

1. Линейное пространство над произвольным полем. Ранг и база системы векторов.

Пусть дано поле P . Непустое мн-во V называется **линейным** или **векторным пространством над полем P** , если на этом мн-ве определены внутренний $V \times V \rightarrow V$ (сложение) и внешний $P \times V \rightarrow V$ (умножение на число из P) законы композиции, удовлетворяющие аксиомам: $\forall a, b, c \in V$ и $\alpha, \beta \in P$

- $a + b = b + a$
- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $\exists \theta \in V: a + \theta = \theta + a = a$
- для $\forall a \in V \exists -a \in V: a + (-a) = (-a) + a = \theta$
- $1 \cdot a = a$
- $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$
- $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
- $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$

Линейное пр-во над полем \mathbb{R} – **вещественное линейное пр-во**, над полем \mathbb{C} – **комплексное**. Рассмотрим конечные системы a_1, \dots, a_n векторов. Линейно независимая подсистема системы векторов, через которую линейно выражается \forall вектор системы, называется **базой этой системы векторов**.

T1. Подсистема системы векторов является базой системы векторов \Leftrightarrow образует максимальную линейно независимую подсистему.

Док-во. Необр-сть. Пусть в системе векторов a_1, \dots, a_n подсистема a_1, \dots, a_r образует базу \Rightarrow

\forall большая подсистема будет линейно зависима по T (*), т.к. \forall ее вектор линейно выражается через базу $a_1, \dots, a_r \Rightarrow$ база образует максимальную линейно независимую подсистему.

Дост-сть. Пусть a_1, \dots, a_r – максимальная линейно независимая подсистема системы a_1, \dots, a_n . \Rightarrow для $\forall a_i, i=1, \dots, k$, подсистема a_1, \dots, a_n линейно зависима (если $i < r$, то как подсистема, содержащая 2 одинаковых вектора; если $i > r$, то как подсистема из $r+1 > r$ векторов). По T (***) a_i – линейно выражается через $a_1, \dots, a_r \Rightarrow a_1, \dots, a_r$ – база. •

C1. Все базы одной системы векторов состоят из одинакового числа векторов, равного максимальному числу линейно независимых векторов системы.

Число векторов базы называется **рангом системы векторов**: $rg(a_1, \dots, a_n)$ = максимальному числу линейно независимых векторов системы.

2 системы векторов линейного пр-ва называются **эквивалентными**, если каждая из этих систем выражается через другую \Rightarrow база системы векторов эквивалентна самой системе.

T2. Если система a_1, \dots, a_k линейно выражается через b_1, \dots, b_m , то $rg(a_1, \dots, a_k) \leq rg(b_1, \dots, b_m)$.

Док-во. Пусть a_1, \dots, a_r и b_1, \dots, b_s – базы. Из условия теоремы и транзитивности свойства "линейной выражаемости" \Rightarrow база a_1, \dots, a_r 1-й системы линейно выражается через базу b_1, \dots, b_s , 2-й $\Rightarrow r \leq s$, т.к. иначе, если $r > s$, система a_1, \dots, a_r была бы линейно зависима по T (*). •

C2. Ранги эквивалентных систем совпадают.

C3. Эквивалентные линейно независимые системы векторов состоят из одинакового числа векторов.

Система векторов e_1, \dots, e_n линейного пр-ва V **порож-дает пр-во V** , если $\forall x \in V$ является линейной комбинацией e_1, \dots, e_n . Упорядоченная система векторов e_1, \dots, e_n линейного пр-ва V называется **базисом V** , если она линейно независима и порождает V .

T1. \forall 2 базиса линейного пр-ва состоят из одинакового числа векторов. (\Rightarrow из эквивалентности двух базисов линейного пр-ва и C2).

Число векторов базиса не зависит от самого базиса и однозначно определяется самим пр-вом (T *).

Число векторов базиса линейного пр-ва V – **размерность пространства V** : $\dim V$. Размерность 0-го пр-ва по определению = 0. Из T*** $\Rightarrow \dim V$ = максимальному числу линейно независимых векторов этого пр-ва. Линейное пр-во размерности $n, n \in \mathbb{N}$, называется **n -мерным**. 0-е пространство и n -мерные пр-ва называются **конечномерными**. Линейное пр-во называется **бесконечномерным**, если для $\forall k \in \mathbb{N}$ в пр-ве $\exists k$ линейно независимых векторов. Пример: пр-во M_n многочленов всех степеней.

T2 (о неполном базисе). В n -мерном пр-ве \forall линейно независимую систему из k , где $k < n$, векторов можно дополнить до базиса.

Док-во. e_1, \dots, e_n – линейно независимая система векторов пр-ва V . Т.к. $k < n \Rightarrow$ в силу T*** система e_1, \dots, e_k не является базисом $V \Rightarrow$ не порождает всего пр-ва V .

Пусть вектор $e_{k+1} \in V$ не является линейной комбинацией $e_1, \dots, e_k \Rightarrow$ система векторов e_1, \dots, e_k, e_{k+1} линейно независима (в силу T**). Если $k+1 = n$, то эта система векторов образует базис V , если же $k+1 < n$, то ан-но построим линейно независимую систему из $k+2$ векторов. За $n-k$ таких шагов мы построим искомым базис $e_1, \dots, e_k, \dots, e_n$. •

Коэффициенты разложения вектора по базису называются **координатами вектора в этом базисе**.

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ – 2 базиса n -мерного пр-ва V . Векторы 2-го базиса, как векторы пр-ва V , разлагаются по базису e :

$$f_1 = c_{11}e_1 + \dots + c_{n1}e_n$$

$$\dots$$

$$f_n = c_{1n}e_1 + \dots + c_{nn}e_n$$

Коэффициенты c_{ij} этих разложений образуют матрицу $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ **перехода от базиса e к базису f** .

1°. Разложение вектора по базису единственно.

2°. Координаты вектора обладают линейностью.

3°. При переходе от базиса e к базису $f = eC$ координаты вектора x изменяются: $x_e = Cx_f$

*: Если в линейном пр-ве большая система векторов линейно выражается через меньшую, то большая система линейно зависима

** : Если система a_1, \dots, a_n линейно независима, а система a_1, \dots, a_n, b линейно зависима, то вектор b линейно выражается через векторы a_1, \dots, a_n

***: Система векторов e_1, \dots, e_n линейного пр-ва является его базисом \Leftrightarrow она образует максимальную линейно независимую систему векторов этого пр-ва

2. Изоморфизм линейных пространств

Система векторов e_1, \dots, e_n линейного пр-ва V **порож-дает пр-во V** , если $\forall x \in V$ является линейной комбинацией e_1, \dots, e_n . Упорядоченная система векторов e_1, \dots, e_n линейного пр-ва V называется **базисом V** , если она линейно независима и порождает V .

T1. \forall 2 базиса линейного пр-ва состоят из одинакового числа векторов. (\Rightarrow из эквивалентности двух базисов линейного пр-ва и следствия (Ранги эквивалентных систем совпадают)).

Число векторов базиса не зависит от самого базиса и однозначно определяется самим пр-вом (T *).

Число векторов базиса линейного пр-ва V – **размерность пространства V** : $\dim V$. Размерность 0-го пр-ва по определению = 0. Из T* \Rightarrow

размерность линейного пр-ва = максимальному числу линейно независимых векторов этого пр-ва. Линейное пр-во размерности $n, n \in \mathbb{N}$,

называется **n -мерным**. 0-е пространство и n -мерные пр-ва называются **конечномерными**. Линейное пр-во называется **бесконечномерным**, если для $\forall k \in \mathbb{N}$ в пр-ве $\exists k$ линейно независимых векторов. Пример: пр-во M_n многочленов всех степеней.

T2 (о неполном базисе). В n -мерном пр-ве \forall линейно независимую систему из k , где $k < n$, векторов можно дополнить до базиса.

Док-во. e_1, \dots, e_n – линейно независимая система векторов пр-ва V . Т.к. $k < n \Rightarrow$ в силу T* система e_1, \dots, e_k не является базисом $V \Rightarrow$ не порождает всего пр-ва V .

Пусть вектор $e_{k+1} \in V$ не является линейной комбинацией $e_1, \dots, e_k \Rightarrow$ система векторов e_1, \dots, e_k, e_{k+1} линейно независима (в силу T**).

Если $k+1 = n$, то эта система векторов образует базис V , если же $k+1 < n$, то ан-но построим линейно независимую систему из $k+2$ векторов. За $n-k$ таких шагов мы построим искомым базис $e_1, \dots, e_k, \dots, e_n$. •

Коэффициенты разложения вектора по базису называются **координатами вектора в этом базисе**.

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ – 2 базиса n -мерного пр-ва V . Векторы 2-го базиса, как векторы пр-ва V , разлагаются по базису e : $f_1 = c_{11}e_1 + \dots + c_{n1}e_n$

\dots

$f_n = c_{1n}e_1 + \dots + c_{nn}e_n$

Коэффициенты c_{ij} этих разложений образуют матрицу $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ **перехода от базиса e к базису f** .

1°. Разложение вектора по базису единственно.

2°. Координаты вектора обладают свойством линейности.

3°. При переходе от базиса e к базису $f = eC$ координаты вектора x изменяются: $x_e = Cx_f$

2 линейных пр-ва V_1 и V_2 над общим полем P называются **изоморфными** ($V_1 \cong V_2$), если \exists биективное отображение $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$, которое сохраняет законы композиции, т.е. если для $\forall x, y \in V_1$ и \forall числа $\alpha \in P$

1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ 2) $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$.

Само отображение φ называется **изоморфизмом линейных пространств**.

Св-ва изоморфных пр-тв:

1°. Отношение изоморфизма – отношение эквивалентности на мн-ве всех линейных пр-тв над P .

2°. В изоморфных пр-вах

а) образ (и прообраз) линейной комбинации векторов есть линейная комбинация образов (прообразов) с теми же коэффициентами;

б) образ (и прообраз) 0-го вектора есть 0-й вектор;

в) образ (и прообраз) линейно независимой системы векторов образует линейно независимую систему;

г) образ (и прообраз) базиса есть базис.

Док-ва этих свойств опираются на определение и элементарные св-ва объектов.

T (критерий изоморфизма). 2 линейных пр-ва над общим полем изоморфны \Leftrightarrow их размерности равны.

Док-во. Необр-сть \Rightarrow из св-ва "2" изоморфных пр-тв.

Дост-сть. Пусть V_1 и V_2 – линейные пр-ва над полем P и $\dim V_1 = \dim V_2 = n$. Пусть e_1, \dots, e_n – базис V_1 ,

f_1, \dots, f_n – базис V_2 . Построим отображение $\varphi: V_1 \rightarrow V_2, \forall x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in V_1 \rightarrow y = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \in V_2$ (т.е. вектор y имеет те же координаты, что и x). Из единственности разложения вектора по базису \Rightarrow отображение φ

биективно. И φ – изоморфизм, т.к. координаты вектора обладают св-вом линейности.

C. \forall n -мерное вещественное пр-во изоморфно арифметическому пр-ву \mathbb{R}^n , а любое n -мерное комплексное пр-во – арифметическому пр-ву \mathbb{C}^n .

*: Система векторов e_1, \dots, e_n линейного пр-ва является его базисом \Leftrightarrow она образует максимальную линейно независимую систему векторов этого пр-ва

** : Если система векторов a_1, \dots, a_n линейно независима, а система a_1, \dots, a_n, b линейно зависима, то вектор b линейно выражается через векторы a_1, \dots, a_n

***: Система векторов e_1, \dots, e_n линейного пр-ва является его базисом \Leftrightarrow она образует максимальную линейно независимую систему векторов этого пр-ва

3. Сумма и пересечение линейных пространств.

Подмножество L линейного пр-ва V над полем P называется **линейным подпространством** пр-ва V , если оно является линейным пр-вом относительно законов композиции в V .

Пусть a_1, \dots, a_k – система векторов линейного пр-ва V над полем P . **Линейной оболочкой** $L(a_1, \dots, a_k)$ системы векторов a_1, \dots, a_k называется мн-во всевозможных линейных комбинаций этих векторов: $L(a_1, \dots, a_k) = \{ a = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i \mid \alpha_i \in P, i = \overline{1, k} \}$
 $\Rightarrow \forall$ конечномерное пр-во является линейной оболочкой векторов своего базиса.

T1. Если a_1, \dots, a_k – векторы линейного пр-ва V , то $L(a_1, \dots, a_k)$ является линейным подпространством пр-ва V . (Вытекает из T*, т.к. для линейной оболочки $L(a_1, \dots, a_k)$ обе импликации имеют место.)
 Линейная оболочка $L(a_1, \dots, a_k)$ – это линейное подпространство, порождаемое векторами a_1, \dots, a_k .

2 системы векторов линейного пр-ва **эквивалентны**, если каждая из этих систем выражается через другую.

T2. 2 системы векторов линейного пр-ва эквивалентны \Leftrightarrow их линейные оболочки совпадают.

Док-во. **Необх-сть.** Пусть системы a_1, \dots, a_k и b_1, \dots, b_m эквивалентны $\Rightarrow L(a_1, \dots, a_k) = L(b_1, \dots, b_m)$, т.к. для этих множеств имеет место двустороннее вложение. **Дост-сть** очевидна.

C1. Линейная оболочка системы векторов совпадает с линейной оболочкой своей базы.

C2. $\dim L(a_1, \dots, a_k) = \text{rg}(a_1, \dots, a_k)$.

T3 (о монотонности размерности). Размерность линейного подпространства не превосходит размерности пр-ва. Подпространство той же размерности, что и все пр-во, совпадает с пр-вом.

Док-во. Пусть L – линейное подпространство V , $\dim L = k$, $\dim V = n \Rightarrow k \leq n$, т.к. иначе в n -мерном пр-ве $V \exists k (k > n)$ линейно независимых векторов (например, векторы базиса L). Пусть $k = n$ и e_1, \dots, e_n – базис L . $\dim V = n \Rightarrow$ векторы e_1, \dots, e_n образуют базис V (B n -мерном пр-ве $\forall n$ линейно независимых векторов образуют базис). Т.о., $L = V = L(e_1, \dots, e_n)$.

Пусть L_1, \dots, L_k – линейные подпространства линейного пр-ва V . **Суммой подпространств** L_1, \dots, L_k называется множество всевозможных векторов x , представимых в виде $x = x_1 + \dots + x_k$ (разложение вектора x по подпространствам L_1, \dots, L_k), где $x_i \in L_i, i = \overline{1, k}$.

$L_1 + \dots + L_k = \sum_{i=1}^k L_i = \{ x = x_1 + \dots + x_k \mid x_i \in L_i, i = \overline{1, k} \}$

Пересечение подпространств L_1, \dots, L_k называется множеством $L_1 \cap \dots \cap L_k = \{ x \in V \mid x_i \in L_i, i = \overline{1, k} \}$

0-й вектор $\theta \in L_1 \cap \dots \cap L_k$.

T4. Сумма и пересечение подпространств линейного пр-ва V являются линейными подпространствами пр-ва V . (Вытекает из T*, т.к. для $\sum_{i=1}^k L_i$ и $\bigcap_{i=1}^k L_i$ справедливы обе импликации)

$\forall L_i, i = \overline{1, k}$ и их пересечение являются линейными подпространствами суммы $L_1 + \dots + L_k$, а пересечение $L_1 \cap \dots \cap L_k$ – линейным подпространством $\forall L_i$

T5. Сумма линейных подпространств есть линейная оболочка совокупности базисов слагаемых подпространств.

Док-во. Пусть $e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_s, q_1, \dots, q_t$ – базисы подпространств L_1, L_2, \dots, L_k . Положим $W = L(e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_s, q_1, \dots, q_t) \Rightarrow W = L_1 + \dots + L_k$, т.к. для этих множеств имеет место двустороннее вложение.

C. Размерность суммы линейных подпространств = рангу совокупности слагаемых подпространств:

$\dim \sum_{i=1}^k L_i = \text{rg}(e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_s, q_1, \dots, q_t)$.

(Вытекает из T5 с учетом T3)

T6. Для \forall линейных подпространств L_1 и L_2 пр-ва V : $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2$ (1)

Док-во. Пусть $L_1 \cap L_2 \neq \{ \theta \}$ и f_1, \dots, f_s – базис $L_1 \cap L_2$. Т.к. $L_1 \cap L_2 \subset L_1$ и $L_1 \cap L_2 \subset L_2 \Rightarrow$ по T** векторы f_1, \dots, f_s можно дополнить и до базиса L_1 , и до базиса L_2 .

Пусть $e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_s$ – базис L_1 , $a_1, \dots, a_t, f_1, \dots, f_s, q_1, \dots, q_t$ – базис L_2 . Система векторов $e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_s, q_1, \dots, q_t$ (2)

порождает $L_1 + L_2$ по T5 и она линейно независима,

т.к. если $\sum_{i=1}^m \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^s \beta_i f_i + \sum_{i=1}^t \gamma_i q_i = \theta$, (3) то

$$q = \sum_{i=1}^t \gamma_i q_i = - \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^s \beta_i f_i \quad (4)$$

\Rightarrow вектор $q \in L_1 \cap L_2 \Rightarrow q$ – линейная комбинация векторов f_1, \dots, f_s . Из единственности разложения вектора q по линейно независимой системе векторов $e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_s \Rightarrow$ в (4) $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0 \Rightarrow$ в (3) в силу линейной независимости $f_1, \dots, f_s, q_1, \dots, q_t: \beta_1 = \dots = \beta_s = 0, \gamma_1 = \dots = \gamma_t = 0 \Rightarrow$ только тривиальная линейная комбинация векторов (2) = $\theta \Rightarrow$ векторы (2) образуют базис $L_1 + L_2 \Rightarrow \dim(L_1 + L_2) = m + s + t$. (5)

Согласно схеме построения векторов (2),

$\dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2 = (m + s) + (s + t) - s \Rightarrow$ сравнение с (5) дает (1).

Если $L_1 \cap L_2 = \{ \theta \}$, док-во ан-но, но в нем не участвуют векторы f_1, \dots, f_s .

*. **Непустое подмножество L пр-ва V является линейным подпространством этого пр-ва \Leftrightarrow имеют место импликация:**

1) $a, b \in L \Rightarrow a + b \in L$, 2) $a \in L, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha a \in L$

**.: (о неполном базисе). В n -мерном пр-ве \forall линейно независимую систему из k , где $k < n$, векторов можно дополнить до базиса.

4. Прямая сумма линейных пространств.

Сумма подпространств линейного пр-ва называется **прямой суммой** ($L_1 \oplus \dots \oplus L_k$), если разложение \forall вектора в ней по слагаемым подпространствам единственно.

T1 (критерии прямой суммы). Для подпространств L_1, \dots, L_k конечномерного линейного пр-ва V следующие утверждения равносильны:

- 1) сумма подпространств L_1, \dots, L_k – прямая;
- 2) совокупность базисов подпространств L_1, \dots, L_k линейно независима;
- 3) совокупность базисов подпространств L_1, \dots, L_k образует базис суммы $\sum_{i=1}^k L_i$;

4) $\dim \sum_{i=1}^k L_i = \sum_{i=1}^k \dim L_i$;

5) \exists вектор $a \in \sum_{i=1}^k L_i$, для которого разложение по подпространствам L_1, \dots, L_k единственно;

6) \forall система ненулевых векторов a_1, \dots, a_k , взятых по одному из каждого $L_i, i = \overline{1, k}$, линейно независима;

7) $L_1 \cap L_2 = \{ \theta \}$ (для $k = 2$).

Док-во. 1 \Rightarrow 2. Пусть совокупность $e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_s, q_1, \dots, q_t$ базисов подпространств L_1, \dots, L_k линейно зависима и

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^s \beta_i f_i + \dots + \sum_{i=1}^m \gamma_i q_i = \theta \quad (1)$$

$$\text{где } \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^s \beta_i^2 + \dots + \sum_{i=1}^m \gamma_i^2 \neq 0 \quad (2)$$

$$\text{Пусть } x_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i, x_2 = \sum_{i=1}^s \beta_i f_i, \dots, x_k = \sum_{i=1}^m \gamma_i q_i$$

$x_i \in L_i, i = \overline{1, k}$, причем среди x_1, \dots, x_k в силу (2) и линейной независимости векторов \forall базиса $\exists x_i \neq \theta \Rightarrow$ (1) можно записать $\theta = x_1 + \dots + x_k, x_i \neq \theta$ (3)

Это дает 2-е разложение θ (кроме $\theta = \theta + \dots + \theta$) по подпространствам L_1, \dots, L_k .

2 \Rightarrow 1. Пусть L_1, \dots, L_k – не прямая сумма $\Rightarrow \exists b$ из этой суммы, который имеет 2 разложения по L_1, \dots, L_k :

$$b = b_1 + \dots + b_k, \quad b = b_1' + \dots + b_k', \quad (4)$$

которые отличаются хотя бы 1 слагаемым. Если вычтуть из 1-го равенства 2-е и разложить каждое слагаемое $b_j - b_j'$ по базису L_j , получим нетривиальную линейную комбинацию базисных векторов пр-тов L_1, \dots, L_k , равную θ . Это противоречит линейной независимости совокупности базисов L_1, \dots, L_k .

2 \Leftrightarrow 3. Это следует из теоремы (Сумма линейных подпространств есть линейная оболочка совокупности базисов слагаемых подпространств).

3 \Leftrightarrow 4. Эти утверждения отличаются только терминологией.

1 \Rightarrow 5. Очевидно.

5 \Rightarrow 1. Пусть $L_1 + \dots + L_k$ – не прямая сумма $\Rightarrow \exists$ вектор b из этой суммы, для которого имеют место 2 различных разложения (4). Вычитая, получим нетривиальное разложение 0-го вектора (3). Если его сложить с разложением вектора a , то получим еще одно разложение вектора a .

1 \Rightarrow 6. Пусть система векторов a_1, \dots, a_k , где $a_i \in L_i, a_i \neq \theta, i = \overline{1, k}$, линейно зависима $\Rightarrow \exists$ числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in P$, одновременно $\neq 0$ (пусть $\alpha_i \neq 0$): $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_i a_i + \dots + \alpha_k a_k = \theta$. Это дает 2-е разложение θ , отличное от тривиального (т.к. $\alpha_i a_i \neq \theta$) \Rightarrow противоречие с п.1.

6 \Rightarrow 1. Пусть $L_1 + \dots + L_k$ – не прямая сумма, тогда \exists вектор b , для которого имеют место 2 разложения (4). Вычитая, получим $\alpha_{i_2} + \dots + \alpha_{i_q} = \theta$, где $\alpha_{i_m} = b_{i_m} - b'_{i_m} \neq \theta, \alpha_{i_m} \in L_{i_m}, m = \overline{1, q} \Rightarrow$ векторы a_{i_2}, \dots, a_{i_q} линейно зависима $\Rightarrow \forall$ система ненулевых векторов, взятых по одному из каждого $L_i, i = \overline{1, k}$, содержащая эти векторы, линейно зависима в силу теоремы (Если подсистема системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима). Это противоречит 6.

4 \Leftrightarrow 7. Это следует из теоремы (Для \forall 2 линейных подпространств L_1 и L_2 линейного пр-ва V : $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2$).

T2. Линейное пр-во V является прямой суммой своих подпространств L_1 и $L_2 \Leftrightarrow$:

$$1) \dim V = \dim L_1 + \dim L_2 \quad 2) L_1 \cap L_2 = \{ \theta \}$$

Док-во. **Необх-сть** из T1 (утверждения 4,7).

Дост-сть. Из условия 2 $\Rightarrow L_1 + L_2$ – прямая сумма. Пусть $L = L_1 \oplus L_2$. По T1 (У4) $\dim V = \dim L_1 + \dim L_2 \Rightarrow$ в силу условия 1: $\dim V = \dim L \Rightarrow L = V$ (Размерность линейного подпространства не превосходит размерности пр-ва. Подпространство той же размерности, что и все пр-во, совпадает с пр-вом), т.е. $V = L_1 \oplus L_2$.

Пусть L – линейное подпространство пр-ва V . Подпространство L^σ называется **дополнительным подпространством** к L , если $L \oplus L^\sigma = V = \Rightarrow L$ – дополнительное подпространство к L^σ .

T3. Для \forall подпространства L линейного пр-ва $V \exists$ дополнительное подпространство.

Док-во. Если $L = \{ \theta \}$, то $L^\sigma = V$, а если $L = V$, то

$L^\sigma = \{ \theta \}$. Пусть L – нетривиальное подпространство. Пусть e_1, \dots, e_k – базис L . Дополним его до базиса $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ всего пр-ва $V \Rightarrow L(e_{k+1}, \dots, e_n) = L^\sigma$, т.к. для подпространства $L(e_{k+1}, \dots, e_n)$ выполнены все условия T2.

5. Евклидово и унитарное пространство. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца.

Пусть V – вещественное или комплексное линейное пр-во. Отображение $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow P$ называется **скалярным произведением**, если оно удовлетворяет **аксиомам**: для $\forall x, y, z \in V$ и $\forall \alpha \in P$

- 1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, (в вещественном случае без черты)
- 2) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$
- 3) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$ (1)
- 4) $(x, x) \geq 0$ для $\forall x \in V$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Число (x, y) называется **скалярным произведением векторов x и y** .

Вещественное линейное пр-во со скалярным произведением называется **евклидовым пространством E** , комплексное – **унитарным V** .

Из определения скалярного произведения \Rightarrow св-ва:

- 1° $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$, $\forall x, y, z \in E(U)$.
- 2° $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$, $\forall x, y \in E(U)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.
- 3° $(\theta, x) = (x, \theta) = 0 \forall x \in E(U)$
- 4° $(x, y) = 0$ для $\forall y \in E(U) \Leftrightarrow x = \theta$.

5° \forall подпространство L евклидова (унитарного) пр-ва является евклидовым (унитарным) пр-вом.

Скалярное произведение (x, y) векторов x, y линейно по 1-му аргументу, а в евклидовом пр-ве – по обоим (св-ва 1°, 2°).

T1. Для $\forall x, y \in E(U)$ имеет место **неравенство Коши–Буняковского**: $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$ (2)

$$\text{или } \begin{vmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (x, y) & (y, y) \end{vmatrix} \geq 0$$

Док-во. Пусть $x \neq \theta$ (для $x = \theta$ (2) – равенство). Для $\forall x, y \in E(U)$ и $\forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ согласно (1) и св-вам 1°–4°:

$$0 \leq (\alpha x - y, \alpha x - y) = (\alpha x, \alpha x) - (\alpha x, y) - (y, \alpha x) + (y, y) = |\alpha|^2(x, x) - \alpha(x, y) - \overline{\alpha}(y, x) + (y, y) \quad (3)$$

$x \neq \theta \Rightarrow (x, x) \neq 0$. Пусть $\alpha = (y, x)/(x, x) \Rightarrow$ из (3) имеем

$$0 \leq \frac{|y, x|^2}{(x, x)^2}(x, x) - \frac{(y, x)(x, y)}{(x, x)} - \frac{(x, y)(y, x)}{(x, x)} + (y, y)$$

\Rightarrow после очевидных преобразований получим (2). •

3. Неравенство К–Б в евклидовом пр-ве:

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y).$$

T2. Неравенство К–Б обращается в равенство \Leftrightarrow векторы x и y коллинеарны.

Док-во содержится в док-ве T1: если $x = \theta$, то $x = 0y$. Если $x \neq \theta$, то (3) обращается в равенство \Leftrightarrow

$$0 = (\alpha x - y, \alpha x - y), \text{ т.е. когда } y = \alpha x.$$

В евклидовом и унитарном пр-вах **длина** вектора x : $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

Из аксиом скалярного произведения \Rightarrow

- 1° \forall вектор x евклидова (унитарного) пр-ва имеет длину, при этом $|x| \geq 0$, $\forall x \in E(U)$ и $|x| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.
- 2° $|\alpha x| = |\alpha||x|$, $\forall x \in E(U)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

Неравенство Коши–Буняковского в новой терминологии: $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$ (4)

Вектор единичной длины называется **нормированным**. \forall ненулевой вектор можно нормировать, поделив его на его длину.

T3. В евклидовом (унитарном) пр-ве для $\forall x, y$:

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \quad (5)$$

Док-во. $|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)$.

Применив числовые неравенства треугольника, с учетом (4):

$$|x + y|^2 \leq |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

$$|x + y|^2 \geq |x|^2 - 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| - |y|)^2$$

\Rightarrow (5). •

Неравенства (5) называются **неравенствами треугольника в евклидовом (унитарном) пр-ве**.

В евклидовом пр-ве **углом** между ненулевыми векторами x и y называется угол φ , $0 < \varphi < \pi$:

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$$

В унитарном пр-ве понятие угла между векторами не определено.

6. Скалярное произведение в ортонормированном базисе.

Существование ОНБ.

Пусть V – вещественное или комплексное линейное пр-во. Отображение $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow P$ называется **скалярным произведением**, если оно удовлетворяет аксиомам: для $\forall x, y, z \in V$ и $\forall \alpha \in P$

- 1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, (в вещественном случае без черты)
- 2) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$
- 3) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$
- 4) $(x, x) \geq 0$ для $\forall x \in V$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Число (x, y) называется **скалярным произведением векторов x и y** .

Векторы $x, y \in E(U)$ называются **ортгоналными**, если $(x, y) = 0$. Из св-ва $((x, y) = 0 \text{ для } \forall y \in E(U) \Leftrightarrow x = \theta) \Rightarrow$ только 0-й вектор θ ортогонален \forall вектору пр-ва. В евклидовом пр-ве вследствие $\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x||y|}$

ортгоналность векторов x и y означает, что либо один из них 0-й, либо угол между ними $= \pi/2$.

Система векторов $x_1, \dots, x_k \in E(U)$ – **ортгоналная**, если $(x_i, x_j) = 0$ при $i \neq j$ (1)

Система $x_1, \dots, x_k \in E(U)$ – **ортонормированная**, если

$$(x_i, x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2)$$

T1. **Ортгоналная система ненулевых векторов линейно независима.**

Док-во. Пусть $x_1, \dots, x_k \in E(U)$ – ортгоналная система ненулевых векторов. Умножая обе части равенства $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = \theta$ (3)

скалярно на x_i , получаем по (1) $\alpha_i(x_i, x_i) = 0$, $i = \overline{1, k}$. По условию $x_i \neq \theta \Rightarrow (x_i, x_i) \neq 0 \Rightarrow$ в (3) все $\alpha_i = 0 \Rightarrow$ векторы системы линейно независимы. •

S1. **Ортонормированная система векторов линейно независима.**

S2. В n -мерном евклидовом (унитарном) пр-ве \forall ортонормированная система из n векторов образует базис.

Базис, векторы которого образуют ортонормированную систему, называется **ортонормированным базисом (ОНБ)**. Из (2) $\Rightarrow e_1, \dots, e_n$ –

$$\text{ОНБ } E(U), \text{ если } (e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (4)$$

T2. В евклидовом (унитарном) пр-ве координаты x_1, \dots, x_n вектора x в базисе $e = (e_1, \dots, e_n)$ вычисляются по правилу $x_i = (x, e_i)$, $i = \overline{1, n}$ (5) $\Leftrightarrow e$ – ОНБ.

Док-во. **Необ-сть.** Пусть для $\forall x \in E(U)$ координаты в базисе e вычисляются по (5) \Rightarrow по (5) вычисляются координаты и базисных векторов: $e_i = 0e_1 + \dots + 0e_{i-1} + 1e_i + 0e_{i+1} + \dots + 0e_n$, $i = \overline{1, n}$. Сравнение координат e_i с (5) приводит к (4).

Дост-сть. Если e – ОНБ и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, то св-во линейности скалярного произведения с учетом (4) приводит к (5). •

T3. В евклидовом (унитарном) пр-ве скалярное произведение векторов $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, заданных своими координатами в базисе e , вычисляются по правилу $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ (6) $\Leftrightarrow e$ – ОНБ.

Док-во. **Необх-сть.** Если скалярное произведение вычисляется согласно (6) для \forall пары векторов, то это же верно для пары базисных векторов e_i и e_j , координаты которых известны. Применив правило (6) для вычисления (e_i, e_j) , получим равенства (4).

Дост-сть. Если e – ОНБ и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \Rightarrow$ в силу свойства линейности скалярного произведения имеем

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \overline{y_j} (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \quad \blacksquare$$

3. В евклидовом пр-ве черту в (6) можно опустить: $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

T4. В конечномерном евклидовом (унитарном) пр-ве \exists ОНБ.

Док-во (по индукции). Пусть $\dim V = n$. При $n = 1$ можно взять любой вектор $f \neq \theta$ и положить $e_1 = f/|f|$.

