 63, 64, **19.**12–15, 25.

Семинар № 12

2. Критерий совместности систем общего вида

А: **20.**1, 3, 5, 7, **21.**57.

Д: **20.**2, 4, 6, 8, **21.**55, 59.

3. Метод Гаусса исследования и решения систем. Общее решение

А: **21.**1–3, 46(б), 26, 35, 52.

Д: **21.**4, 5, 12, 17, 46(а), 47, 53, 27, 33, 48(а), 35.

Р: **20.**8, 9, 11, **21.**58, 60, 62.

Семинар № 13

Геометрические свойства множества решений системы

1. Линейное подпространство решений однородной системы уравнений. Фундаментальная система решений. Общее решение

А: **22.**1, 2, 4, 10, 14, 15.
Д: **22.**3, 9, 12, 16.

2. Линейное многообразие решений неоднородной системы. Общее решение

А: **22.**20, 26, 30, 33, 35, 38–40.
Д: **22.**21, 27, 28, 32, 34, 48.
Р: **22.**29, 37, 41, 46, 49, 50.

Семинар № 14

Коллоквиум (см. стр. 29)

Семинар № 15

Контрольная работа № 1 (см. стр. 31)

Темы: матричная алгебра, определители, ранг матрицы, обратная матрица, системы линейных алгебраических уравнений.

Семинар № 16

Аффинная и прямоугольная декартова системы координат

1. Координаты точки

А: **23.**1, 3, 5.
Д: **23.**2, 6, 7, 9.

2. Деление отрезка в данном отношении

А: **23.**19, 14, 26, 33.
Д: **23.**20, 17, 22, 29, 34, 35.

3. Преобразование координат

А: **23.**39, 43, 48, 62, 63, 56, 67.
Д: **23.**38, 47, 49, 51, 53, 57, 64, 66.
Р: **23.**55, 65, 65.1.

Семинар № 17

Скалярное произведение

А: **24.**4, 6, 8, 12, 15, 20, 27, 32, 47, 58, 67, 75, 78.
Д: **24.**5, 7, 13, 16, 17, 26, 28, 34, 36, 48, 49, 57, 63, 69, 74, 79.
Р: **24.**33, 34.1, 34.2, 39–41, 73, 76, 78, 87, 90, 91.

Семинар № 18

Векторное и смешанное произведения

А: **25.**5, 7, 11, 14, 22, 26, 35, 37, 44, 49, 59, 62.

Д: **25.**4, 6, 8, 9, 16, 17, 25, 27, 33, 36, 38, 40, 46, 48, 52, 64, 65, 71.

Р: **25.**20, 12, 63, 66, 67, 72, 74, 75.

Семинар № 19

Прямая на плоскости

1. Способы задания

А: **26.**7, 18, 21.

Д: **26.**8, 10, 15, 19, 20, 22, 24.

2. Взаимное расположение прямых

А: **27.**8, 15, 20, 25.

Д: **27.**10, 13, 16, 22, 24.

3. Полуплоскости

А: **28.**4, 11, 20.

Д: **28.**6, 9, 13.

Р: **26.**27, **27.**26, 28.

Семинар № 20

4. Метрические задачи

А: **29.**1, 6, 18, 33, 37, 44(1), 45(1), 56.

Д: **29.**3–5, 9, 35, 38, 43, 44(2), 45(2), 55, 57, 78.

Плоскость в пространстве

1. Способы задания

А: **26.**31, 39, 44.

Д: **26.**29, 32, 34, 38, 50.

Р: **29.**39, 65.

Семинар № 21

2. Взаимное расположение плоскостей

А: **27.**37, 40.

Д: **27.**35, 33, 39, 49.

3. Полупространства

А: **28.**20.

Д: **28.**17, 18.

4. Метрические задачи

А: **29.**79, 88.

Д: **29.**81, 83, 89, 93, 102.

Р: **27.**53, 54, **28.**19, 21, 23, **29.**91, 92.

Семинар № 22

Прямая в пространстве

1. Способы задания. Расположение прямых в пространстве

А: **31.**2(1),4(1), 11(2), 13, 18(1,2), 23.

Д: **31.**1, 2(2), 3, 4(2), 5, 11(1), 14, 15, 18(3,4), 19, 24, 31, 34.

2. Метрические задачи

А: **32.**3, 5, 8, 13, 20, 34, 39.

Д: **32.**10, 17, 21, 26, 36, 37, 38.

Р: **32.**32.1, **31.**36, **32.**40, 42.

Семинар № 23

Векторные уравнения прямой и плоскости

А: **33.**5, 8, 10, 15, 20, 26, 29, 35, 41.

Д: **33.**6, 7, 11, 12, 22, 23, 27, 30, 36, 40.

Р: **33.**1, 31, 33, 41, 42, 44.

Семинар № 24

Контрольная работа № 2 (см. стр. 32)

Темы: деление отрезка в отношении, преобразование координат, скалярное, векторное и смешанное произведения, прямая на плоскости, плоскость в пространстве, прямая в пространстве.

Семинар № 25

Элементы общей алгебры

1. Группа. Примеры групп. Простейшие свойства

А: **39.**1(1–8), 2(1–8), 3(1–5), 4(1,2), 8, 10.

Д: **39.**1(9–17), 2(9–18), 3(6–13), 4(3–5), 5, 9.

2. Изоморфизм групп

А: **39.**11, 13, 14, 17, 20.

Д: **39.**12, 16, 19, 21, 24.

Р: **39.**23.

Семинар № 26

3. Подгруппа. Смежные классы, нормальный делитель. Фактор-группа

А: **39.**25, 26, 28(а), 30, 38, 44(а–в), 45, 47, 82(а,б), 84(а).

Д: **39.**27, 29, 31, 32, 40, 44(г,д), 46, 48, 82(в,г), 84(б,в).

4. Порядок элемента. Циклические группы

А: **39.**53(а,б), 54(а), 56–58, 28(б), 61, 64.

Д: **39.**53(в,д), 54(б), 59, 60, 65, 72.

Р: **39.**83, 55.

Семинар № 27

5. Кольцо и поле

А: **40.**1–4, 8, 10, 11, 26, 27, 33, 38.

Д: **40.**1–4, 8, 12, 13, 15, 30, 32, 39.

Р: **40.**40, 47, 48, 54, 56, 58.

Семинар № 28

Комплексные числа

1. Поле комплексных чисел

А: **41.**1(а,г,е), 5(а), 6(а), 7, 9(а), 10(в,г), 11(а), 15.

Д: **41.**1, 5, 6(б), 8, 9(б), 10(б,д,е), 11, 16, 21.

Р: **41.**13, 23.

Семинар № 29

2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Формула Муавра

А: **42.**1–3, 8, 23(а), 27, 32.

Д: **42.**1, 3, 5, 6, 9, 10, 23(б), 28, 31(а,б).

3. Извлечение корня

А: **43.**2, 6, 7, 11, 15(а,в), 20, 25.

Д: **43.**1–3, 5, 8, 9, 14–17, 21, 23, 24, 27.

