Вариант X0

1. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств U и V в $\mathbb{R}^4$:

$$U:\ \begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3-5x_4=0 \\ 4x_1-x_2-2x_3=0 \\ 7x_1+4x_2-5x_4=0 \end{cases}, \quad V=\left\langle \begin{pmatrix} 1\\ 4\\ -1\\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\ -2\\ 6\\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\\ 2\\ 5\\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

2. Найти жорданову форму, жорданов базис и минимальный многочлен матрицы

$$\begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 & 6 & 8 \\ 9 & 5 & 6 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 5 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Найти расстояние между прямой l и плоскостью Π в $\mathbb{R}^4$:

$$l:\ (2,4,1,0)+\langle(-2,1,1,0)\rangle, \quad \Pi:\ \begin{cases} x_1+2x_3=3 \\ x_1-2x_2+3x_4=2 \end{cases}.$$

4. Найти канонический вид и канонический базис для ортогонального оператора f, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$A_f=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора f^{100} в каноническом базисе.

5. В пространстве многочленов степени не выше 2 задано скалярное произведение

$$(f,g)=f_0g_0+f_1g_1+f_2g_2, \quad \text{где } f=f_2t^2+f_1t+f_0,\ g=g_2t^2+g_1t+g_0.$$

Найти матрицу оператора дифференцирования и матрицу сопряженного оператора в базисе

$$\left\{1, t, \frac{3t^2-1}{2}\right\}.$$

6. Для данной пары квадратичных функций проверить, что по крайней мере одна из них является положительно определенной, и найти линейное преобразование, приводящее эту функцию к нормальному, а другую — к каноническому виду; указать этот канонический вид.

$$f(\mathbf{x})=6x_1^2+6x_1x_3+x_2^2-6x_2x_3+6x_3^2$$
$$g(\mathbf{x})=2x_1^2+2x_1x_3+x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2$$

Решения.

1. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств U и V в $\mathbb{R}^4$:

$$U: \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 - 5x_4 = 0 \end{cases}, \quad V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Решение. Найдем базис в пространстве U, для этого решим однородную систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & -5 \\ 1 & -6 & -4 & 5 \\ 1 & -6 & -6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 & 5 \\ 0 & -23 & -14 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество решений двумерно, базис решений образуют векторы $(1, 2, 1, 3)$ и $(0, 10, -5, 8)$. Найдем базис суммы, для этого запишем векторы, образующие каждое из подпространств, в столбцы матрицы и приведем ее к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 10 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & -1 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 10 & 2 & -8 & -6 \\ 0 & -5 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -5 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ступеньки получились в первых трех столбцах матрицы, а значит базис суммы образуют первые три столбца исходной матрицы, то есть векторы $(1, 2, 1, 3), (0, 10, -5, 8)$ и $(1, 4, -1, 5)$.

Для того чтобы найти базис пересечения найдем систему уравнений, задающую пространство V :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 4 & x_1 \\ 4 & -2 & 2 & x_2 \\ -1 & 6 & 5 & x_3 \\ 5 & 3 & 8 & x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 4 & x_1 \\ 0 & -14 & -14 & x_2 - 4x_1 \\ 0 & 9 & 9 & x_3 + x_1 \\ 0 & -12 & -12 & x_4 - 5x_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 4 & x_1 \\ 0 & 9 & 9 & x_3 + x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 22x_1 - 9x_2 - 14x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 11x_1 - 4x_3 - 3x_4 \end{array}\right)$$

Составим систему, в которую входят уравнения для U и для V. Ее решение и будет пересечением подпространств U и V. При этом третье уравнение из системы для U можно не рассматривать, так как ранее мы показали, что оно выражается через первые два. Решать данную систему мы также будем методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \\ 22 & -9 & -14 & 0 \\ 11 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & -5 \\ 1 & -6 & -4 & 5 \\ 0 & -9 & -6 & 6 \\ 11 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 23 & 14 & -20 \\ 0 & 66 & 40 & -58 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -14 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно базисом пересечения является один вектор $(2, -6, 7, -2)$. $\square$

Ответ. Размерность суммы равна 3, базис $(1,2,1,3),(0,10,-5,8)$ и $(1,4,-1,5)$. Размерность пересечения равна 1, базис $(2,-6,7,-2)$.