Пусть в $(n-1)$ -мерном евклидовом (унитарном) пр-ве \exists ОНБ. Пусть f_1, \dots, f_{n-1} – базис $E(U)$. Линейная оболочка $\mathcal{L}(f_1, \dots, f_{n-1})$ является $(n-1)$ -мерным пр-вом, и в нем по индуктивному предположению \exists ОНБ e_1, \dots, e_{n-1} . Т.к. $f_n \notin \mathcal{L}(f_1, \dots, f_{n-1}) = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_{n-1})$, то вектор $g_n = f_n - \alpha_1 e_1 - \dots - \alpha_{n-1} e_{n-1} \neq \theta$ при $\forall \alpha_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Выберем коэффициенты α_i , $i = \overline{1, n-1}$, из условия ортогональности вектора g_n всем векторам e_1, \dots, e_{n-1} : $0 = (g_n, e_i) = (f_n, e_i) - \alpha_i$, $i = \overline{1, n-1}$. Тогда, положив

$e_n = g_n/|g_n|$, получим ОНБ e_1, \dots, e_n пр-ва $E(U)$. •

7. Изометрия.

2 линейных пр-ва V_1 и V_2 над общим полем P называются **изоморфными** ($V_1 \cong V_2$), если \exists биективное отображение $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$, которое сохраняет законы композиции, т.е. если для $\forall x, y \in V_1$ и $\forall \alpha \in P$

$$1) \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad 2) \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x).$$

Само отображение φ называется **изоморфизмом линейных пространств**. Свойства изоморфных пр-тв:

1°. *Отношение изоморфизма есть отношение эквивалентности на множестве всех линейных пр-тв над полем P .*

2°. *В изоморфных пр-вах*

а) *образ (и прообраз) линейной комбинации векторов есть линейная комбинация образов (прообразов) с теми же коэффициентами;*

б) *образ (и прообраз) нулевого вектора есть нулевой вектор;*

в) *образ (и прообраз) линейно независимой системы векторов образует линейно независимую систему;*

г) *образ (и прообраз) базиса есть базис.*

Т (критерий изоморфизма). 2 линейных пр-ва над общим полем изоморфны \Leftrightarrow их размерности равны.

Док-во. *Необх-сть* вытекает из св-ва "з" изоморфных пр-тв.

Дост-сть. Пусть V_1 и V_2 – линейные пр-ва над полем P и $\dim V_1 = \dim V_2 = n$. Пусть e_1, \dots, e_n – базис V_1 ,

f_1, \dots, f_n – базис V_2 . Построим отображение $\varphi: V_1 \rightarrow V_2, \forall x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in V_1 \rightarrow y = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \in V_2$ (т.е. вектор y имеет те же координаты, что и x). Из единственности разложения вектора по базису \Rightarrow отображение φ биективно. И φ – изоморфизм, т.к. координаты вектора обладают св-вом линейности. •

Евклидовы пр-ва E_1 и E_2 называются **изоморфными**, если \exists биективное отображение $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$, которое сохраняет законы композиции и скалярное произведение:

$$1) \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \forall x, y \in E_1$$

$$2) \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x), \forall x \in E_1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$3) (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y), \forall x, y \in E_1$$

Само отображение φ называется **изоморфизмом евклидовых пространств** или **изометрией**.

Для унитарных пространств все также, но в св-ве 2:

$\alpha \in \mathbb{C}$. Из определения \Rightarrow изоморфные евклидовы (унитарные) пр-ва изоморфны как линейные пр-ва.

Т1. Два евклидовых (унитарных) пр-ва изоморфны \Leftrightarrow равны их размерности.

Док-во. *Необх-сть* вытекает из изоморфизма евклидовых (унитарных) пр-тв как линейных пр-тв.

Дост-сть. Пусть V_1, V_2 – оба евклидовы (оба унитарные) пр-ва и пусть $\dim V_1 = \dim V_2 = n$. Выберем в V_1 и V_2 ОНБ e_1, \dots, e_n и e'_1, \dots, e'_n . Построим отображение $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$, поставив в соответствие каждому вектору $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V_1$ вектор $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i e'_i$. Из док-ва критерия изоморфизма \Rightarrow отображение φ – изоморфизм линейных пр-тв V_1 и V_2 . Оно сохраняет скалярное произведение, т.к. если $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, то

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i, \quad (\varphi(x), \varphi(y)) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$$

согласно теореме (В евклидовом (унитарном) пр-ве скалярное произведение векторов $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, заданных своими координатами в базисе e , вычисляется по правилу $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \Leftrightarrow e$ – ОНБ):

8. Матрица Грама. Критерий линейной зависимости.

Пусть V – вещественное или комплексное линейное пр-во. Отображение $(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow P$ называется **скалярным произведением**, если оно удовлетворяет аксиомам: для $\forall x, y, z \in V$ и $\forall \alpha \in P$

$$1) (x, y) = \overline{(y, x)}, \text{ (в вещественном случае без черты)}$$

$$2) (\alpha x, y) = \alpha(x, y) \quad 3) (x+y, z) = (x, z) + (y, z)$$

$$4) (x, x) \geq 0 \text{ для } \forall x \in V, \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta.$$

Матрицей Грама системы векторов a_1, \dots, a_k евклидова (унитарного) пр-ва называется матрица

$$G(a_1, \dots, a_k) = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_k, a_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_1, a_k) & \dots & (a_k, a_k) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Определитель матрицы Грама называется **определителем Грама**.

Т1. Система векторов a_1, \dots, a_k евклидова (унитарного) пр-ва линейно зависима $\Leftrightarrow \det G(a_1, \dots, a_k) = 0$.

Док-во. *Необх-сть.* Пусть a_1, \dots, a_k – линейно зависимая система векторов. Последовательно умножая нетривиальную линейную комбинацию

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = \theta \quad (2)$$

скалярно на векторы a_1, \dots, a_k , получим однородную систему уравнений относительно $\alpha_1, \dots, \alpha_k$:

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \dots + \alpha_k(a_k, a_1) = 0, \\ \dots \\ \alpha_1(a_1, a_k) + \dots + \alpha_k(a_k, a_k) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

с матрицей коэффициентов $G(a_1, \dots, a_k)$. Т.к. \exists нетривиальное решение этой системы (Однородная система $Ax = 0$ с квадратной матрицей имеет нетривиальное решение $\Leftrightarrow |A| = 0$) $\Rightarrow \det G(a_1, \dots, a_k) = 0$.

Дост-сть. Пусть $\det G(a_1, \dots, a_k) = 0 \Rightarrow (3)$ имеет нетривиальное решение $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Перепишем ее:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i a_i, a_1 \right) = 0, \\ \dots \\ \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i a_i, a_k \right) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

\Rightarrow вектор $g = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i \in \mathcal{L}(a_1, \dots, a_k)$ и ортогонален

$\mathcal{L}(a_1, \dots, a_k) \Rightarrow$ по аксиоме 4 скалярного произведения вектор g может быть только 0-м \Rightarrow для a_1, \dots, a_k имеет место (2) \Rightarrow с учетом нетривиальности набора a_1, \dots, a_k следует линейная зависимость a_1, \dots, a_k . •

$A^H = (a_{ij}^h)$ – сопряженная к $A = (a_{ij})$: $a_{ij}^h = \bar{a}_{ji}$. Матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ называется **эрмитовой матрицей**, если $A^H = A$. (5)

$\Rightarrow |A| \in \mathbb{R}$. Матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется **симметрической** (или **вещественной эрмитовой**), если $A^T = A$. (6)

Т2. Матрица Грама системы векторов евклидова (унитарного) пр-ва эрмитова.

Док-во. Пусть $G(a_1, \dots, a_k) = G = (g_{ij})$. Из (1) $\Rightarrow g_{ij} = (a_i, a_j), g_{ji} = (a_j, a_i)$, т.е. $g_{ij} = \bar{g}_{ji} \Rightarrow G^H = G$, в вещественном случае, $G^T = G$. •

Т3. Определитель Грама линейно независимой системы векторов в евклидовом (унитарном) пр-ве положителен.

Док-во. Пусть a_1, \dots, a_k – линейно независимая система векторов евклидова пр-ва $\Rightarrow \dim \mathcal{L}(a_1, \dots, a_k) = k$. Выберем ОНБ e_1, \dots, e_k линейной оболочки $\mathcal{L}(a_1, \dots, a_k)$. Составим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

столбцы – координаты векторов a_1, \dots, a_k в базисе

$e = (e_1, \dots, e_k) \Rightarrow$ (по Т. В евклидовом (унитарном) пр-ве скалярное

произведение векторов $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, заданных координатами в базисе e , вычисляется по $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \Leftrightarrow e$ – ОНБ)

$$(a_i, a_j) = \sum_{s=1}^n a_{sj} \bar{a}_{si} = \sum_{s=1}^n a_{is}^h a_{sj} = \{A^H A\}_{ij}, \quad i, j = \overline{1, k}$$

$\Rightarrow G(a_1, \dots, a_k) = A^H A$ и $\det G(a_1, \dots, a_k) = |\det A|^2 \Rightarrow \det G(a_1, \dots, a_k) \geq 0$. Т.к. система a_1, \dots, a_k линейно независима \Rightarrow по Т1 $\det G(a_1, \dots, a_k) \neq 0 \Rightarrow \det G(a_1, \dots, a_k) > 0$

3. В вещественном случае $G(a_1, \dots, a_k) = A^T A$.

9. Ортогональное дополнение. Ортогональная сумма подпространств. Расстояние от вектора до подпространства.

Пусть L – линейное подпространство евклидова (унитарного) пр-ва $E(U)$. Вектор x называется **ортогональным к подпространству** L ($x \perp L$), если он ортогонален $\forall u \in L$.

$x \perp L$ (a_1, \dots, a_k) $\Leftrightarrow x \perp a_i, i = \overline{1, k}$. Совокупность всех векторов $x \in E(U)$, ортогональных подпространству L , называется **ортогональным дополнением** L^\perp к L .

Т1. Ортогональное дополнение к подпространству является линейным подпространством.

Док-во. Пусть $y_1, y_2 \in L^\perp$, тогда $(y_1, x) = (y_2, x) = 0$ для $\forall x \in L$. Складываем эти равенства $\Rightarrow (y_1 + y_2, x) = 0, \forall x \in L \Rightarrow y_1 + y_2 \in L^\perp$. Если $(y, x) = 0, \forall x \in L$, то $(\alpha y, x) = 0 \Rightarrow \alpha y \in L^\perp \Rightarrow L^\perp$ – линейное подпространство по Т (Непустое подмножество L пр-ва V является линейным подпространством этого пр-ва \Leftrightarrow имеют место импликация: 1) $a, b \in L \Rightarrow a+b \in L, 2) a \in L, \alpha \in R \Rightarrow \alpha a \in L$).

Т2. Если L – линейное подпространство $E(U)$, то $L \oplus L^\perp = E(U)$ (1)

Док-во. Для тривиального подпространства очевидно. Пусть L – нетривиальное подпространство. Возьмем $e_1, \dots, e_k \in \text{ОНБ } L, e_{k+1}, \dots, e_n \in \text{ОНБ } L^\perp$. Система векторов $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ ортонормирована \Rightarrow линейно независима (Т Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима). Покажем, что она образует базис всего пр-ва $E(U)$. Пусть это не так. Тогда \exists вектор f пр-ва, который не является линейной комбинацией e_1, \dots, e_n . Система векторов e_1, \dots, e_n, f линейно независима, и применение процесса ортогонализации приводит к вектору e_{n+1} , который ортогонален e_1, \dots, e_n и, значит, $e_{n+1} \in L^\perp$. С другой стороны, $e_{n+1} \perp L^\perp$, т.к. e_{n+1} ортогонален $e_{k+1}, \dots, e_n \Rightarrow e_{n+1} \in L \Rightarrow$ линейная зависимость e_1, \dots, e_n, f , что противоречит допущению. Т.о., система e_1, \dots, e_n является базисом $E(U)$ и $\dim L + \dim L^\perp = \dim E(U)$. Т.к. $L \cap L^\perp = \{0\}$, то получаем (1) по Т (Линейное пр-во V является прямой суммой своих подпространств L_1 и $L_2 \Leftrightarrow: 1) \dim V = \dim L_1 + \dim L_2; 2) L_1 \cap L_2 = \{0\}$). •
С. Если L – линейное подпространство $E(U)$, то для $\forall f \in E(U) \exists!$ разложение (где $g \in L, h \perp L$):

$$f = g + h \quad (2)$$

Вектор g в (2) – **ортогональная проекция вектора f на L** (перпендикуляр, опущенный из вектора f на L), вектор h – **ортогональная составляющая вектора f** , вектор f – **наклонная к подпространству L** .

$$|f|^2 = (g + h, g + h) = (g, g) + (h, h) \Rightarrow$$

$|f|^2 = |g|^2 + |h|^2$ (3) – теорема Пифагора в евклидовом (унитарном) пр-ве

Множество M называется **метрическим пр-вом**, если задано

отображение $\rho: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, которое каждой упорядоченной паре элементов $x, y \in M$ ставит в соответствие число $\rho(x, y) \in \mathbb{R}$ такое, что:

- 1) $\rho(x, y) \geq 0, \forall x, y \in M; \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in M$
- 3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \forall x, y, z \in M.$

Число $\rho(x, y)$ – **расстояние между x и y** ; отображение ρ – **метрика**, аксиомы 1–3 – **аксиомы метрики**. **Расстоянием между множествами X и Y** в метрическом пр-ве называется число

$$\rho(X, Y) = \inf_{x \in X, y \in Y} \rho(x, y)$$

Т3. В евклидовом (унитарном) пр-ве V правило $\rho(x, y) = |x - y|$ задает метрику.

Док-во. Правило определяет отображение $\rho: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, которое отвечает всем аксиомам метрики. Например: $\rho(x, z) = |x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Т4 (о кратчайшем расстоянии). Расстояние между вектором f и линейным подпространством L в евклидовом (унитарном) пр-ве равно длине перпендикуляра, опущенного из вектора f на L .

Док-во. Пусть $f = g + h$, где $g \in L, h \perp L, \forall u \in L \Rightarrow \rho(f, u) = |(g + h) - u| = |h + (g - u)| =$
 $= \sqrt{|h|^2 + |g - u|^2} \Rightarrow \rho(f, u) \geq |h|, \forall u \in L$ и $\rho(f, u) = |h|$, если $u = g \Rightarrow$

$$|h| = \inf_{u \in L} \rho(f, u) = \rho(f, L) \quad \blacksquare$$

Т4 в других терминах:

- 1) расстояние между вектором f и подпространством L , равно расстоянию между вектором f и его ортогональной проекцией на L ;
- 2) среди всех векторов подпространства L ближе всего к вектору f расположена его ортогональная проекция на L .

10. Ортонормированный базис и унитарные (ортогональные) матрицы.

2 вектора $x, y \in E(U)$ **ортогональны**, если $(x, y) = 0$.

Система векторов $x_1, \dots, x_k \in E(U)$ **ортогональна**, если $(x_i, x_j) = 0$ при $i \neq j$ (1)

Система $x_1, \dots, x_k \in E(U)$ **ортонормированная**, если

$$(x_i, x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2)$$

Т1. Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

Док-во. Пусть $x_1, \dots, x_k \in E(U)$ – ортогональная система, $x_i \neq 0$. Умножая скалярно на x_i равенство

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_i x_i + \dots + \alpha_k x_k = \theta \quad (3),$$

получаем в силу (1) $\alpha_i (x_i, x_i) = 0, i = \overline{1, k}$. По условию $x_i \neq 0 \Rightarrow (x_i, x_i) \neq 0 \Rightarrow$ все $\alpha_i = 0 \Rightarrow$ система линейно независима. •

Сл1. Ортонормированная система векторов линейно независима.

Сл2. В n -мерном евклидовом (унитарном) пр-ве \forall ортонормированная система из n векторов образует базис.

Базис, векторы которого образуют ортонормированную систему, называется **ортонормированным базисом (ОНБ)**. Из (2) $\Rightarrow e_1, \dots, e_k \in \text{ОНБ } E(U)$, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (4)

Т2. В евклидовом (унитарном) пр-ве координаты x_1, \dots, x_n вектора x в базисе $e = (e_1, \dots, e_n)$ вычисляются по правилу $x_i = (x, e_i), i = \overline{1, n}$ (5) $\Leftrightarrow e$ – ОНБ.

Док-во. Необх-сть. Пусть для $\forall x \in E(U)$ координаты в базисе e вычисляются согласно (5) \Rightarrow по (5) вычисляются координаты и базисных векторов: $e_i = 0e_1 + \dots + 0e_{i-1} + 1e_i + 0e_{i+1} + \dots + 0e_n, i = \overline{1, n}$.

Сравнение координат вектора e_i с (5) приводит к (4).

Дост-сть. Если e – ОНБ и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, то свойство линейности скалярного произведения с учетом (4) приводит к (5). •

Т3. В евклидовом (унитарном) пр-ве скалярное произведение векторов $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, заданных своими координатами в базисе e , вычисляются по правилу $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ (6) $\Leftrightarrow e$ – ОНБ.

Док-во. Необх-сть. Если скалярное произведение вычисляется по (6) для \forall пары векторов, то это же верно для пары базисных векторов e_i и e_j , координаты которых известны. Применив правило (6) для вычисления (e_i, e_j) , получим равенства (4).

Дост-сть. e – ОНБ и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \Rightarrow$ в силу линейности скалярного произведения:

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \overline{y_j} (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \quad \blacksquare$$

$A^H = (a_{ij}^H)$ – сопряженная к $A = (a_{ij})$: $a_{ij}^H = \overline{a_{ji}}$

Матрица $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ **унитарна**, если $U U^H = U^H U = I$

Матрица $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **ортогональна**, если $Q Q^T = Q^T Q = I$

Т4. Матрица ортогональна (унитарна) \Leftrightarrow она является матрицей перехода от одного ОНБ к другому ОНБ евклидова (унитарного) пр-ва.

Док-во. Пусть e, e' – 2 ОНБ. Векторы одного базиса можно выразить через векторы другого:

$$e_i' = c_{i1} e_1 + \dots + c_{in} e_n$$

$$\dots$$

$$e_n' = c_{n1} e_1 + \dots + c_{nn} e_n$$

\Rightarrow столбцы матрицы перехода C являются координатами векторов базиса e' в базисе e . По Т3: $(e_i', e_j') = \sum_{k=1}^n c_{ki} \overline{c_{kj}} \Leftrightarrow e$ – ОНБ \Rightarrow условие ортонормированности базиса $e' \Leftrightarrow$ условию ортогональности

(унитарности) матрицы: $\sum_{k=1}^n c_{ki} \overline{c_{kj}} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ и $\sum_{k=1}^n c_{ik} \overline{c_{jk}} =$

$$\begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

11. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. QR–разложение матрицы.

2 вектора $x, y \in E(U)$ ортогональны, если $(x, y) = 0$. Система векторов $x_1, \dots, x_k \in E(U)$ ортогональна, если $(x_i, x_j) = 0$ при $i \neq j$ (1)

Система $x_1, \dots, x_k \in E(U)$ ортонормированная, если

$$(x_i, x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2)$$

T1. Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

Док-во. Пусть $x_1, \dots, x_k \in E(U)$ – ортогональная система, $x_i \neq \theta$. Умножая скалярно на x_i равенство

$$a_1 x_1 + \dots + a_i x_i + \dots + a_k x_k = \theta \quad (3),$$

получаем в силу (1) $a_i (x_i, x_i) = 0$, $i = \overline{1, k}$. По условию $x_i \neq \theta \Rightarrow (x_i, x_i) \neq 0 \Rightarrow$ все $a_i = 0 \Rightarrow$ система линейно независима. •

Сл1. Ортонормированная система векторов линейно независима.

Сл2. В n -мерном евклидовом (унитарном) pr -ве \forall ортонормированная система из n векторов образует базис.

Базис, векторы которого образуют ортонормированную систему, называется **ортонормированным базисом (ОНБ)**. Из (2) $\Rightarrow e_1, \dots, e_k \in \text{ОНБ } E(U)$, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (4)

Процесс ортогонализации. Пусть в евклидовом (унитарном) pr -ве задан базис f_1, \dots, f_n . По нему надо построить ОНБ e_1, \dots, e_n .

l -й шаг. Полагая $g_l = f_l$, находим $e_l = g_l / |g_l|$.

k -й шаг ($k \geq 2$). Полагаем $g_k = f_k - a_1 e_1 - \dots - a_{k-1} e_{k-1}$, где $a_i = (f_k, e_i)$, $i = \overline{1, k-1}$, и находим $e_k = g_k / |g_k|$.

Через n шагов получим ОНБ e_1, \dots, e_n pr -ва. Описанный алгоритм состоит в следующем.

Матрица $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ унитарна, если $U U^H = U^H U = I$

Матрица $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ортогональна, если $Q Q^T = Q^T Q = I$

T4. Матрица ортогональна (унитарна) \Leftrightarrow она является матрицей перехода от одного ОНБ к другому ОНБ евклидова (унитарного) pr -ва.

Док-во. Пусть e, e' – 2 ОНБ. Векторы одного базиса можно выразить через векторы другого:

$$e'_i = c_{1i} e_1 + \dots + c_{ni} e_n$$

...

$$e'_n = c_{1n} e_1 + \dots + c_{nn} e_n$$

\Rightarrow столбцы матрицы перехода C являются координатами векторов базиса e' в базисе e . Согласно теореме (В евклидовом (унитарном) pr -ве скалярное произведение векторов $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, заданных своими координатами в базисе e , вычисляется по правилу $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \Leftrightarrow e$ – ОНБ): $(e'_i, e'_j) = \sum_{k=1}^n c_{ki} \overline{c_{kj}} \Leftrightarrow e$ – ОНБ \Rightarrow условие ортонормированности базиса $e' \Leftrightarrow$ условию ортогональности (унитарности) матрицы:

$$\sum_{k=1}^n c_{ki} \overline{c_{kj}} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^n c_{ik} \overline{c_{jk}} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

QR–разложение. Пусть $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ имеет линейно независимые столбцы $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}^n$ и к ним применялся процесс ортогонализации Грама–Шмидта \Rightarrow в результате получаются ортонормированные векторы $q_1, \dots, q_m \in \mathbb{C}^n$. $a_k \in \mathcal{L}(q_1, \dots, q_k), k = \overline{1, m} \Rightarrow$ для каких-то чисел r_{ik} : $a_k = \sum_{i=1}^k r_{ik} q_i$ или:

$$A = QR, \quad Q = [q_1, \dots, q_m], \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & r_{mm} \end{bmatrix}$$

Разложение $A = QR$, где Q имеет ортонормированные столбцы, а R – верхняя треугольная матрица, называется **QR–разложением** матрицы A . \Rightarrow для \forall прямоугольной матрицы с линейно независимыми столбцами существует QR–разложение.

T5. \forall прямоугольная матрица, в которой число строк не меньше числа столбцов, обладает QR–разложением с верхней ступенчатой матрицей R .

Док-во. Пусть a_{i_1} – 1-й ненулевой столбец матрицы A ; a_{i_2} – 1-й столбец:

$a_{i_2} \notin \mathcal{L}(a_{i_1})$; a_{i_3} – 1-й столбец: $a_{i_3} \notin \mathcal{L}(a_{i_1}, a_{i_2})$, и т.д. \Rightarrow получаем в A базисную систему столбцов $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}, i_1 < i_2 < \dots < i_r$, обладающую св–вами: $a_j = 0$ при $j < i_1$;

$a_j \in \mathcal{L}(a_{i_1}, \dots, a_{i_l})$ при $i_l < j < i_{l+1}, l = 1, \dots, r-1$; $a_j \in \mathcal{L}(a_{i_1}, \dots, a_{i_r})$ при $i_r < j$

Найдем QR–разложение: $[a_{i_1}, \dots, a_{i_r}] = [q_{i_1}, \dots, q_{i_r}] R_r$.

Систему столбцов q_{i_1}, \dots, q_{i_r} дополним до ОНБ в n -мерном pr -ве столбцов и из полученных столбцов составим матрицу Q , сохранив первоначальные столбцы в позициях i_1, \dots, i_r .

Записав $A = QR$, видим, что в матрице R первые r элементов i_j -го столбца те же, что в l -м столбце матрицы R_r . В то же время, j -й столбец при $i_l < j < i_{l+1}$ имеет 0 в позициях ниже i_l -й.

12. Линейное аффинное многообразие в линейном pr -ве. Гиперплоскость.

Пусть V – линейное pr -во, L – некоторое его подпространство, x_0 – некоторый вектор pr -ва V . Множество H всевозможных векторов вида $x_0 + x$, где $x \in L$, называется **линейным аффинным многообразием pr -ва V , полученным сдвигом L на вектор x_0 , x_0 – вектор сдвига, а L – направляющее подпространство:**

$$H = x_0 + L = \{x_0 + x \mid x \in L\}. \Rightarrow$$

$1^\circ. x_0 \in H$, т.к. $x_0 = x_0 + \theta, \theta \in L$.

$2^\circ.$ Разность двух векторов линейного многообразия принадлежит направляющему подпространству, т.к. если $z_1 = x_0 + x, z_2 = x_0 + y, x, y \in L$, то $z_1 - z_2 = x - y \in L$.

T1. 2 линейных многообразия $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ совпадают $\Leftrightarrow L_1 = L_2 = L$ и $x_1 - x_2 \in L$.

Док-во. Необ-сть. Пусть $H_1 = H_2 \Rightarrow x_1 \in H_2$ и, в силу св–ва $2^\circ, x_1 - x_2 \in L_2$.

Покажем: $L_1 = L_2$. Для $\forall x \in L_1$ имеем $x_1 + x \in H_1$. Т.к. $H_1 = H_2$, то $\exists y \in L_2: x_1 + x = x_2 + y \Rightarrow x = (x_2 - x_1) + y$, где $x_2 - x_1 \in L_2, y \in L_2. \Rightarrow x \in L_2$ и $L_1 \subset L_2$. Ана-но $L_2 \subset L_1 \Rightarrow L_1 = L_2$.

Дост-сть. $L_1 = L_2 = L$ и $x_1 - x_2 \in L \Rightarrow$ для $\forall z \in H_1$:

$z = x_1 + x$, где $x \in L$, или $z = x_2 + (x_1 - x_2) + x, x \in L$.

Т.к. $x_1 - x_2 \in L$ и $x \in L$, то $(x_1 - x_2) + x \in L \Rightarrow z \in H_2$ и $H_1 \subset H_2$. Ана-но $H_2 \subset H_1 \Rightarrow H_1 = H_2$. •

С1. Вектором сдвига может быть \forall вектор линейного многообразия.

Если x_1 – произвольный вектор линейного многообразия $H = x_0 + L$, то $x_1 - x_0 \in L$ и $H = x_1 + L$.

С2. Линейное многообразие может быть получено сдвигом единственного направляющего подпространства. (вытекает из T1).

Размерностью линейного многообразия ($\dim H$) называется размерность его направляющего подпространства. Линейное многообразие размерности 1 – **прямая в линейном pr -ве**, размерности $(n-1)$, где $n = \dim V$, – **гиперплоскость**, а размерности $k, 1 < k < n-1$, – **k -мерная плоскость**.

Линейные многообразия $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ в pr -ве V параллельны, если или $L_1 \subset L_2$, или $L_2 \subset L_1$.

T2. Если 2 линейных многообразия с непустым пересечением параллельны, то одно из них содержит другое.

Док-во. Пусть $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ параллельны и пусть $L_1 \subset L_2$. По условию $\exists x_0 \in H_1 \cap H_2$. Т.к. вектором сдвига может быть \forall вектор линейного многообразия, то $H_1 = x_0 + L_1$ и $H_2 = x_0 + L_2 \Rightarrow$ с учетом $L_1 \subset L_2: H_1 \subset H_2$. •

С3. Если линейные многообразия параллельны, то либо они не пересекаются, либо одно из них содержится в другом.

T3. Непустое пересечение линейных многообразий $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ является линейным многообразием с направляющим подпространством $L_1 \cap L_2$. *Док-во.* По условию $\exists x_0 \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow H_1 = x_0 + L_1$ и $H_2 = x_0 + L_2 \Rightarrow H_1 \cap H_2 = x_0 + L_1 \cap L_2$. Т.к. для этих множеств имеет место двустороннее вложение. •

T4. Всякое k -мерное линейное многообразие в n -мерном pr -ве можно задать в виде пересечения $n-k$ гиперплоскостей.

Док-во. Пусть $H = x_0 + L$ – k -мерное линейное многообразие и e_1, \dots, e_k – базис L .

Дополним его до базиса $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ pr -ва V . В качестве искомого гиперплоскостей можно взять линейные многообразия $H_i = x_0 + L_i$, где $i = \overline{1, n-k}$, где L_i – линейная оболочка всех векторов базиса V , кроме e_{k+i} :

$L_i = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_{k+i-1}, e_{k+i+1}, \dots, e_n) \Rightarrow L_1 \cap L_2 \cap \dots \cap L_{n-k} = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_k) = L$. По T3 $\Rightarrow H = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_{n-k}$. Т.к. $\dim L_i = n-1, i = \overline{1, n-k}$, то H_1 – гиперплоскости. •

T5. Пересечение $H = x_0 + L$ с V подпространством, дополнительным к L , состоит ровно из 1 вектора.

Док-во. L^\perp – дополнительное к L . Т.к. $L \oplus L^\perp = V$, то для $x_0 \exists$ разложение $x_0 = y + z$, где $y \in L, z \in L^\perp \Rightarrow$

$z = x_0 - y \in H$, ибо $-y \in L \Rightarrow z$ – общий вектор L^\perp и H , т.е. $z \in L^\perp \cap H$.

Пусть $z' \in L^\perp \cap H \Rightarrow$ т.к. $z \in H, z' \in H$, то по св–ву $2^\circ z - z' \in L$, а т.к. $z \in L^\perp, z' \in L^\perp$, то $z - z' \in L^\perp$.

Из $L \cap L^\perp = \{\theta\} \Rightarrow z - z' = 0$, т.е. $z = z'$. •

Пусть $H = x_0 + L$ – линейное многообразие в евклидовом (унитарном) pr -ве. Вектор $n \in H, n \perp L$ – **нормальный вектор линейного многообразия L** .

T6. Для \forall линейного многообразия в евклидовом (унитарном) pr -ве $\exists!$ нормальный вектор. *Док-во.* Рассмотрим $H = x_0 + L$. Все векторы из H , ортогональные L , находятся в $H \cap L^\perp$, но $H \cap L^\perp$ состоит ровно из 1 вектора n , т.к. L^\perp – дополнительное к L (T5 и (Если L – линейное подпространство $E(U)$, то $L \oplus L^\perp = E(U)$)). Этот вектор n будет единственным нормальным вектором H . •

T7. Нормальный вектор линейного многообразия совпадает с перпендикуляром, опущенным из \forall вектора линейного многообразия на направляющее подпространство.

Док-во. Пусть n – нормальный вектор линейного многообразия $H = x_0 + L \Rightarrow H = n + L \Rightarrow \forall f \in H$ можно представить в виде $f = n + g, g \in L$. Т.к. $n \perp L$, то это соотношение совпадает с разложением вектора f на ортогональную проекцию g и перпендикуляр n . •

С4. Среди всех векторов линейного многообразия нормальный вектор имеет наименьшую длину.

Пусть $H = x_0 + L$ – гиперплоскость в $E(U)$, т.е. $\dim L = m-1$, где $m = \dim E$ ($\dim U$) $\Rightarrow L^\perp$ – 1-мерное подпространство и его базис состоит из 1 вектора n .

$x \in H \Leftrightarrow$ разность $x - x_0 \in L$, т.е. $(x - x_0, n) = 0$. (1)

\Rightarrow (1) удовлетворяют все векторы x гиперплоскости H , и только они. (1) $\Leftrightarrow (x, n) = p$, где $p = (x_0, n)$ – фиксированное число для данной гиперплоскости.

T8. Пусть $H = x_0 + L$ – линейное аффинное многообразие в евклидовом (унитарном) pr -ве. Тогда $\rho(f, H) = \rho(f - x_0, L)$.

\Rightarrow из T (Расстояние между вектором f и линейным подпространством L в евклидовом (унитарном) pr -ве равно длине перпендикуляра, опущенного из вектора f на L) и того, что для $\forall z = x_0 + y \in H$:

$\rho(f, z) = |f - z| = |(f - x_0) - y| = \rho(f - x_0, L)$, где $y \in L$. •

T9. Пусть $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ – линейные аффинные многообразия в евклидовом (унитарном) pr -ве. Тогда $\rho(H_1, H_2) = \rho(x_1 - x_2, L_1 + L_2)$.

\Rightarrow из того, что для $\forall z_1 = x_1 + y_1 \in H_1$ и $z_2 = x_2 + y_2 \in H_2: \rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)| = \rho(x_1 - x_2, y)$,

где $y = y_1 - y_2 \in L_1 + L_2$. •

13. Линейные операторы (ЛО). Матрица ЛО.