Р: **42.**19, 21, 21.1, **43.**29, 32, 32.1.

Семинар № 30

Линии второго порядка на плоскости

1. Эллипс, гипербола, парабола

А: **34.**1, 6, 13, 18, 20, 26, 32, 36, 40, 49, 61, 66.

Д: **34.**1, 4, 9, 11, 13, 16, 22–24, 29, 39, 44, 58, 64, 65.

Р: **34.**9(1–5), 10(2,3), 21(1,3–7), 36(1,2), 45, 50(1,2), 53, 55(1,2).

Семинар № 31

2. Линии, заданные общим уравнением

А: **35.**5, 11, 14, 19, 22, 23(1), 24(4), 27(1).

Д: **35.**6, 10, 20–22, 23(2–4), 24, 27.

Р: **35.**7, 9.1, 17, 26, 28.

Семинар № 32

Поверхности второго порядка

1. Эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды

А: **36.**1, 5, 8(1), 13(1), 17, 18, 33, 40, 46.

Д: **36.**3, 6, 8(2), 13(2,3), 19, 20, 23, 32, 36, 47, 52.

2. Конусы, цилиндры

А: **37.**1, 6, 8, 16.

Д: **37.**2, 5, 7, 15, 19.

3. Поверхности, заданные общим уравнением

А: **38.**1, 9(1,2), 10, 11(1,2), 12(2).

Д: **38.**4, 6(1), 7–12.

Р: **36.**11–14, 25, 31, 33.1, 43–44.1, 51, 53, **37.**18, 21, 22, **38.**2.

План семинарских занятий, II семестр

Семинар № 1

Линейное пространство над произвольном полем

1. Определение, примеры

А: **44.**5, 9, 4(а,б), 13(а–в), 11(а).

Д: **44.**6–8, 3, 12, 14.

2. Линейная зависимость. База и ранг системы векторов. Изоморфизм линейных пространств

А: **44.**19, 20(а), 21(а), 24, 31, 34, 44, 55.

Д: **44.**20–22, 25, 29, 32, 36, 38, 42, 46, 47, 58.

Р: **44.**23, 39, 56.

Семинар № 2

3. Базис, размерность. Координаты вектора. Матрица перехода к другому базису

А: **44.**11(б), 62, 68–70, 73, 75, 80, 87, 91, 92, 94.

Д: **44.**11(в), 64, 67, 71(а), 72(а,б), 77, 86, 89, 90, 93.

Р: **44.**61, 61.1, 91.1.

Семинар № 3

Линейное подпространство

1. Определение, способы задания

А: **45.**2, 3, 6, 12, 13, 17, 24, 27, 33.

Д: **45.**4, 5, 7, 8, 14, 16(а,г), 19, 21, 28, 29, 34.

2. Сумма подпространств

А: **45.**42, 43.

Д: **45.**40, 41, 44.

Р: **45.**25, 35, 37, 42.1, 1, 46.

Семинар № 4

3. Пересечение подпространств

А: **45.**49, 54, 58, 68.

Д: **45.**50, 55, 60, 64.

4. Прямая сумма подпространств. Дополнительное подпространство

А: **45.**69–71, 73, 74(а), 77, 79, 82.

Д: **45.**72, 74(б,в), 76, 78.

Р: **45.**63, 66, 67, 80.1, 83.

Семинар № 5

Линейное аффинное многообразие

А: **46.**3, 7, 14(а,б), 15(а), 16(а), 17, 24, 25, 39, 41, 65.

Д: **46.**4, 5, 8, 14(в,д,е), 15(б), 16(б), 19, 21, 26, 27, 37, 42, 64, 68.

Р: **46.**23, 48, 50, 60.

Семинар № 6

Евклидово (унитарное) пространство

1. Скалярное произведение. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца. Длина вектора

А: **47.**1–3, 5(а,б,д), 6, 10(а–в), 24, 27, 32.

Д: **47.**4, 7, 8(а–г), 9, 10(г,д), 11, 20, 25, 26, 28(а), 33.

2. Ортогональность векторов

А: **48.**1, 5, 8.

Д: **48.**3, 4, 6.

Р: **47.**32.1, 32.2.

Семинар № 7

3. Ортонормированный базис. Процесс ортогонализации

А: **48.**10, 11, 14, 17, 19, 21, 24, 25(2,3), 26, 30, 31, 33(1,2), 34(1), 37(1–3).

Д: **48.**15(1,2), 20(а), 21, 25, 28, 32, 33(3,4), 34(2), 37(4–6).

4. Матрица Грама

А: **48.**38, 41.

Д: **47.**16.1, **48.**39.

Р: **47.**16.2, **48.**47.

Семинар № 8

5. Ортогональное дополнение. Задача о перпендикуляре

А: **49.**7(б,в), 12(а), 14(а), 15, 17(а,в), 18(а,б), 19, 26(а), 30, 43.

Д: **49.**7(г), 9, 12(б,в), 14(б), 16, 17(б,г), 18(в,г), 21, 24(а), 26(в), 31, 35, 42.

6. Метрические задачи

А: **50.**5(3), 9, 29, 33, 42, **51.**17(а,б), 20.

Д: **50.**5(2), 6, 7, 30, 34, 44, 46, **51.**17(в), 18(а), 24.

Р: **49.**8, 28, 29, 51–53, **50.**9.1, 9.2, 10, 39.1, 39.2, 45, 45.1, **51.**15.

Семинар № 9

Контрольная работа № 1 (см. стр. 33)

Темы: линейное пространство, евклидово (унитарное) пространство.

Семинар № 10

Линейные операторы в линейном пространстве

1. Определение и простейшие свойства

А: **52.**3, 5(а,б) 6(а,б), 7, 11(а,б), 19.

Д: **52.**4, 5(в,д,ж), 6(в–д), 8–10, 12, 20.

2. Матрица линейного оператора

А: **52.**24, 27, 39, 46, 48(б), 54(а), **53.**1, 4, 17.

Д: **52.**25, 28, 40, 42, 48(в), 49(а), 53(а), **53.**3, 5, 18.

Р: **52.**14, 15, 21, 23, **53.**21, 22, 26, 31.

Семинар № 11

3. Образ и ядро линейного оператора

А: **54.**1, 3(а), 5, 9(1), 10(3), 11(1), 14, 17, 21, 27(1), 28(1), 38, 41(1).

Д: **54.**2, 3(б), 6, 9(2), 10(2,4), 11(3), 12, 19, 22, 27(2), 28(2), 35, 41(2).

Р: **54.**25, 26, 39.

Семинар № 12

4. Линейное пространство линейных операторов

А: **55.**1, 4, 5, 7, 9, 17(а,в), 18(а), 19, 27, 30, 31.

Д: **55.**2, 3, 6, 8, 10, 17(б,г), 18(б), 20, 24, 25, 32, 33.

Р: **55.**23, 34–37.

Семинар № 13

5. Умножение операторов. Обратный оператор

А: **56.**1, 4, 7–9, 13(а,б), 17, 21, 22, 29, 50, 54, 56, 64, 75.

Д: **56.**2, 3, 6, 12, 19, 20, 23, 30, 52, 65, 76.