2. Найти жорданову форму, жорданов базис и минимальный многочлен матрицы

$$\begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 & 6 & 8 \\ 9 & 5 & 6 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 5 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем характеристический многочлен данной матрицы A :

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -7-\lambda & -4 & -4 & 6 & 8 \\ 9 & 5-\lambda & 6 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 5-\lambda & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -7-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -(1+\lambda)\det\begin{pmatrix} -7-\lambda & -4 \\ 9 & 5-\lambda \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -9 \\ 4 & -7-\lambda \end{pmatrix} = -(1+\lambda)^5.$$

Следовательно у A есть ровно одно собственное значение $\lambda = 1$; теперь найдем собственные векторы, это решения однородной системы линейных уравнений с матрицей $A+I$, где I — единичная матрица.

$$\begin{pmatrix} -6 & -4 & -4 & 6 & 8 \\ 9 & 6 & 6 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 6 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно собственными векторами являются $(2,-3,0,0,0),(1,0,2,1,1),(0,0,3,2,0)$ и их линейные комбинации. Также несложно проверить, что $(A+I)^2 = 0$, а значит в жордановой форме данной матрицы всего три клетки (из количества собственных векторов) и максимальный размер клетки равен 2, то есть жорданова форма имеет вид

$$J(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а минимальный многочлен равен $(x+1)^2$.

Теперь найдем жорданов базис. В качестве его 2-го и 4-го векторов можно взять любые два вектора, независимые с собственными векторами матрицы $A+I$. Возьмем $\mathbf{e}_2 = (1,0,0,0,0)$ и $\mathbf{e}_4 = (0,0,1,0,0)$, тогда $\mathbf{e}_1 = (A+I)\mathbf{e}_2 = (-6,9,0,0,0)$, $\mathbf{e}_3 = (A+I)\mathbf{e}_4 = (-4,6,6,4,0)$ и вектор $\mathbf{e}_5$ должен быть независимым с остальными векторами базиса и быть собственным вектором; в качестве $\mathbf{e}_5$ можно взять вектор $(1,0,2,1,1)$. □

Ответ. Минимальный многочлен $(x+1)^2$.

$$J(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Найти расстояние между прямой l и плоскостью Π в $\mathbb{R}^4$:

$$l:\ (2,4,1,0)+\langle(-2,1,1,0)\rangle,\quad \Pi:\ \begin{cases} x_1+2x_3=3\\ x_1-2x_2+3x_4=2\end{cases}.$$

Решение 1. Направляющиий вектор прямой l не параллелен плоскости Π, так как он не удовлетворяет второму уравнению из системы для Π с нулевой правой частью. Значит в $\mathbb{R}^4$ существует единственный (с точностью до домножения на ненулевую константу) вектор $\mathbf{y}$, который перпендикулярен и прямой l, и плоскости Π; найдем его. Все векторы, перпендикулярные Π, записываются в виде $\mathbf{y}=\alpha(1,0,2,0)+\beta(1,-2,0,3)$, так как $(1,0,2,0)$ и $(1,-2,0,3)$ — это нормали к трехмерным плоскостям, задающим Π. Запишем равенство нулю скалярного произведения $\mathbf{y}$ и направляющего вектора прямой l: $\alpha(-2+0+2+0)+\beta(-2-2+0+0)=0$, то есть $\beta=0$ и $\mathbf{y}=(1,0,2,0)$.