V и W – линейные пр–ва над общим P . Отображение

$A: V \rightarrow W$ (1) называется **линейным оператором, действующим из V в W** , если для $\forall x, y \in V, \alpha \in P$

$$1) A(x+y) = Ax + Ay; \quad 2) A(\alpha x) = \alpha Ax.$$

Если $V = W$, то отображение $A: V \rightarrow V$ называют **линейным оператором, действующим в V** .

Если $W = P$, то отображение (1) называют **линейной формой или линейным функционалом в пр–ве V** .

Множество всех ЛО, действующих из V в $W: \mathcal{L}(V, W)$.

ЛО $A, B \in \mathcal{L}(V, W)$ равны, если $Ax = Bx, \forall x \in V$.

Пр.1. M_n – пр–во вещественных многочленов степени $\leq n$. ЛО

дифференцирования $D: M_n \rightarrow M_n: Dp(t) = p'(t)$.

2. $V = L_1 \oplus L_2$. ЛО проектирования пр–ва V на L_1 параллельно $L_2: P: V \rightarrow V$ по правилу $Px = x_1$ для $x \in V$ с разложением $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$.

ЛО отражения пр–ва V относительно L_1 параллельно $L_2: R: V \rightarrow V$ по правилу $Rx = x_1 - x_2$.

3. Нулевой ЛО $O: V \rightarrow W: \forall x \in V$ переводит в $\theta \in W$.

4. Тожественный ЛО $I: V \rightarrow V, \forall x \in V$ переводит в x .

Из определения \Rightarrow св–ва.

1°. ЛО переводит 0–й вектор в 0–й вектор, т.к.

$$A\theta_1 = A(0x) = 0Ax = \theta_2(\theta), \text{ где } \theta_1 \in V \text{ и } \theta_2 \in W.$$

2°. ЛО сохраняет линейные комбинации, т.е. переводит линейную комбинацию векторов в линейную комбинацию образов с теми же коэффициентами:

$$A\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i Ax_i$$

3°. ЛО сохраняет линейную зависимость, т.е. переводит линейно зависимую систему в линейно зависимую.

Т1. Пусть e_1, \dots, e_n – базис пр–ва V , a_1, \dots, a_n – произвольные векторы пр–ва W . Тогда $\exists!$ ЛО

$A \in \mathcal{L}(V, W)$, который переводит векторы e_1, \dots, e_n в векторы a_1, \dots, a_n соответственно.

Док–во. Построим искомый оператор, положив для

$$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V: Ax = \sum_{i=1}^n x_i a_i \quad (2)$$

Из единственности разложения вектора x по базису \Rightarrow правило (2)

однозначно определяет образ вектора x , причем $Ae_i = a_i, i = \overline{1, n}$. Из линейности координат \Rightarrow линейность построенного оператора.

Оператор A единствен, т.к. если $B - \forall$ другой ЛО, переводящий векторы e_1, \dots, e_n в векторы a_1, \dots, a_n , то

$$Bx = B\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i B e_i = \sum_{i=1}^n x_i a_i = Ax,$$

$$\forall x \in V \Rightarrow B = A.$$

Сл. ЛО $A, B \in \mathcal{L}(V, W)$ равны \Leftrightarrow они совпадают на векторах базиса V .

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_m)$ – базисы пр–тв V и W . Из Т1 \Rightarrow ЛО $A \in \mathcal{L}(V, W)$ однозначно определяется заданием векторов Ae_1, \dots, Ae_n . Но векторы $Ae_i, i = \overline{1, n}$ однозначно определяются своими координатами в базисе f , т.е. коэффициентами разложения

$$\begin{cases} Ae_1 = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 \dots + a_{m1} f_m, \\ Ae_2 = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 \dots + a_{m2} f_m, \\ \dots \\ Ae_n = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 \dots + a_{mn} f_m \end{cases}$$

Матрица оператора A в паре базисов e и f :

$$A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Из единственности разложения вектора по базису \Rightarrow при фиксированных e и f матрица ЛО определена однозначно.

Т2. Пусть $\dim V = n, \dim W = m$. Тогда \exists взаимно однозначное соответствие между линейными операторами из $\mathcal{L}(V, W)$ и матрицами из $P^{m \times n}$.

Док–во. Зафиксируем базисы $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_m)$

пр–тв V и W . Поставим в соответствие каждому ЛО

$A \in \mathcal{L}(V, W)$ его матрицу A_{fe} в паре базисов e и f . Матрица $A_{fe} \in P^{m \times n}$ определена однозначно. Это отображение биективно, т.к. оно:

1) сюръективно, т.к. \forall матрица $B = (b_{ij}) \in P^{m \times n}$ является матрицей ЛО из $\mathcal{L}(V, W)$, переводящего векторы e_j в векторы $\sum_{i=1}^m b_{ij} f_i, j = \overline{1, n}$ (в силу Т1 такой оператор \exists);

2) инъективно, ибо различные операторы из $\mathcal{L}(V, W)$ не совпадают на базисных векторах и, значит, имеют разные матрицы. •

Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется:

– **инъективным**, если из $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. $f(x) = y$ при $\forall y \in Y$ имеет не более 1 решения;

– **сюръективным**, если $\text{im } f = Y$, т.е. $f(x) = y$ при $\forall y \in Y$ имеет хотя бы 1 решение;

– **биективным**, если оно инъективно и сюръективно, т.е. $f(x) = y$ при $\forall y \in Y$ имеет единственное решение.

14. Матрица ЛО при переходе к другому базису. Эквивалентность и подобие матриц.

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_m)$ – базисы пр–тв V и W . Из теоремы (Пусть e_1, \dots, e_n – базис пр–ва V, q_1, \dots, q_n – произвольные векторы пр–ва W . Тогда $\exists!$ ЛО

$A \in \mathcal{L}(V, W)$, который переводит векторы e_1, \dots, e_n в векторы q_1, \dots, q_n соответственно) \Rightarrow

ЛО $A \in \mathcal{L}(V, W)$ однозначно определяется заданием векторов Ae_1, \dots, Ae_n . Но векторы $Ae_i, i = \overline{1, n}$ однозначно определяются своими координатами в базисе f , т.е. коэффициентами разложения

$$\begin{cases} Ae_1 = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 \dots + a_{m1} f_m, \\ Ae_2 = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 \dots + a_{m2} f_m, \\ \dots \\ Ae_n = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 \dots + a_{mn} f_m \end{cases} \quad (1)$$

Матрица оператора A в паре базисов e и f :

$$A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Пусть ЛО $A \in \mathcal{L}(V, W), e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_m)$ базисы пр–тв V и W .

Т1. Если $y = Ax$, то $y_f = A_{fe} x_e$ (2)

Док–во. $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^m y_i f_i, A_{fe} = (a_{ij})$. Утверждение (2) \Leftrightarrow

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, i = \overline{1, m}. \quad (3)$$

Докажем их. Имеем $y = Ax = A\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j A e_j = \{ \text{в силу (1)} \} = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i =$

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) f_i. \text{ Из единственности разложения вектора } y \text{ по базису } f \Rightarrow (3). \bullet$$

Пусть e и $t = eC$ – два базиса пр–ва V с матрицей перехода C, a и $s = fD$ – два базиса пр–ва W с матрицей перехода D . Одному и тому же ЛО $A \in \mathcal{L}(V, W)$ в паре базисов e и f соответствует матрица A_{fe} , а в паре базисов t и s – матрица A_{st} .

Т2. Матрицы A_{fe} и A_{st} ЛО $A \in \mathcal{L}(V, W)$ в различных парах базисов связаны: $A_{st} = D^{-1} A_{fe} C$ (4)

Док–во. Для $\forall x \in V$ и его образа $y = Ax$ в силу (2): $y_f = A_{fe} x_e$ и $y_s = A_{st} x_t$. Т.к. C и D – матрицы перехода, то $x_e = C x_t, y_f = D y_s \Rightarrow D y_s = A_{fe} C x_t \Rightarrow D A_{st} x_t = A_{fe} C x_t$. Т.к. это соотношение верно для $\forall x_t$, то $D A_{st} = A_{fe} C$. В силу невырожденности матрицы перехода \Rightarrow (4). •

2 матрицы A, B называются **эквивалентными** ($A \sim B$), если \exists невырожденные матрицы P и $Q: A = PBQ$.

Квадратные матрицы A, B называются **подобными**, если \exists невырожденная матрица $Q: A = Q^{-1} B Q$.

Сл1. Матрицы ЛО в различных парах базисов эквивалентны.

Сл2. Ранг матрицы ЛО не зависит от выбора базисов.

Т3. 2 матрицы A и B над полем P одинакового раз–мера $m \times n$

эквивалентны \Leftrightarrow они являются матрицами одного и того же ЛО $A \in \mathcal{L}(V, W)$, где V и W – линей–ные пр–ва над полем P размерностей n и m соот–но.

Док–во. **Необх–сть.** Пусть $A, B \in P^{m \times n}$ и $B = D^{-1} A C$. Рассмотрим \forall линейные пр–ва V и W над полем $P: \dim V = n, \dim W = m$. Возьмем в пр–ве V \forall базис e , а в пр–ве W – базис f . В силу взаимно однозначного соответствия между $P^{m \times n}$ и $\mathcal{L}(V, W)$ (теорема: Пусть $\dim V = n, \dim W = m$. Тогда \exists взаимно однозначное соответствие между линейными операторами из $\mathcal{L}(V, W)$ и матрицами из $P^{m \times n}$) $\exists!$ ЛО $A \in \mathcal{L}(V, W)$, который в паре базисов e и f имеет матрицу $A \Rightarrow$ согласно (4) матрица B будет матрицей этого же оператора в паре базисов $t = eC$ и $s = fD$.

Дост–сть рассмотрена в Т2. •

Если $W = V$, то при переходе от базиса e к $f = eQ$ матрица оператора $A \in \mathcal{L}(V, V)$ изменяется по закону:

$A_f = Q^{-1} A_e Q$. Т.о., одному и тому же ЛО $A \in \mathcal{L}(V, V)$ соответствует целый класс матриц, подобных друг другу. Из Т3 \Rightarrow две матрицы $A, B \in P^{n \times n}$ подобны \Leftrightarrow они являются матрицами одного и того же ЛО, действующего в n –мерном пр–ве над полем P .

15. Линейное пр-во ЛО и матриц.

Суммой линейных операторов $A, B \in \mathcal{L}(V, W)$ называется отображение $C: V \rightarrow W$ по правилу $\forall x \in V$

$$Cx = Ax + Bx, \forall x \in V: (A + B)x = Ax + Bx \quad (1)$$

Произведение линейного оператора $A \in \mathcal{L}(V, W)$ на число $\alpha \in P$ — это отображение $C: V \rightarrow W$ по правилу $Cx = \alpha Ax, \forall x \in V: (\alpha A)x = \alpha Ax, \forall x \in V. \quad (2)$

T1. Для \forall операторов $A, B \in \mathcal{L}(V, W)$ и числа $\alpha \in P: A + B \in \mathcal{L}(V, W), \alpha A \in \mathcal{L}(V, W)$

Док-во. Для $\forall x, y \in V$ согласно (1) имеем

$$(A + B)(x + y) = A(x + y) + B(x + y).$$

В силу линейности A, B и аксиом линейного пр-ва

$$(A + B)(x + y) = (Ax + Ay) + (Bx + By) = (Ax + Bx) + (Ay + By) = (Ax + Bx) + (A + B)y = A(x + y) + B(x + y).$$

$A + B \in \mathcal{L}(V, W)$

Так же доказывается, что $\alpha A \in \mathcal{L}(V, W)$.

C1. Сложение операторов и умножение оператора на число являются внутренним и внешним законами композиции на множестве $\mathcal{L}(V, W)$.

Аксиомы линейного пр-ва: $\forall a, b, c \in V$ и $\alpha, \beta \in P$

1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists \theta \in V: a + \theta = \theta + a = a$
4. для $\forall a \in V \exists -a \in V: a + (-a) = (-a) + a = \theta$
5. $1 \cdot a = a$
6. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$
7. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
8. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$

T2. Множество $\mathcal{L}(V, W)$ — линейное пр-во над полем P относительно введенных выше операций.

Док-во. Проверить аксиомы линейного пр-ва, 0-ой элемент — 0-ое отображение $O \in \mathcal{L}(V, W)$, противоположный к A — отображение $-A \in \mathcal{L}(V, W)$ по правилу $(-A)x = -Ax, \forall x \in V$. Ассоциативность. Для $\forall A, B, C \in \mathcal{L}(V, W)$ и $\forall x \in V: ((A + B) + C)x = (A + B)x + Cx = (Ax + Bx) + Cx = Ax + (Bx + Cx) = A(x + y) + B(x + y) = (A + B)(x + y)$.

$$(A + (B + C))x = Ax + (B + C)x = Ax + (Bx + Cx) = (Ax + Bx) + Cx = (A + B)x + Cx = (A + B + C)x.$$

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_m)$ — базисы пр-тв V и W . Из T (Пусть e_1, \dots, e_n — базис пр-ва V , a_1, \dots, a_n — произвольные векторы пр-ва W . Тогда $\exists!$ ЛО

$A \in \mathcal{L}(V, W)$, который переводит векторы e_1, \dots, e_n в векторы a_1, \dots, a_n соответственно) \Rightarrow ЛО

$A \in \mathcal{L}(V, W)$ однозначно определяется заданием векторов Ae_1, \dots, Ae_n . Но векторы $Ae_i, i = \overline{1, n}$ однозначно определяются своими координатами в f :

$$\begin{cases} Ae_1 = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots + a_{m1}f_m \\ Ae_2 = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \dots + a_{m2}f_m \\ \dots \\ Ae_n = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \dots + a_{mn}f_m \end{cases} \quad (3)$$

Матрица оператора A в паре базисов e и f :

$$A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (4)$$

2 линейных пр-ва V_1 и V_2 над общим полем P **изоморфны** ($V_1 \cong V_2$), если \exists биективное отображение $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$, которое сохраняет законы композиции, т.е. если для $\forall x, y \in V_1$ и \forall числа $\alpha \in P$

$$1) \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad 2) \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x).$$

T3. Если $\dim V = n, \dim W = m$, то линейное пр-во $\mathcal{L}(V, W)$ изоморфно пр-ву матриц $P^{m \times n}$.

Док-во. Зафиксируем базисы e и f пр-тв V и W . Построим отображение $\varphi: \mathcal{L}(V, W) \rightarrow P^{m \times n}$, положив $\varphi(A) = A_{fe}$. Это отображение биективно в силу теоремы (Пусть $\dim V = n, \dim W = m$. Тогда \exists взаимно однозначное соответствие между ЛО из $\mathcal{L}(V, W)$ и матрицами из $P^{m \times n}$). Покажем, что оно сохраняет законы композиции, т.е. что

$$(A + B)_{fe} = A_{fe} + B_{fe}, (\alpha A)_{fe} = \alpha A_{fe} \quad (5)$$

Пусть $A_{fe} = (a_{ij}), B_{fe} = (b_{ij}) \Rightarrow$ согласно (3),

$$Ae_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}f_i, Be_j = \sum_{i=1}^m b_{ij}f_i \Rightarrow$$

$$(A + B)e_j = A e_j + B e_j = \sum_{i=1}^m (a_{ij} + b_{ij})f_i.$$

По определению (4) отсюда \Rightarrow 1-е из (5). Аналогично проверяется 2-е соотношение.

$$C2. \dim \mathcal{L}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$$

16. Произведение ЛО и его матрица.

Пусть V, W, Z — линейные пр-ва над полем P . Произведением ЛО $A \in \mathcal{L}(V, W), B \in \mathcal{L}(W, Z)$ называется отображение $C: V \rightarrow Z$ по правилу $Cx = B(Ax), \forall x \in V: (BA)x = B(Ax), \forall x \in V.$

T1. Если $A \in \mathcal{L}(V, W), B \in \mathcal{L}(W, Z)$, то $BA \in \mathcal{L}(V, Z)$

Док-во. Линейность BA : для $\forall x, y \in V$ и $\alpha \in P$

$$(BA)(x+y) = B(A(x+y)) = B(Ax + Ay) = B(Ax) + B(Ay) = BAx + BAy,$$

$$(BA)(\alpha x) = B(A(\alpha x)) = B(\alpha(Ax)) = \alpha B(Ax) = \alpha(BAx) = (\alpha BA)x.$$

Произведение ЛО определено не для любой пары ЛО. Но если это произведение имеет смысл, то:

$$1) (AB)C = A(BC) \quad (\text{ассоциативность});$$

$$2) \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B);$$

$$3) (A + B)C = AC + BC, A(B + C) = AB + AC \quad (\text{дистрибутивность}).$$

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_m)$ — базисы пр-тв V и W . Из T (Пусть e_1, \dots, e_n — базис пр-ва V , a_1, \dots, a_n — произвольные векторы пр-ва W . Тогда $\exists!$ ЛО

$A \in \mathcal{L}(V, W)$, который переводит векторы e_1, \dots, e_n в векторы a_1, \dots, a_n соответственно) \Rightarrow ЛО

$A \in \mathcal{L}(V, W)$ однозначно определяется заданием векторов Ae_1, \dots, Ae_n . Но $Ae_i, i = \overline{1, n}$ однозначно определяются коэффициентами разложения в f :

$$\begin{cases} Ae_1 = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots + a_{m1}f_m \\ Ae_2 = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \dots + a_{m2}f_m \\ \dots \\ Ae_n = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \dots + a_{mn}f_m \end{cases} \quad (1)$$

Матрица оператора A в паре базисов e и f :

$$A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2)$$

T2. При умножении ЛО их матрицы умножаются, т.е. если e, f, g — базисы пр-тв V, W, Z , то

$$(BA)_{ge} = B_{gf}A_{fe}. \quad (3)$$

Док-во. Пусть $A_{fe} = (a_{ij}), B_{gf} = (b_{ij}), (BA)_{ge} = (c_{ij})$,

$$\dim V = n, \dim W = m, \dim Z = k \Rightarrow \text{в силу (1)}$$

$$BAe_j = \sum_{i=1}^k c_{ij}g_i \quad (4)$$

$$\text{В то же время } BAe_j = B(Ae_j) = B(\sum_{s=1}^m a_{sj}f_s) =$$

$$= \sum_{s=1}^m a_{sj}(Bf_s) = \sum_{s=1}^m a_{sj} \sum_{i=1}^k b_{is}g_i = \sum_{i=1}^k \sum_{s=1}^m a_{sj}b_{is}g_i = \sum_{i=1}^k (\sum_{s=1}^m b_{is}a_{sj})g_i$$

Сравнение этого разложения с (4) приводит к равенству $c_{ij} = \sum_{s=1}^m b_{is}a_{sj}$, которое означает (3).

17. Ядро и образ ЛО. Каноническая пара базисов.

Образ $A \in \mathcal{L}(V, W)$: $\text{im } A = \{y \in W / \exists x \in V: Ax = y\}$ **ядро** A : $\ker A = \{x \in V / Ax = \theta\}$

Пр. 1. В пр-ве многочленов M_n для оператора дифференцирования $D: M_n \rightarrow M_n$: $(Dp(t) = p'(t))$:
 $\text{im } D = M_{n-1}$, $\ker D = M_0$.

2. $V = L_1 \oplus L_2$. ЛО проектирования пр-ва V на L_1 параллельно L_2 : $P: V \rightarrow V$ по правилу $Px = x_1$ для $x \in V$ с разложением $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$.

ЛО отражения пр-ва V относительно L_1 параллельно L_2 : $R: V \rightarrow V$ по правилу $Rx = x_1 - x_2$.

Для оператора проектирования: $\text{im } P = L_1$, $\ker P = L_2$

Для оператора отражения: $\text{im } R = V$, $\ker R = \{\theta\}$

T1. Если $A \in \mathcal{L}(V, W)$, то $\ker A$ – линейное подпространство пр-ва V , $\text{im } A$ – линейное подпространство пр-ва W .

для док-ва проверить условия T (Непустое подмножество L пр-ва V является линейным подпространством этого пр-ва \Leftrightarrow имеют место импликаци: 1) $a, b \in L \Rightarrow a+b \in L$, 2) $a \in L, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha a \in L$).

Ранг ЛО – размерность его образа, **дефект** – размерность ядра: $\text{rg } A = \dim \text{im } A$, $\text{def } A = \dim \ker A$

T2. Если e_1, \dots, e_n – базис пр-ва V , то

$$\text{im } A = \mathcal{L}(Ae_1, \dots, Ae_n) \quad (1)$$

Док-во. Для множеств (1) 2-стороннее вложение:

1) если $y \in \text{im } A$, то $y = Ax$ для некоторого $x \in V$, т.е. $y = A(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i Ae_i \in \mathcal{L}(Ae_1, \dots, Ae_n)$

2) если $y \in \mathcal{L}(Ae_1, \dots, Ae_n)$, то $y = \sum_{i=1}^n x_i Ae_i = A(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = Ax$, т.е. $y \in \text{im } A$.

T3. Ранг ЛО равен рангу его матрицы в произвольной паре базисов.

Док-во. Из T2 и из $\dim \mathcal{L}(a_1, \dots, a_k) = \text{rg}(a_1, \dots, a_k) \Rightarrow \text{rg } A = \dim \text{im } A = \dim \mathcal{L}(Ae_1, \dots, Ae_n) = \text{rg}(Ae_1, \dots, Ae_n)$ Ранг системы векторов Ae_1, \dots, Ae_n = рангу системы векторов, составленных из координат этих векторов в базисе f пр-ва W , т.е. рангу системы столбцов матрицы A_{f_e} .

T4 (о ранге и дефекте). Если $A \in \mathcal{L}(V, W)$, то

$$\text{rg } A + \text{def } A = \dim V. \quad (2)$$

Док-во. Пусть e_1, \dots, e_k – базис $\ker A$. Дополним его до базиса $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ пр-ва V . Согласно T2

$\text{im } A = \mathcal{L}(Ae_1, \dots, Ae_k, Ae_{k+1}, \dots, Ae_n) = \mathcal{L}(Ae_{k+1}, \dots, Ae_n)$ Докажем, что Ae_{k+1}, \dots, Ae_n линейно независимы. Пусть это не так \Rightarrow для нетривиальной линейной комбинации этих векторов:

$\alpha_{k+1} Ae_{k+1} + \dots + \alpha_n Ae_n = \theta \Rightarrow A(\alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n) = \theta \Rightarrow \alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n \in \ker A \Rightarrow$ вектор $\alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n$ линейно выражается через e_1, \dots, e_k , что невозможно в силу линейной независимости $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$. Т.о., $\dim \text{im } A = n - k$, $\dim \ker A = k \Rightarrow (2)$.

T5. Пусть $A \in \mathcal{L}(V, W)$, $\text{rg } A = r$, $\dim V = n$, $\dim W = m$. Тогда \exists базисы e и f пр-тов V и W , в которых оператор A имеет матрицу $I_r \in P^{m \times n}$, в которой все элементы равны 0, кроме первых r диагональных элементов, равных 1.

Док-во. Возьмем \forall базисы t и s пр-тов V и W . Пусть A_{st} – матрица оператора A в паре базисов t и $s \Rightarrow$ по T3 $\text{rg } A_{st} = r$. В силу теоремы (Любая ненулевая матрица ранга r эквивалентна матрице I_r) \Rightarrow матрицы A_{st} и I_r эквивалентны \Rightarrow по теореме (Две матрицы A и B над полем P одинакового размера $m \times n$ эквивалентны \Leftrightarrow они являются матрицами одного и того ЛО

$A \in \mathcal{L}(V, W)$, где V и W – линейные пр-ва над полем P размерностей n и m соответственно.) они являются матрицами одного ЛО \Rightarrow утверждение теоремы.

Базисы e и f , в которых оператор A имеет матрицу I_r , называют **канонической парой базисов**.

18. Линейные функционалы. Сопряженное пр-во. Линейные функционалы и гиперплоскости.

Линейное отображение $f: V \rightarrow P$ линейного пр-ва V над полем P в это поле называется **линейным функционалом** в пр-ве V .

Пр. 1. Простейший линейный функционал в пр-ве V – отображение $f: V \rightarrow P: f(x) = 0$, где $0 \in P$.

2. Отображение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ по правилу: если $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, то $f(x) = x_1$.

3. В пр-ве M_n вещественных многочленов степени $\leq n$ линейным функционалом является отображение

$f: M_n \rightarrow \mathbb{R}$ по правилу: если $p(t) \in M_n$, то $f(p) = p(1)$.

Если e_1, \dots, e_n – базис пр-ва V , то линейный функционал $f \in \mathcal{L}(V, P)$, однозначно определяется числами $\alpha_1 = f(e_1), \dots, \alpha_n = f(e_n)$. Для $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ в силу линейности $f: f(x) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ (1)

(1) – **общий вид линейного функционала** f в базисе e_1, \dots, e_n . Числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – **коэффициенты линейного функционала** f в базисе e_1, \dots, e_n .

M_n -во $\mathcal{L}(V, P)$ всех линейных функционалов в линейном пр-ве V образует линейное пр-во относительно операций сложения и умножения на число: $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

Линейное пр-во всех линейных функционалов на пр-ве V называется **сопряженным пр-вом** V^* к пр-ву V .

T1. $\dim V^* = \dim V$.

\Rightarrow из T (Если $\dim V = n$, $\dim W = m$, то линейное пр-во $\mathcal{L}(V, W)$

изоморфно пр-ву матриц $P^{m \times n}$) и ее следствия ($\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$), т.к. $\dim P = 1$

Сл. Всякое конечномерное линейное пр-во изоморфно своему сопряженному.

\Rightarrow из T (2 линейных пр-ва над общим полем изоморфны \Leftrightarrow их размерности совпадают).

T2. Для \forall линейного функционала f в евклидовом (унитарном) пр-ве $V \exists!$ вектор $h \in V$:

$$f(x) = (x, h), \quad \forall x \in V.$$

Док-во. Пусть e_1, \dots, e_n – ОНБ пр-ва V и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – коэффициенты f в этом базисе \Rightarrow вектор $h = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ будет искомым в силу (1) и (В евклидовом (унитарном) пр-ве скалярное произведение векторов $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, заданных своими координатами в базисе e , вычисляется по правилу $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \Leftrightarrow e$ – ОНБ). Пусть еще вектор h_1 удовлетворяет требованиям теоремы $\Rightarrow (x, h_1) = (x, h), \forall x \in V$, т.е. $(x, h_1 - h) = 0, \forall x \in V$. Т.к. $h_1 - h \in V \Rightarrow$

$h_1 - h = \theta \Rightarrow h$ – единственный.

Пусть $L = \ker f$. Если $L = V$, то $f \equiv 0$ (0-й или тривиальный).

Пусть $L \neq V$. Тогда \exists вектор $x_0: f(x_0) \neq 0$. Для $\forall x \in V$ находим: $f(x - \alpha x_0) = 0$ при $\alpha = f(x) / f(x_0) \Rightarrow$

$x = z + \alpha x_0, z \in L$. α однозначно определяется условием $z \in L \Rightarrow V = L \oplus \mathcal{L}(x_0) \Rightarrow \dim L^\perp = 1$.

Рассмотрим $M_c = \{x \in V: f(x) = c\}$. Если $f(x_0) = c$, то, $M_c = x_0 + L$. Т.о., M_c – линейное многообразие с направляющим пр-вом L , у которого дополнительное пр-во имеет размерность 1. В таких случаях линейное многообразие называется **гиперплоскостью**. Отображение $f(x) \rightarrow M(f) = \{x \in V: f(x) = 1\}$ является взаимно-однозначным соответствием между линейными функционалами и гиперплоскостями.

Пусть $\dim V = n$ и e_1, \dots, e_n – базис в $V \Rightarrow \forall$ линейный функционал имеет вид:

$$f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n, \quad \text{где } c_i = f(e_i).$$

Т.о., \forall гиперплоскость в n -мерном пр-ве имеет вид $c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = c$, где x_1, \dots, x_n – координаты разложения вектора по выбранному базису.

21. Характеристический многочлен ЛО. Условие существования собственных значений.

Характеристическим многочленом матрицы $A \in P^{n \times n}$ называется функция $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, $\lambda \in P$ (1)

T1. Характеристический многочлен (1) матрицы

$A \in P^{n \times n}$ является многочленом n -й степени от переменной λ над полем P .

Док-во. Пусть $A = (a_{ij}) \in P^{n \times n} \Rightarrow$

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

\forall элемент матрицы $A - \lambda I$ - это многочлен от λ степени $\leq 1 \Rightarrow \forall$ член $\det(A - \lambda I)$ - это многочлен от λ степени $\leq n \Rightarrow f(\lambda)$ - многочлен от λ , степень которого $\leq n$.

Покажем, что степень $f(\lambda)$ в точности $= n$. Все члены $\det(A - \lambda I)$ отличные от $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$, имеют степень, $\leq n - 2$, \Rightarrow в $f(\lambda)$ слагаемые, содержащие λ^{n-1} и λ^n , определяются только членом $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$, который по формулам Виета имеет вид:

$(-\lambda)^n + (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})(-\lambda)^{n-1} + g_{n-2}(\lambda)$, где $g_{n-2}(\lambda)$ - многочлен от λ степени не выше $n - 2$. Т.о.,

$$f(\lambda) = a_0 + a_1(-\lambda) + a_2(-\lambda)^2 + \dots + a_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + (-\lambda)^n \quad (2)$$

является многочленом n -й степени от λ над полем P .

31. $a_{n-1} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$, $a_0 = f(0) = \det A \Rightarrow$ в (2) $a_0 = \det A$, $a_{n-1} = \text{tr } A$. (3)

T2. Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.

Док-во. Если матрицы A и B подобны, т.е. \exists невырожденная матрица $Q: A = Q^{-1}BQ$, то

$$|A - \lambda I| = |Q^{-1}BQ - \lambda I| = |Q^{-1}BQ - Q^{-1}\lambda I Q| = |Q^{-1}(B - \lambda I)Q| = |B - \lambda I|$$

Сл. Все матрицы одного и того же ЛО имеют одинаковые характеристические многочлены.

Характеристическим многочленом оператора называется функция $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, $\lambda \in P$

Т.к. все матрицы одного и того же ЛО имеют одинаковый определитель, равный определителю матрицы ЛО в произвольном базисе ($\det A = \det A_e$), то характеристический многочлен оператора совпадает с характеристическим многочленом матрицы этого оператора в \forall базисе. Из следствия и 2-го равенства (3) \Rightarrow след матрицы A_e ЛО A не зависит от выбора базиса $e \Rightarrow$ след оператора: $\text{tr } A = \text{tr } A_e$

Линейное подпространство L пр-ва V называется **инвариантным подпространством относительно оператора A** , если для $\forall x \in L: Ax \in L$. Пусть L - подпространство, инвариантное относительно опе-ратора $A \in L(V, V)$.

Образование $A|L: L \rightarrow L$, определенное равенством $(A|L)x = Ax, \forall x \in L$, называется **индуцированным оператором, порожденным оператором A или сужением оператора A на L** .

T3. Характеристический многочлен индуцированного оператора является делителем характеристического многочлена порождающего оператора. \Rightarrow из теорем (*) и (**).

T4. Если $V = L_1 \oplus \dots \oplus L_k$ - прямая сумма подпр-странств L_1, \dots, L_k , инвариантных относительно оператора $A \in L(V, V)$, то характеристический многочлен $f(\lambda)$ оператора A равен произведению характеристических многочленов $f_1(\lambda), \dots, f_k(\lambda)$ индуцированных операторов $A|L_1, \dots, A|L_k$:

$$f(\lambda) = f_1(\lambda) \dots f_k(\lambda) \quad (4)$$

\Rightarrow из теоремы (**).

T5. Пусть V - линейное пр-во над P . Число $\lambda \in P$ является собственным значением ЛО $A \in L(V, V) \Leftrightarrow \lambda$ - корень его характеристического многочлена.

Док-во. По определению число λ является собственным значением оператора $A \Leftrightarrow$

$$\exists \text{ вектор } x: \begin{cases} Ax = \lambda x, \\ x \neq \theta, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - \lambda I)x = \theta, \\ x \neq \theta, \\ \lambda \in P \end{cases}$$

\Leftrightarrow вырожденность оператора $A - \lambda I$ при некотором

$\lambda \in P$ или $\det(A - \lambda I) = 0$ при некотором $\lambda \in P \Rightarrow$ число λ является собственным значением оператора $A \Leftrightarrow$ оно является корнем характеристического многочлена оператора $A, \lambda \in P$.

$\det(A - \lambda I) = 0$ - **характеристическое уравнение** для оператора A .