Р: **56.**5, 10, 26, 27, 32, 34, 35, 37, 67, 74.

Семинар № 14

Структура линейного оператора

1. Собственные значения и собственные векторы. Характеристический многочлен

А: **57.**1, 5, 7, 10, 11, 17, 25(а,в), 34, 41, 50, 51, 73(а,д), 77.

Д: **57.**3, 6–8, 13–16, 23, 25(б,е), 30, 32, 35, 37, 43, 59, 73(в,г,е), 78(а).

Р: **57.**63, 64, 74, 84–87.

Семинар № 15

2. Оператор простой структуры

А: **58.**1, 2(б), 3, 5, 8, 10, 12, 29, 40, 47(а), 48, 49, 50, 65, 77.

Д: **58.**2(а,в), 4, 6, 7, 9, 11, 14, 30, 41, 47(б), 51, 52, 66, 67, 73, 75.

Р: **58.**63, 78.

Семинар № 16

3. Инвариантные подпространства

А: **59.**2, 4, 11(б,д), 12(б), 25–27, 34, 57.35(а), 43.

Д: **59.**3, 5, 6, 11(в,ж), 13, 12(а,в), 17, 28, 32(г), 35(б), 45, 47.

Р: **59.**9, 10, 16, 19, 20, 29, 31, 37.1, 37.2.

Семинар № 17

4. Корневые подпространства

А: **60.**1, 2(а–в), 3, 5, 7, 11(а), 13, 15, 17.

Д: **60.**2, 4, 6, 8, 11(б), 14, 16, 20.

Р: **60.**20.1.

Семинар № 18

5. Жорданов базис и жорданова форма матрицы линейного оператора

А: **60.**21, 24, 27, 29, 36, 45, 50, 53.

Д: **60.**22, 25, 32, 46, 55, 58.

Р: **60.**37, 38, 59.

Семинар № 19

5. Жорданов базис и жорданова форма матрицы линейного оператора (*продолжение*)

А: **60.**65, 68, 71, 74, 84, 88.

Д: **60.**70, 72, 73, 75, 86, 89.

Р: **60.**76, 77, 77.1–77.8, 80, 83.

Семинар № 20

6. Жорданова форма и критерий подобия

А: **60.**92, 95, 99, 101, 105, 110, 113.

Д: **60.**93, 94, 100, 106, 111, 114.

Р: **60.**102, 104.1, 107, 114.1–114.5.

Семинар № 21

Коллоквиум (см. стр. 30)

Семинар № 22

Линейный оператор в евклидовом (унитарном) пространстве

1. Сопряжённый оператор

А: **61.**2, 5, 25, 26(а), 30(а), 34, 39(а), 40(а), 51(а), 59.

Д: **61.**3, 4, 21, 24, 27(а), 30(б), 32, 35, 39(б), 40(б), 41(а,б), 51(б), 60.

Р: **61.**13, 14, 20, 28, 28.1, 39.1, 47, 61, 67–69, 69.1, 70, 71.

Семинар № 23

2. Нормальный оператор

А: **62.**5, 9, 17, 20, 26, 33, 34, 37, 39, 44, 47, 49, 50, 60.

Д: **62.**4, 12, 18, 19, 21, 27, 32, 35, 36, 38(а,б), 40, 45, 51, 53, 62.

Р: **62.**10, 13, 48, 57.

Семинар № 24

3. Унитарный (ортогональный) оператор

А: **63.**1, 3, 5, 6(а–в), 9, 10(в), 11, 13(а–в), 15(а), 17, 19(а), 23, 32, 35(а–в), 38(б), 44.

Д: **63.**2, 4, 6(г,д), 8, 10(г), 12, 14(а–в), 15(б), 19(б), 24, 31(б), 34, 39, 42, 47.

Р: **63.**12, 33, 39.1, 39.2, 43.1, 43.2, 45.

Семинар № 25

4. Самосопряжённый оператор

А: **64.**1, 3, 6, 8, 11, 13, 15, 17, 18(б), 24, 32, 39, 42, 48.

Д: **64.**2, 4, 5(а,б), 7, 9, 10, 16, 19(в), 20, 33, 34, 44.

Р: **64.**21, 21.1, 21.2, 35, 36, 45–47.

Семинар № 26

5. Знакоопределённые операторы. Квадратный корень из оператора

А: **65.**1, 2, 4, 11, 13, 15, 20, 22, 34, 37, 44, 62.

Д: **65.**3, 8, 12, 14, 24, 26, 30, 31, 43, 46, 63, 64.

Р: **65.**9, 10, 12.1, 12.2, 21, 28, 29, 32, 46.1, 50–58.

6. Разложения линейного оператора

А: **66.**1, 2, 5, 9, 10, 22, 24, 27, 29, 35(а,в), 45, 49, 50, 52.

Д: **66.**3, 6, 12, 23, 25, 28, 35(б), 51, 53, 59, 61.

Р: **66.**14, 16, 29, 30, 39, 54.1, 60.2, 61.1.

Семинар № 27

Контрольная работа № 2 (см. стр. 34)

Темы: Линейные операторы в линейных и евклидовых (унитарных) пространствах.

Семинар № 28

Билинейные и квадратичные формы

1. Формы в линейном пространстве. Канонический вид. Метод Лагранжа

А: **67.**1(2–5), 2, 3(1,2), 4(2), 5(1,2), 6–8, 9(2,7), 11(3,7), 13, 14, 15(2), 17.

Д: **67.**1(6–8), 2, 3(3,4), 4(3,4), 9(4,6,9), 11(2,9,12), 15(2), 18.

Р: **67.**5.1, 16, 16.1, 16.2.

Семинар № 29

2. Квадратичные (эрмитовы квадратичные) формы в вещественном (комплексном) пространстве. Закон инерции. Сигнатурное правило Якоби. Критерий Сильвестра

А: **68.**1(1–3), 2(1), 4, 5(1), 6, 7, 9, 11, 12(1), 30(1,6), 31(1,6), 32.

Д: **68.**1(4–6), 2(2), 5(2,3), 9(2), 12(2), 30(2,8), 31(2,8), 33.

Р: **68.**8, 20, 21, 28.

3. Квадратичные (эрмитовы квадратичные) формы в евклидовом (унитарном) пространстве. Метод вращений. Одновременное приведение к каноническому виду пары квадратичных форм

А: **69.**1(1), 2(1), 6(1), 13, 15(1), 17(1), 18(1), 19, 21, 22(1,2).
Д: **69.**1(2,6), 2(2), 6(3), 14, 15(2), 17(2,3), 18(3), 22(3,4).

Семинар № 30

Линейное нормированное пространство

1. Нормы вектора

А: **70.**1, 2, 6, 12.
Д: **70.**3, 4, 8, 20.

2. Нормы оператора и матрицы

А: **71.**6, 9, 14, 18, 31, 32, 35.
Д: **71.**7, 10, 16, 19, 32, 33.

Р: **70.**14, 20.1, **71.**12, 17, 30.1, 51, 53, 54, 60, 62.