Теперь найдем общий перпендикуляр к прямой l и плоскости Π, для этого возьмем произвольную точку прямой l вида $(2-2t,4+t,1+t,0)$, отложим от нее вектор $u\mathbf{y}=(u,0,2u,0)$ и найдем, когда полученная точка лежит в плоскости Π. Искомым расстоянием будет длина вектора $u\mathbf{y}$. Чтобы данная точка лежала в Π нужно, чтобы выполнялась следующая система уравнений:

$$\begin{cases}(2-2t+u)+2(1+t+2u)=3\\ (2-2t+u)-2(4+t)+3(0+0)=2\end{cases}\iff\begin{cases}5u=-1\\ u-3t=6\end{cases}.$$

Таким образом искомым расстоянием является длина вектора $\frac{1}{5}(1,0,2,0)$, то есть $\frac{1}{\sqrt{5}}$. $\square$

Решение 2. Пусть прямая l задается в виде $\mathbf{a}_1+\langle\mathbf{r}_1\rangle$, а плоскость Π в виде $\mathbf{a}_2+\langle\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3\rangle$ и при этом векторы $\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3$ линейно независимы; тогда расстояние между прямой и плоскостью задается в виде

$$d=\sqrt{\left|\frac{\det G(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3)}{\det G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3)}\right|},$$

где $G(\cdot)$ — это матрица Грама соответствующего набора векторов.

В нашем случае $\mathbf{a}_1=(2,4,1,0),\mathbf{a}_2=(1,1,1,1),\mathbf{r}_1=(-2,1,1,0),\mathbf{r}_2=(2,1,-1,0),\mathbf{r}_3=(0,3,0,2)$. (Точка $\mathbf{a}_2$ и векторы $\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3$ получены из системы уравнений для Π.) Найдем указанные определители матриц Грама:

$$|\det G(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3)|=\left|\det\begin{pmatrix}11&1&5&7\\1&6&-4&3\\5&-4&6&3\\7&3&3&13\end{pmatrix}\right|=\left|\det\begin{pmatrix}1&6&-4&3\\0&-65&49&-26\\0&-34&26&-12\\0&-39&31&-8\end{pmatrix}\right|=$$

$$\left|\det\begin{pmatrix}65&49&26\\34&26&12\\39&31&8\end{pmatrix}\right|=\left|\det\begin{pmatrix}-3&-3&2\\34&26&12\\39&31&8\end{pmatrix}\right|=\left|\det\begin{pmatrix}-3&-3&2\\1&-7&34\\0&-8&34\end{pmatrix}\right|=$$

$$=\left|\det\begin{pmatrix}-3&-3&2\\1&1&0\\0&-8&34\end{pmatrix}\right|=\left|\det\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&0\\0&-8&34\end{pmatrix}\right|=16.$$

$$|\det G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3)|=\left|\det\begin{pmatrix}6&-4&3\\-4&6&3\\3&3&13\end{pmatrix}\right|=\left|\det\begin{pmatrix}0&-10&-23\\-1&9&16\\3&3&13\end{pmatrix}\right|=$$

$$=\left|\det\begin{pmatrix}0&-10&-23\\-1&-1&-7\\3&3&13\end{pmatrix}\right|=\left|\det\begin{pmatrix}0&-10&-23\\-1&-1&-7\\0&0&-8\end{pmatrix}\right|=80.$$

Следовательно $d=\sqrt{\frac{16}{80}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$. $\square$

Ответ. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

4. Найти канонический вид и канонический базис для ортогонального оператора f, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$A_f = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора f^{100} в каноническом базисе.