Не во всяком поле многочлены имеют корни. Но в алгебраически замкнутом поле \mathbb{C} комплексных чисел \forall многочлен степени $n \geq 1$ с учетом кратности имеет n корней \Rightarrow в соответствии с T5 \Rightarrow

T6. Произвольный ЛО, действующий в n -мерном комплексном пространстве, имеет:

- 1) n собственных значений, если каждое собственное значение считать столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена;
- 2) хотя бы 1 собственный вектор;
- 3) на \forall своем инвариантном подпространстве хотя бы 1 собственный вектор (\Rightarrow из того, что индуци-рованный оператор, как и \forall оператор, действующий в комплексном пр-ве, имеет собственный вектор, явля-ющийся собственным вектором основного оператора.

32. T6 справедлива в вещественном пр-ве для тех операторов, чьи характеристические многочлены имеют только вещественные корни.

* Пусть $A \in L(V, V)$ и L - инвариантное подпр-странство относительно A . Тогда \exists базис пр-ва V , в котором матрица оператора A имеет квазитреугольную форму.

** Если пр-во V является прямой суммой подпр-странств L_1, \dots, L_k , инвариантных относительно оператора $A \in L(V, V)$, то в пр-ве $V \exists$ базис, в котором матрица

$$\text{оператора } A \text{ имеет квазидиагональную форму } A_e = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & \dots \\ & & & A_k \end{bmatrix}, \text{ где матрицы } A_1, \dots, A_k$$

являются матрицами индуцированных операторов $A_1|L_1, \dots, A_k|L_k$ в базисах инвариантных подпространств L_1, \dots, L_k

22. Собственное подпространство. Геометрическая и алгебраическая кратности собств. значений.

Пусть V - линейное пр-во над полем P . Линейное подпространство L пр-ва V называется **инвариантным подпространством относительно оператора A** , если для $\forall x \in L: Ax \in L$. Пусть L - подпространство, инвариантное относительно оператора $A \in L(V, V)$. Обозначение $A|L: L \rightarrow L$, определенное равенством $(A|L)x = Ax, \forall x \in L$, называется **индуцированным оператором, порожденным оператором A или сужением оператора A на L** . Ненулевой $x \in V$ называется **собственным вектором оператора $A \in L(V, V)$** , если $\exists \lambda \in P: Ax = \lambda x$. (1)

Число λ называется **собственным значением оператора A , соответствующим собственному вектору x** . Множество всех собственных значений оператора A называется **спектром** этого оператора.

Пусть λ_0 - собственное значение оператора A . Множество $W_{\lambda_0} = \{x \in V / Ax = \lambda_0 x\}$ (2)

называется **собственным подпространством опе-ратора A** , отвечающим собственному значению λ_0 .

$W_{\lambda_0} = \ker(A - \lambda_0 I) \Rightarrow$ собственное подпространство является линейным подпространством пр-ва V . Из (2) \Rightarrow собственное подпространство W_{λ_0} состоит из 0-го вектора θ и всех собственных векторов, отвечающих λ_0 .

Собственное подпространство инвариантно относительно оператора A .

Размерность собственного подпространства W_{λ_0} называется **геометрической кратностью собственного значения λ_0** , а кратность λ_0 как корня характеристического многочлена называется его **алгебраической кратностью**.

T1. Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности.

Док-во. Пусть t и s - алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения λ_0 оператора $A \in L(V, V)$. Собственное подпространство W_{λ_0} инвариантно относительно оператора $A \Rightarrow$ можно рассматривать индуцированный оператор $A|W_{\lambda_0}$. Найдем его характеристический многочлен $f_1(\lambda)$. Пусть e_1, \dots, e_s - базис $W_{\lambda_0} \Rightarrow$

согласно (2) матрицей оператора $A|W_{\lambda_0}$ в этом базисе будет диагональная матрица s -го порядка с элементами λ_0 на главной диагонали $\Rightarrow f_1(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^s$. По теореме (Характеристический многочлен индуцированного оператора является делителем характеристического многочлена порождающего оператора), $(\lambda_0 - \lambda)^s$ - делитель характеристического многочлена $f(\lambda)$ оператора A , но $(\lambda_0 - \lambda)$ входит в характеристический многочлен $f(\lambda)$ ровно t раз. Значит, $s \leq t$.

T2. Сумма собственных подпространств оператора, отвечающих различным собственным значениям, является прямой суммой.

Док-во. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ - попарно различные собственные значения оператора $A \Rightarrow$ для собственных подпространств $W_{\lambda_1}, \dots, W_{\lambda_p}$ выполнено условие прямой суммы: \forall система ненулевых векторов, взятых по одному из каждого W_{λ_k} , линейно независима как система собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям (теорема: Собственные векторы x_1, \dots, x_k оператора, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, линейно независимы).

23. Инвариантность подпространства. Сужение оператора.

Пусть V – линейное пр-во над полем P и $A \in \mathcal{L}(V, V)$. Линейное подпространство L пр-ва V называется **инвариантным подпространством относительно оператора A** , если для $\forall x \in L : Ax \in L$.

Пр. 1. Тривиальные подпространства $\{0\}$ и V инвариантны относительно \forall оператора $A \in \mathcal{L}(V, V)$.

2. Для \forall ЛО A инвариантные подпространства: $\ker A$ и $\text{im } A$, т.к. если $Ax = \theta$, то $A(Ax) = A\theta = \theta$, и если $y = Ax$, то $Ay = A(Ax) = Ax$, где $x_1 = Ax$.

3. Для оператора дифференцирования ($D: M_n \rightarrow M_n : D p(t) = p'(t)$) в пространстве M_n вещественных многочленов инвариантными подпространствами являются все подпространства M_0, M_1, \dots, M_{n-1} .

T1. Пусть $A \in \mathcal{L}(V, V)$ и L – инвариантное подпространство относительно A . Тогда \exists базис пр-ва V , в котором матрица оператора A имеет квазитреугольную форму.

Док-во. Пусть e_1, \dots, e_k – базис L . Дополним его до базиса $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ пр-ва V . Построим матрицу оператора A в этом базисе. Из инвариантности $L \Rightarrow$

$Ae_1, \dots, Ae_k \in L \Rightarrow$ векторы Ae_1, \dots, Ae_k линейно выражаются только через $e_1, \dots, e_k \Rightarrow$

$$\begin{cases} Ae_1 = a_{11}e_1 + \dots + a_{k1}e_k, \\ \dots \\ Ae_k = a_{1k}e_1 + \dots + a_{kk}e_k \\ Ae_{k+1} = a_{1,k+1}e_1 + \dots + a_{n,k+1}e_n, \\ \dots \\ Ae_n = a_{1n}e_1 + \dots + a_{nn}e_n \end{cases} \quad (1)$$

\Rightarrow матрица A_e имеет вид: $A_e = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

\Rightarrow имеет квазитреугольную форму: $A_e = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ O & C \end{bmatrix} \quad (2)$

31. Верна и обратная теорема: переход от (2) к (1) очевиден $\Rightarrow L = L(e_1, \dots, e_k)$ инвариантно отн-но A .

T2. Если пр-во V является прямой суммой подпространств L_1, \dots, L_k , инвариантных отн-но оператора $A \in \mathcal{L}(V, V)$, то в пр-ве $V \exists$ базис, в котором матрица оператора A имеет квазидиагональную форму.

Док-во ан-но док-ву T1. В качестве искомого базиса берется базис e , составленный из базисов слагаемых подпространств (критерий прямой суммы) \Rightarrow в силу инвариантности L_1, \dots, L_k матрица A_e имеет вид

$$A_e = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & A_k \end{bmatrix} \quad (3)$$

32. Верна и обратная теорема.

Индукцированный оператор. Рассматривая ЛО только на его инвариантном подпространстве, можно получить новый оператор. Пусть L – подпространство, инвариантное относительно оператора $A \in \mathcal{L}(V, V)$. Отображение $A|L : L \rightarrow L$, определенное равенством $(A|L)x = Ax, \forall x \in L$, называется **индукцированным оператором, порожденным оператором A или сужением оператора A на L** . В силу линейности оператора A индукцированный оператор также будет линейным. Он совпадает с ЛО A на подпространстве L и не определен вне его. Итак, $A|L \in \mathcal{L}(L, L)$.

33. Из разложений (1) \Rightarrow матрицы A_1, \dots, A_k в (3) являются матрицами индукцированных операторов $A_1|L_1, \dots, A_k|L_k$ в базисах инвариантных подпространств L_1, \dots, L_k .

24. Треугольная форма матрицы линейного оператора. Теорема Шура.

Пусть V – линейное пр-во над полем P и $A \in \mathcal{L}(V, V)$. Линейное подпространство L пр-ва V называется **инвариантным подпространством относительно оператора A** , если для $\forall x \in L : Ax \in L$.

Отображение $A|L : L \rightarrow L$, определенное равенством $(A|L)x = Ax, \forall x \in L$, называется **индукцированным оператором, порожденным оператором A или сужением оператора A на L** .

T1. В n -мерном комплексном пр-ве V для \forall ЛО

$A \in \mathcal{L}(V, V) \exists$ система n вложенных друг в друга инвариантных подпространств L_1, \dots, L_n всех размерностей от 1 до n , т.е. таких, что $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n = V$, где $\dim L_k = k, k = \overline{1, n}$.

Док-во. Индукция по n . Для $n = 1$ очевидно. Пусть теорема верна для всех линейных пр-тв размерности $n - 1$. Докажем ее для n -мерного пр-ва V .

L. ЛО, действующий в n -мерном комплексном пр-ве, имеет инвариантное подпространство $\dim = n - 1$.

Док-во леммы. ЛО A , действующий в комплексном пр-ве V , имеет собственное значение λ ($T: \forall$ ЛО, действующий в n -мерном комплексном пр-ве, имеет: 1) n собственных значений, если каждое собственное значение считать столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена; 2) хотя бы 1 собственный вектор; 3) на \forall своем инвариантном подпространстве хотя бы 1 собственный вектор) $\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

$\text{rg}(A - \lambda I) \leq n - 1 \Rightarrow \dim \text{im}(A - \lambda I) \leq n - 1$ и в пр-ве $V \exists$

подпространство L размерности $n - 1$, которое содержит $\text{im}(A - \lambda I)$. L инвариантно отн-но оператора $A - \lambda I$. Пусть $x \in L \Rightarrow (A - \lambda I)x = y \in L \Rightarrow Ax = \lambda x + y \in L \Rightarrow L$ инвариантно отн-но A .

Док-во теоремы. Согласно лемме оператор A , действующий в n -мерном комплексном пр-ве V , имеет инвариантное подпространство L_{n-1} размерности $n - 1 \Rightarrow$ индукцированный оператор

$A|L_{n-1}$ действует в $(n - 1)$ -мерном комплексном пр-ве L_{n-1} и по индуктивному предположению для него \exists система вложенных инвариантных $L_1 \subset \dots \subset L_{n-1}$ таких, что $\dim L_k = k, k = \overline{1, n - 1}$. Т.к. действия операторов A и $A|L_{n-1}$ совпадают, то $L_1, \dots, L_{n-2} \subset L_{n-1}$ инвариантны отн-но A . Остается добавить, что $L_{n-1} \subset L_n = V$.

T2. Для \forall ЛО A , действующего в комплексном пр-ве, \exists базис, в котором матрица ЛО имеет треугольную форму.

Док-во. Согласно T1 для оператора $A \exists$ система инвариантных подпространств L_1, \dots, L_n таких, что $\dim L_k = k$ и $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n = V$. Базис e_1, \dots, e_n строим так: в качестве e_1 берем \forall базис L_1 , в качестве e_k , где $k > 1$, – вектор, дополняющий базис L_{k-1} до базиса L_k . В силу инвариантности подпространств $L_k, k = \overline{1, n}$, матрица A_e имеет верхнюю треугольную форму.

31. На главной диагонали матрицы A_e расположены собственные значения оператора A .

T3. \forall квадратная комплексная матрица подобна матрице, имеющей треугольную форму.

Док-во. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – заданная матрица. Рассмотрим \forall комплексное пр-во V размерности n . Зафиксируем в пр-ве $V \forall$ базис f . Пусть $A \in \mathcal{L}(V, V)$ – ЛО, матрица которого в базисе f совпадает с матрицей A , так что $A = A_f$ (такой оператор \exists по теореме (Пусть $\dim V = n, \dim W = m$. Тогда \exists взаимно однозначное соответствие между ЛО из $\mathcal{L}(V, W)$ и матрицами из $P^{m \times n}$). В силу T2 \exists базис e , в котором матрица A_e оператора A имеет треугольную форму. При переходе от базиса e к базису $f = eQ$ матрица оператора изменяется по закону $A_f = Q^{-1} A_e Q$. Это равносильно их подобию.

T4 (теорема Шура). Для \forall оператора, действующего в унитарном пр-ве, \exists ОНБ, в котором он имеет треугольную матрицу. Повторяется док-во T2, но на каждом шаге строится ОНБ инвариантного подпространства.

25. Сдвиг оператора, нильпотентность и обратимость его сужений.

ЛО $A \in \mathcal{L}(V, V)$ – нильпотентный, если $\exists q \in \mathbb{N} : A^q = O$. Наименьшее q – индекс нильпотентности (высота) оператора A . Для ненулевого A $q \geq 2$. Ан–но определяется нильпотентная матрица $A \in P^{n \times n}$ и ее индекс.

T1. Если $A \in \mathcal{L}(V, V)$ – нильпотентный оператор индекса q и $x_0 \in V$ – вектор, для которого $A^{q-1}x_0 \neq \theta$, то векторы $x_0, Ax_0, \dots, A^{q-1}x_0$ линейно независимы.

Док–во. Применяя послед–но $A^{q-1}, A^{q-2}, \dots, A$ к равенству $a_0x_0 + a_1Ax_0 + \dots + a_{q-1}A^{q-1}x_0 = \theta$, получим: $a_0 = a_1 = \dots = a_{q-1} = 0 \Rightarrow$ линейная независимость системы векторов. •

S1. Индекс нильпотентности не превосходит $\dim V$.

T2. В комплексном пр–ве ЛО нильпотентен \Leftrightarrow все его собственные значения $= 0$.

Док–во. **Необх–сть.** Если λ – собственное значение нильпотентного оп–ра $A \in \mathcal{L}(V, V)$ индекса q и x – соот–щий собственный вектор, то $Ax = \lambda x \Rightarrow A^2x = \lambda^2x \Rightarrow \dots \Rightarrow A^qx = \lambda^qx = \theta \Rightarrow \lambda^q x = \theta$. Т.к. $x \neq \theta$, то $\lambda = 0$.

Дост–сть. Рассмотрим базис e комплексного пр–ва V , в котором оператор A имеет верхнюю треугольную матрицу (Для \forall ЛО A , действующего в комплексном пр–ве, \exists базис, в котором матрица ЛО имеет треугольную форму), главная диагональ которой состоит целиком из 0 (На глав–ной диагонали матрицы A_e расположены собственные значения оператора A) \Rightarrow

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

При последовательном возведении A_e в степени $q=2,3, \dots, n$ треугольник над главной диагональю перемещается каждый раз на 1 диагональ выше $\Rightarrow (A_e)^n = O \Rightarrow A^n = O$. •

Если $V = L_1 \oplus \dots \oplus L_p$ – прямая сумма подпространств L_1, L_2, \dots, L_p инвариантных относительно ЛО $A \in \mathcal{L}(V, V)$, то оператор A называется **прямой суммой индуциро–ванных операторов** $A|L_1, \dots, A|L_p$. Этот термин мотивирован тем, что для $\forall x \in V$ с разложением $x = x_1 + \dots + x_p$, где $x_k \in L_k, k = \overline{1, p}$, имеет место равенство

$$Ax = Ax_1 + \dots + Ax_p = (A|L_1)x_1 + \dots + (A|L_p)x_p.$$

T3. \forall ЛО $A \in \mathcal{L}(V, V)$ является прямой суммой нильпотентного и обратимого операторов, причем это разложение единственно.

Док–во. Надо показать, что $\exists!$ пара подпространств L_1, L_2 , инвариантных относительно ЛО A и таких, что

$$V = L_1 \oplus L_2, \quad A|L_1 \text{ нильпотентен, } A|L_2 \text{ обратим.}$$

Для невырожденного $A: L_1 = \{\theta\}, L_2 = V$. Для нильпотентного $A: L_1 = V, L_2 = \{\theta\}$.

Пусть оператор A вырожден и не нильпотентен.

Существование. Пусть для $k \in \mathbb{N} : N_k = \ker A^k, T_k = \text{im } A^k$

1. Покажем, что подпространства N_k строго вложены друг в друга до некоторого момента q , начиная с кото–рого все N_k совпадают, т.е. $N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_q = N_{q+1} = \dots$

а) если $A^kx = \theta$, то $A^{k+1}x = A(A^k)x = A\theta = \theta \Rightarrow N_k \subseteq N_{k+1}$

б) Пусть $N_k = N_{k+1}$, тогда $N_{k+1} = N_{k+2}$, т.к. $N_{k+1} \subseteq N_{k+2}$, $N_{k+2} \subseteq N_{k+1}$.

2–е вложение следует из того, что если $x \in N_{k+2}$, то $A^{k+2}x = \theta$, т.е. $A^{k+1}(Ax) = \theta$. Значит,

$$Ax \in N_{k+1} = N_k \Rightarrow A^k(Ax) = \theta, \text{ т.е. } A^{k+1}x = \theta$$

Из "а" и "б" \Rightarrow подпространство N_k либо строго вложено в N_{k+1} , либо совпадает со всеми последующими ядрами. В конечномерном пр–ве размерности подпространств N_k не могут бесконечно возрастать \Rightarrow наступит момент q , начиная с которого все ядра N_k будут совпадать с N_q .

2. Зафиксируем это q и покажем, что $V = N_q \oplus T_q$. По теореме о ранге и дефекте ($\text{rg } A + \text{def } A = \dim V$): $\dim V = \dim N_q + \dim T_q$, при этом $N_q \cap T_q = \{\theta\}$, т.к. если $y \in N_q, y \in T_q$, то $A^qy = \theta, y = A^q x$, т.е. $A^{2q}x = \theta$. Значит, $x \in N_{2q} = N_q$ и $A^q x = \theta \Rightarrow y = \theta$.

3. Подпространства N_q, T_q инвариантны отн–но A , ибо:

а) если $x \in N_q$, то $x \in N_{q+1} = N_q \Rightarrow A^{q+1}x = \theta$, т.е.

$$A^q(Ax) = \theta \Rightarrow Ax \in N_q$$

б) если $y \in T_q$, то $y = A^q x$ и $Ay = A^{q+1}x = A^q(Ax) = A^q x_1$, где $x_1 = Ax$

$$\Rightarrow Ay \in T_q.$$

4. $A|N_q$ – нильпотентный оператор индекса q , так как:

а) $A^q x = \theta$ для $\forall x \in N_q$

б) $\exists x_0 \in N_q : A^{q-1}x_0 \neq \theta$, ибо $N_{q-1} \neq N_q$

5. Оператор $A|T_q$ обратим, т.к. $\ker A|T_q = \{\theta\}$. Действительно, если $y \in \ker A|T_q$, то $y \in T_q, Ay = \theta$, т.е. $y = A^q x$ и $A^{q+1}x = \theta \Rightarrow x \in N_{q+1} = N_q$, т.е. $A^q x = \theta$ и $y = \theta$.

Из пп. 2–5 $\Rightarrow \exists$ искомое разложение: $L_1 = N_q, L_2 = T_q$.

Единственность. Пусть \exists другое разложение $V = N \oplus T$ со всеми свойствами 1–го.

1. Нильпотентность $A|N \Rightarrow A^k x = \theta, \forall x \in N$, при некотором $k \in \mathbb{N} \Rightarrow N \subseteq N_k \subseteq N_q$ и $\dim N \leq \dim N_q$ (1)

2. Обратимость $A|T \Rightarrow \text{im } A|T = T \Rightarrow$ для $\forall y \in T:$

$$y = Ay_1, \text{ где } y_1 \in T. \Rightarrow \text{ для } y_1 \text{ и всех последующих:}$$

$$y = Ay_1 = A^2 y_2 = \dots = A^q y_q \Rightarrow T \subseteq T_q \text{ и } \dim T \leq \dim T_q \quad (2)$$

Т.к. $\dim N + \dim T = \dim V = \dim N_q + \dim T_q$, то из (1), (2) $\Rightarrow N = N_q, T = T_q$.

S2. Оператор A на N_q имеет только 0–е собственные значения, а на T_q не имеет 0–ых собственных значений. \Rightarrow из T3 с учетом T2 и того, что обратимый оператор не вырожден.

S3. Для оператора A , действующего в комплексном пр–ве V , с характеристическим многочленом

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-\lambda)^{m_1} (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p} :$$

а) характеристические многочлены $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ операторов $A|N_q$ и $A|T_q$ имеют вид

$$f_1(\lambda) = (-\lambda)^{m_1}, \quad f_2(\lambda) = (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p} \quad (3)$$

б) при этом $\dim N_q = m_1, \dim T_q = m_2 + \dots + m_p$ (4)

Соотношение (3) вытекает из (Если $V = L_1 \oplus \dots \oplus L_k$ – прямая сумма подпространств L_1, \dots, L_k , инвариантных относительно оператора $A \in \mathcal{L}(V, V)$, то характеристический многочлен $f(\lambda)$ оператора A равен произведению характеристических многочленов $f_1(\lambda), \dots, f_k(\lambda)$ индуцированных операторов $A|L_1, \dots, A|L_k$: $f(\lambda) = f_1(\lambda) \dots f_k(\lambda)$), если учесть, что $f_2(0) \neq 0$. Соотношение (4) следует из (3), т.к. размерность пр–ва совпадает со степенью характеристического многочлена.

26. Корневые подпространства. Расщепление линейного пр-ва в прямую сумму

T1 (о расщеплении ЛО). Для \forall ЛО A , действующего в комплексном пр-ве V , с характеристическим мн-ном

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}, \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j \quad (1)$$

\exists инвариантные подпространства $K_{\lambda_1}, \dots, K_{\lambda_p}$:

$$V = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_p} \quad (2)$$

$$\dim K_{\lambda_j} = m_j, j = \overline{1, p} \quad (3)$$

$$f_j(\lambda) = \det(A|K_{\lambda_j} - \lambda I) = (\lambda_j - \lambda)^{m_j}, j = \overline{1, p} \quad (4)$$

Док-во. а) если λ_A и λ_B – собственные значения операторов A и $B = A - \lambda_0 I$
 $\Rightarrow \lambda_B = \lambda_A - \lambda_0 \quad (5)$

б) если L инвариантно относительно $B = A - \lambda_0 I$, то L инвариантно относительно A , т.к. если $x \in L$, то $Bx = y \in L$, т.е. $(A - \lambda_0 I)x = y \in L \Rightarrow Ax = \lambda_0 x + y \in L$.

1-й шаг. Применив к $B_i = A - \lambda_i I$ $T^*(\forall$ ЛО $A \in \mathcal{L}(V, V)$ является прямой суммой нильпотентного и обратимого операторов, причем это разложение единственно), получим подпространства N_{q_i} и T_{q_i} , которые с учетом (5) обладают следующими свойствами:

$$V = N_{q_i} \oplus T_{q_i}$$

N_{q_i} и T_{q_i} инвариантны относительно B_i

$$\dim N_{q_i} = m_i \text{ и } \dim T_{q_i} = m_2 + \dots + m_p$$

$$\det(B_i|N_{q_i} - \lambda I) = (-\lambda)^{m_i}$$

$$\det(B_i|T_{q_i} - \lambda I) = (\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda)^{m_2} \dots (\lambda_p - \lambda_1 - \lambda)^{m_p}$$

Положив $K_{\lambda_1} = N_{q_1}$, $V_1 = T_{q_1}$, получим подпространства K_{λ_1} и V_1 , инвариантные относительно A (согласно п. "б"):

$$V = K_{\lambda_1} \oplus V_1$$

$$\dim K_{\lambda_1} = m_1 \text{ и } \dim V_1 = m_2 + \dots + m_p \quad (6)$$

$$\det(A|K_{\lambda_1} - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}$$

$$\det(A|V_1 - \lambda I) = (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}$$

2-й шаг: применить 1-ый шаг к оператору $A_1 = A|V_1$, получим подпространства K_{λ_2} и V_2 , обладающие свойствами (6) с очевидными изменениями. Через $p - 1$ шагов получим все подпространства $K_{\lambda_1}, \dots, K_{\lambda_p} = V_{p-1}$, удовлетворяющие требованиям теоремы. •

Из T1 и T (Если пр-во V является прямой суммой подпространств L_1, \dots, L_k , инвариантных относительно

$A \in \mathcal{L}(V, V)$, то в пр-ве $V \exists$ базис, в котором матрица оператора A имеет квазидиагональную форму.) \Rightarrow

Сл. Для \forall ЛО, действующего в комплексном пр-ве, \exists базис, в котором его матрица имеет квазидиагональную форму, у которой число диагональных клеток совпадает с числом различных собственных значений, а их размеры – с алгебраическими кратностями собственных значений, или, в матричной формулировке, \forall квадратная комплексная матрица подобна квазидиагональной матрице, обладающей указанным выше свойством.

3. Разложение (2) со свойствами из T1, для каждого оператора единственно в силу T*.

Пусть λ_j – собственное значение оператора A . Вектор $x \in V$ называется **корневым вектором** оператора A , **отвечающим собственному значению λ_j** , если

$(A - \lambda_j I)^k x = \theta$ при некотором $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$. **Высота** корневого вектора – наименьшее k , обладающее указанным свойством. Только высота 0-го корневого вектора = 0.

Из определения \Rightarrow свойства корневых векторов:

1°. Корневые векторы высоты 1 являются собственными векторами, т.к.

$$(A - \lambda_j I)x = \theta, x \neq \theta.$$

2°. Если x – корневой вектор высоты $k > 0$, то вектор

$$(A - \lambda_j I)x - \text{корневой вектор высоты } k - 1.$$

3°. Если x – корневой вектор высоты $k > 0$, то векторы $x, (A - \lambda_j I)x, \dots,$

$$(A - \lambda_j I)^{k-1}x \text{ линейно независимы.}$$

Док-во. К $a_0 x_0 + a_1 (A - \lambda_j I)x_0 + \dots, a_{k-1} (A - \lambda_j I)^{k-1}x_0 = \theta$ применим последовательно $(A - \lambda_j I)^{k-1}, (A - \lambda_j I)^{k-2}, \dots,$

$$(A - \lambda_j I) \Rightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0 \Rightarrow \text{линейная незав-сть.}$$

4°. Корневые векторы различных высот линейно незав-мы.

Корневые векторы высоты $k > 1$ – **присоединенные векторы $(k - 1)$ -го порядка**. Если x – присоединенный вектор $(k - 1)$ -го порядка, то $(A - \lambda_j I)^k x = \theta$,

$(A - \lambda_j I)^{k-1}x \neq \theta$, т.е. $(A - \lambda_j I)^{k-1}x$ – собственный вектор оператора A , отвечающий собственному значению λ_j . Т.о., корневой вектор – это θ | собственный | присоединенный.

Множество всех корневых векторов оператора A , отвечающих собственному значению λ_j , называется **корневым подпространством** оператора A , **отвечающим собственному λ_j** : $K_{\lambda_j} = \{x \in V | \exists k \in \mathbb{Z}, k \geq 0: (A - \lambda_j I)^k x = \theta\}$.

Структура корневого подпространства:

Пусть $N_k = \ker(A - \lambda_j I)^k$. Тогда подпространства N_k строго вложены друг в друга до некоторого q , начиная с которого все N_k совпадают: $N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_q = N_{q+1} = \dots$ (7)

$$a) (A - \lambda_j I)^k x = \theta \Rightarrow (A - \lambda_j I)^{k+1} x = (A - \lambda_j I)((A - \lambda_j I)^k x) = (A - \lambda_j I)\theta = \theta \Rightarrow N_k \subseteq N_{k+1}$$

$$б) Пусть N_k = N_{k+1} \Rightarrow N_{k+1} = N_{k+2}, \text{ т. к. } N_{k+1} \subseteq N_{k+2},$$

$N_{k+2} \subseteq N_{k+1}$. 2-е вложение следует из: если $x \in N_{k+2}$, то

$$(A - \lambda_j I)^{k+2} x = \theta \Rightarrow (A - \lambda_j I)^{k+1} ((A - \lambda_j I)x) = \theta \Rightarrow$$

$$(A - \lambda_j I)x \in N_{k+1} = N_k \Rightarrow (A - \lambda_j I)^k ((A - \lambda_j I)x) = \theta \Rightarrow (A - \lambda_j I)^{k+1} x = \theta$$

Из "а" и "б" $\Rightarrow N_k$ либо строго вложено в N_{k+1} , либо совпадает со всеми последующими ядрами \Rightarrow наступит момент q , начиная с которого все N_k будут совпадать с N_q

1. N_1 состоит из корневых векторов высоты, не превосходящей 1, т.е. из θ и всех собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_j , т.е. совпадает с собственным подпространством $W_{\lambda_j} \Rightarrow$

$$N_1 = W_{\lambda_j} \quad (8) \Rightarrow \dim N_1 = s_j \quad (9)$$

s_j – геометрическая кратность собственного значения λ_j .

2. Подпространство N_2 в (7) состоит из корневых векторов высоты ≤ 2 , а подпространство N_q состоит из корневых векторов всех высот, т.е. совпадает с корневым подпространством $K_{\lambda_j} \Rightarrow q$ – максимальная высота корневого вектора, отвечающего λ_j :

$$K_{\lambda_j} = \ker(A - \lambda_j I)^q \text{ и } W_{\lambda_1} = N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_q = K_{\lambda_j} \quad (10)$$

\Rightarrow подпространства $K_{\lambda_1}, \dots, K_{\lambda_p}$, построенные при док-ве T1, совпадают с корневыми подпространствами, отвечающими собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ соответственно \Rightarrow корневые подпространства обладают свойствами (2)–(4).

3. Из (10) \Rightarrow максимальная высота q корневых векторов, отвечающих собственному значению λ_j , совпадает с индексом нильпотентности оператора $A - \lambda_j I$ и согласно св-ву 3° не превосходит размерности K_{λ_j} , т.е. алгебраической кратности собственного значения λ_j .

4. Из (10) \Rightarrow собственное подпространство W_{λ_j} является подпространством корневого подпространства K_{λ_j} , так что $s_j \leq m_j$. При этом $W_{\lambda_j} = K_{\lambda_j} \Leftrightarrow s_j = m_j$.

27. Жорданов базис и жорданова матрица ЛО. Канонический базис корневого подпространства.

Пусть K_{λ_j} – корневое подпространство оператора A , отвечающее собственному значению λ_j . Положим

$B = A - \lambda_j I$, $N_k = \ker B^k$, $n_k = \dim N_k$, $r_k = \text{rg } B^k$. Построим корневое подпространство K_{λ_j} . Сначала найти момент q , начиная с которого все ядра N_k будут совпадать с $N_q = K_{\lambda_j}$. В силу $\dim N_j = s_j$ и $\dim K_{\lambda_j} = m_j$: $n_1 = s_j < n_2 < \dots < n_q = m_j$, где s_j и m_j – геометрическая и алгебраическая кратности λ_j . Базис K_{λ_j} строится, последовательно просматривая N_q, N_{q-1}, \dots, N_1 .

N_{q-1}) Пусть f_1, \dots, f_{iq} – векторы, дополняющие \forall базис N_{q-1} до базиса N_q :

- 1) это корневые векторы высоты q
- 2) их количество равно $n_q - n_{q-1}$
- 3) $t_q = n_q - n_{q-1} = (n_q - n_{q-1}) - (n_{q+1} - n_q) = -n_{q+1} + 2n_q - n_{q-1}$, т.к. $n_{q+1} = n_q$
- 4) никакая нетривиальная линейная комбинация этих векторов $\notin N_{q-1}$ (линейно независимы над N_{q-1}).

N_{q-1}) Построим векторы Bf_1, \dots, Bf_{iq} : корневые векторы высоты $q-1$ и линейно независимы над N_{q-2} , т.к. иначе для нетривиального набора $\alpha_1, \dots, \alpha_{iq}$: $B^{q-2} \sum_{k=1}^{iq} \alpha_k Bf_k = \theta$, т.е. $B^{q-1} \sum_{k=1}^{iq} \alpha_k f_k = \theta$ и $\sum_{k=1}^{iq} \alpha_k f_k \in N_{q-1}$, что противоречит линейной независимости f_1, \dots, f_{iq} над N_{q-1} .

Дополним векторами g_1, \dots, g_{iq-1} так, чтобы $Bf_1, \dots, Bf_{iq}, g_1, \dots, g_{iq-1}$ дополняли \forall базис N_{q-2} до базиса N_{q-1} :

- 1) это корневые векторы высоты $q-1$;
- 2) их количество равно $n_{q-1} - n_{q-2}$;
- 3) $t_{q-1} = (n_{q-1} - n_{q-2}) - (n_q - n_{q-1}) = -n_q + 2n_{q-1} - n_{q-2}$
- 4) они линейно независимы над N_{q-2}

N_{q-2}) Аналогично строятся $B^2 f_1, \dots, B^2 f_{iq}, Bg_1, \dots, Bg_{iq-1}, h_1, \dots, h_{iq-2}$, дополняющие \forall базис N_{q-3} до базиса N_{q-2} .