3. Линейные операторные уравнения. Псевдорешение

А: **72.**2, 4, 8, 19, 21, 23(а,б), 24(а), 25, 28, 31, 41(а).
Д: **72.**3, 5, 7, 9, 20, 23(в), 24(б), 30, 33, 41(б,г).

Р: **72.**11, 12, 22, 40.

Коллоквиум

Коллоквиум проводится в середине семестра на основе пройденного к тому времени теоретического материала. Он проходит в форме устного собеседования. Коллоквиум обязателен для всех студентов и рассматривается как элемент зачёта. Для не сдавших коллоквиум зачёт (и зачётная комиссия) начинается с вопросов по теоретическому материалу коллоквиума.

Вопросы к коллоквиуму, I семестр

1. Перестановки.
2. Определитель, свойства определителя.
3. Миноры и их алгебраические дополнения.
4. Разложение определителя по строке (столбцу). Определитель произведения матриц.
5. Обратная матрица. Критерий обратимости.
6. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.
7. Ранг матрицы и линейная зависимость её строк (и столбцов).
8. Ранг произведения матриц. Инвариантность ранга относительно элементарных преобразований.
9. Системы линейных алгебраических уравнений с квадратной невырожденной матрицей. Правило Крамера.
10. Критерий совместности и определённости системы линейных алгебраических уравнений.
11. Исследование и решение системы линейных алгебраических уравнений общего вида. Общее решение.
12. Эквивалентность систем линейных алгебраических уравнений. Элементарные преобразования систем.
13. Метод Гаусса исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений.
14. Линейное пространство. Арифметическое пространство.
15. Линейная зависимость в линейном пространстве.
16. Базис и размерность линейного пространства.
17. Линейное подпространство и линейное аффинное многообразие в линейном пространстве. Определение и простейшие свойства.
18. Геометрические свойства решений однородной системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений.
19. Геометрические свойства решений неоднородной системы линейных алгебраических уравнений. Общее решение.

Вопросы к коллоквиуму, II семестр

1. Линейные операторы. Определение, основные свойства, примеры. Теорема о существовании и единственности оператора по заданным образам базисных векторов.
2. Матрицы линейных операторов. Взаимно-однозначное соответствие между линейными операторами и матрицами.
3. Линейное пространство линейных операторов и его связь с пространством матриц.
4. Матрица линейного оператора. Связь между координатами вектора и его образа.
5. Матрицы линейного оператора в различных базисах.
6. Эквивалентные матрицы. Критерий эквивалентности.
7. Образ и ядро линейного оператора.
8. Произведение линейных операторов. Матрица произведения.
9. Обратный оператор. Критерий обратимости.
10. Инвариантные подпространства. Индуцированный оператор.
11. Инвариантные подпространства минимальной размерности (в комплексном и вещественном случаях).
12. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Определение и простейшие свойства. Примеры.
13. Характеристический многочлен линейного оператора. Определение и простейшие свойства.
14. Условие существования собственных векторов линейного оператора. Собственные векторы линейного оператора в комплексном пространстве.
15. Собственное подпространство. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения.
16. Операторы простой структуры. Критерий простой структуры.
17. Треугольная форма матрицы линейного оператора в комплексном пространстве.
18. Нильпотентный оператор. Определение, простейшие свойства, примеры.
19. Расщепление линейного оператора.
20. Корневые векторы. Канонический базис корневого подпространства.
21. Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора. Канонический базис.
22. Теорема Гамильтона–Кэли.
23. Подобные матрицы. Критерий подобия.

Контрольные работы

Примерные варианты, I семестр

Контрольная работа № 1

1. Может ли определитель матрицы

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & & & & & \\ 3 & 3 & 2 & & & & \\ & 1 & 3 & 2 & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & 1 & 3 & 2 \\ & & & & & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

n-го порядка ($n \geq 3$) быть равен 69 и, если да, то при каком значении n?

2. Исследовать и найти общее решение системы

$$\begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 = \ \ \ -4, \\ -2x_1 - \lambda x_2 - \ \ x_3 = 2 + \lambda, \\ 4x_1 + 4x_2 + \lambda x_3 = \ \ \ -8. \end{cases}$$

в зависимости от значения λ.

3. Найти первый столбец матрицы, обратной к матрице

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & & & & \\ 1 & 2 & 0 & & & \\ & & \dots & \dots & & \\ & & & 1 & 2 & 0 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

n-го порядка.

4. Известно, что векторы a, b, c, d линейного пространства V линейно независимы. Выяснить, при каких значениях λ линейно независимы векторы $x = a + b - 2c + d$, $y = a + 2b + \lambda d$, $z = -3a - b + 10c + 4d$.

5. Пусть A, B — квадратные матрицы одинакового порядка и $C = AB$. Доказать, что присоединённые матрицы удовлетворяют соотношению $\widehat{C} = \widehat{B}\widehat{A}$.

6. Доказать, что если ранг квадратной матрицы A равен единице, то существует число $\lambda \in \mathbb{R}$, такое что $A^2 = \alpha A$.

Ответы: **1.** $n = 6$, $D_n = 5+2^n$. **2.** При $\lambda \neq -4$, $\lambda \neq 2$ единственное решение $x_3 = 2x_1 = -4/(\lambda+4)$, $x_2 = -(\lambda+6)/(\lambda+4)$; при $\lambda = -4$ система несовместна; при $\lambda = 2$ общее решение $x_3 = -2(x_1+x_2+1)$. **3.** $\begin{bmatrix} 2^{-1} & -2^{-2} & 2^{-3} & \dots & (-1)^{n-1}2^{-n} \end{bmatrix}^T$. **4.** При $\lambda \neq 4, 5$.

Контрольная работа[1] № 2

1. Известно, что объём параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, равен 2. Найдите объём параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}+\mathbf{b}$.
2. Найти все векторы $\mathbf{x}$, удовлетворяющие равенству $[\mathbf{a}, \mathbf{x}] = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a} = \{3, -2, 5\}$, $\mathbf{b} = \{1, -1, -1\}$.
3. В треугольнике ABC известны его вершина $C(5, 3)$ и уравнения двух высот $3x-2y = 0$ и $5x+3y-25 = 0$. Составить уравнение стороны AB.
4. Составить уравнение биссекторной плоскости двугранного угла между плоскостями $6x - 3z + 2 = 0$, $2x - 5y + 4z - 1 = 0$, в котором лежит точка $M(1, 1, -1)$.
5. Составить уравнение общего перпендикуляра к прямым

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-7} = \frac{z+6}{-4}, \quad \frac{x}{0} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{2}.$$

6. Центр окружности, описанной около правильного треугольника ABC, расположен в точке $(1, 3)$. Найти координаты вершин B и C, если известно, что $A(5, 1)$.
7. Плоский выпуклый четырёхугольник задан своими вершинами в пространстве: $M_i(\mathbf{r}_i)$, $i = \overline{1, 4}$. Найти необходимые и достаточные условия того, что заданная точка $M_0(\mathbf{r}_0)$ является его внутренней точкой.