Решение 1. Каноническим видом ортогонального оператора в трехмерном пространстве является один из следующих двух видов

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \mp\sin\alpha & 0 \\ \pm\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

В нашем случае определитель матрицы оператора равен 1, а значит по крайней мере одним из собственных значений будет $\lambda = 1$. При переходе к новой системе координат след матрицы оператора не меняется, а значит в каноническом базисе след матрицы данного нам оператора равен 2. Это возможно только в случае когда канонический вид принадлежит второму типу с $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. А значит в каноническом базисе матрица оператора f имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \mp\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В данном случае знак "+" или "−" появляется в зависимости от того, как ориентирован пара первых двух базисных векторов в плоскости, которая ими определяется; при этом возможны оба варианта. Данный оператор поворачивает первые два вектора канонического базиса на угол $\pm\frac{\pi}{3}$ и не меняет третий базисный вектор, а значит f^{100} поворачивает первые два вектора на угол $100\frac{\pi}{3} = 32\pi + \frac{4\pi}{3}$ и не меняет третий базисный вектор, то есть имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \pm\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \mp\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь построим канонический базис. Вначале найдем собственный вектор с собственным значением 1:

$$A_f - I = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

а значит собственный вектор — это вектор $(1,1,1)$ и третий вектор канонического базиса — это $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Дополним его до ортонормированного базиса векторами $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ и $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$. Определим знак угла поворота первых двух базисных векторов; для этого рассмотрим вектор $A_f\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_2$, а значит в первом столбце матрицы оператора f в каноническом базисе стоит знак "+". □

Решение 2. Найдем комплексные собственные значения оператора f. Если при этом у нас получится пара сопряженных значений $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$, то значит в каноническом виде будет подматрица 2×2, расположенная на диагонали, вида $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \mp\sin\alpha \\ \pm\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

$$27\det(A_f - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-3\lambda & -1 & 2 \\ 2 & 2-3\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 2-3\lambda \end{pmatrix} = (2-3\lambda)^3 + 8 - 1 + 3\cdot 2\cdot(2-3\lambda) =$$

$$= 27 - 54\lambda + 54\lambda^2 - 27\lambda^3 = 27(1-\lambda)(1-\lambda+\lambda^2).$$

Следовательно характеристический многочлен матрицы A_f это $\chi_f(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda+\lambda^2)$ и его корнями являются числа $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda_3 = 1$. Значит матрица оператора f в каноническим базисе выглядит так:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \mp\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Канонический базис и вид матрицы оператора f^{100} в каноническом базисе ищутся аналогично решению 1. $\square$

Ответ.

$$C = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad A'_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A'_{f^{100}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. В пространстве многочленов степени не выше 2 задано скалярное произведение

$$(f,g) = f_0g_0 + f_1g_1 + f_2g_2, \quad \text{где } f = f_2t^2 + f_1t + f_0,\ g = g_2t^2 + g_1t + g_0.$$

Найти матрицу оператора дифференцирования и матрицу сопряженного оператора в базисе

$$\left\{1, t, \frac{3t^2-1}{2}\right\}.$$

Решение. Матрица оператора в данном базисе — это матрица, в столбах которой записаны координаты образов базисных векторов. Оператор дифференцирования действует на векторы нашего базиса следующим образом: $\dfrac{d}{dt}1 = 0, \dfrac{d}{dt}t = 1, \dfrac{d}{dt}\dfrac{3t^2-1}{2} = 3t$, а значит матрица оператора дифференцирования в данном базисе имеет следующий вид:

$$A_{d/dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица сопряженного оператора имеет вид $A^* = G^{-1}A^TG$, где G — матрица Грама данного базиса. В нашем случае

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \text{ и } G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица сопряженного оператора имеет вид

$$A_{(d/dt)^*} = G^{-1}A^TG = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Ответ.

$$A_{d/dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{(d/dt)^*} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Для данной пары квадратичных функций проверить, что по крайней мере одна из них является положительно определенной, и найти линейное преобразование, приводящее эту функцию к нормальному, а другую — к каноническому виду; указать этот канонический вид.

$$f(\mathbf{x}) = 6x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 6x_2x_3 + 6x_3^2$$
$$g(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$$