N_1) Строятся $B^{q-1} f_1, \dots, B^{q-1} f_{iq}, B^{q-2} g_1, \dots, B^{q-2} g_{iq-1}, \dots$

v_{11}, \dots, v_{12} , дополняются векторами u_1, \dots, u_{11} до базиса N_1 . Они:

- 1) являются собственными векторами;
- 2) их количество равно $n_1 = n_1 - n_0$ ($n_0 = \text{def } B^0 = 0$);
- 3) $t_1 = (n_1 - n_0) - (n_2 - n_1) = -n_2 + 2n_1 - n_0$
- 4) они линейно независимы.

Полученная за q шагов система – **жорданова лестница**.

T1. Построенная система векторов образует базис корневого подпространства K_{λ_j} .

Док-во. Кол-во векторов в этой системе = $\dim K_{\lambda_j}$, т.к. $n_1 + (n_2 - n_1) + (n_3 - n_2) + \dots + (n_q - n_{q-1}) = n_q = \dim K_{\lambda_j}$. Они линейно независимы, т.к. если приравнять их линейную комбинацию θ и последовательно применить $B^{q-1}, B^{q-2}, \dots, B$, то все коэффициенты = 0. • Полученный базис называется **каноническим (или жордановым) базисом корневого подпространства K_{λ_j}** .

Матрица оператора A / K_{λ_j} в каноническом базисе.

1. Пусть e_1, \dots, e_q – векторы 1-го столбца лестницы:

$$\begin{cases} e_1 = B^{q-1} f_1 \\ e_2 = B^{q-2} f_1 \\ \dots \\ e_q = f_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B e_1 = \theta \\ B e_2 = e_1 \\ \dots \\ B e_q = e_{q-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A - \lambda_j I) e_1 = \theta \\ (A - \lambda_j I) e_2 = e_1 \\ \dots \\ (A - \lambda_j I) e_q = e_{q-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A e_1 = \lambda_j e_1 \\ A e_2 = \lambda_j e_2 + e_1 \\ \dots \\ A e_q = \lambda_j e_q + e_{q-1} \end{cases} \quad (1)$$

Этой группе векторов соответствуют 1-ые q столбцов матрицы A / K_{λ_j} в каноническом базисе, которые согласно (1) имеют вид $\begin{bmatrix} J_q(\lambda_j) \\ 0 \end{bmatrix}$ (2)

где $J_q(\lambda_j)$ – клетка Жордана q -го порядка с λ_j на главной диагонали. Так же устроены столбцы матрицы

A / K_{λ_j} , определяемые векторами 2-го столбца: диагональная клетка имеет тот же вид $J_q(\lambda_j)$, а все остальные элементы = 0 \Rightarrow 1-я группа из t_q столбцов порождает клетки Жордана q -го порядка с λ_j на главной диагонали. Число этих клеток = t_q .

2. Следующая группа из t_{q-1} столбцов определяет клетки $J_{q-1}(\lambda_j)$ на главной диагонали матрицы A / K_{λ_j} . Число клеток $(q-1)$ -го порядка равно t_{q-1} .

3. Рассмотрев все столбцы жордановой лестницы, получим матрицу A , оператора A / K_{λ_j} в каноническом базисе. A_j – квазидиагональная матрица с клетками Жордана $J_k(\lambda_j)$ на главной диагонали. Всего этих клеток столько, сколько столбцов в жордановой лестнице, т.е. n_j или, согласно $(\dim N_j = s_j)$, s_j (геометрическая кратность λ_j) \Rightarrow

$$A_j = \begin{bmatrix} J_{q_1}(\lambda_j) & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & J_{q_{s_j}}(\lambda_j) \end{bmatrix} \quad (3)$$

где $q_1 + \dots + q_{s_j} = \dim K_{\lambda_j} = m_j$, а число клеток k -го порядка: $t_k = -n_{k-1} + 2n_k - n_{k+1}$, $k = \overline{1, q}$.

4. Матрица A_j определена однозначно с точностью до порядка клеток, т.к. количество всех клеток равно геометрической кратности s_j собственного значения λ_j , а количество клеток k -го порядка равно числу $t_k = -n_{k-1} + 2n_k - n_{k+1}$, $k = \overline{1, q}$, или, согласно $(\text{rg } A + \text{def } A = \dim V)$, $t_k = r_{k-1} - 2r_k + r_{k+1}$, $k = \overline{1, q}$

\Rightarrow структура клеток Жордана в матрице A_j определяется только оператором A . Порядок клеток определен порядком нумерации столбцов жордановой лестницы.

Жорданова форма матрицы ЛО в комплекс. пр-ве.

m_j и s_j – алгебраическая и геометрическая кратности λ_j , $r_k = \text{rg } (A - \lambda_j I)^k$.

T2. Пусть $A \in \mathcal{L}(V, V)$ – ЛО, действующий в комплексном пр-ве V , и его характеристический многочлен имеет вид $f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}$, где

$\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Тогда в пр-ве $V \exists$ базис e , в котором матрица оператора A имеет квазидиагональную форму

$$A_e = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & A_k \end{bmatrix} \quad (4)$$

в которой матрицы A_j , $j = \overline{1, p}$, имеют вид (3).

Док-во. По T^* , $V = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_p}$. В качестве искомого базиса e возьмем совокупность канонических базисов корневых подпространств $K_{\lambda_1}, \dots, K_{\lambda_p}$.

По T^{**} матрица A_e имеет вид (4), где A_j – матрица оператора A / K_{λ_j} в каноническом базисе $K_{\lambda_j} \Rightarrow$ матрица A_j имеет вид (3). •

Сл. Для собственных значений оп-ра A верны соотношения $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \text{tr } A$, $\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \det A$

Полученная форма матрицы линейного оператора – **жорданова форма**, а построенный базис – **канонический (жорданов) базис**.

3. В матричной формулировке **T2: \forall квадратная комплексная матрица подобна матрице, имеющей жорданову форму.**

Док-во. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – заданная матрица. Рассмотрим \forall комплексное пр-во V размерности n . Зафиксируем в пр-ве $V \forall$ базис f . Пусть $A \in \mathcal{L}(V, V)$ – ЛО, матрица которого в базисе f совпадает с матрицей A : $A = A_f$ (по T^{***} такой оператор \exists). В силу **T2** \exists базис e , в котором матрица A_e оператора A имеет квазидиагональную форму. При переходе от базиса e к базису $f = eQ$ матрица оператора изменяется по закону $A_f = Q^{-1} A_e Q$. Это равносильно их подобию. •

Матрица A_e , имеющая жорданову форму и подобная матрице A , называется **жордановой формой матрицы A** .

***:** (о расщеплении ЛО) Для \forall ЛО A , действующего в комплексном пр-ве V , с характеристическим многочленом

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p} \text{ где } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j$$

\exists инвариантные подпространства $K_{\lambda_1}, \dots, K_{\lambda_p}$:

$$V = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_p} \\ \dim K_{\lambda_j} = m_j, j = \overline{1, p}$$

$$f_j(\lambda) = \det(A / K_{\lambda_j} - \lambda I) = (\lambda_j - \lambda)^{m_j}, j = \overline{1, p}$$

****:** Если пр-во V является прямой суммой подпространств L_1, \dots, L_k , инвариантных относительно оператора $A \in \mathcal{L}(V, V)$, то в пр-ве $V \exists$ базис, в котором матрица оператора A имеет квазидиагональную форму.

*****:** Пусть $\dim V = n$, $\dim W = m$. Тогда \exists взаимно однозначное соответствие между ЛО из $\mathcal{L}(V, W)$ и матрицами из $P^{m \times n}$

28. Критерий подобия матриц.

2 матрицы A, B называются **эквивалентными** ($A \sim B$), если \exists невырожденные матрицы P и $Q: A = PBQ$.

Квадратные матрицы A, B называются **подобными**, если \exists невырожденная матрица $Q: A = Q^{-1}BQ$.

Матрица A_e , имеющая жорданову форму и подобная матрице A , называется **жордановой формой матрицы A** .

Т. Две матрицы $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ подобны \Leftrightarrow их жордановы формы совпадают.

Док-во. Из T^* \Rightarrow 2 квадратные матрицы $A, B \in P^{n \times n}$ одинакового порядка над общим полем подобны \Leftrightarrow они являются матрицами одного и того же ЛО, действующего в n -мерном линейном пространстве над полем P . А т.к. \forall квадратная комплексная матрица подобна матрице, имеющей жорданову форму, то отсюда следует утверждение теоремы. •

***:** 2 матрицы A и B над полем P одинакового размера $m \times n$ эквивалентны \Leftrightarrow они являются матрицами одного и того же ЛО $A \in \mathcal{L}(V, W)$, где V и W – линейные пр-ва над полем P размерностей n и m соотв-но.

29. Теорема Гамильтона–Кэли. Минимальный многочлен.

Т(Гамильтона—Кэли). ЛО, действующий в комплексном (или в вещественном) пр-ве, является корнем своего характеристического многочлена.

Док-во. 1. Для комплексного пр-ва V . Пусть

$A \in \mathcal{L}(V, V)$ и его характеристический многочлен:

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}, \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j \quad (1)$$

По **Т(*)**, $V = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_p} \Rightarrow$ для $\forall x \in V \exists$ разложение $x = x_1 + \dots + x_p$, где $x_j \in K_{\lambda_j}, j = \overline{1, p} \Rightarrow$

$$f(A)x = f(A)x_1 + \dots + f(A)x_j + \dots + f(A)x_p.$$

\forall слагаемое в этом разложении $= \theta$, т.к.

$f(A)x_j = (\lambda_1 I - A)^{m_1} \dots (\lambda_j I - A)^{m_j} \dots (\lambda_p I - A)^{m_p} x_j = \theta$, ибо операторы в этом произведении перестановочны, а $(A - \lambda_j I)^{m_j} x_j = \theta$ в силу $(W_{\lambda_1} = N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_p = K_{\lambda_j}) \Rightarrow f(A)x = \theta, \forall x \in V$, т.е. $f(A) = O$.

2. Пусть V – вещественное линейное пр-во. Пусть e – базис пр-ва V и A_e – матрица оператора A в этом базисе. Достаточно показать, что $f(A_e) = O$. Рассмотрим \forall комплексное пр-во V_1 той же размерности, что и V . Пусть f – \forall базис $V_1 \Rightarrow A_e$ является матрицей оператора $B \in \mathcal{L}(V_1, V_1)$ в базисе f , т.е. $A_e = B_f \Rightarrow$ характеристические многочлены A и B совпадают и, по п. 1 док-ва, $f(A_e) = O$.

Многочлен $f(\lambda) = a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_m$ называется **аннулирующим** для матрицы A , если

$$f(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_m I = O.$$

Пусть $a_0 = 1$. Если $f_n(\lambda)$ – характеристический многочлен для матрицы A , то по теореме Гамильтона – Кэли $f_n(A) = 0 \Rightarrow$ характеристический многочлен – один из аннулирующих многочленов A . Многочлен $f_n(\lambda)$ имеет степень n , но может оказаться, что \exists многочлен $\psi(\lambda)$ степени меньшей n , аннулирующий для матрицы A . Такой многочлен наименьшей степени называют **минимальным многочленом** матрицы A . Его свойства:

1) \forall аннулирующий многочлен нацело делится на минимальный многочлен. Пусть $f(\lambda)$ есть такой многочлен. Если разделить его на $\psi(\lambda)$, то его можно представить в виде $f(\lambda) = \psi(\lambda)Q(\lambda) + r(\lambda)$, где $r(\lambda)$ имеет степень, меньшую чем $\psi(\lambda)$. Т.к. $f(A) = 0$ и

$$\psi(A) = 0 \Rightarrow r(A) = 0, \text{ что возможно только если}$$

$$r(\lambda) \equiv 0 \Rightarrow f(\lambda) \text{ нацело делится на } \psi(\lambda).$$

2) Из п. 1) \Rightarrow характеристический многочлен нацело делится на минимальный многочлен \Rightarrow корни

минимального многочлена являются собственными числами матрицы A .

3) Минимальный многочлен матрицы – единственный. Если бы существовало 2 минимальных многочлена $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$, то разность между ними $r(\lambda) = \psi_1(\lambda) - \psi_2(\lambda)$ была бы аннулирующим многочленом для A , степень которого меньше, чем

$\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$, что противоречит их минимальности.

Т.о, если $f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}$ где

$\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, и $m_1 + \dots + m_p = n$, то минимальным многочленом является

$$\psi(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} (\lambda_2 - \lambda)^{n_2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{n_p}, 0 < n_i \leq m_i.$$

***:** (о расщеплении ЛО) Для \forall ЛО A , действующего в комплексном пр-ве V , с характеристическим многочленом

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}, \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j$$

\exists инвариантные подпространства $K_{\lambda_1}, \dots, K_{\lambda_p}$:

$$V = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_p}$$

$$\dim K_{\lambda_j} = m_j, j = \overline{1, p}$$

$$f_j(\lambda) = \det(A / K_{\lambda_j} - \lambda I) = (\lambda_j - \lambda)^{m_j}, j = \overline{1, p}$$

30. Инвариантные подпространства минимальной размерности.

Пусть V – линейное пр-во над полем P и $A \in \mathcal{L}(V, V)$. Линейное подпространство L пр-ва V называется **инвариантным подпространством относительно оператора A** , если для $\forall x \in L: Ax \in L$.

Характеристическим многочленом матрицы $A \in P^{n \times n}$ называется функция $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, $\lambda \in P$

T1. У всякого ЛО в комплексном пр-ве \exists одномерное инвариантное подпространство.

Док-во. Утверждение следует из существования собственного вектора для \forall оператора, действующего в комплексном пр-ве (T^*): если e – собственный вектор оператора A , то $\mathcal{L}(e)$ – одномерное подпространство, инвариантное относительно A .

T2. У всякого ЛО в вещественном пр-ве \exists 1-мерное или 2-мерное инвариантное подпространство.

Док-во. Пусть V – вещественное пр-во, $A \in \mathcal{L}(V, V)$,

$e = (e_1, \dots, e_n)$ – базис V и A – матрица оператора A в базисе e .

Характеристический многочлен $f(\lambda)$ оператора A – многочлен с вещественными коэффициентами, т.к. $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Пусть λ_0 – корень характеристического многочлена.

1. Если $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, то λ_0 – собственное значение оператора A . Тогда линейная оболочка $\mathcal{L}(e)$, натянутая на соответствующий собственный вектор e ,

образует 1-мерное подпространство, инвариантное отн-но A .

2. Если $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, то $|A - \lambda_0 I| = 0$ и система уравнений $Az = \lambda_0 z$

(1) над полем \mathbb{C} имеет нетривиальное решение $z_0 = (x_1 + i y_1, \dots, x_n + i y_n)^T$.

В обозначениях $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}$ система (1) : $A(x + i y) = (\alpha + i\beta)(x + i y)$ или

$$\begin{cases} Ax = \alpha x - \beta y \\ Ay = \beta x + \alpha y \end{cases} \quad (2)$$

Тогда, если $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $v = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, то системе (2) соответствует система векторных уравнений

$$\begin{cases} Au = \alpha u - \beta v \\ Av = \beta u + \alpha v \end{cases} \quad (3)$$

где u и v – векторы пр-ва V , одновременно $\neq 0$. Из (3) $\Rightarrow \mathcal{L}(u, v)$ – инвариантное подпространство $\dim = 2$.

*: Произвольный ЛО, действующий в n -мерном комплексном пр-ве, имеет:

1) n собственных значений, если каждое собственное значение считать столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена;

2) хотя бы 1 собственный вектор;

3) на \forall своем инвариантном подпространстве хотя бы 1 собственный вектор.

31. Вещественный аналог жордановой формы.

Пусть матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ имеет жорданову клетку $J_q(\lambda)$ порядка q для комплексного собственного значения $\lambda = \alpha + i\beta$ с мнимой частью $\beta \neq 0 \Rightarrow \exists$ жорданова цепочка:

$$\begin{cases} Ae_1 = \lambda_1 e_1 \\ Ae_2 = \lambda_2 e_2 + e_1 \\ \dots \\ Ae_q = \lambda_q e_q + e_{q-1} \end{cases}$$

Представим e_j в виде $e_j = x_j + i y_j$, где $x_j, y_j \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$A[x_1, y_1, \dots, x_q, y_q] = [x_1, y_1, \dots, x_q, y_q] M_{2q}$, где

$$M_{2q} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ & & \alpha & \beta & 1 & 0 \\ & & -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ & & & & \dots & \\ & & & & & \alpha & \beta & 1 & 0 \\ & & & & & -\beta & \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \in R^{(2q) \times (2q)} \quad (*)$$

Линейная оболочка $\mathcal{L}(x_1, y_1, \dots, x_q, y_q) \subset \mathbb{R}^n$ является инвариантным подпространством размерности $2q$, совпадающим с прямой суммой двух подпространств – корневого пространства матрицы A для собственного значения $\lambda = \alpha + i\beta$ и корневого пространства для сопряженного собственного значения $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ (в силу вещественности коэффициентов характеристического многочлена, $\bar{\lambda}$ и λ оба являются собственными значениями матрицы A одинаковой кратности). Из сказанного вытекает **T.** \forall матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ с помощью вещественного преобразования подобия приводится к прямой сумме вещественных жордановых блоков и вещественных блоков вида (*).

32. Сопряженный оператор. Существование и единственность.

Матрица сопряженного оп-ра.

V и W – 2 пр-ва, оба унитарных или оба евклидовых.

T1. Если A, B – ЛО из $\mathcal{L}(V, W)$ и $(Ax, y) = (Bx, y)$,

$\forall x \in V, y \in W$, то $A = B$.

Док-во. $(Ax, y) = (Bx, y), \forall x \in V, y \in W \Rightarrow (Ax - Bx, y) = 0, \forall y \in W \Rightarrow Ax - Bx = \theta \Rightarrow Ax = Bx \forall x \in V \Rightarrow A = B$

3. Из $(x, Ay) = (x, By), \forall x \in V, y \in W \Rightarrow A = B$.

Пусть $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Отображение $A^*: W \rightarrow V$ называется **сопряженным оператором** к оператору A , если $(Ax, y) = (x, A^*y), \forall x \in V, y \in W$ (1)

T2. Сопряженный оператор линеен.

Док-во. Пусть $y_1, y_2 \in W \Rightarrow$ из (1)

$$(Ax, (y_1 + y_2)) = (x, A^*(y_1 + y_2)) \quad (2)$$

С другой стороны, $(Ax, (y_1 + y_2)) = (Ax, y_1) + (Ax, y_2) = (x, A^*y_1) + (x, A^*y_2) = (x, A^*y_1 + A^*y_2) \Rightarrow$ с учетом (2): $(x, A^*(y_1 + y_2)) = (x, A^*y_1 + A^*y_2) = 0, \forall x \in V \Rightarrow$

$$A^*(y_1 + y_2) = (A^*y_1 + A^*y_2), \forall y_1, y_2 \in W \quad (3)$$

Пусть $y \in W, \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ из (1)

$$(Ax, \alpha y) = (x, A^*(\alpha y)) \quad (2^*)$$

С другой стороны, $(Ax, \alpha y) = \alpha(Ax, y) = \alpha(x, A^*y) = (x, \alpha A^*y) \Rightarrow$ учетом (2*): $(x, A^*(\alpha y)) = (x, \alpha A^*y) = 0, \forall x \in V \Rightarrow A^*(\alpha y) = \alpha A^*y, \forall y \in W, \forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R}) \quad (4)$

Из (3), (4) \Rightarrow линейность A^* •

T3. Для \forall ЛО $A \in \mathcal{L}(V, W)$ $\exists!$ сопряженный оператор.

Док-во. Существование. Пусть e_1, \dots, e_n – ОНБ $V \Rightarrow$ для $\forall x \in V$ имеет место разложение

$$x = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k \Rightarrow Ax = \sum_{k=1}^n (x, e_k) A e_k \Rightarrow (Ax, y) = \sum_{k=1}^n (x, e_k) (A e_k, y), \forall y \in W \quad (5)$$

Покажем, что сопряженным к A является оператор

$B \in \mathcal{L}(V, W)$, определенный равенством

$$By = \sum_{k=1}^n (y, A e_k) e_k, \forall y \in W$$

$$\text{Из } (x, By) = (x, \sum_{k=1}^n (y, A e_k) e_k) = \sum_{k=1}^n (A e_k, y) (x, e_k)$$

$$+ (5) \Rightarrow (Ax, y) = (x, By) \Rightarrow B = A^*$$

Из T1 \Rightarrow единственность, т.к. для $\forall B$ и C , сопряженных к $A: (x, By) = (Ax, y) = (x, Cy), \forall x \in V, y \in W$

T4. Операция сопряжения ЛО обладает следующими свойствами:

$$1) (A + B)^* = A^* + B^*, \quad 4) (A^{-1})^* = (A^*)^{-1},$$

$$2) (\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*, \quad 5) (A^*)^* = A,$$

$$3) (AB)^* = B^* A^*,$$

выполненными для \forall операторов, для которых определены указанные операции.

Док-во. Из (1) и T1 и T2: $\forall x, y$

$$1) (x, (A + B)^* y) = ((A + B)x, y) = (Ax + Bx, y) =$$

$$= (Ax, y) + (Bx, y) = (x, A^* y) + (x, B^* y) = (x, (A^* + B^*) y)$$

$$2) (x, (\alpha A)^* y) = ((\alpha A)x, y) = (\alpha Ax, y) = (\alpha (Ax, y)) = (\alpha (x, A^* y)) = (x, (\bar{\alpha} A^*) y)$$

$$3) (x, (AB)^* y) = (ABx, y) = (Bx, A^* y) = (x, B^* A^* y)$$

4) (очевидно, для невырожденных $A \in \mathcal{L}(V, V)$) вытекает из св-ва 3, т.к.

$$\text{если } AA^{-1} = A^{-1}A = I, \text{ то}$$

$$(A^{-1})^* A^* = A^* (A^{-1})^* = I \Rightarrow (A^{-1})^* \text{ обратный к } A^*.$$

$$5) (x, (A^*)^* y) = (A^* x, y) = (x, Ay) \bullet$$

Рассматриваем ЛО, действующие в одном пр-ве V , унитарном или евклидовом.

Две системы векторов x_1, \dots, x_k и y_1, \dots, y_k в унитарном (евклидовом) пр-ве – **биортогональны**, если

$$(x_i, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

\forall из 2-х биортогональных систем векторов линейно независима (для док-ва линейную комбинацию векторов одной системы $= \theta$ и последовательно умножать равенство скалярно на векторы другой системы)

Биортогональные системы e_1, \dots, e_n и f_1, \dots, f_n , образующие базисы пр-ва

$$V, \text{ называют } \text{биортогональной парой базисов } (e_i, f_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (6)$$

ОНБ биортогонален самому себе.

T5. Для \forall базиса e_1, \dots, e_n унитарного (евклидова) пр-ва $\exists!$

биортогональный базис f_1, \dots, f_n .

Док-во. Согласно (6) вектор $f_j, j = \overline{1, n}$ ортогонален всем e_i, \dots, e_n кроме $e_j \Rightarrow f_j \in L_j = L^\perp(e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_n), \dim L_j = 1$. Если g – базис L_j , то $f_j = \alpha g$.

Из (6) $\Rightarrow (f_j, e_i) = 1 \Rightarrow \alpha = 1/(g, e_i) \Rightarrow$ существование и единственность векторов $f_j, j = \overline{1, n}$ биортогонального базиса. •

T6. В паре биортогональных базисов e и f унитарного (евклидова) пр-ва V матрицы операторов A и A^* связаны соотношением $(A^*)_f = (A_e)^H$ (7)

Док-во. Пусть $A_e = (a_{ij}), (A^*)_f = (b_{ij}) \Rightarrow$

$$A e_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k, \quad A^* f_i = \sum_{k=1}^n b_{ki} f_k$$

Умножим 1-е равенство скалярно на f_i :

$$(A e_j, f_i) = \sum_{k=1}^n a_{kj} (e_k, f_i)$$

$$(A e_j, f_i) = (e_j, A^* f_i) = \left(e_j, \sum_{k=1}^n b_{ki} f_k \right) = \sum_{k=1}^n \overline{b_{ki}} (e_j, f_k) = \overline{b_{ji}}$$

$$\Rightarrow a_{ij} = \overline{b_{ji}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n} \Rightarrow (7) \bullet$$

Сл1. В ОНБ e $(A^*)_e = (A_e)^H$

Сл2. Для \forall ЛО $A \in \mathcal{L}(V, V)$:

$$\det A^* = \overline{\det A}, \quad \text{rg } A^* = \text{rg } A.$$

3. Нормальный оператор и нормальная матрица.

V – унитарное или евклидово пр-во. ЛО $A \in \mathcal{L}(V, V)$ **нормальный**, если $AA^* = A^*A$. Комплексная или вещественная квадратная матрица **нормальная**, если $AA^H = A^H A$.

31. Из определения и $T^* \Rightarrow$ оператор нормален \Leftrightarrow в \forall ОНБ его матрица нормальна.

T1. Собственный вектор нормального оператора, отвечающий собственному значению λ , является собственным вектором сопряженного оператора, отвечающим собственному значению $\bar{\lambda}$.

Док-во. Если A – нормальный, то $A - \lambda I$ также нормален. Пусть x – собственный вектор A , отвечающий $\lambda \Rightarrow$

$$(A - \lambda I)x = \theta \text{ и } ((A - \lambda I)^* x, (A - \lambda I)x) = 0.$$

т.к. $(Ax, y) = (x, A^*y)$, то $(x, (A - \lambda I)^*(A - \lambda I)x) = 0$, с учетом нормальности $A - \lambda I$: $(x, (A - \lambda I)(A - \lambda I)^*x) = 0$, т.е. $((A - \lambda I)^*x, (A - \lambda I)^*x) = 0$ и $(A - \lambda I)^*x = \theta \Rightarrow$ по свойствам сопряжения $((A + B)^* = A^* + B^*$, $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$): $(A^* - \bar{\lambda} I)x = \theta$, т.е. $A^*x = \bar{\lambda}x$.

C1. Если A – нормальный, то $\ker A = \ker A^*$ (1)

т.к. нетривиальные векторы ядра являются собственными векторами, отвечающими 0-ому собственному значению.

C2. Если A – нормальный, то $\ker A = \text{im}^\perp A^*$, $\ker A^* = \text{im}^\perp A$

(следует из $\ker A = \text{im}^\perp A^*$, $\ker A^* = \text{im}^\perp A$ и (1))

T2. Собственные векторы нормального оператора, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны.

Док-во. Пусть $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$, $\lambda \neq \mu \Rightarrow (Ax, y) =$

$$(\lambda x, y) = \lambda(x, y). \text{ Но, } (Ax, y) = (x, A^*y) = (x, \bar{\mu}y) = \bar{\mu}(x, y) \Rightarrow \lambda(x, y) = \bar{\mu}(x, y) \text{ и т.к. } \lambda \neq \bar{\mu}, \text{ то } (x, y) = 0.$$

ОНБ унитарного (евклидова) пр-ва, в котором матрица ЛО имеет треугольную форму, называется **базисом Шура** для этого оператора.

T3 (критерий нормальности). Оператор, действующий в унитарном пр-ве, нормален $\Leftrightarrow \exists$ ОНБ из собственных векторов этого оператора.

Док-во. Необх-сть. Пусть A – нормальный оператор и e – его базис Шура (по теореме Шура (**)) он $\exists \Rightarrow$

$$A_e = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (A_e)^H = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

и, по теореме (*) и 31, $A_e (A_e)^H = (A_e)^H A_e$. Для диагональных элементов матриц последнего равенства:

$$|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \dots + |a_{1n}|^2 = |a_{11}|^2, \quad |a_{22}|^2 + \dots + |a_{2n}|^2 = |a_{22}|^2, \quad |a_{n-1,n-1}|^2 + |a_{n-1,n}|^2 = |a_{n-1,n-1}|^2$$

$\Rightarrow a_{12} = a_{13} = \dots = a_{1n} = 0, a_{23} = a_{24} = \dots = a_{2n} = 0, \dots, a_{n-1,n} = 0 \Rightarrow A_e$ имеет диагональную форму \Rightarrow базис Шура является ОНБ из собственных векторов оператора A .

Дост-сть. Пусть e – ОНБ из собственных векторов $A \Rightarrow$

$$A_e = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \dots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (A_e)^H = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & & 0 \\ & \bar{\lambda}_2 & \\ & & \dots \\ 0 & & & \bar{\lambda}_n \end{bmatrix}$$

Из перестановочности диагональных матриц $\Rightarrow A_e$ – нормальная матрица

\Rightarrow по 31 A – нормальный оп-р.

C3. В унитарном пр-ве нормальный оператор A и его сопряженный A^* имеют общий ОНБ из собственных векторов.

T4. Если \forall собственный вектор оператора A , действующего в унитарном пр-ве V , является собственным вектором сопряженного оператора A^* , то A – нормальный.

Док-во. \forall оператор, действующий в комплексном пр-ве, имеет хотя бы 1 собственный вектор. Пусть $\dim V = n$ и

e_1 – собственный вектор оператора $A \Rightarrow e_1$ – собственный вектор оператора A^* и по T(3*) подпространство

$L_{n-1} = L^\perp(e_1)$ инвариантно относительно оператора A . В этом подпространстве \exists собственный вектор $e_2 \in L_{n-1}$ оператора A , при этом $e_2 \perp e_1$. Вектор e_2 также является собственным вектором A^* и $L(e_2)$ инвариантно относительно $A^* \Rightarrow L_{n-2} = L^\perp(e_2)$ (т.е. ортогональное дополнение $L(e_2)$ до L_{n-1}) инвариантно относительно оператора A . Поступая ана-но, построим ортогональную систему собственных векторов e_1, \dots, e_n оператора $A \Rightarrow$ векторы $e_1 / |e_1|, \dots, e_n / |e_n|$ образуют ОНБ пр-ва V , состоящий из собственных векторов A , и в силу T3 A – нормальный оператор.

Подобные комплексные (вещественные) матрицы A и $B = Q^{-1} A Q$ называются **унитарно (ортогонально) подобными**, если матрица преобразования подобия Q унитарна (ортогональна): $Q Q^H = Q^H Q = I$ ($Q Q^T = Q^T Q = I$). Соотношение подобия для унитарно подобных матриц A и B : $B = Q^H A Q$, для ортогонально подобных: $B = Q^T A Q$.

T5. Квадратная комплексная матрица нормальна \Leftrightarrow она унитарно подобна диагональной матрице.

Док-во. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – заданная матрица. Рассмотрим \forall унитарное пр-во V размерности n . Зафиксируем в V произвольный ОНБ f . Пусть $A \in \mathcal{L}(V, V)$ – ЛО, матрица которого в базисе f совпадает с матрицей $A : A = A_f$ (по T(4*) такой оператор \exists). В силу T3 \exists ОНБ e , в котором матрица A_e имеет диагональную форму. При переходе от базиса e к базису $f = e Q$ матрица оператора изменяется по закону $A_f = Q^{-1} A_e Q$. Это равносильно их подобию.

*****: В паре биортогональных базисов e и f унитарного (евклидова) пр-ва V матрицы операторов A и A^* связаны соотношением $(A^*)_f = (A_e)^H$

******: Для \forall оператора, действующего в унитарном пр-ве, \exists ОНБ, в котором он имеет треугольную матрицу.

3*: Если подпространство L инвариантно относительно оператора A , то его ортогональное дополнение L^\perp инвариантно относительно сопряженного оператора A^* .

4*: Пусть $\dim V = n$, $\dim W = m$. Тогда \exists взаимно однозначное соответствие между ЛО из $\mathcal{L}(V, W)$ и матрицами из $P^{m \times n}$

34. Блочно–диагональная форма вещественной нормальной матрицы.

Пусть V – унитарное или евклидово пр–во. ЛО $A \in \mathcal{L}(V, V)$ называется **нормальным**, если $AA^* = A^*A$. Квадратная матрица A (комплексная или вещественная) называется **нормальной**, если $AA^H = A^H A$.

T1. Собственные векторы нормального оператора, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны.

T2 (критерий нормальности). Оператор, действующий в унитарном пр–ве, нормален $\Leftrightarrow \exists$ ОНБ из собственных векторов этого оператора.