Ответы: **1.** $V = 6$. **2.** $x = \{x_1, x_2, x_3\}$, где $x_1 = (3x_3-1)/5$, $x_2 = -(2x_3+1)/5$. **3.** $5x-2y = 0$. **4.** $8x-5y+z+1 = 0$. **5.** $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-3}$. **6.** $B(-1-\sqrt{3}, 4-2\sqrt{3})$, $C(-1+\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3})$.

[1] В задачах 1–7 система координат прямоугольная.

Примерные варианты, II семестр

Контрольная работа[2] № 1

1. Найти базисы суммы и пересечения подпространств L_1 и L_2, где $L_1 = \mathscr{L}\{a_1, a_2, a_3\}$, $a_1 = (1,2,1,1)$, $a_2 = (2,3,1,0)$, $a_3 = (3,1,1,-2)$, а $L_2 = \{x \in R^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.
2. Доказать, что множество $L = \{p(t) \in M_3 \mid p(1) = 0, p'(1) + p(0) = 0\}$ образует линейное подпространство пространства M_3. Найти два различных дополнительных подпространства к L.
3. Построить какой-либо ортонормированный базис линейной оболочки матриц $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

4. Найти ортогональную проекцию вектора $g = (2,2,0,1)$ на подпространство

$$L = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

5. Определить расстояние от многочлена $g(t) = 3t^3 - 3t^2 - t + 2$ до многообразия $P = \{p(t) \in M_3 \mid p(1) = 2, p'(0) = 1\}$.
6. Доказать, что если две гиперплоскости не пересекаются, то они параллельны.

Ответы: **1.** $\dim L_1 = \dim L_2 = 3$, $\dim(L_1 + L_2) = 4$, значит, в качестве базиса $L_1 + L_2$ можно взять любой базис $\mathbb{R}^4$, например, a_1, a_2, a_3, $b_1 = (1,-1,0,0)$. $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$, базис $L_1 \cap L_2$ состоит, например, из векторов $c_1 = (0,2,-1,-1)$ и $c_2 = (-4,-1,0,5)$. **2.** Одно пространство L_1', дополнительное к пространству L, состоит из линейной оболочки $\mathscr{L}(p_1, p_2)$, где $p_1(t) = 1 + t + t^2 + t^3$ и $p_2(t) = 1 + t + 2t^2 + 3t^3$. Другое дополнительное пространство L_2', например, $\mathscr{L}(q_1, q_2)$, где $q_1(t) = 1 + t$, $q_2(t) = 1 + t + t^2 + 2t^3$. **3.** $C_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C_2 = \frac{1}{\sqrt{51}} \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $C_3 = \frac{1}{\sqrt{51}} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$. **4.** $(1,2,1,0)$. **5.** $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

[2] M_3 — множество всех многочленов от одной переменной степени не выше 3, пополненное нулевым многочленом. Скалярные произведения в пространствах $\mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbb{R}^4$ и M_3 считаются заданными стандартным образом.

Контрольная работа № 2

1. Оператор $\mathscr{A}$ действует в пространстве M_3 по правилу $\mathscr{A} f(t) = f(2t) - f(t+1)$. Построить матрицу этого оператора в базисе $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = 1 - t$, $e_3(t) = t + t^2$, $e_4(t) = t^2 - t^3$ и указать какие-либо базисы его ядра $\ker \mathscr{A}$ и образа $\operatorname{im} \mathscr{A}$.

2. Найти все собственные значения и собственные векторы матрицы $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Показать, что матрица $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ диагонализуема, и привести её к диагональной подходящим преобразованием подобия.

4. Найти жорданову форму следующей матрицы и построить соответствующий канонический базис:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Оператор $\mathscr{H}$ задан матрицей $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ в базисе $f_1 = (1, 1, 0)$, $f_2 = (0, 1, 0)$, $f_3 = (0, 0, 1)$ пространства $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением. Найти матрицу сопряжённого оператора $\mathscr{H}^*$ в этом же базисе f_1, f_2, f_3.

6. Найти квадратный корень из матрицы $S = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

7. Известно, что операторы $\mathscr{A} \in \mathscr{L}(V, W)$, $\mathscr{B} \in \mathscr{L}(W, V)$ удовлетворяют условию: произведение $\mathscr{B}\mathscr{A}$ является тождественным оператором в пространстве V. Доказать, что если пространства V и W имеют разную размерность, то произведение $\mathscr{A}\mathscr{B}$ не может быть тождественным оператором в пространстве W.

Ответы:

1. $A_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $\ker\mathscr{A} = \mathscr{L}(e_1)$, $\operatorname{im}\mathscr{A} = \mathscr{L}(2e_1 - e_3, e_2, e_4)$.

2. $\lambda_1 = 1$ кратности 2, собственные векторы $\alpha \cdot (1, -1, 1, 0)$, где $\alpha \neq 0$; $\lambda_2 = 2$ кратности 2, собственные векторы $\alpha_1 \cdot (1, 0, 1, 0) + \alpha_2 \cdot (1, 0, 0, -1)$, где $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$.

3. $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $T^{-1}DT = \operatorname{diag}\{1, 4, 4\}$. **4.** $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $(2, 1, -5, 10)$, $(1, 0, 0, -7)$, $(0, 0, 1, -3)$, $(0, 0, 7, -14)$.

Зачёт

I семестр. Примерный вариант зачётного задания в группе (с 21 декабря)[3]

1. Вычислить определитель

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x \\ y & 0 & x & \cdots & x \\ y & y & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

где $x \neq y$.

2. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значений λ

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 2, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

3. В аффинной системе координат написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;3)$ и равноудалённую от точек $A(-2;1)$ и $B(-4;3)$.

4. Составить параметрическое уравнение прямой, параллельной прямой

$$\ell_1: \quad \begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ x + y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

и пересекающей прямые ℓ_2: $x = 1 + t$, $y = 2 - 2t$, $z = -t$ и ℓ_3: $x = -2t$, $y = -5 + 3t$, $z = 4$.

5. Построить *однородную* систему уравнений $Ax = 0$ по заданной фундаментальной системе решений: $e_1 = (-2, 1, 1, 1)$, $e_2 = (0, 1, 2, 0)$, $e_3 = (1, -1, 0, 1)$.

6. Вычислить объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, зная его вершину $A(1;2;3)$ и координаты концов выходящих из неё рёбер: $B(9;6;4)$, $D(3;0;4)$, $A_1(5;2;5)$.

[3] В задачах 6–9 система координат прямоугольная декартова.

7. На плоскости заданы две системы координат: $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ и $\{O'; \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\}$. Вторая система получена из первой поворотом вокруг точки $A(1;1)$ на угол $\varphi = 45^\circ$ в направлении кратчайшего поворота от $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$. Найти координаты (x, y) точки в первой системе координат, если известны её координаты (x', y') во второй системе координат.

8. Составить уравнение биссектрисы *острого угла* между прямыми $x - 3y = 0$ и $3x - y + 5 = 0$.

9. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(5;2;0)$ и удаленной от точки $B(6;1;-1)$ на расстояние 1, а от точки $C(0;5;4)$ на расстояние 3.