Решение 1. Матрицы данных форм выглядят следующим образом:

$$F = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию Сильвестра, положительно определенной является форма $g(\mathbf{x})$. Найдем собственные значения пары форм; для этого найдем корни многочлена $\det(F - \lambda G)$:

$$\det(F-\lambda G) = \begin{pmatrix} 6-2\lambda & 0 & 3-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & -3+\lambda \\ 3-\lambda & -3+\lambda & 6-2\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -3+\lambda \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)^2 \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1-\lambda & -3+\lambda \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2(2(-3+\lambda)+3(1-\lambda)) = -(3-\lambda)^2(3+\lambda).$$

Следовательно, в искомом базисе C матрица формы F_C будет иметь вид

$$F_C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти базис C необходимо найти векторы $\mathbf{x}$, являющиеся решениями соответствующих уравнений $(f-\lambda g)(\mathbf{x}) = 0$ при соответствующих λ, являющихся собственными значениями пары форм f и g.

$$\lambda_{1,2} = 3 : F - \lambda G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а значит в качестве векторов нового базиса можно взять векторы $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$ и $\mathbf{e}_2 = (a,0,b)$, умноженные на ненулевые константы, так как значения формы $g(\mathbf{x})$ на векторах нового базиса должны быть равны 1. Поскольку $g((1,0,0)) = 2$,, в качестве первого базисного вектора можно взять $\mathbf{f}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$. Чтобы найти второй базисный вектор отметим, что соответствующая g билинейная форма должна давать 0 на паре новых базисных векторов:

$$0 = (1,0,0) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = 2a + b.$$

Кроме того, $g((1,0,-2)) = 6$, а значит $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,-2)$.

$$\lambda_{1,2} = 3 : F - \lambda G = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & -6 \\ 6 & -6 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

то есть $\mathbf{e}_3 = (1,-3,-2)$. Далее, $g((1,-3,-2)) = 3$, а значит $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-3,-2)$. □

Решение 2. Как и в первом решении отметим, что матрицы данных форм выглядят следующим образом

$$F = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

и форма g положительно определена согласно критерию Сильвестра. Найдем нормальный вид формы $g(\mathbf{x})$ с помощью метода Лагранжа:

$$g(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 = (x_2 - x_3)^2 + 2x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2 =$$
$$= (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2 + x_1^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

где $y_1 = x_1, y_2 = x_3 + x_1, y_3 = x_2 - x_3$. Значит $x_1 = y_1, x_2 = -y_1 + y_2 + y_3, x_3 = -y_1 + y_2$ и форма g приводится к нормальному виду линейным преобразованием с матрицей

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

После этого преобразования форма f будет иметь матрицу

$$F_1 = C_1^T F C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее можно считать, что форма $g(\mathbf{y})$ задает скалярное произведение и нам нужно найти ортонормированный базис, в котором форма $f(\mathbf{y})$ будет иметь диагональную матрицу. Для этого найдем собственный значения и ортонормированный базис из собственных векторов матрицы F_1 :

$$\det(F - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3 - 2 \cdot 8 - 3 \cdot 4(1-\lambda) = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 3).$$

Теперь найдем ортонормированный базис из собственных векторов:

$$\lambda_{1,2} = 3 : F_1 - \lambda I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а значит ортогональными собственными векторами с длиной 1 и собственным значением 3 являются векторы $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ и $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$.

$$\lambda_{1,2} = 3 : F_1 - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть собственный вектор — это $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)$. Таким образом, для того чтобы перейти к ортонормированному базису относительно формы g, в котором форма f диагональна, нужно сделать линейную замену с матрицей

$$C_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Итоговая замена записывается с помощью матрицы

$$C = C_1 C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -3\sqrt{2} \\ 0 & -2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$\square$

Ответ.

$$F_C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -3\sqrt{2} \\ 0 & -2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Замечание. В обоих решениях у нас получилась одна и та же матрица замены C, однако, этого могло и не случиться. В обоих решениях мы выбирали пару векторов в соответствующем собственном подпространстве, а это можно сделать не единственным образом.