Пусть e – ОНБ из собственных векторов нормального оператора A , тогда

$$A_e = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (A_e)^H = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & & 0 \\ & \bar{\lambda}_2 & \\ 0 & & \bar{\lambda}_n \end{bmatrix}$$

Пусть A – вещественная нормальная матрица. В силу нормальности, все жордановы клетки имеют порядок 1. Предположим, что $\lambda = a + ib$ – собственное значение с ненулевой мнимой частью b , и пусть $A(x + iy) = (a + ib)(x + iy) =$

$$= (ax - by) + i(bx + ay), \quad x, y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$$

$$A[x, y] = [x, y] \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad (1)$$

Сопряженное число $\bar{\lambda} = a - ib$ тоже будет собственным значением, отвечающим собственному вектору $x - iy$. Для нормальной матрицы собственные векторы для различных собственных значений ортогональны \Rightarrow

$$(x + iy, x - iy) = (x, x) - (y, y) + 2i(x, y) \Rightarrow$$

$$(x, y) = 0, \quad |x| = |y|$$

\Rightarrow равенство (1) сохранится при замене на нормированные и ортогональные векторы x/s и y/s , $s = |x| = |y|$. Т.о. имеет место

T. Для \forall вещественной нормальной матрицы \exists вещественный ОНБ, в котором она является прямой суммой вещественных блоков порядка 1 и вещественных блоков порядка 2 вида $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

35. Эрмитовы операторы и эрмитовы матрицы.

Эрмитово разложение ЛО.

Пусть $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Отображение $A^*: W \rightarrow V$ называется **сопряженным оператором** к A , если

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x \in V, y \in W.$$

ЛО A , действующий в унитарном (евклидовом) пр–ве, называется

самосопряженным, если $A = A^*$. Самосопряженный оператор в унитарном пр–ве называют **эрмитовым**. Квадратная матрица A (комплексная или вещественная) называется **самосопряженной**, если $A = A^H$. Комплексную самосопряженную матрицу называют **эрмитовой**. Из определения \Rightarrow

1°. Эрмитов оператор нормален ($AA^* = A^*A$)

2°. Оператор эрмитов \Leftrightarrow в \forall ОНБ он имеет эрмитову матрицу.

3°. Определитель эрмитова оператора веществен.

4°. Если подпространство L инвариантно относительно самосопряженного оператора A , то L^\perp также инвариантно относительно A . Это следует из T (Если подпространство L инвариантно отн–но оператора A , то его ортогональное дополнение L^\perp инвариантно отн–но сопряженного оператора A^*).

5°. Эрмитов оператор на \forall инвариантном подпространстве индуцирует эрмитов оператор.

T1 (спектральная характеристика самосопряженного оператора).

Нормальный оператор в унитарном пр–ве эрмитов \Leftrightarrow все корни его характеристического многочлена вещественны.

Док–во. **Необх–сть.** В унитарном пр–ве утверждение означает, что все собственные значения эрмитова оператора вещественны, и вытекает из $Ax = \lambda x$ и

$Ax = \bar{\lambda}x$ с учетом T (Собственный вектор нормального оператора, отвечающий собственному значению λ , является собственным вектором сопряженного оператора, отвечающим собственному значению $\bar{\lambda}$).

Дост–сть. Пусть A – нормальный и все корни его характеристического многочлена вещественны \Rightarrow

в унитарном пр–ве \exists ОНБ e_1, \dots, e_n из собственных векторов оператора A .

Если $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ – \forall вектор пр–ва, то $Ax = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i$ и $A^*x =$

$$\sum_{i=1}^n x_i \bar{\lambda}_i e_i = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i \quad \text{т.к. } \lambda_i \in \mathbb{R} \Rightarrow Ax = A^*x, \quad \forall x \in V \Rightarrow$$

$$A = A^*.$$

Подобные комплексные матрицы A и $B = Q^{-1}AQ$ называются **унитарно подобными**, если матрица преобразования подобия Q унитарна: $Q Q^H = Q^H Q = I$. Соотношение подобия: $B = Q^H A Q$.

Из T1 \Rightarrow оператор, действующий в унитарном пр–ве, эрмитов $\Leftrightarrow \exists$ ОНБ, в котором его матрица имеет вещественную диагональную форму, или, в матричной формулировке: квадратная комплексная матрица является эрмитовой \Leftrightarrow она унитарно подобна вещественной диагональной матрице.

ЛО $A \in \mathcal{L}(V, V)$ в унитарном пр–ве V называется **косозермитовым**, если $A^* = -A$. Квадратная комплексная матрица – **косозермитова**, если $A^H = -A$.

Из определения \Rightarrow оператор A косозермитов \Leftrightarrow его матрица в \forall ОНБ пр–ва косозермитова.

T2. ЛО A в унитарном пр–ве эрмитов \Leftrightarrow оператор iA косозермитов.

Док–во. По св–ву сопряжения $(iA)^* = -iA^* \Rightarrow$

$$(iA)^* = -iA^* \Leftrightarrow A = A^*.$$

T3 (эрмитово разложение ЛО). ЛО A в унитарном пр–ве можно представить, и притом единственным образом, в виде суммы эрмитова оператора B и косозермитова оператора C : $A = B + C$ (1)

Док–во. Положим $B = \frac{1}{2}(A + A^*)$, $C = \frac{1}{2}(A - A^*)$ (2)

$\Rightarrow B^* = B$, $C^* = -C$ и $A = B + C$. Единственность такой пары

операторов следует из того, что для \forall другой пары операторов B_1 и C_1 таких, что $B_1^* = B_1$, $C_1^* = -C_1$ и $A = B_1 + C_1$ имеем $A^* = B_1 - C_1$ или $\frac{1}{2}(A + A^*) = B_1$, $\frac{1}{2}(A - A^*) = C_1 \Rightarrow$ в силу (2)

$$B = B_1, \quad C = C_1.$$

T4. ЛО $A \in \mathcal{L}(V, V)$ в унитарном пр–ве нормален \Leftrightarrow операторы B и C в эрмитовом разложении (1) этого оператора перестановочны.

Док–во. Если $A = B + C$, то $A^* = B - C$ и

$$AA^* = B^2 - BC + CB - C^2, \quad A^*A = B^2 - CB + BC - C^2, \quad \text{т.е. } AA^* - A^*A = 2(CB - BC) \Rightarrow$$

$$AA^* = A^*A \Leftrightarrow CB = BC.$$

36. Симметрические операторы и матрицы.

Пусть $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Отображение $A^*: W \rightarrow V$ называется *сопряженным оператором* к оператору A , если $(Ax, y) = (x, A^*y)$, $\forall x \in V, y \in W$.

ЛО A , действующий в унитарном (евклидовом) пр-ве, называется *самосопряженным*, если $A = A^*$.

Самосопряженный оператор в евклидовом пр-ве называют *симметрическим*. Квадратная матрица A (комплексная или вещественная) называется *самосопряженной*, если $A = A^H$. Вещественная само-сопряженная матрица – *симметрическая* ($A = A^T$). Из определения =>

- 1°. Симметрический оператор нормален ($AA^* = A^*A$)
- 2°. Оператор является симметрическим \Leftrightarrow в \forall ОНБ он имеет симметрическую матрицу.
- 3°. Определитель симметрического оператора веществен.
- 4°. Если подпространство L инвариантно отн-но симметрического оператора A , то L^\perp также инвариантно относительно A . Это следует из Т (Если подпространство L инвариантно относительно оператора A , то его ортогональное дополнение L^\perp инвариантно отн-но сопряженного оператора A^*).

5°. Симметрический оператор на \forall инвариантном подпространстве индуцирует симметрический оп-р.

Т1 (спектральная характеристика самосопряженного оператора).

Нормальный оператор в евклидовом пр-ве является симметрическим \Leftrightarrow все корни его характеристического многочлена вещественны.

Док-во. Необх-сть. В унитарном пр-ве утверждение означает, что все собственные значения эрмитова оператора вещественны, и вытекает из $Ax = \lambda x$ и

$Ax = \bar{\lambda}x$ с учетом Т (Собственный вектор нормального оператора, отвечающий собственному значению λ , является собственным вектором сопряженного оператора, отвечающим собственному значению $\bar{\lambda}$).

Докажем для евклидова пр-ва E . Пусть e – ОНБ E , тогда A_e – самосопряженная (вещественная) матрица. Рассмотрим \forall унитарное пр-во U ($\dim U = \dim E$), и в нем \forall ОНБ f . Тогда матрице A_e отвечает самосопряженный оператор $B \in \mathcal{L}(U, U)$, для которого A_e является матрицей в базисе f : $A_e = B_f \Rightarrow$ характеристические многочлены A и B совпадают и по доказанному выше (применительно к B) все корни характеристического многочлена оператора A вещественны.

Дост-сть. Пусть A – нормальный оператор и все корни его характеристического многочлена вещественны \Rightarrow в евклидовом пр-ве \exists ОНБ e_1, \dots, e_n из собственных векторов оператора A . Если $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ – Вектор пр-ва, то $Ax = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i$ и

$$A^*x = \sum_{i=1}^n x_i \bar{\lambda}_i e_i = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i \quad \text{т.к. } \lambda_i \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$Ax = A^*x, \quad \forall x \in V \Rightarrow A = A^*.$$

Подобные вещественные матрицы A и $B = Q^{-1}AQ$ ортогонально подобны, если матрица преобразования подобия Q ортогональна: $Q Q^T = Q^T Q = I$. Соотношение подобия: $B = Q^T A Q$.

Из Т1 \Rightarrow оператор, действующий в евклидовом пр-ве, является симметрическим $\Leftrightarrow \exists$ ОНБ, в котором его матрица имеет вещественную диагональную форму, или: квадратная вещественная матрица является симметрической \Leftrightarrow она унитарно подобна вещественной диагональной матрице.

ЛО $A \in \mathcal{L}(V, V)$ в евклидовом пр-ве V *кососимметрический*, если $A^* = -A$. Квадратная веществен. матрица *кососимметрическая*, если $A^T = -A$.

Из определения \Rightarrow оператор A кососимметричен \Leftrightarrow его матрица в \forall ОНБ пр-ва кососимметрична.

Т2 (эрмитово разложение ЛО). ЛО A в евклидовом пр-ве можно представить, и притом единственным образом, в виде суммы симметрического оператора B и кососимметрического оператора C : $A = B + C$ (1)

$$\text{Док-во. Положим } B = \frac{1}{2}(A + A^*), C = \frac{1}{2}(A - A^*) \quad (2)$$

$\Rightarrow B^* = B, C^* = -C$ и $A = B + C$. Единственность такой пары операторов следует из того, что для \forall другой пары операторов B_1 и C_1 таких, что $B_1^* = B_1, C_1^* = -C_1$ и $A = B_1 + C_1$ имеем $A^* = B_1 - C_1$ или $\frac{1}{2}(A + A^*) = B_1, \frac{1}{2}(A - A^*) = C_1$ т.е. в силу (2)

$$B_1 = B, C_1 = C.$$

Т3. ЛО $A \in \mathcal{L}(V, V)$ в евклидовом пр-ве нормален \Leftrightarrow операторы B и C в эрмитовом разложении (1) этого оператора перестановочны.

Док-во. Если $A = B + C$, то $A^* = B - C$ и

$$AA^* = B^2 - BC + CB - C^2, A^*A = B^2 - CB + BC - C^2, \text{ т.е. } AA^* - A^*A = 2(CB - BC) \Rightarrow$$

$$AA^* = A^*A \Leftrightarrow CB = BC.$$

37. Унитарные операторы и унитарные матрицы.

ЛО U , действующий в унитарном (евклидовом) пр-ве, – *унитарный (ортогональный)*, если $U^*U = UU^* = I$.

Из определения =>

1°. Оператор U унитарен (ортогонален) \Leftrightarrow в \forall ОНБ он имеет унитарную (ортогональную) матрицу:

$$U U^H = U^H U = I \quad (U U^T = U^T U = I)$$

2°. Для унитарного (ортогонального) U : $|\det U| = 1$

3°. Унитарный (ортогональный) оператор нормален, т.к. $U^*U = UU^*$

Т1 (критерии унитарности). В унитарном (евклидово-вом) пр-ве V следующие утверждения равносильны:

- 1) оператор U унитарен (ортогонален);
- 2) $U^*U = I$
- 3) $UU^* = I$
- 4) оператор U сохраняет скалярное произведение: $(Ux, Uy) = (x, y) \quad \forall x, y \in V$
- 5) оператор U сохраняет длину: $|Ux| = |x|, \forall x \in V$
- 6) оператор U переводит \forall ОНБ V в ОНБ;
- 7) оператор U переводит хотя бы 1 ОНБ V в ОНБ.

Док-во. 1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3. Из $U^*U = I$ или $UU^* = I \Rightarrow$ невырожденность U и существование U^{-1} . Умножение этих равенств на U^{-1} (справа или слева) приводит к $U^* = U^{-1} \Rightarrow 2 \Rightarrow 1, 3 \Rightarrow 1$. Переход 1 $\Rightarrow 2, 1 \Rightarrow 3$ из определения.

$$1 \Rightarrow 4. U^*U = I \Rightarrow (Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, y) \quad \forall x, y \in V$$

$$4 \Rightarrow 1. (x, U^*Uy) = (Ux, Uy) = (x, y), \quad \forall x, y \in V \Rightarrow U^*U = I \text{ на основании Т}$$

(Если A, B – ЛО из $\mathcal{L}(V, W)$ и $(Ax, y) = (Bx, y), \forall x \in V, y \in W$, то $A = B$).

$$4 \Rightarrow 5. |Ux| = \sqrt{(Ux, Ux)} = \sqrt{(x, x)} = |x| \quad \forall x \in V$$

5 \Rightarrow 4. Это следует из соотношений:

$$(x, y) = (x + y)^2 - |x|^2 - |y|^2 / 2 \text{ в евклидовом пр-ве и}$$

$$(x, y) = (x + y)^2 - |x - y|^2 + i(|x + y|^2 - |x - y|^2) / 4 \text{ в унитарном пр-ве.}$$

$$4 \Rightarrow 6. \text{ Очевидно, т.к. } (Ue_i, Ue_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

$$6 \Rightarrow 4. \text{ Если } e_1, \dots, e_n \text{ – ОНБ } V \text{ и } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i,$$

$$y = \sum_{i=1}^n y_i e_i, \text{ то } Ux = \sum_{i=1}^n x_i Ue_i, Uy = \sum_{i=1}^n y_i Ue_i \text{ и т.к. } Ue_1, \dots, Ue_n \text{ – ОНБ, то, согласно (**),}$$

$$(Ux, Uy) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = (x, y) \quad \forall x, y \in V$$

6 \Rightarrow 7. Очевидно.

7 \Rightarrow 6. Этот переход доказан в п. 6 \Rightarrow 4. •

С. Унитарный (ортогональный) оператор на \forall инвариантном подпространстве индуцирует унитарный (ортогональный) оператор, т.к. сохраняет скалярное произведение \forall пары векторов этого подпр-ва.

Т2 (спектральная характеристика унитарного оператора). Нормальный оператор в унитарном пр-ве унитарен \Leftrightarrow все его собственные значения по модулю равны 1.

Док-во. Необх-сть справедлива в унитарном и евклидовом пр-ве и означает, что все собственные значения унитарного (и ортогонального) оператора U по модулю равны 1. Докажем это. Пусть x – собственный вектор оператора U и λ – отвечающее ему собственное значение $\Rightarrow (Ux, Ux) = (\lambda x, \lambda x) = |\lambda|^2 (x, x)$ Но $(Ux, Ux) = (x, U^*Ux) = (x, x) \Rightarrow |\lambda| = 1$.

Дост-сть. Если U – нормальный оператор, то по критерию нормальности (Оператор, действующий в унитарном пр-ве, нормален $\Leftrightarrow \exists$ ОНБ из собственных векторов этого оператора) в пр-ве $V \exists$ ОНБ e_1, \dots, e_n из собственных векторов оператора $U \Rightarrow$ для

$$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V: Ux = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i, |\lambda_i| = 1, i = \overline{1, n}. \text{ В силу ортонормированности базиса } e \text{ согласно (**)} \Rightarrow (x, x) = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \text{ и } (Ux, Ux) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 |x_i|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \Rightarrow |Ux| = |x|, \forall x \in V, \text{ и } U \text{ – унитарный оператор (из Т1: } 5 \Rightarrow 1).$$

Т3. Если подпространство L инвариантно отн-но унитарного (ортогонального) оператора U , то его ортогональное дополнение L^\perp также инвариантно относительно U .

Док-во. Пусть $u \in L^\perp$. Покажем, что $Uu \in L^\perp$, т.е. $(x, Uu) = 0, \forall x \in L$. Оператор U индуцирует на подпространстве L унитарный (ортогональный) оператор $U|L \Rightarrow$ оператор $U|L$ обратим и его образ совпадает со всем подпространством L , т.е. $\text{im } U|L = L$ (Т*) \Rightarrow для $\forall x \in L \exists x_1 \in L: x = Ux_1 \Rightarrow (x, Uu) = (Ux_1, Uu) = (x_1, u) = 0$, т.к. $x_1 \in L, u \in L^\perp$. •

Из того что унитарный оператор нормален и все его собственные значения по модулю = 1 \Rightarrow в пр-ве $V \exists$ ОНБ e , в котором матрица унитарного оператора U имеет диагональную форму

$$U_e = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \text{где } |\lambda_i| = 1, i = \overline{1, n}$$

или: квадратная комплексная матрица унитарна \Leftrightarrow когда она унитарно подобна диагональной матрице, у которой все диагональные элементы по модулю = 1.

*: В конечномерном пр-ве V следующие утверждения равносильны: для $A \in \mathcal{L}(V, V)$

- 1) $AA^{-1} = I$
- 2) $A^{-1}A = I$
- 3) A не вырожден
- 4) $\text{im } A = V$
- 5) $\det A \neq 0$
- 6) A обратим;
- 7) A биективен.

** : В евклидовом (унитарном) пр-ве скалярное произведение векторов $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, заданных своими координатами в базисе e , вычисляется по правилу $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \Leftrightarrow e$ – ОНБ

40. Сингулярные числа и сингулярные векторы. Полярное разложение оператора.

T1. \forall оператор A в унитарном (евклидовом) pr -ве можно представить в виде произведения неотрицательно-оператора B и унитарного оператора U :

$$A = BU \quad (1)$$

При этом оператор B определен однозначно, а если A обратим, то и оператор U определен однозначно.

Док-во. 1. Рассмотрим оператор A^*A .

а) A^*A – самосопряженный, т.к. $(A^*A)^* = A^*A$.

б) $A^*A > O$, т.к. $(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) > 0, \forall x \neq \theta$.

в) \exists ОНБ pr -ва из собственных векторов e_1, \dots, e_r оператора A^*A . При этом можно считать, что векторы e_1, \dots, e_r отвечают ненулевым собственным значениям $\rho_1^2, \dots, \rho_r^2$, а остальные – нулевым, так что $\rho_k > 0$ при $k \leq r$ и $\rho_k = 0$ при $k > r$. (2)

$$r = \text{rg } A^*A \quad (3)$$

2. $\text{im } A = L(Ae_1, \dots, Ae_r)$. Для векторов Ae_1, \dots, Ae_r (Ae_i, Ae_j) =

$$(A^*Ae_i, Ae_j) = (\rho_i^2 e_i, e_j) = \begin{cases} \rho_i^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$\Rightarrow Ae_{r+1} = \dots = Ae_n = \theta$ (в силу (3)), а Ae_1, \dots, Ae_r – ненулевые попарно ортогональные векторы, причем

$$|Ae_k| = \rho_k, k = \overline{1, r} \Rightarrow g_k = \frac{1}{\rho_k} Ae_k, k = \overline{1, r} \quad (4)$$

образуют ОНБ $\text{im } A \Rightarrow$ получено $r = \text{rg } A$ (5)

(т.к. $\dim L(a_1, \dots, a_k) = \text{rg}(a_1, \dots, a_k)$)

Дополним g_1, \dots, g_r до ОНБ $g_1, \dots, g_r, g_{r+1}, \dots, g_n$ всего pr -ва \Rightarrow из (4) и (2):

$$Ae_k = \rho_k g_k, k = \overline{1, n} \quad (6)$$

3. Построим операторы B и U из (1). Положим

$$Ue_k = g_k, Bg_k = \rho_k g_k, k = \overline{1, n} \quad (7)$$

Тогда U – унитарный оператор, т.к. переводит ОНБ e в ОНБ g ; $B \geq O$ как нормальный оператор (ибо ОНБ g состоит из его собственных векторов), собственные значения которого $\rho_k \geq 0, k = \overline{1, n}$.

При этом $A = BU$, т.к., согласно (6) и (7),

$$(BU)e_k = B(U)e_k = Bg_k = \rho_k g_k = Ae_k, k = \overline{1, n}$$

4. Докажем единственность. Пусть $A = BU$ – разложение (1) для A .

Тогда $A^* = U^*B$ и $AA^* = B^2 \Rightarrow B$ – квадратный корень из AA^* , который \exists и определен однозначно по Т (Для \forall неотрицательно (положительно) определенного оператора $A \exists!$ неотрицательно (положительно) определенный оператор $B: B^2 = A$). Если A обратим, то из (3) и (5) \Rightarrow

обратим A^*A , при этом $\rho_k \neq 0, k = \overline{1, n}$, \Rightarrow согласно (7) обратим B . В силу (1) отсюда $\Rightarrow U = B^{-1}A$.

Попутно доказаны следующие факты:

а) $\text{rg } A = \text{rg } A^*A = \text{rg } AA^*$ (из (3), (5) и $AA^* = B^2$)

б) оператор U переводит ОНБ из собственных векторов оператора A^*A в ОНБ из собственных векторов оператора AA^* (из (7));

в) операторы A^*A и AA^* имеют одинаковые собственные значения (из $AA^* = B^2$).

Арифметические значения квадратных корней из собственных значений оператора A^*A называются **сингулярными числами** оператора A .

Разложение (2) называется **полярным разложением оператора A** .

3. Для $\forall A$ имеет место разложение вида $A = VC$, где V – унитарный оператор, $C \geq O$. Его можно получить из полярного разложения сопряженного оператора

$A^* = BU$ переходом к оператору $A: A = U^*B$, где U^* – унитарный оператор.

T2. Оператор A нормален \Leftrightarrow в любом его полярном разложении операторы B и U перестановочны.

Док-во. Пусть $A = BU$ – полярное разложение A . Тогда $AA^* = B^2, A^*A = U^*B^2U$.

Дост-сть. Если $BU = UB$, то $A^*A = U^*B^2U =$

$$= U^*B(BU) = U^*B(UB) = U^*(BU)B =$$

$$= U^*(UB)B = U^*UB^2 = B^2 = AA^*$$

Необх-сть. Если e_1, \dots, e_n – ОНБ из собственных векторов A^*A , то $A^*Ae_k = \rho_k^2 e_k, k = \overline{1, n}$ (8)

С др. стороны, $A^*A = U^*B^2U \Rightarrow U^*B^2Ue_k = \rho_k^2 e_k$, т.е. $B^2Ue_k = \rho_k^2 Ue_k, k = \overline{1, n}$ (9)

Т.к. U унитарен, то векторы Ue_1, \dots, Ue_n образуют ОНБ \Rightarrow из (9)

$$\text{получим } BUe_k = \rho_k Ue_k, k = \overline{1, n} \quad (10)$$

С другой стороны, $A^*A = AA^* = B^2$, и согласно (8)

$$B^2e_k = \rho_k^2 e_k \text{ или } Be_k = \rho_k e_k, \text{ откуда умножением на } U \text{ слева получим, что}$$

$$UBe_k = \rho_k Ue_k, k = \overline{1, n} \quad (11)$$

Из (10) и (11) $\Rightarrow BU = UB$.

41. Ортогональные дополнения ядра и образа ЛО. Теорема и альтернатива Фредгольма.

Пусть L – линейное подпространство евклидова (унитарного) pr -ва $E(U)$. Вектор x называется **ортогональным к подпространству L** ($x \perp L$), если он ортогонален $\forall y \in L: x \perp L(a_1, \dots, a_k) \Leftrightarrow x \perp a_i, i = \overline{1, k}$.

Совокупность всех векторов $x \in E(U)$, ортогональных подпространству L , называется **ортогональным дополнением L^\perp к L** .

Образ ЛО $A \in L(V, W) - \text{im } A = \{y \in W / \exists x \in V: Ax = y\}$,

ядро ЛО $A - \ker A = \{x \in V / Ax = \theta\}$

Пусть $A \in L(V, W)$. Отображение $A^*: W \rightarrow V$ называется **сопряженным оператором** к оператору A , если $(Ax, y) = (x, A^*y), \forall x \in V, y \in W$

T1. Для \forall оператора $A \in L(V, V)$:

$$\ker A = \text{im}^\perp A^*, \ker A^* = \text{im}^\perp A \quad (1)$$

Док-во. Для \forall векторов $x \in \ker A, y \in \text{im } A^*$ имеем

$$Ax = \theta, y = A^*y_1 \Rightarrow (x, y) = (x, A^*y_1) = (Ax, y_1) = 0. \Rightarrow \ker A \subset \text{im}^\perp A^*.$$

По теореме о ранге и дефекте

$$\text{rg } A + \text{def } A = \dim V \text{ и т.к. } \text{rg } A^* = \text{rg } A, \text{ то } \dim \ker A = \dim V - \dim \text{im } A = \dim V - \dim \text{im } A^* = \dim \text{im}^\perp A^*.$$

Тогда $\ker A = \text{im}^\perp A^*$ по Т о монотонности размерности (Размерность линейного подпространства не превосходит размерности pr -ва. Подпространство той же размерности, что и все pr -во, совпадает с pr -вом). 2-е доказывается аналогично.

T1 (формулировка от Тырт-ва). Пусть $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Тогда \mathbb{C}^n и \mathbb{C}^m представляются ортогональными суммами: $\mathbb{C}^n = \ker A \oplus \text{im } A^*, \mathbb{C}^m = \ker A^* \oplus \text{im } A$. (Док-во то же самое)

T2. Если подпространство L инвариантно отн-но оператора A , то его ортогональное дополнение L^\perp инвариантно отн-но сопряженного оператора A^* .

Док-во. Если $x \in L, y \in L^\perp$ и т.к. L инвариантно отн-но A , т.е. $Ax \in L$, то $(Ax, y) = 0$. С другой стороны, $(Ax, y) = (x, A^*y) \Rightarrow (x, A^*y) = 0, \forall x \in L \Rightarrow A^*y \in L^\perp$.

Пусть V, W – евклидовы (унитарные) pr -ва,

$$A \in L(V, W), u \in W. \text{ Уравнение } Az = u \quad (2)$$

называется **линейным операторным уравнением**, вектор u – **правой частью**, вектор z – **решением**. В

матричной записи операторное уравнение превращается в систему линейных алгебраических уравнений \Rightarrow все свойства систем уравнений можно переносить на операторные уравнения и наоборот. **Сопряженным** к уравнению (2) называется однородное уравнение $A^*w = \theta$ (3)

T3 (альтернатива Фредгольма). Либо основное уравнение (2) имеет

решение при \forall правой части $u \in W$, либо сопряженное к нему уравнение имеет нетривиальное решение.

Док-во. Пусть $r = \text{rg } A, n = \dim W$. 2 случая.

1) $r = n \Leftrightarrow \text{im } A = W, \Rightarrow$ уравнение (2) имеет решение при $\forall u \in W$. Т.к.

$\text{rg } A^* = \text{rg } A$, то $\ker A^* = \{\theta\}$ и уравнение (3) не имеет ненулевого решения.

2) $r < n \Leftrightarrow \text{def } A^* > 0, \exists w \in \ker A^*, w \neq \theta$, т.е. \exists ненулевое решение (3).

При этом $\text{im } A \neq W$ и уравнение (2) имеет решение не для $\forall u \in W$.

31. Альтернатива Фредгольма для оператора A , действующего в одном pr -ве V , означает, что либо основное уравнение имеет единственное решение при $\forall u \in V$, либо сопряженное к нему уравнение имеет нетривиальное решение.

T4 (теорема Фредгольма). Операторное уравнение (2) имеет решение \Leftrightarrow его правая часть ортогональна всем решениям сопряженного уравнения.

Док-во. Уравнение (2) имеет решение $\Leftrightarrow u \in \text{im } A$ или, с учетом (2), когда $u \in \ker^\perp A^* \Leftrightarrow$ вектор u ортогонален всем векторам $\ker^\perp A^*$, т.е. решениям уравнения (3).

42. Билинейные и квадратичные формы.

Пусть V – линейное пр-во над полем P . Отображение $A: V \times V \rightarrow P$ – **билинейная форма** (БФ) в пр-ве V , если для $\forall x, y, z \in V, \alpha \in P$:

- 1) $A(x+y, z) = A(x, z) + A(y, z)$; 3) $A(x, y+z) = A(x, y) + A(x, z)$;
- 2) $A(\alpha x, y) = \alpha A(x, y)$; 4) $A(x, \alpha y) = \alpha A(x, y)$. (1)

БФ называется **симметричной**, если $A(x, y) = A(y, x), \forall x, y \in V$.

Пр. 1) в n -мерном пр-ве V с базисом e_1, \dots, e_n отображение $A: V \times V \rightarrow P$:

$$A(x, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j \quad (2)$$

$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^n y_i e_i, a_{ij} (i, j = \overline{1, n})$ – фиксированные числа **Т1**.

Пусть V – линейное пр-во над полем P и e_1, \dots, e_n – базис V . Для $\forall a_{ij} \in P, i, j = \overline{1, n}$, $\exists!$ БФ $A(x, y)$ в пр-ве V : $A(e_i, e_j) = a_{ij}, i, j = \overline{1, n}$.

Док-во. e_1, \dots, e_n – базис пр-ва V и $a_{ij}, i, j = \overline{1, n}$, – заданные числа. (2) – БФ в V , причем $A(e_i, e_j) = a_{ij}, i, j = \overline{1, n}$. \forall БФ $B(x, y)$ в V : $B(e_i, e_j) = a_{ij}, i, j = \overline{1, n}$, совпадает с $A(x, y)$, т.к. для $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ из (1): $B(x, y) = B(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j B(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j \Rightarrow B(x, y) = A(x, y), \forall x, y \in V$.

(2) – **общий вид БФ в базисе e** . $A_e = (a_{ij}) \in P^{n \times n}$, где $a_{ij} = A(e_i, e_j), i, j = \overline{1, n}$, – **матрица БФ $A(x, y)$ в базисе e** . Общий вид (2) в компактной форме: $A(x, y) = x_e^T A_e y_e, A(x, y) = y_e^T A_e^T x_e$. (3)

Т2. \forall матрица $A = (a_{ij}) \in P^{n \times n}$ является матрицей единственной БФ в заданном базисе пр-ва.

Док-во. Пусть e_1, \dots, e_n – заданный базис V . Матрица $A = (a_{ij}) \in P^{n \times n}$ является матрицей БФ (2). Из Т1 \Rightarrow единственность этой БФ.

Т3. Матрицы БФ $A(x, y)$ в базисах e и $f = eQ$ связаны: $A_f = Q^T A_e Q$.

Док-во. Согласно (3) $A(x, y) = x_e^T A_e y_e = \{x_e = Qx_f, y_e = Qy_f\} = x_f^T Q^T A_e Q y_f$. И $A(x, y) = x_f^T A_f y_f \Rightarrow$ т.к. $x, y - \forall \Rightarrow A_f = Q^T A_e Q$.

С. $\text{rg } A_e = \text{rg } A_f \Rightarrow$ Все матрицы одной БФ имеют одинаковый ранг.

Т4. БФ симметрична \Leftrightarrow ее матрица в \forall базисе симметрична.

Док-во. **Необх-ть** проверяется непосредственно. **Дост-сть:** если $A_e^T = A_e$ то, согласно (3), $A(x, y) = y_e^T A_e^T x_e = y_e^T A_e x_e = A(y, x)$.

Ранг БФ – ранг ее матрицы в \forall базисе. БФ $A(x, y)$ **вырождена**, если $\text{rg } A(x, y) < \dim V$, и **невырождена**, если $\text{rg } A(x, y) = \dim V$.

Т5. $A(x, y)$ **вырождена** $\Leftrightarrow \exists$ вектор $x \neq \theta: A(x, y) = 0, \forall y \in V$. (4)

Док-во. Пусть e_1, \dots, e_n – базис V и $A_e = (a_{ij})$ – матрица БФ $A(x, y)$ в этом базисе. Соотношение (4) \Leftrightarrow системе $A(x, e_j) = 0, i, j = \overline{1, n}$, \Leftrightarrow (т.к. $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$) системе $\sum_{i=1}^n x_i A_e(e_i, e_j) = 0, i, j = \overline{1, n}$ т.е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{n1}x_n = 0 \\ \dots \dots \dots \\ a_{1n}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (5)$$

\Rightarrow БФ $A(x, y)$ вырождена \Leftrightarrow однородная система (5) имеет нетривиальное решение, т.е. когда $\text{rg } A_e < n$.