10. Решить уравнение в комплексных числах: $|z| + z = 8 + 4i$.

11. Найти *все* образующие элементы циклической группы 11-го порядка.

12. Определить тип кривой, заданной уравнением

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0,$$

и найти уравнения осей канонической системы координат.

Ответы:

1. $D_n = (-1)^{n-1} xy \frac{x^{n-1} - y^{n-1}}{x - y}$. **2.** При $\lambda \neq -1$, $\lambda \neq 2$ единственное решение $x_1 = x_2 = -\frac{1}{\lambda - 1}$, $x_3 = \frac{2}{\lambda - 1}$; при $\lambda = 1$ система несовместна; при $\lambda = -2$ общее решение $x_1 = x_2 = 1 + x_3$. **3.** ℓ_1: $x + y - 5 = 0$, ℓ_2: $x - 5y + 13 = 0$. **4.** $x = t$, $y = 55 + t$, $z = 52 + 2t$. **5.** $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$. **6.** $V = 48$. **7.** $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. **8.** $4x - 4y + 5 = 0$. **9.** $x + 2y + 2z - 9 = 0$, или $y - 2 = 0$. **10.** $z = 3 + 4i$. **11.** Все элементы группы, кроме нейтрального. **12.** эллипс; $y = 2 - x$, $y = x$.

I семестр. Образец задания зачётной комиссии[4]

1. Вычислить определитель

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ y & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix},$$

где $z \neq y$.

2. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значений λ

$$\begin{cases} (\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (2\lambda+3)x_3 = 1, \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda-1)x_3 = \lambda, \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+1)x_3 = \lambda. \end{cases}$$

3. В аффинной системе координат написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-3;2)$ и равноудаленную от точек $A(1;1)$ и $B(3;-5)$.

4. Вычислить ранг матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{bmatrix}.$$

5. Составить параметрическое уравнение прямой, параллельной прямой

$$\ell_1 : \quad \begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ x + y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

и пересекающей прямые ℓ_2: $x = 3 + t$, $y = -1 + 2t$, $z = 4t$ и ℓ_3: $x = -2 + 3t$, $y = -1$, $z = 4 - t$.

[4] В задачах 6, 7 система координат прямоугольная декартова, в задаче 5 система координат аффинная.

6. В треугольнике ABC заданы уравнение стороны AC: $x-2y+7$ и медиан AM: $x+y-5=0$, CL: $2x+y-11=0$. Составить уравнение высоты треугольника, проведённой из вершины A.
7. Написать уравнение плоскости α, проходящей через начало координат перпендикулярно прямой

$$l: \quad \frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{-2},$$

найти расстояние от точки $M(-2;3;1)$ до этой плоскости и координаты проекции этой точки на плоскость α.
8. Определить тип поверхности, заданной уравнением $4x^2+6y^2+4z^2+4xz-8y-4z+3=0$.
9. Найти геометрическое место точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z+2i|-|z-2i|=3$. answerc«Ветвь гиперболы $36x^2-28y^2+63=0$, проходящая через точку $(0;\frac{3}{2})$, т.е. находящаяся в верхней полуплоскости.»

Ответы:
1. $D_n=\frac{z(x-y)^n-y(x-z)^n}{z-y}$. **2.** При $\lambda=0$ общее решение: $x_1=1$, $x_3=0$ при любом x_2; при $\lambda\neq 0$ единственное решение: $x_1=1-\lambda$, $x_2=\lambda$, $x_3=0$.

3. ℓ_1: $4x+5y+2=0$, ℓ_2: $3x+y+7=0$. **4.** 3. **5.** $x=10+t$, $y=-1+t$, $z=2t$. **6.** $11x-17y+57=0$. **7.** α: $4x+5y-2z=0$, $\rho(M,\alpha)=\frac{\sqrt{5}}{3}$, проекция точки M на плоскость α: $M'(-\frac{22}{9};\frac{22}{9};\frac{11}{9})$. **8.** эллипсоид.

II семестр. Примерный вариант зачётного задания в группе (с 21 мая)[5]

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных подпространств $L_1=\mathscr{L}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)$ и $L_2=\mathscr{L}(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3)$, где $\mathbf{a}_1=(1,1,1,1)$, $\mathbf{a}_2=(1,1,-1,-1)$, $\mathbf{a}_3=(1,-1,1,-1)$; $\mathbf{b}_1=(1,-1,-1,1)$, $\mathbf{b}_2=(1,-1,0,0)$, $\mathbf{b}_3=(3,-1,1,1)$.
2. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис линейной оболочки векторов $\mathbf{x}_1=(2,3,-4,-6)$, $\mathbf{x}_2=(1,8,-2,-16)$, $\mathbf{x}_3=(12,5,-14,5)$, $\mathbf{x}_4=(3,11,4,-7)$.

[5] В пространствах $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение задано стандартным образом.

3. Найти угол между вектором $\mathbf{a} = (-3, 15, 1, -5)$ и линейной оболочкой векторов $\mathbf{b}_1 = (2, 3, -4, -6)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 8, -2, -16)$, $\mathbf{b}_3 = (1, -5, -2, 10)$.

4. Найти канонический базис и жорданову форму матрицы

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Доказать, что неоднородная система линейных уравнений $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда вектор-столбец b ортогонален всем решениям сопряженной однородной системы $A^*y = \mathbf{0}$.

6. В пространстве многочленов M_2 со стандартным скалярным произведением задан ортогональный оператор $\mathscr{A}$ с определителем, равным -1, который переводит многочлен $1+t+t^2$ в $1-t+t^2$, а многочлен $1 - t^2$ в $1 - t$. Найти матрицу оператора $\mathscr{A}$ в базисе 1, t, t^2.

7. Найти нормальный вид квадратичной формы

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

и приводящее к нему треугольное преобразование координат.

8. Найти нормальное псевдорешение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

9. В пространстве M_2 введено скалярное произведение

$$(f, g) = \int_{-1}^{+1} f(t)g(t)dt.$$

Найти матрицу оператора, сопряженного к оператору дифференцирования, в базисе 1, t, t^2.

10. Доказать, что пространство M_3 является прямой суммой подпространств L_1 и L_2, и найти проекцию многочлена $p(t) = t^3 + 1$ на L_1 параллельно L_2, если $L_1 = \{f(t) \in M_3 \mid f(0) = f(1)\}$, $L_2 = \{f(t) \in M_3 \mid f(2t) = 2f(t), \forall t \in \mathbb{R}\}$.