Пусть $A(x, y)$ – симметричная БФ в V над полем P . **Квадратичной формой** (КФ) – отображение $A: V \rightarrow P$, которое $\forall x \in V$ ставит в соответствие число $A(x, x)$. БФ $A(x, y)$ – **полярная БФ** к КФ $A(x)$.

Т6. Полярная БФ для \forall КФ определена однозначно.

Вытекает из того, что если $A(x, y)$ – полярная БФ для КФ $A(x, x)$, то для $\forall x, y \in V$ $A(x, y) = \frac{1}{2}(A(x+y, x+y) - A(x, x) - A(y, y))$.

Матрица КФ $A(x, x)$ в базисе e – матрица полярной БФ $A(x, y)$ в e .

2 квадратные матрицы A и B **конгруэнтны**, если \exists невырожденная $Q: B = Q^T A Q$. 2 квадратные комплексные матрицы A и B **эрмитово конгруэнтны**, если \exists невырожденная $Q: B = Q^* A Q$. Свойства КФ:

1°. Матрица КФ симметрична. 2°. \forall симметрическая матрица является матрицей единственной КФ в заданном базисе.

3°. Матрицы КФ в базисах e и $f = eQ$ связаны: $A_f = Q^T A_e Q$. (6)

Т.е. 2 матрицы КФ $A(x, x)$ в различных базисах конгруэнтны.

4°. В базисе e КФ $A(x, x)$ с матрицей $A_e = (a_{ij}): \forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$A(x, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \quad (7)$$

или, в компактной форме $A(x, x) = x_e^T A_e x_e, A_e^T = A_e$ (8)

(7) или (8) – **общий вид КФ $A(x, x)$ в базисе e** .

5°. **Ранг КФ** ранг ее матрицы в \forall базисе. $\text{rg } A(x, x) = \text{rg } A_e$. КФ $A(x, x)$ **вырожденная**, если $\text{rg } A(x, x) < \dim V$ и **невырожденная**, если $\text{rg } A(x, x) = \dim V$. Базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ – **канонический базис КФ $A(x, x)$** , если ее матрица в e диагональна: $A_e = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Канонический вид КФ (λ_i – канонические коэффициенты)

$A(x, x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2, \forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ (9)

Число ненулевых квадратов $r = \text{рангу } A(x, x)$

Т7. Для \forall КФ \exists канонический базис.

Док-во. Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ – базис V . КФ $A(x, x)$ с $A_e = (a_{ij})$ имеет в этом базисе вид (7). Пусть $g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$. Переход к базису $f = eQ \Leftrightarrow$ преобразованию координат: $x_e = Qx_f, |Q| \neq 0$. Пусть $A_e \neq O, \Delta_k -$ ее угловые миноры k -го порядка: $\Delta_k = M_{1, \dots, k}^{1, \dots, k}, k = \overline{1, n}$, и $\Delta_0 = 1$.

I. (метод Лагранжа) Если $\Delta_k \neq 0, k = \overline{1, n-1}$, приведение к каноническому виду за $n-1$ шагов.

1 -й шаг: $\Delta_1 \neq 0$, т.е. $a_{11} \neq 0$. Соберем все члены КФ $g(x_1, \dots, x_n)$,

содержащие x_1 , и выделим полный квадрат: $A(x, x) = g(x_1, \dots, x_n) =$

$$a_{11}x_1^2 + 2 \sum_{k=2}^n a_{1k} x_1 x_k + \sum_{i,k=2}^n a_{ik} x_i x_k = a_{11} \left(x_1 + \sum_{k=2}^n \frac{a_{1k}}{a_{11}} x_k \right)^2 -$$

$$a_{11} \left(\sum_{k=2}^n \frac{a_{1k}^2}{a_{11}} x_k \right)^2$$

+ $\sum_{i,k=2}^n a_{ik} x_i x_k$. Перейдем к: $x'_1 = x_1 + \sum_{k=2}^n \frac{a_{1k}}{a_{11}} x_k$ и $x'_j = x_j$ при $j \neq 1$, выполнив при этом преобразование координат с матрицей

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

\Rightarrow КФ $A(x, x)$ в новых координатах: $A(x, x) = a_{11}x_1'^2 + h(x_2', \dots, x_n')$, где $h(x_2', \dots, x_n')$ – КФ от x_2', \dots, x_n' $\Rightarrow A_1 = Q_1^T A_e Q_1$ в новом базисе:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

\forall строка (столбец) A_1 , начиная со 2-й, получена из соответствующей строки (столбца) A_e вычитанием из нее 1-й строки (столбца) A_e , умноженной на некоторое число \Rightarrow угловые миноры A_1 совпадают с $\Delta_1, \dots, \Delta_n \Rightarrow \Delta_1 = a_{11}, \Delta_1 = a_{11} a'_{22}$ и $a'_{22} = \Delta_2 / \Delta_1 \neq 0$ (10)

2 -й шаг: $\Delta_2 \neq 0$, т.е. $a'_{22} \neq 0$, применяются действия 1-го шага к КФ

$h(x_2', \dots, x_n')$: выделяется полный квадрат среди членов, содержащих x_2' , выполняется невырожденное преобразование координат

$$x_2'' = x_2' + \sum_{k=3}^n \frac{a'_{2k}}{a'_{22}} x_k' \quad \text{и} \quad x_j'' = x_j' \quad \text{при} \quad j \neq 2$$

и КФ $A(x, x)$: $A(x, x) = a_{11}x_1''^2 + a'_{22}x_2''^2 + v(x_3'', \dots, x_n'')$, где $v(x_3'', \dots, x_n'')$ – КФ от переменных x_3'', \dots, x_n'' , а ее матрица – к виду

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a''_{n3} & \dots & a''_{nn} \end{bmatrix}$$

Угловые миноры A_2 совпадают с $\Delta_1, \dots, \Delta_n \Rightarrow a''_{33} = \Delta_3 / \Delta_2 \neq 0$ (11)

Повторяя процесс, за $(n-1)$ шагов приходим к базису, в котором матрица КФ $A(x, x)$ имеет форму: $A_{n-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, где с учетом (10), (11) и $\Delta_0 = 1$: $\lambda_i = \Delta_i / \Delta_{i-1}, i = \overline{1, n}$ (12)

II. (Модификация метода Лагранжа) Пусть теперь среди $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$ встречаются 0-е и после $(i-1)$ -го шага матрица КФ $A(x, x)$:

$$A_{i-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & a_{i-1, i-1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & C \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad C = \begin{bmatrix} a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Пусть $C \neq O$ ($C = O \Rightarrow$ канонический базис уже построен).

1. Если $a_{ii} \neq 0$, то выполним i -й шаг метода Лагранжа.

2. Пусть $a_{ii} = 0$.

а) Если среди диагональных элементов $C \exists a_{jj} \neq 0, j > i$, то перенумеруем: $x'_i = x_j, x'_j = x_i$ и $x'_k = x_k$ при $k \neq i, j \Rightarrow$ в A_{i-1} поменяются местами строки (столбцы) с номерами i и $j \Rightarrow$ в позиции (i, i) окажется $a'_{ii} = a_{jj} \neq 0 \Rightarrow$ выполним i -й шаг метода Лагранжа.

б) Пусть все диагональные элементы $C = 0 \Rightarrow$ в ней $\exists a_{kj} \neq 0, k, j \geq i, k \neq j \Rightarrow$ в КФ от x_1, \dots, x_n нет квадратов x_i^2, \dots, x_n^2 , но есть член вида $2a_{ij} x_i x_j$. Перейдем к новым координатам: $x_k = x'_k + x'_j, x_j = x'_k - x'_j$ и $x'_s = x_s$ при $s \neq k, j \Rightarrow$ КФ будет иметь квадраты $x_k'^2, x_j'^2 \Rightarrow$ переход к "а".

Т8. Если в матрице КФ $A(x, x)$ ранга r первые r угловых миноров отличны от 0: $\Delta_k \neq 0, k = \overline{1, r}$, то \exists базис e , в котором матрица КФ имеет диагональный вид $A_e = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$, где

$$\lambda_k = \Delta_k / \Delta_{k-1}, k = \overline{1, r} \quad (\text{формулы Якоби}) \quad (13)$$

Док-во. Для КФ $A(x, x)$ выполнимы 1-ые r шагов метода Лагранжа.

После r -го шага матрица A_r КФ:

$$A_r = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & C \end{bmatrix}$$

где, согласно (12), $\lambda_k = \Delta_k / \Delta_{k-1}, k = \overline{1, r}$, а C – некоторая матрица. Т.к.

$\text{rg } A_r = r$ и $\lambda_k \neq 0, k = \overline{1, r}$, то $\text{rg } C = 0$ и $C = O \Rightarrow A_r$ имеет искомый вид.

43. Закон инерции квадратичных форм.

Пусть V – линейное пр-во над полем P . Отображение $A: V \times V \rightarrow P$ называется **билинейной формой** в пр-ве V , если для $\forall x, y, z \in V, \alpha \in P$:

- 1) $A(x+y, z) = A(x, z) + A(y, z)$;
- 2) $A(\alpha x, y) = \alpha A(x, y)$;
- 3) $A(x, y+z) = A(x, y) + A(x, z)$; (1)
- 4) $A(x, \alpha y) = \alpha A(x, y)$.

БФ **симметрична**, если $A(x, y) = A(y, x), \forall x, y \in V$.

Пусть $A(x, y)$ – симметричная БФ в пространстве V над полем P .

Квадратичной формой называется отображение $A: V \rightarrow P$, которое каждому вектору

$x \in V$ ставит в соответствие число $A(x, x)$. БФ $A(x, y)$ при этом называется **полярной** БФ к КФ $A(x, x)$. Базис

$e = (e_1, \dots, e_n)$ называется **каноническим базисом** КФ $A(x, x)$, если ее матрица в этом базисе диагональна:

$A_e = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. В каноническом базисе КФ $A(x, x)$ имеет **канонический** вид

$$A(x, x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2, \quad \forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad (2)$$

числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – ее **канонические коэффициенты**. Число ненулевых квадратов = рангу $A(x, x)$. Число π

положительных квадратов в (2) и число $\nu = r - \pi$ называются **положительным и отрицательным**

индексами инерции КФ $A(x, x)$, их разность $\sigma = \pi - \nu$ называется **сигнатурой** $A(x, x)$.

T1 (закон инерции). Положительный и отрицательный индексы инерции вещественной КФ не зависят от выбора канонического базиса.

Док-во. Пусть e и f – канонические базисы КФ

$A(x, x)$ ранга r и для $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n y_i f_i$:

$$A(x, x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_p x_p^2 - a_{p+1} x_{p+1}^2 - \dots - a_r x_r^2, \quad (3)$$

$$A(x, x) = b_1 y_1^2 + \dots + b_q y_q^2 - b_{q+1} y_{q+1}^2 - \dots - b_r y_r^2,$$

где $a_i, b_i > 0, i = \overline{1, r}$. Докажем, что $p \leq q$. Пусть $p > q$. Рассмотрим подпространства $L_1 = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_p)$,

$L_2 = \mathcal{L}(f_{q+1}, \dots, f_n)$. Согласно (*),

$$\dim L_1 \cap L_2 = p - (n - q) - \dim(L_1 + L_2).$$

Т.к. $\dim(L_1 + L_2) < n, p > q$, то $\dim L_1 \cap L_2 > 0 \Rightarrow$

$\exists x_0 \in L_1 \cap L_2, x_0 \neq \theta$. Пусть

$$x_0 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p = \beta_{q+1} f_{q+1} + \dots + \beta_n f_n \Rightarrow \text{из (3)}$$

$$A(x_0, x_0) = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_p^2 = -\beta_{q+1}^2 - \dots - \beta_n^2 \quad (4)$$

Т.к. $x_0 \neq \theta$, то $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_p^2 > 0$,

$-\beta_{q+1}^2 - \dots - \beta_n^2 < 0$. Это противоречит (4) \Rightarrow

$p < q$. Ан-но показывается, что $q < p \Rightarrow p = q$.

Пусть $P(\Delta_0, \dots, \Delta_k)$ и $V(\Delta_0, \dots, \Delta_k)$ – число совпадений и перемен знаков в последовательности $\Delta_0, \dots, \Delta_k$.

T2 (сигнатурное правило Якоби). Пусть Δ_k – угловой минор k -го порядка матрицы КФ $A(x, x)$ ранга r и $\Delta_k \neq 0, k = \overline{1, r}$. Тогда $\pi = P(\Delta_0, \dots, \Delta_r)$,

$$\nu = V(\Delta_0, \dots, \Delta_r).$$

Утверждение теоремы вытекает из формул Якоби (5) (**), т.к. $\lambda_i > 0$, если $\text{sgn } \Delta_i = \text{sgn } \Delta_{i-1}$, и $\lambda_i < 0$, если $\text{sgn } \Delta_i \neq \text{sgn } \Delta_{i-1}$.

*: Для \forall линейных подпространств L_1 и L_2 линейного пр-ва V : $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2$

** : Если в матрице КФ $A(x, x)$ ранга r l -е r угловых миноров отличны от 0: $\Delta_k \neq 0, k = \overline{1, r}$, то \exists базис e , в котором матрица КФ имеет диагональный вид

$$A_e = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0), \text{ где } \lambda_k = \Delta_k / \Delta_{k-1}, k = \overline{1, r} \quad (5)$$

44. Приведение квадратичной формы к главным осям.

Пусть V – линейное пр-во над полем P . Отображение $A: V \times V \rightarrow P$ называется **билинейной формой** в пр-ве V , если для $\forall x, y, z \in V, \alpha \in P$:

- 1) $A(x+y, z) = A(x, z) + A(y, z)$;
- 2) $A(\alpha x, y) = \alpha A(x, y)$;
- 3) $A(x, y+z) = A(x, y) + A(x, z)$; (1)
- 4) $A(x, \alpha y) = \alpha A(x, y)$.

БФ **симметричная**, если $A(x, y) = A(y, x), \forall x, y \in V$.

Пусть $A(x, y)$ – симметричная БФ в пр-ве V над полем P . **Квадратичной формой** называется отображение

$A: V \rightarrow P$, которое каждому вектору $x \in V$ ставит в соответствие число $A(x, x)$. БФ $A(x, y)$ – **полярная БФ** к КФ $A(x, x)$. Базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ –

канонический базисом КФ $A(x, x)$, если ее матрица в этом базисе диагональна: $A_e = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. В каноническом базисе КФ $A(x, x)$ имеет **канонический** вид

$$A(x, x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2, \quad \forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad (2)$$

числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – ее **канонические коэффициенты**. Число ненулевых квадратов = рангу $A(x, x)$.

T1. Для \forall КФ $A(x, x)$ в евклидовом пр-ве $E \exists$ симметрический оператор $H \in \mathcal{L}(E, E)$:

$$A(x, x) = (Hx, x), \quad \forall x \in E. \quad (3)$$

Док-во. **Существование.** Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ – ОНБ пр-ва E и A_e – матрица КФ $A(x, x)$ в этом базисе. В силу симметричности матрицы A_e и ортонормированности базиса $e \exists$ симметрический оператор

$H \in \mathcal{L}(E, E)$, который в базисе e имеет матрицу A_e , так что $H_e = A_e \Rightarrow$ для

$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, координаты вектора Hx находятся согласно (*): $(Hx)_e = H_e x_e = A_e x_e \Rightarrow$ в силу (**): $(Hx, x) = x_e^T A_e x_e \Rightarrow$ с учетом записи КФ в компактном виде $(A(x, x) = x_e^T A_e x_e)$ получаем (3).

Единственность. Если H_1, H_2 – симметрические операторы удовлетворяют (3), то $(H_1 x, x) = (H_2 x, x), \quad \forall x \in E \Rightarrow ((H_1 - H_2) x, x) = 0, \quad \forall x \in E. \quad (4) \Rightarrow H_1 = H_2$

(Оператор $H_1 - H_2$ симметричен, для него \exists ОНБ из собственных векторов, а все собственные значения в силу (4) = 0).

T2. Для любой КФ в евклидовом пр-ве E существует ОНБ, в котором она имеет канонический вид.

Док-во. Пусть H – симметрический оператор, для которого $A(x, x) = (Hx, x), \quad \forall x \in E$. Если e_1, \dots, e_n – ОНБ из собственных векторов H , то для

$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ согласно (3) и (**):

$$A(x, x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i, \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные значения оператора H , отвечающие собственным векторам e_1, \dots, e_n .

Операция построения ОНБ, в котором КФ имеет канонический вид, называется **приведением квадратичной формы к главным осям**. Из T2 $\Rightarrow \forall$ КФ приводится к главным осям.

3. При док-ве T2, попутно показано, что канонический базис КФ $A(x, x)$ совпадает с ОНБ из собственных векторов соответствующего симметрического оператора H , а канонические коэффициенты – с отвечающими им собственными значениями. Собственные значения оператора H – это корни уравнения $|A_e - \lambda I| = 0$, которые не зависят от H и инвариантно связаны только с самой КФ. Т.о., при приведении КФ к главным осям **канонические коэффициенты определены однозначно**. Это позволяет находить канонический вид КФ без вычисления канонического базиса.

*: Если $y = Ax$, то $y_f = A_f e x_e$

** : В евклидовом (унитарном) пр-ве скалярное произведение векторов $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, заданных своими координатами в базисе e , вычисляется по правилу $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \Leftrightarrow e$ – ОНБ

49. Нормированное пр-во. Нормы Гёльдера.

V – линейное пр-во, вещественное или комплексное. **Норма** в V – отображение $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, ставящее в соответствие $\forall x \in V$ число $\|x\| \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющее аксиомам: $\forall x, y \in V \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

- 1) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
- 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Линейное пр-во V с заданной на нем нормой $\|\cdot\|$ называется **линейным нормированным пр-вом**. Число $\|x\|$ называется **нормой вектора x** .

Вещественная ф-я $f(x)$ **выпукла** на интервале

$$I = (a, b), \text{ если для } \forall x, y \in I \text{ и числа } 0 \leq t \leq 1 : f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad (1)$$

$g(x)$ **вогнута** на I , если $f(x) \equiv -g(x)$ выпукла на I .

Т. Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема на I и $f''(x) \equiv \eta$ – ее 2-я производная. Если $f''(x) > 0$ при всех $x \in I$, то $f(x)$ выпукла на I .

Док-во. При $x = y$ (1) – равенство. При $t = 0$ или $t = 1$ равенство получается при $\forall x, y$. Пусть $a < x < y < b$ и $0 < t < 1$. Тогда для $z = tx + (1-t)y$ имеем $x < z < y$. По Т Лагранжа, \exists точки ξ и η :

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(\xi), \quad x < \xi < z,$$

$$\frac{f(y) - f(z)}{y - z} = f'(\eta), \quad x < \eta < z$$

По Т Лагранжа для некоторой точки ζ получаем

$$\frac{f(y) - f(z)}{y - z} - \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f''(\zeta)(\eta - \xi) \geq 0, \quad \xi < \zeta < \eta$$

Остается учесть, что $t = (y-z)/(y-x)$ и заметить, что левая часть имеет вид

$$\frac{f(x)(y-z) + f(y)(z-x) - f(z)(y-x)}{(y-z)(z-x)} = \frac{tf(x) + (1-t)f(y) - f(z)}{(y-z)(z-x)}$$

Сл. Функция $\ln x$ является вогнутой.

Док-во. $(\ln x)'' = -1/x^2 < 0$.

Лемма (неравенство Юнга). Пусть положительные числа p, q таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a, b \geq 0$$

Док-во. В силу вогнутости логарифма,

$$\ln(ab) \leq \frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q} \leq \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$$

Неравенства Гельдера. В условиях леммы для \forall комплексных чисел x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_n справедливо :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}$$

Док-во. Пусть

$$a = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad b = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}$$

При $a = 0$ или $b = 0$ неравенство очевидно. Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то, используем лемму для $|x_i|/a, |y_i|/b$:

$$(|x_i|/a)(|y_i|/b) \leq \frac{|x_i|^p a^p}{p} + \frac{|y_i|^q b^q}{q}, \quad i = 1, \dots, n$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \right) / (ab) \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Неравенство Минковского. Пусть $p \geq 1, x_1, \dots, x_n$ и y_1, \dots, y_n – произвольные комплексные числа. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}$$

Док-во. При $p = 1$ неравенство проверяется очевидным образом. В случае $p > 1$ имеем

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$$

Для каждой суммы справа применим неравенство Гельдера, взяв $q = p/(p-1)$

$\Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q}$$

Остается заметить, что $(p-1)q = p$ и $1 - 1/q = 1/p$.

Пусть $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$. При $p \geq 1$ положим

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

При фиксированном x

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \Rightarrow \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$\|x\|_p$ – p -нормы или **нормы Гельдера**.

Неравенства Гельдера и Минковского сохраняют силу при $p = \infty$ (в этом случае $q = 1$). Для док-ва достаточно перейти к пределу при $p \rightarrow \infty$.

Т. При любом $p \geq 1$, включая $p = \infty$, величина $\|x\|_p$ является нормой на \mathbb{C}^n .

Док-во. Свойства (1) и (2) нормы очевидны. Неравенства треугольника – это неравенство Минковского.

50. Длина вектора. Тожество параллелограмма.

Отображение $(,) : V \times V \rightarrow P$ называется **скалярным произведением**, если оно удовлетворяет аксиомам: для $\forall x, y, z \in V$ и $\forall \alpha \in P$

- 1) $(x, x) \geq 0$ для $\forall x \in V, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
- 2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, (в вещественном случае без черты)
- 3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ 4) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$

Вещественное линейное пр-во со скалярным произведением – **евклидово**, комплексное – **унитарное**.

V – линейное пр-во, вещественное или комплексное. **Норма** в V – отображение $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, ставящее в соответствие \forall вектору $x \in V$ число $\|x\| \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющее аксиомам: $\forall x, y \in V$ и $\forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

- 1) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Линейное пр-во V с заданной на нем нормой $\|\cdot\|$ – **линейное нормированное пр-во**.

Число $\|x\|$ – **норма вектора x** . В евклидовом (унитарном) пр-ве норма – длина:

$$\|x\| = |x| \text{ Это евклидова норма : } \|x\|_E = \sqrt{(x, x)}$$

Справедливость аксиом нормы вытекает из свойств длины: из аксиом скалярного произведения \Rightarrow

1°. \forall вектор x евклидова (унитарного) пр-ва имеет длину, при этом $|x| \geq 0, \forall x \in E(U)$ и $|x| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

2°. $|\alpha x| = |\alpha| |x|, \forall x \in E(U), \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

3°. Неравенство Коши–Буняковского $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$ в новой терминологии: $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$. Тогда $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + (x, y) + (y, x) \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2$

Тожество параллелограмма:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in V$$

Т. Норма является евклидовой \Leftrightarrow для $\forall f, g$ из нормы выполняется тождество параллелограмма.

Док-во. 1). Пусть V – пр-во со скалярным произведением. Пусть $(x, y) = a + ib$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда если $\|x\| = |x|$, то

$$\|x + y\|^2 = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) =$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2a$$

$$\|x + iy\|^2 = (x, x) + i(x, y) - i(y, x) + (y, y) =$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2ia$$

$\Rightarrow a = f(x, y)$ и $b = g(x, y)$, где

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2),$$

$$g(x, y) = \frac{1}{2}(\|x + iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

2) Пусть V – нормированное пр-во. Если норма порождается скалярным произведением, то оно обязано иметь вид $(x, y) = f(x, y) + ig(x, y)$ (1)

Пусть (1) – определение функции (x, y) , докажем, что она обладает всеми св-вами скалярного произведения.

$(x, x) = \|x\|^2 \Rightarrow$ 1-я аксиома очевидна. Равенство

$f(x, y) = f(y, x)$ очевидно, $g(x, y) = -g(y, x)$ получается с помощью тождества параллелограмма $\Rightarrow (x, y) = (y, x)$.

Пусть норма удовлетворяет тождеству параллелограмма, докажем, что функция (x, y) линейна по 1-му аргументу (3-я и 4-я аксиомы). Достаточно доказать линейность $f(x, y)$ по 1-му аргументу (линейность $g(x, y)$ по 1-му аргументу – очевидное следствие). Докажем, что

$f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$. Из определения f и тождества параллелограмма :

$$f(x, z) = \frac{1}{4}(\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2),$$

$$f(y, z) = \frac{1}{4}(\|y + z\|^2 - \|y - z\|^2)$$

Запишем $x + z = u + v, y + z = u - v \Rightarrow$

$u = \frac{1}{2}(x + y + 2z), v = \frac{1}{2}(x - y)$. В силу тождества параллелограмма для векторов u и v ,

$$\|x + z\|^2 + \|y + z\|^2 = \frac{1}{2}\|(x + y + z) + z\|^2 + \frac{1}{2}\|x - y\|^2$$

$$\|x - z\|^2 + \|y - z\|^2 = \frac{1}{2}\|(x + y - z) - z\|^2 + \frac{1}{2}\|x - y\|^2$$

Из тождества параллелограмма для $x + y + z$ и z

$$\frac{1}{2}\|(x + y + z) + z\|^2 = \|x + y + z\|^2 + \|z\|^2 - \frac{1}{2}\|x + y\|^2$$

$$\frac{1}{2}\|(x + y - z) - z\|^2 = \|x + y - z\|^2 + \|z\|^2 - \frac{1}{2}\|x + y\|^2$$

$$\Rightarrow f(x, z) + f(y, z) = \frac{1}{4}(\|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2) = f(x + y, z)$$

Докажем, что $f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$ для $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Пусть $\alpha = \frac{m}{n}$ – рациональное число \Rightarrow

$$nf\left(\frac{1}{n}x, y\right) = f\left(n\left(\frac{1}{n}x\right), y\right) = f(x, y) \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{1}{n}x, y\right) = \frac{1}{n}f(x, y) \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{m}{n}x, y\right) = f\left(m\left(\frac{1}{n}x\right), y\right) = mf\left(\frac{1}{n}x, y\right) = \frac{m}{n}f(x, y)$$

Произвольное вещественное α представим как предел последовательности рациональных $\alpha_k \rightarrow \alpha$. Функция

$f(x, y)$ непрерывна по x . Поэтому в $f(\alpha_k, y) = \alpha_k f(x, y)$ можно перейти к пределу при $k \rightarrow \infty$. Т.о., мы доказали равенство $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ для вещественных α . Оно будет верно для любых комплексных α , если мы установим, что $(ix, y) = i(x, y)$. Это вытекает из определения (1), вида функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ и тождества параллелограмма. •

51. Эквивалентность норм в конечномерном пр-ве.

V – линейное пр-во, вещественное или комплексное. **Норма** в V – отображение $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, ставящее в соответствие \forall вектору $x \in V$ число $\|x\| \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющее аксиомам: $\forall x, y \in V$ и $\forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

- 1) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

В евклидовом (унитарном) пр-ве норма – длина:

$$\|x\| = |x| \text{ Это евклидова норма : } \|x\|_E = \sqrt{(x, x)} \quad (1)$$

Справедливость аксиом нормы вытекает из свойств длины: из аксиом скалярного произведения =>

1°. \forall вектор x евклидова (унитарного) пр-ва имеет длину, при этом $|x| \geq 0, \forall x \in E(U)$ и $|x| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

2°. $|\alpha x, y| = |\alpha| |x, y|, \forall x \in E(U), \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

3°. Неравенство Коши–Буняковского $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$ в новой терминологии: $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$.

$$\text{Тогда } |x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + (x, y) + (y, x) \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2$$

Мн-во M называется **метрическим пр-вом**, если задано отображение $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, которое каждой упорядоченной паре $x, y \in M$ ставит в соответствие $\rho(x, y) \in \mathbb{R}$:

1) $\rho(x, y) \geq 0, \forall x, y \in M; \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in M$

3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \forall x, y, z \in M$.

$\rho(x, y)$ – **расстояние между x и y** ; отображ-е ρ – **метрика**

У1. В нормированном пр-ве V отображение $\rho : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, определенное

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in V \text{ – метрика.}$$

Аксиомы метрики вытекают из аксиом нормы. •

Посл-сть векторов $\{x^{(k)}\}$ в нормированном пр-ве V называется

сходящейся по норме к вектору $a \in V$,

если $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - a\| = 0$, вектор a – **предел посл-сти $\{x^{(k)}\}$ по норме $\|\cdot\|$**

$$\bullet \text{ : } \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = a$$

У2. Сходящаяся по норме последовательность имеет единственный

предел. Док-во из аксиомы треугольника: $\|a - b\| = \|a - x^{(k)} + x^{(k)} - b\| \leq \|x^{(k)} - a\| + \|x^{(k)} - b\|$, где a и b – 2 предела $x^{(k)}$. •

Пусть $x_0 \in V$ и $r > 0$. $S(x_0, r) = \{x \in V \mid \|x - x_0\| = r\}$ – **сфера радиуса r с центром x_0 по норме $\|\cdot\|$** , множество $B(x_0, r) = \{x \in V \mid \|x - x_0\| \leq r\}$ – замкнутый **шар радиуса r с центром x_0 по норме $\|\cdot\|$** . Сферы и шары по евклидовой норме : $S_E(x_0, r), B_E(x_0, r)$.

У3. Из \forall посл-сти векторов $x^{(k)} \in B_E(x_0, r)$ (или $S_E(x_0, r)$) можно выделить подпоследовательность, сходящуюся по норме $\|\cdot\|_E$ к вектору $a \in B_E(x_0, r)$ ($S_E(x_0, r)$).

Док-во. Пусть $x_0 = \theta \Rightarrow$ сфера $S_E(r) = \{x \in V \mid \|x\|_E = r\}$. Пусть e_1, \dots, e_n – ОНБ пр-ва V и $x^{(k)} = \sum_{i=1}^n x_i^{(k)} e_i \in S_E(r)$

$$\Rightarrow \|x^{(k)}\|_E = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n |x_i^{(k)}|^2\right)} = r$$

=> ограниченность координат векторов $x^{(k)}$ посл-сти. По теореме

Больцано–Вейерштрасса из этой посл-сти можно выделить сходящуюся

(покоординатно) подпосл-сть $\{x^{(k_m)}\}$. Пусть $x^{(k_m)}$ имеет координаты

$x_1^{(k_m)}, \dots, x_n^{(k_m)}$, сходящиеся соответственно к a_1, \dots, a_n и $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i \Rightarrow$

$$\|x^{(k_m)} - a\|_E = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n |x_i^{(k_m)} - a_i|^2\right)} \rightarrow 0$$

=> $\{x^{(k_m)}\} \rightarrow a$ по евклидовой норме.

Покажем, что $a \in S_E(r)$. В $\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x\| - \|y\|$ положим $x = x^{(k_m)}, y = a \Rightarrow$

$$\| \|x^{(k_m)}\|_E - \|a\|_E \| \leq \|x^{(k_m)} - a\|_E \Rightarrow \|x^{(k_m)}\|_E - \|a\|_E \leq \|x^{(k_m)} - a\|_E$$

или, т.к. $\|x^{(k_m)} - a\|_E \rightarrow 0$:

$$\|x^{(k_m)}\|_E - \varepsilon \leq \|a\|_E \leq \|x^{(k_m)}\|_E + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

если m достаточно велико $\Rightarrow \|a\|_E = r$ и $a \in S_E(r)$. •

2 нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ в линейном пр-ве V называются **эквивалентными**,

если \exists такие числа $c_1 > 0, c_2 > 0$, что для $\forall x \in V$:

$$\|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2, \quad \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

Т. В конечномерном пр-ве $\forall 2$ нормы эквивалентны.

Док-во. Выберем в V базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ и введем скалярное

произведение $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \Rightarrow V$ – евклидово и в нем можно рассматривать евклидову норму (1). Т.к. e – ОНБ, то $\|x\|_E = |x| =$

$$\sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

Покажем, что $\forall \|\cdot\|$ в V эквивалентна евклидовой норме $\|x\|_E$

1. Докажем: $\exists c_1 > 0$: для $\forall x \in V \|x\| \leq c_1 \|x\|_E$ (2)

Пусть $x \in V$ и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Тогда $\|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\|$ и из неравенства

Коши–Буняковского $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$

$$\|x\| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{1/2} = c_1 \|x\|_E,$$

$$\text{где } c_1 = \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{1/2} > 0$$

2. Докажем: $\exists c_2 > 0$: для $\forall x \in V \|x\|_E \leq c_2 \|x\|$ (3)

а) Пусть мн-во координат всех векторов сферы $S = \{x \in V \mid \|x\| = 1\}$ не

ограничено => для $\forall m \in \mathbb{N} \exists x^{(m)} : \|x^{(m)}\| = 1$ и $|x_k^{(m)}| > m$ для

некоторого $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\Rightarrow \|x^{(m)}\|_E = \left(\sum_{i=1}^n |x_i^{(m)}|^2\right)^{1/2} \geq |x_k^{(m)}| > m \quad (4)$$

Рассмотрим посл-сть $y^{(m)} = x^{(m)} / \|x^{(m)}\|_E$ (5)

$\|y^{(m)}\|_E = 1 \Rightarrow y^{(m)} \in S_E(1)$. По У3 из $\{y^{(m)}\}$ выделить подпосл-сть

$\{y^{(m_j)}\}$, сходящуюся по $\|\cdot\|_E$ к $a \in S_E(1)$, т.е.

$$\|y^{(m_j)} - a\|_E \rightarrow 0 \quad (6) \quad \|a\|_E = 1 \quad (7)$$

Из (6) с учетом (2) $\Rightarrow \|y^{(m_j)} - a\| \rightarrow 0$ (8)

=> $\{y^{(m_j)}\}$ сходится к вектору a по норме $\|\cdot\|$.

С другой стороны, в силу (5), (4) с учетом $\|x^{(m_j)}\| = 1 : \|y^{(m_j)}\| =$

$$\|x^{(m_j)}\| / \|x^{(m_j)}\|_E < 1/m_j \Rightarrow \|y^{(m_j)}\| \rightarrow 0. \text{ Отсюда и из (8) в силу}$$

единственности предела $\Rightarrow a = \theta$, что противоречит (7). Т.о., $\exists M$: для \forall

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in S \text{ выполняется неравенство } |x_i| \leq M, \quad i = \overline{1, n} \quad (9)$$

б) Пусть $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i - \forall$ вектор пр-ва V , тогда вектор $\frac{x}{\|x\|} \in S$ и для его

координат выполняется (9) $\Rightarrow \frac{|x_i|}{\|x\|} \leq M, |x_i| \leq M \|x\|, \quad i = \overline{1, n}$ и $\|x\|_E =$

$$= \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \leq$$

$$\leq M \sqrt{n} \|x\| = c_2 \|x\|, \text{ где } c_2 = M \sqrt{n} > 0. \bullet$$

Сл. В конечномерном пр-ве из сходимости по одной норме следует

сходимость по \forall другой норме, т.к. $\|x^{(k)} - a\|_1 \leq c_1 \|x^{(k)} - a\|_2$

52. Задача о наилучшем приближении в конечномерном нормированном пространстве.

V – линейное пр–во, вещественное или комплексное. **Норма** в V – отображение $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, ставящее в соответствие \forall вектору $x \in V$ число $\|x\| \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющее аксиомам: $\forall x, y \in V$ и $\forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

- 1) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Мн–во M называется **метрическим пр–вом**, если задано отображение $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, которое каждой упорядоченной паре элементов $x, y \in M$

- ставит в соответствие число $\rho(x, y) \in \mathbb{R}$:
- 1) $\rho(x, y) \geq 0, \forall x, y \in M; \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
 - 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in M$
 - 3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \forall x, y \in M$.

Посл–сть векторов $\{x^{(k)}\}$ в нормированном пр–ве V называется **сходящейся по норме** к вектору $a \in V$, если $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - a\| = 0$, вектор a – **предел** $\{x^{(k)}\}$ **по норме** $\|\cdot\| : \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = a$ или $x^{(k)} \rightarrow a$.

Пусть $x_0 \in V$ и $r > 0$. $S(x_0, r) = \{x \in V \mid \|x - x_0\| = r\}$ – **сфера радиуса r с центром x_0 по норме $\|\cdot\|$** ,

$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in V \mid \|x - x_0\| \leq r\}$ – замкнутый **шар радиуса r с центром x_0 по норме $\|\cdot\|$**

Мн–во S **ограниченно**, если оно целиком содержится в некотором шаре.
Мн–во S **замкнуто**, если оно содержит все свои предельные точки.

Мн–во S **компактно**, если из \forall посл–сти точек $x^k \in S$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $x \in S$.

Компактное множество обязано быть замкнутым. Обратное не верно: метрическое пр–во M всегда является замкнутым множеством, но может и не быть компактным. \forall компактное множество S является ограниченным (подпоследовательность неограниченной послед–сти не может быть сходящейся, т.к. не может быть ограниченной).

Вещественная функция $f(x)$, определенная для точек x метрического пр–ва M , называется **непрерывной** в $x \in M$, если для $\forall \{x^k\} \rightarrow x$, посл–сть $f(x^k) \rightarrow f(x)$.

Т (Вейерштрасса). Для \forall вещественной $f(x)$, непре–рывной во всех точках компактного множества S ,

\exists точки $x_{min}, x_{max} \in S : f(x_{min}) < f(x) < f(x_{max})$ для $\forall x \in S$

Док–во. Пусть $f(x^k) > k$ для некоторой $\{x^k\} \in S \Rightarrow$ если $x^{k_i} \rightarrow x$, то т.к. $f(x)$ непрерывна, $f(x^{k_i}) \rightarrow f(x)$, но $f(x^{k_i})$ не может сходиться, т.к. не ограничена \Rightarrow противоречие $\Rightarrow f(x)$ ограничена сверху. Пусть c_{max} – ТВГ $\{f(x), x \in S\} \Rightarrow$ для $\forall k \exists$ точка $x^k \in S$:

$c_{max} - 1/k \leq f(x^k) \leq c_{max}$. Выберем сходящуюся подпоследовательность $x^{k_i} \rightarrow x$ и перейдем в последних неравенствах к пределу $\Rightarrow f(x) = c_{max}$. Ограниченность снизу и существование точки минимума доказывается переходом к $g(x) = -f(x)$.

Л1. Для произвольной нормы $\|\cdot\|$ в пр–ве \mathbb{C}^n функция $f(x) = \|x\|$ непрерывна относительно 2–нормы.

Док–во. Пусть $x^k = [x_1^k, \dots, x_n^k]^T \rightarrow x = [x_1, \dots, x_n]^T$. Используя неравенство треугольника для норм:

$$|f(x^k) - f(x)| = \left| \|x^k\| - \|x\| \right| \leq \|x^k - x\| \leq \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i^k - x_i| \|e_i\|$$

где $e_i = [0, \dots, 1, \dots, 0]^T$. Правая часть $\rightarrow 0$ при $x^k \rightarrow x$

$$\|x^k - x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i^k - x_i|^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad \blacksquare$$

Пусть $x \in V$ и L – непустое множество векторов из V . **Расстояние** между x и L – величина

$$\gamma = \inf_{z \in L} \|x - z\|$$

Вектор $z_0 \in L$ называется **элементом наилучшего приближения** для x на L , если $\gamma = \|x - z_0\|$.

Л2 (о наилучшем приближении). Пусть L конечномерное подпространство в нормированном пр–ве V . Тогда для $\forall x \in V \exists$ вектор $z_0 \in L$:

$$\|x - z_0\| \leq \|x - z\| \quad \forall z \in L.$$

Док–во. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $\forall z$ такой, что $\|x - z\| \leq \gamma + \varepsilon \Rightarrow \|z\| \leq R \equiv \gamma + \varepsilon + \|x\| \Rightarrow \gamma = \inf_{z \in L, \|z\| \leq R} \|x - z\|$. По Л1 $f(x) = \|x - z\|$ непрерывна на замкнутом шаре $\|z\| \leq R$ конечномерного пр–ва L . По теореме Вейерштрасса, $\gamma = \|x - z_0\|$ для некоторого $z_0 \in L$.

53. ЛО в нормированных пр-вах. Непрерывность и ограниченность. Норма ЛО.

Пусть V и W – линейные пр-ва над общим полем P . Отображение $A: V \rightarrow W$ называется ЛО, действующим из пр-ва V в пр-во W , если для $\forall x, y \in V, \alpha \in P$: 1) $A(x+y) = Ax + Ay$ 2) $A(\alpha x) = \alpha Ax$.

Норма в V – отображение $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$, ставящее в соответствие \forall вектору $x \in V$ число $\|x\| \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющее аксиомам: $\forall x, y \in V$ и $\forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

1) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

V и W – линейные нормированные пр-ва (оба вещественные или комплексные). Норма ЛО в пр-ве

$\mathcal{L}(V, W)$ согласованна с векторными нормами

$\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_W$ пр-ств V и W , если для $\forall A \in \mathcal{L}(V, W)$:

$$\|Ax\|_W \leq \|A\| \cdot \|x\|_V, \forall x \in V$$

T1. Собственное значение ЛО $A \in \mathcal{L}(V, W)$ не превосходит по модулю \forall его согласованную норму.

Док-во. $Ax = \lambda x \Rightarrow$ для \forall согласованной нормы: $\|Ax\| = |\lambda| \cdot$

$$\|x\| \text{ и } \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow |\lambda| \leq \|A\| \cdot$$

ЛО $A \in \mathcal{L}(V, W)$ непрерывен в точках $\in V$, если для

$\forall \{x_k\} \in V: x_k \rightarrow x$ при $k \rightarrow \infty$, послед-сть образов

$$Ax_k \rightarrow Ax: \|x_k - x\|_V \rightarrow 0 \Rightarrow \|Ax_k - Ax\|_W \rightarrow 0$$

Оператор называется **непрерывным на V** , если он непрерывен при $\forall x \in V$. Оператор называется **ограниченным**, если единичную сферу в V он переводит в ограниченное по норме пр-ва W множество, т.е. если $\exists c > 0$:

для $\forall x \in V (\|x\| = 1)$ выполняется $\|Ax\| \leq c$, или, если $\exists c > 0$:

$$\|Ax\|_W \leq c \|x\|_V \quad \forall x \in V.$$

T2. В конечномерных нормированных пр-вах V и W

\forall ЛО $A \in \mathcal{L}(V, W)$ ограничен.

Док-во. Пусть e_1, \dots, e_n – базис пр-ва V и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \Rightarrow$ согласно аксиомам нормы и неравенству Коши–Буняковского ($(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$)

$$\begin{aligned} \|Ax\|_W &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|Ae_i\|_W \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \|Ae_i\|_W^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} = M \|x\|_E, \\ \text{где } M &= \left(\sum_{i=1}^n \|Ae_i\|_W^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Т.к. в конечномерном пр-ве $\forall 2$ нормы эквивалентны, то $\exists c_2 > 0$: для $\forall x \in V: \|x\|_E \leq c_2 \|x\|_V \Rightarrow$

$$\|Ax\|_W \leq c \|x\|_V, \text{ где } c = Mc_2 > 0. \bullet$$

T3. Для непрерывности ЛО необходима и достаточна его ограниченность.

Док-во. Дост-сть из неравенства

$$\|Ax_k - Ax\|_W = \|A(x_k - x)\|_W \leq c \|x_k - x\|_V.$$

Необх-сть. Пусть множество значений нормы $\|Ax\|_W$ на единичной

сфере $S = \{x: \|x\|_V = 1\}$ не ограничено $\Rightarrow \exists \{x_k\} \in S: \|Ax_k\|_W \rightarrow \infty$.

Пусть $y_k = x_k / \|Ax_k\|_W \Rightarrow \|y_k\|_V = 1 / \|Ax_k\|_W \rightarrow 0 \Rightarrow \|Ay_k\|_W \rightarrow 0$.

Это невозможно, т.к. $\|Ay_k\|_W = 1$ для $\forall k \Rightarrow \exists c > 0$:

$$\|Ax\|_W \leq c \quad \forall x \in S \Rightarrow \|Ax\|_W \leq c \|x\|_V \quad \forall x \in S \quad \blacksquare$$

Пусть V, W – конечномерные пр-ва и $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Из T2 \Rightarrow

ограниченность $A \Rightarrow \exists c > 0: \|Ax\|_W \leq$

$$\leq c \|x\|_V \quad \forall x \in V \Leftrightarrow \|Ax\|_W / \|x\|_V \leq c \quad \forall x \neq \theta \Rightarrow \text{числовое } \left\{ \frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V} \mid \forall x \neq \theta \right\}$$

ограничено сверху \Rightarrow для него \exists ТВГ. Положим

$$\mu(A) = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V} \quad (1)$$

T4. Отображение $\mu(A)$ – норма в пр-ве $\mathcal{L}(V, W)$.

Док-во. $\mu(A) \geq 0$ для $\forall A \in \mathcal{L}(V, W)$, и равенство

$\mu(A) = 0$ означает: $\|Ax\|_W = 0 \quad \forall x \in V$, т.е. $Ax = \theta$, или $A = O$. Аксиомы 2 и 3 вытекают из свойств ТВГ. •

Норма $\mu(A)$ называется **нормой** оператора A , **подчиненной** векторным нормам пространств V и W :

$$\|A\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V} = \sup_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_W$$

Свойства подчиненной нормы.

1. Согласованность: $\|Ax\|_W \leq \|A\| \cdot \|x\|_V \quad \forall x \in V$, т.к., согласно (1),

$$\|Ax\|_W / \|x\|_V \leq \mu(A) = \|A\|$$

2. Она – наименьшая из всех согласованных норм.

3. Мультипликативность, т.е. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, т.к.

$$\begin{aligned} \|AB\| &= \sup_{\|x\|=1} \|ABx\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|A\| \cdot \|Bx\| = \\ &= \|A\| \sup_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| \cdot \|B\| \end{aligned}$$

Пусть V, W – евклидовы (унитарные) пр-ва. Норма ЛО $A \in \mathcal{L}(V, W)$,

порожденная евклидовыми нормами вектора, называется **спектральной нормой**:

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_E = \sup_{(x,x)=1} \sqrt{(Ax, Ax)}$$

Сингулярные числа оператора A – квадратные корни из собственных значений оператора A^*A .

T5. Спектральная норма оператора равна максимальному сингулярному числу этого оператора.

Док-во. Пусть e_1, \dots, e_n – ОНБ из собственных векторов оператора A^*A , а

ρ_1, \dots, ρ_n – сингулярные числа $A, x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \rho_k = \max_{1 \leq i \leq n} \rho_i \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \|Ax\|_E^2 &= (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = \left(\sum_{i=1}^n \rho_i^2 x_i e_i, \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \rho_i^2 |x_i|^2 \\ &\leq \rho_k^2 \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|Ax\|_E \leq \rho_k$, если $\|x\|_E = 1$, и $\|Ax\|_E = \rho_k$,

если $x = e_k (\|e_k\|_E = 1) \Rightarrow$

$$\rho_k = \max_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_E = \sup_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_E = \|A\|_2 \quad \blacksquare$$

С1. Спектральная норма нормального оператора равна абсолютному значению максимального по модулю собственного значения этого оператора.

T6. Сингулярные числа ЛО в евклидовом (унитарном) пр-ве не изменяются при умножении оператора на ортогональный (унитарный) оператор.

Док-во. Пусть $B = U A V$, где $U^*U = I, V^*V = I \Rightarrow$

$B^*B = V^*A^*A V \Rightarrow$ матрицы операторов B^*B и A^*A подобны и их собственные значения совпадают.

С2. Спектральная норма ЛО не изменяется при умножении оператора на ортогональный (унитарный) оператор.

54. Матричные нормы. Унитарно инвариантные n-ы.

Норма в V – отображение $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$, ставящее в соответствие \forall вектору $x \in V$ число $\|x\| \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющее аксиомам: $\forall x, y \in V$ и $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

- 1) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Норма $\|\mathcal{A}\|$ называется **нормой** оператора \mathcal{A} , **подчиненной** векторным нормам пространств V и W :

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|\mathcal{A}x\|_W}{\|x\|_V} = \sup_{\|x\|_V=1} \|\mathcal{A}x\|_W$$

Пусть каждой комплексной матрице A поставлено в соответствие число $f(A) \geq 0$ такое, что:

- 1) $f(A)$ является нормой на $\mathbb{C}^{m \times n}$ для всех m, n ;
- 2) $f(AB) \leq f(A)f(B)$ для \forall матриц A и B , допускающих умножение. Тогда $f(A)$ называется **матричной нормой**.

У1. Пусть для $\forall n$ задана векторная норма на \mathbb{C}^n , и пусть для $\forall m, n$ и \forall матрицы $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ норма $\|A\|$ определена как операторная норма, порожденная данными вектор-ными нормами. Тогда $\|A\|$ является матричной нормой.

Док-во. Пусть $\|x\|_*$ – векторная норма для $x \in \mathbb{C}^n$ при $\forall n$. Для \forall матриц A и B , допускающих умножение, $\exists x_0$ единичной нормы такой: $\|AB\| = \|ABx_0\|_* \leq \|A\| \cdot \|Bx_0\|_* \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x_0\|_* = \|A\| \cdot \|B\|$ ■

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_m)$ – базисы пр-тв V и W . Введем в V и W векторную норму $\|\cdot\|_p$ как норму Гельдера одинакового типа:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \text{ где } p = 1, 2, \infty \quad (1)$$

Пусть $\|\mathcal{A}\|_p$ – норма, подчиненная векторным нормам $\|\cdot\|_p, A = (a_{ij})$ – матрица оператора \mathcal{A} в базисах e и f .

Т1. Для \forall ЛО $A \in \mathcal{L}(V, W)$

$$\|\mathcal{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

Док-во. Пусть $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \Rightarrow$

$$\mathcal{A}x = \sum_{j=1}^n x_j \mathcal{A}e_j = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) f_i$$

Согласно (1)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}x\|_1 &= \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| = \\ &= \sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (2) \end{aligned}$$

Пусть у k -й столбца A максимальная столбцовая сумма:

$$\sum_{i=1}^m |a_{ik}| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

$$\text{из (2)} \Rightarrow \|\mathcal{A}x\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^m |a_{ij}| = \|x\|_1 \sum_{i=1}^m |a_{ik}|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|\mathcal{A}x\|_1 \leq \sum_{i=1}^m |a_{ik}|, \forall x: \|x\|_1 = 1 \\ \|\mathcal{A}x\|_1 = \sum_{i=1}^m |a_{ik}|, x = e_k (\|e_k\|_1 = 1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m |a_{ik}| = \sup_{\|x\|_1=1} \|\mathcal{A}x\|_1 \quad \blacksquare$$

Т2. Для \forall ЛО $A \in \mathcal{L}(V, W)$

$$\|\mathcal{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Док-во ан-но Т1.

Евклидовой нормой (или **нормой Фробениуса**) матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ называется число

$$\|\mathcal{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

У2. Норма Фробениуса является матричной нормой.

Док-во. Для $\forall m, n$ норма Фробениуса является нормой на линейном пр-ве $\mathbb{C}^{m \times n}$ (как 2-норма на пр-ве \mathbb{C}^{mn} изомор-фном $\mathbb{C}^{m \times n}$). Пусть a_1, \dots, a_n – столбцы A , а b_1^T, \dots, b_n^T – строки $B \Rightarrow AB = a_1 b_1^T + \dots + a_n b_n^T$. Из неравенства треугольника, равенства $\|a_i b_i^T\|_F = \|a_i\|_F \|b_i\|_F$ и неравенства Коши–Буняковского ($|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$):

$$\begin{aligned} \|AB\|_F &\leq \sum_{i=1}^n \|a_i b_i^T\|_F = \sum_{i=1}^n \|a_i\|_F \|b_i\|_F \leq \left(\sum_{i=1}^n \|a_i\|_F^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \|b_i\|_F^2 \right)^{1/2} \\ &= \|\mathcal{A}\|_F \|B\|_F \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ограниченный ЛО $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ со св-вом $\|\mathcal{A}x\| = \|x\|$

$\forall x \in V$ называется **изометрическим** или **сохраняющим норму**. Пусть в \mathbb{C}^n задана какая-то норма, а матрица

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (как ЛО из \mathbb{C}^n в \mathbb{C}^n) ее сохраняет. Такая матрица называется **изометрической** относительно данной нормы.

У3. Множество всех комплексных $n \times n$ -матриц, изометрических относительно гельдеровской 2-нормы, совпадает с множеством унитарных матриц порядка n .

Док-во. 2-норма порождается естественным скалярным произведением в \mathbb{C}^n . Из исследований, связанных с тождеством параллелограмма \Rightarrow сохранение длин влечет за собой сохранение скалярных произведений:

$(Ax, Ay) = (x, y) \Leftrightarrow y^*(A^*Ax) = y^*x \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n \Rightarrow y^*(A^*A - I)x = 0$ для $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$. Если x и y – векторы стандартного базиса \Rightarrow все элементы матрицы $A^*A - I$ равны 0 \Rightarrow сохранение 2-нормы \Leftrightarrow условию $A^*A = I$, определяющем унитарную матрицу. •

Матричная норма $\|\cdot\|$ **унитарно инвариантна**, если $\|PAQ\| = \|A\|$ для \forall матрицы A и \forall унитарных матриц P и Q , допускающих умножение.

У4. Норма Фробениуса является унитарно инвариантной.

Док-во. Q – унитарная матрица и $A = [a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$ из У3:

$$\|Qa_j\|_2 = \|a_j\|_2, j = \overline{1, n} \Rightarrow$$

$$\|QA\|_F^2 = \sum_{j=1}^n \|Qa_j\|_2^2 = \sum_{j=1}^n \|a_j\|_2^2 = \|A\|_F^2 \quad \blacksquare$$

Спектральная норма матрицы – матричная норма, подчиненная гельдеровской 2-норме:

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|\mathcal{A}x\|_2$$

У5. Спектральн. норма матрицы унитарно инвариантна.

Док-во. Q – унитарная матрица и $A = [a_1, \dots, a_n]$. По опр.

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|\mathcal{A}x\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|(QA)x\|_2 = \|QA\|_2$$

$$\begin{aligned} \|AQ\|_2 &= \sup_{\|x\|_2=1} \|(AQ)x\|_2 = \sup_{\|Q^*x\|_2=1} \|(AQ)(Q^*x)\|_2 = \\ &= \sup_{\|x\|_2=1} \|(Ax)\|_2 = \|A\|_2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

57. Вариационные (экстремальные) свойства сингулярных чисел.

Арифметические значения квадратных корней из собственных значений матрицы A^*A называются **сингулярными числами** матрицы A .

Т. Пусть $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ имеет сингулярные числа

$\sigma_1(A) \geq \dots \geq \sigma_{\min(m,n)}(A)$. Тогда при всех $1 \leq k \leq \min(m, n)$

$$\sigma_k(A) = \max_{\dim L=k} \min_{x \in L, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \min_{\dim L=n-k+1} \max_{x \in L, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

Док-во. Заметим, что $\sigma_k(A) = \sqrt{\lambda_k(A^*A)}$. Очевидно

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\frac{x^*(A^*A)x}{x^*x}}, \quad x \neq 0$$

=> все следует из вариационных свойств собственных значений эрмитовой матрицы A^*A . (см. ниже)

Для эрмитовой матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ как функция от векторов $x \in \mathbb{C}^n$ рассматривается **отношение Рэлея**

$$\Phi_A(x) = \frac{x^*Ax}{x^*x}, \quad x \neq 0$$

Л. В \forall подпространстве $L \subset \mathbb{C}^n$ \exists векторы $x_{\min}(L)$ и $x_{\max}(L)$,

принадлежащие L : $\Phi_A(x_{\min}) \leq \Phi_A(x) \leq \Phi_A(x_{\max}), \forall x \in L, x \neq 0$

Док-во. Функция $\Phi_A(x)$ непрерывна на единичной сфере $\|x\|_2 = 1$ конечногомерного пр-ва L . По Т (*), она принимает там наименьшее и наибольшее значение в каких-то точках x_{\min} и x_{\max} . Они искомые.

Т Куранта-Фишера. Собственные значения $\lambda_1(A) > \dots > \lambda_n(A)$

эрмитовой матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ связаны с отношением Рэлея $\Phi_A(x)$

следующим образом:

$$\lambda_k(A) = \max_{\dim L=k} \min_{x \in L, x \neq 0} \Phi_A(x) = \min_{\dim L=n-k+1} \max_{x \in L, x \neq 0} \Phi_A(x) \quad (4)$$

Док-во. Пусть e_1, \dots, e_n – ОНБ из собственных векторов матрицы A : $Ae_i = \lambda_i e_i, 1 < i < n$.

Пусть $L_k = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_k)$ и $x = \sum_{i=1}^k x_i e_i \in L_k, x \neq 0 \Rightarrow$

$$\Phi_A(x) = \frac{\lambda_1|x_1|^2 + \dots + \lambda_k|x_k|^2}{|x_1|^2 + \dots + |x_k|^2} \geq \lambda_k,$$

$$\Phi_A(e_k) = \lambda_k \Rightarrow \min_{x \in L_k, x \neq 0} \Phi_A(x) = \lambda_k$$

Рассмотрим подпространство $M_k = \mathcal{L}(e_k, \dots, e_n)$ размерности $n - k + 1$.

Пусть $x = \sum_{i=k}^n x_i e_i \in M_k, x \neq 0$

$$\Rightarrow \Phi_A(x) = \frac{\lambda_k|x_k|^2 + \dots + \lambda_n|x_n|^2}{|x_k|^2 + \dots + |x_n|^2} \leq \lambda_k,$$

$$\Phi_A(e_k) = \lambda_k \Rightarrow \max_{x \in M_k, x \neq 0} \Phi_A(x) = \lambda_k$$

Пусть L – произвольное подпространство размерности k . Т.к. $\dim L + \dim M_k = n+1$, то $\exists z \in L \cap M_k, z \neq 0 \Rightarrow$

$$\min_{x \in L, x \neq 0} \Phi_A(x) \leq \Phi_A(z) \leq \max_{x \in M_k, x \neq 0} \Phi_A(x) = \lambda_k$$

=> 1-е из (4) доказано. Чтобы получить 2-е, возьмем \forall подпр-во L : $\dim L = n - k + 1 \Rightarrow \exists z \in L \cap L_k, z \neq 0$

$$\Rightarrow \max_{x \in L, x \neq 0} \Phi_A(x) \geq \Phi_A(z) \geq \min_{x \in L_k, x \neq 0} \Phi_A(x) = \lambda_k$$

***(Вейерштрасса):** Для \forall вещественной функции $f(x)$, непрерывной во всех точках компактного множества S , \exists точки $x_{\min}, x_{\max} \in S$: $f(x_{\min}) < f(x) < f(x_{\max})$ для всех $x \in S$

58. Соотношения разделения собственных значений и сингулярных чисел матриц и подматриц.

Эрмитова матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ описана в блочном виде

$$A = \begin{bmatrix} B & u \\ u^* & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}, \quad u \in \mathbb{C}^{n-1} \quad (1)$$

=> подматрица B тоже эрмитова. Пусть $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$ – ее собственные значения и Q – унитарная матрица порядка $n - 1$, приводящая ее к диагональному виду

$$Q^*BQ = \begin{bmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} Q^* & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & u \\ u^* & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_{n-1} & \\ & & & s_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} s_1 \\ \dots \\ s_{n-1} \end{bmatrix} = Q^*u, \quad s_n = \overline{s_n} = a_{nn}$$

Характеристический многочлен матрицы A :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \mu_1 - \lambda & & & s_1 \\ & \ddots & & \\ & & \mu_{n-1} - \lambda & \\ s_1 & \dots & s_{n-1} & s_n - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} (\mu_i - \lambda) \left(s_n - \lambda - \frac{|s_1|^2}{\mu_1 - \lambda} - \dots - \frac{|s_{n-1}|^2}{\mu_{n-1} - \lambda} \right)$$

=> если собственное значение λ матрицы A не совпадает ни с одним из собственных значений μ_1, \dots, μ_{n-1} подматрицы B , то оно удовлетворяет уравнению

$$\lambda = F(\lambda) \equiv s_n + \frac{|s_1|^2}{\lambda - \mu_1} + \dots + \frac{|s_{n-1}|^2}{\lambda - \mu_{n-1}}$$

У. Пусть эрмитова матрица A порядка n с собственными значениями $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ имеет блочное разбиение (1), в котором B – ее эрмитова подматрица порядка $n - 1$ с собственными значениями $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$. Тогда если $\mu_1 > \dots > \mu_{n-1}$ и $s_i \neq 0, 1 \leq i \leq n - 1$, то имеют место соотношения разделения

$$\lambda_1 > \mu_1 > \lambda_2 > \mu_2 > \dots > \lambda_{n-1} > \mu_{n-1} > \lambda_n \quad (2)$$

Док-во. Рассмотрим график функции $y = F(\lambda)$. $F(\lambda)$ не определено при $\lambda = \mu_k$. Т.к. $F(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \mu_k$, $F(\lambda)$ при $\lambda = \mu_k$ обращается в бесконечность. Изучим поведение $F(\lambda)$ на каждом из n интервалов

$$I_n = (-\infty, \mu_{n-1}), I_{n-1} = (\mu_{n-1}, \mu_{n-2}), \dots, I_2 = (\mu_2, \mu_1), I_1 = (\mu_1, +\infty).$$

Пусть $\lambda \in I_k, 2 \leq k \leq n - 1 \Rightarrow$

$$\frac{|s_k|^2}{\lambda - \mu_k} + \frac{|s_{k-1}|^2}{\lambda - \mu_{k-1}} \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{при } \lambda \rightarrow \mu_k \\ -\infty & \text{при } \lambda \rightarrow \mu_{k-1} \end{cases}$$

а остальные слагаемые в $F(\lambda)$ являются ограниченными => $F(\lambda) \rightarrow$

$\begin{cases} +\infty & \text{при } \lambda \rightarrow \mu_k \\ -\infty & \text{при } \lambda \rightarrow \mu_{k-1} \end{cases}$

Т.к. $F(\lambda)$ – непрерывна, то прямая $y = \lambda$ имеет при

$\lambda \in I_k$ точку пересечения с графиком функции $y = F(\lambda)$. Случаи $\lambda \in I_1$ и $\lambda \in I_n$ рассматриваются аналогично => уравнение $F(\lambda) = \lambda$ имеет n различных корней. Ни один из них не совпадает ни с одним из чисел $\mu_k \Rightarrow$ каждый из них является собственным значением A .

Т. Пусть эрмитова матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ имеет собственные значения $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ и $B \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$ – ее эрмитова подматрица в блочном разбиении вида (1), имеющая собственные значения $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$. Тогда имеют место соотношения разделения

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n$$

Док-во. Пусть M – подпространство векторов

$x = [x_1, \dots, x_n]^T$, определяемое уравнением $x_n = 0$. Пусть отображение $v: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ задается: $v(x) = [x_1, \dots, x_{n-1}] \Rightarrow$ если $x \in M$, то $\Phi_A(x) = \Phi_B(v(x))$.

Пусть $1 \leq k \leq n - 1$. По Т Куранта-Фишера:

$$\lambda_k = \max_{\dim L=k} \min_{x \in L, x \neq 0} \Phi_A(x) \geq \max_{\dim L=k, L \subset M} \min_{x \in L, x \neq 0} \Phi_A(x) =$$

$$= \max_{\dim L=k, L \subset M} \min_{x \in L, x \neq 0} \Phi_B(v(x)) = \max_{\dim L=k, L \subset \mathbb{C}^{n-1}} \min_{y \in L, y \neq 0} \Phi_B(y) = \mu_k$$

Пусть теперь $2 \leq k \leq n$. По Т Куранта-Фишера:

$$\lambda_k = \min_{\dim L=n-k+1} \max_{x \in L, x \neq 0} \Phi_A(x) \leq \min_{\dim L=n-k+1, L \subset M} \max_{x \in L, x \neq 0} \Phi_A(x) =$$

$$= \min_{\dim L=n-k+1, L \subset M} \max_{x \in L, x \neq 0} \Phi_B(v(x)) = \min_{\substack{\dim L=(n-1)-(k-1)+1, \\ L \subset \mathbb{C}^{n-1}}} \max_{y \in L, y \neq 0} \Phi_B(y)$$

$$= \mu_{k-1} \blacksquare$$

Т. Пусть $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ и $B \in \mathbb{C}^{m \times (n-1)}$ – подматрица, состоящая из первых $n - 1$ столбцов матрицы A . Тогда для сингулярных чисел A и B имеют место соотношения разделения

$$\sigma_1(A) \geq \sigma_1(B) \geq \sigma_2(A) \geq \dots \geq \sigma_{n-1}(B) \geq \sigma_n(A)$$

Док-во. A имеет вид $A = [B, v]$, где v – ее последний столбец => $A^*A =$

$$\begin{bmatrix} B^* & \\ v^* & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & v \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^*B & B^*v \\ v^*B & v^*v \end{bmatrix}$$

Искомые неравенства получаются из соотношений разделения для эрмитовой матрицы A^*A порядка n и ее ведущей подматрицы B^*B порядка $n - 1$.

***: Т Куранта-Фишера.** Собственные значения

$\lambda_1(A) > \dots > \lambda_n(A)$ эрмитовой матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ связаны с отношением Рэлея $\Phi_A(x)$:

$$\lambda_k(A) = \max_{\dim L=k} \min_{x \in L, x \neq 0} \Phi_A(x) =$$

$$= \min_{\dim L=n-k+1} \max_{x \in L, x \neq 0} \Phi_A(x), \quad \text{где } \Phi_A(x) = \frac{x^*Ax}{x^*x}, \quad x \neq 0$$