Ответы: **1.** L_1: $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$, L_2: $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$; $\dim L_1 = 3$; $\dim L_2 = 3$; $\dim(L_1 + L_2) = 4$; базис: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1$. $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$; базис: $\mathbf{z}_1 = (1, -1, 1, -1)$, $\mathbf{z}_2 = (1, 0, 1, 0)$ или $\mathbf{c}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{c}_2 = (0, 1, 0, 1)$. **2.** $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 = (2, 3, -4, -6)$; $\mathbf{y}_2 = (-3, 2, 6, -4)$; $\mathbf{y}_3 = (4, 6, 2, 3)$. **3.** $\frac{\pi}{4}$. **4.** $J = \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, -1, -1\right\}$; $(-3, 1, 1, 1, 1)$, $(-2, 0, 1, 1, 1)$, $(1, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, -1, 0)$, $(1, 0, 0, 0, -1)$. **6.** $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. **7.** $y_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $y_2 = x_2 + x_3$, $y_3 = x_3$, $F = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. **8.** $\frac{3}{4}(1, 1, 1, 1)$. **9.** $D_e^* = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}$. **10.** $t^3 - t + 1$.

II семестр. Образец задания зачётной комиссии

1. Найти базисы $L_1 + L_2$, $L_1 \cap L_2$, если L_1 задано однородной системой

$$\begin{cases} 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ 6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases}$$

а L_2 является ортогональным дополнением к множеству решений системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

2. Найти базисы образа и ядра линейного оператора, отображающего матрицы $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ соответственно в матрицы $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$.

3. Построить жорданову форму и канонический базис для

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Найти расстояние от точки, заданной вектором $x = (5, 3, -1, -1)$, до линейного аффинного многообразия H, заданного системой уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$

5. Выписать канонический вид и приводящее к этому виду *ортогональное* преобразование координат для квадратичной формы

$$f = -3x_3^2 - 2x_2x_3 + 6x_1x_2 + x_1^2 + 2x_1x_3 + x_2^2.$$

6. Найти двумерное инвариантное подпространство для линейного оператора, действующего в пространстве $\mathbb{R}^3$ и заданного в некотором его базисе матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ответы: **1.** $\dim L_1 = \dim L_2 = 2$, $\dim(L_1 + L_2) = 3$, так что в качестве базиса $L_1 + L_2$ можно взять естественный базис $\mathbb{R}^3$. Базис $L_1 \cap L_2$: $\vec{e} = (3, 5, 1)$. **2.** Базис образа $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, ядра $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. **3.** $J = \operatorname{diag}\left\{2, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 1\right\}$; $(0,0,1,0,1)$, $(0,0,1,0,0)$, $(0,1,1,0,0)$, $(2,1,1,-1,0)$, $(-1,0,0,1,0)$. **4.** $\rho = \sqrt{\frac{1733}{29}}$. **5.** $f = -4y_1^2 - y_2^2 + 4y_3^2$, $y_1 = -\frac{x_1}{\sqrt{6}} - \frac{x_2}{\sqrt{3}} + \frac{x_3}{\sqrt{2}}$, $y_2 = \frac{x_1}{\sqrt{6}} + \frac{2x_2}{\sqrt{3}} + \frac{x_3}{\sqrt{2}}$, $y_3 = \frac{2x_1}{\sqrt{6}} - \frac{x_2}{\sqrt{3}}$. **6.** Базис инвариантного подпространства $g_1 = (2, 1, 0)$, $g_2 = (0, 1, 1)$.

Экзамен

Экзаменационные вопросы, I семестр

Линейная алгебра

1. Операции над матрицами и их свойства.
2. Приведение матрицы к ступенчатому виду. Приведение к диагональному виду.
3. Перестановки, транспозиции, чётность.
4. Определитель и его свойства как функции столбцов (строк).
5. Определитель транспонированной матрицы.
6. Определитель произведения матриц.
7. Миноры и их алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
8. Невырожденные матрицы. Обратные матрицы. Критерий обратимости матрицы.
9. Линейное пространство. Определение и примеры. Арифметическое пространство.
10. Линейная зависимость в линейном пространстве.
11. Базис и размерность линейного пространства.
12. Переход к другому базису, матрица перехода.
13. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.
14. Ранг матрицы и линейная зависимость строк и столбцов.
15. Ранг произведения матриц. Ранг матрицы и элементарные преобразования.
16. Эквивалентные матрицы. Критерий эквивалентности.
17. Системы линейных алгебраических уравнений. Эквивалентность систем. Элементарные преобразования систем.
18. Системы с невырожденной матрицей. Правило Крамера.
19. Критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений. Критерий единственности решения.
20. Исследование системы линейных алгебраических уравнений общего вида. Главные и свободные неизвестные. Общее решение системы.
21. Метод Гаусса исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений. Число арифметических операций в методе Гаусса.
22. Линейное подпространство. Геометрические свойства множества решений однородной системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений. Общее решение.
23. Линейное многообразие. Геометрические свойства множества решений неоднородной системы линейных алгебраических уравнений. Общее решение.

Аналитическая геометрия

1. Направленные отрезки. Свободный вектор.
2. Линейные операции над векторами. Координаты вектора.

3. Проекции вектора. Свойства линейности проекций.
4. Линейная зависимость векторов. Коллинеарные и компланарные векторы.
5. Аффинная система координат. Преобразование координат.
6. Преобразования прямоугольных декартовых координат. Ортогональные матрицы.
7. Скалярное произведение геометрических векторов. Скалярное произведение в прямоугольных декартовых координатах.
8. Векторное произведение векторов.
9. Смешанное произведение векторов.
10. Векторное и смешанное произведения в прямоугольных декартовых координатах.
11. Алгебраические линии и поверхности. Инвариантность порядка линии (поверхности).
12. Параметрические уравнения прямой на плоскости и плоскости в пространстве.
13. Общее уравнение прямой на плоскости в аффинной системе координат. Критерий параллельности вектора прямой.
14. Общее уравнение плоскости в пространстве в аффинной системе координат. Критерий параллельности вектора плоскости.
15. Взаимное расположение двух прямых на плоскости и плоскостей в пространстве.
16. Пучок прямых на плоскости и плоскостей в пространстве.
17. Полуплоскости и полупространства.
18. Уравнения прямой в пространстве.
19. Взаимное расположение прямых в пространстве.
20. Метрические задачи на прямую и плоскость в прямоугольных координатах.
21. Общее уравнение линии второго порядка на плоскости. Матричная запись общего уравнения и его квадратичной части.
22. Приведённые уравнения линии второго порядка на плоскости. Метод вращений.
23. Классификация линий второго порядка на плоскости.
24. Эллипс. Фокусы и директрисы.
25. Гипербола. Фокусы и директрисы.
26. Парабола. Фокус и директриса.
27. Общее уравнение поверхности второго порядка в пространстве. Матричная запись общего уравнения и его квадратичной части.
28. Приведённые уравнения поверхности второго порядка. Метод вращений.
29. Классификация поверхностей второго порядка. Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, конусы и цилиндрические поверхности.
30. Прямолинейные образующие алгебраических поверхностей второго порядка.

Общая алгебра

1. Декартово произведение множеств и бинарное отношение. Отношение эквивалентности. Фактор-множество.
2. Отображения. Обратное отображение.
3. Алгебраические операции. Обобщённый закон ассоциативности.
4. Группы. Основные свойства.
5. Подгруппы. Симметрическая и знакопеременная группы.
6. Группа невырожденных матриц. Группа невырожденных треугольных матриц. Группа ортогональных матриц.
7. Конечные группы. Теорема Лагранжа.
8. Степени элемента. Циклические группы. Подгруппы циклической группы.
9. Подгруппы, смежные классы, нормальные делители.
10. Изоморфизм групп.
11. Гомоморфизм групп.
12. Кольцо.
13. Поле. Характеристика поля. Алгебраическое расширение поля.
14. Кольцо вычетов. Поле вычетов по простому модулю.
15. Линейное пространство над полем. Число элементов в конечном поле.
16. Поле комплексных чисел. Комплексная плоскость.
17. Тригонометрическая форм комплексного числа. Модуль и аргумент произведения комплексных чисел.
18. Возведение в степень комплексного числа. Формула Муавра.
19. Извлечение корня из комплексного числа.
20. Группа корней из единицы. Первообразные корни.
21. Кольцо многочленов. Деление с остатком.
22. Наибольший общий делитель, его свойства. Алгоритм Евклида.
23. Значения многочлена и корни. Теорема Безу.
24. Многочлены как формальные выражения и как функции. Эквивалентность двух определений равенства многочленов.
25. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена на линейные множители.
26. Каноническое разложение многочлена над полем комплексных чисел. Кратность корня.
27. Каноническое разложение многочленов над полем вещественных чисел.
28. Формулы Виета. Симметрические многочлены.

Экзаменационные вопросы, II семестр

1. Линейное пространство над произвольным полем. Ранг и база системы векторов.
2. Изоморфизм линейных пространств.
3. Сумма и пересечение линейных пространств.
4. Прямая сумма линейных пространств.
5. Евклидово и унитарное пространство. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца.
6. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Существование ортонормированного базиса.
7. Изометрия.
8. Матрица Грама. Критерий линейной зависимости.
9. Ортогональное дополнение. Ортогональная сумма подпространств. Расстояние от вектора до подпространства.
10. Ортонормированный базис и унитарные (ортогональные) матрицы.
11. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. QR-разложение матрицы.
12. Линейное аффинное многообразие в линейном пространстве. Гиперплоскость в евклидовом и унитарном пространстве.
13. Линейные операторы. Матрица линейного оператора.
14. Матрица линейного оператора при переходе к другому базису. Эквивалентность и подобие матриц.
15. Линейное пространство линейных операторов и матриц.
16. Произведение линейных операторов и его матрица.
17. Ядро и образ линейного оператора. Каноническая пара базисов.
18. Линейные функционалы. Сопряжённое пространство. Линейные функционалы и гиперплоскости.
19. Обратный оператор. Критерии обратимости.
20. Собственные значения и собственные векторы. Операторы простой структуры и диагонализуемые матрицы.
21. Характеристический многочлен линейного оператора. Условие существования собственных значений.
22. Собственное подпространство. Геометрическая и алгебраическая кратности собственных значений.
23. Инвариантные подпространства. Сужение оператора.
24. Треугольная форма матрицы линейного оператора. Теорема Шура.
25. Сдвиг оператора, нильпотентность и обратимость его сужений.
26. Корневые подпространства. Расщепление линейного пространства в прямую сумму корневых подпространств.
27. Жорданов базис и жорданова матрица линейного оператора в комплексном пространстве.
28. Критерий подобия матриц.
29. Теорема Гамильтона–Кэли. Минимальный многочлен.
30. Инвариантные подпространства минимальной размерности.

31. Вещественный аналог жордановой формы.

32. Сопряжённый оператор. Существование и единственность. Матрица сопряжённого оператора.

33. Нормальный оператор и нормальная матрица.

34. Блочно-диагональная форма вещественной нормальной матрицы.

35. Эрмитовы операторы и эрмитовы матрицы. Эрмитово разложение линейного оператора.

36. Симметрические операторы и симметрические матрицы.

37. Унитарные операторы и унитарные матрицы.

38. Блочно-диагональная форма ортогональной матрицы.

39. Знакоопределённые операторы и матрицы. Квадратный корень из оператора.

40. Сингулярные числа и сингулярные векторы. Полярное разложение оператора (матрицы).

41. Ортогональные дополнения ядра и образа линейного оператора. Теорема и альтернатива Фредгольма.

42. Билинейные и квадратичные формы. Приведение к каноническому виду. Конгруэнтность и эрмитова конгруэнтность.

43. Закон инерции квадратичных форм.

44. Приведение квадратичной формы к главным осям.

45. Одновременное приведение к каноническому виду пары квадратичных форм.

46. Положительно определённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

47. Общий вид скалярного произведения в конечномерном евклидовом и унитарном пространствах.

48. Гиперповерхность второго порядка в евклидовом пространстве. Приведённые уравнения.

49. Нормированное пространство. Нормы Гёльдера.

50. Длина вектора. Тождество параллелограмма и критерий евклидовости нормы.

51. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве.

52. Задача о наилучшем приближении в конечномерном нормированном пространстве.

53. Линейный оператор в нормированных пространствах. Непрерывность и ограниченность. Норма линейного оператора.

54. Матричные нормы. Унитарно инвариантные нормы.

55. Сингулярное разложение матрицы и обобщённое решение.

56. Вариационные (экстремальные) свойства собственных значений самосопряжённого оператора (матрицы).

57. Вариационные (экстремальные) свойства сингулярных чисел.

58. Соотношения разделения собственных значений и сингулярных чисел матриц и подматриц.

Литература

[1] *Бахвалов С. В., Моденов П. С., Пархоменко А. С.* Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1964.

[2] *Воеводин В. В.* Линейная алгебра. М.: Лань, 2006.

[3] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2004.

[4] *Икрамов Х. Д.* Задачник по линейной алгебре. М.: Наука, 1975.

[5] *Ильин В. А., Ким Г. Д.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М.: Проспект, 2007.

[6] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2004.

[7] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2004.

[8] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия. Теоремы и задачи, Т. 1. М.: Планета знаний, 2007.

[9] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия. Теоремы и задачи, Т. 2. М.: Планета знаний, 2009.

[10] *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. М.: Физматлит, 2004.

[11] *Кострикин А. И., Манин Ю. И.* Линейная алгебра и геометрия. М.: Лань, 2005.

[12] *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Лань, 2005.

[13] *Моденов П. С., Пархоменко А. С.* Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1976.

[14] *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. М.: Бином, 2005.

[15] *Тыртышников Е. Е.* Матричный анализ и линейная алгебра. М.: Физматлит, 2007.

[16] *Шикин Е. В.* Линейные пространства и отображения. М.: Изд-во МГУ, 1987.

[17] *Шилов Г. Е.* Математический анализ (конечномерные линейные пространства). М.: Наука, 1969.

Учебно-методическое пособие

Александр Николаевич Дарьин, Наталья Борисовна Есикова, Николай Иванович Ионкин, Галина Динховна Ким, Леонид Владимирович Крицков, Валентина Алексеевна Морозова, Валерий Семёнович Панфёров, Илья Вадимович Рублёв, Евгений Евгеньевич Тыртышников, Анатолий Иванович Фалин, Андрей Серафимович Фурсов

Алгебра и аналитическая геометрия

Под редакцией *И. С. Ломова*