

Теория функций комплексной переменной

IV семестр

Глава 1. Комплексные числа и комплексная плоскость <ol style="list-style-type: none"> 1. Комплексные числа и действия над ними 2. Предел последовательности 	1 1 3
Глава 2. Функция комплексного переменного <ol style="list-style-type: none"> 1. Предел функции в точке 2. Непрерывность 3. Производная и дифференциал 4. Аналитические функции 5. Свойства аналитических функций 6. Геометрический смысл аргумента производной 	6 7 8 11 13 14 15
Глава 3. Элементарные аналитические функции и заданные ими конформные отображения <ol style="list-style-type: none"> 1. Целая линейная функция 2. Дробно-линейная функция 3. Групповые свойства дробно-линейных преобразований 4. Конформность 5. Инвариантность двойного отношения. 6. Круговое свойство 7. Сохранение симметрии 8. Функция Мукковского 9. Показательная функция 10. Тригонометрические и гиперболические ф-ии 	19 19 23 25 28 32 33 34 38 40 42
Глава 4. Интегрирование функций комплексного переменного <ol style="list-style-type: none"> 1. Понятие интеграла 2. Интегральная теорема Коши 3. Первообразная и неопределенный интеграл 4. Интегральная формула Коши 5. Интегралы, зависящие от параметра 6. Теорема о бесконечной дифференцируемости аналит. ф-ии 7. Следствия из теоремы о бесконечной дифф-сти 	45 45 46 51 54 57 59 60
Глава 5. Ряды аналитических функций <ol style="list-style-type: none"> 1. Общие утверждения отн. рядов 2. Степенные ряды 3. Теорема Тейлора 4. Теорема о единственности 	61 61 63 65 67
Глава 6. Ряды Лорана и изолированные особые точки <ol style="list-style-type: none"> 1. Классификация изолированных особых точек 2. Особочность в бесконечно удаленной точке 	71 74 79
Глава 7. Вычеты и их приложения <ol style="list-style-type: none"> 1. Вычет отн. бесконечно удаленной точки 2. Применение вычетов к вычислению интегралов от вещественной прямой 3. Локаризмический вычет и принцип аргумента 4. Обобщение формулы Ньютона - Лейбница 	85 88 90 — 94 98

Действительный и комплексный анализ, 4 семестр

Часть 2. ТФКП

1. Дифференцируемость функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана.
2. Свойства аналитических функций. Геометрический смысл производной.
3. Дробно-линейные функции: инвариантность двойного отношения, круговое свойство.
4. Сохранение симметрии. Примеры типовых дробно-линейных отображений.
5. Функция Жуковского и обратная к ней функция.
6. Показательная функция. Тригонометрические и гиперболические функции.
7. Выделение однозначных ветвей многозначных функций. Логарифмическая функция.
8. Интегральная теорема Коши и ее обобщения.
9. Неопределенный интеграл и теорема о первообразной.
10. Интегральная формула Коши.
11. Дифференцирование интеграла по параметру. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций.
12. Теоремы Морера и Лиувилля. Основная теорема высшей алгебры.
13. Равномерно и нормально сходящиеся ряды аналитических функций. Теоремы Вейерштрасса.
14. Аналитичность суммы степенного ряда. Теорема Тейлора.
15. Теорема единственности и ее следствия.
16. Ряды Лорана. Теорема Лорана.
17. Классификация изолированных особых точек. Устранимая особая точка. Полнос.
18. Существенно особая точка. Теорема Сохоцкого. Теорема Пикара (без доказательства).
19. Теоремы о вычетах и полной сумме вычетов. Вычет относительно полюса.
20. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.
21. Логарифмический вычет. Принцип аргумента. Теорема Руше.
22. Теорема об образе области. Принципы максимума и минимума модуля аналитической функции.
23. Преобразование Лапласа: существование и аналитичность.
24. Основные свойства преобразования Лапласа.
25. Определение оригинала по изображению. Формула Меллина.
26. Решение дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа.

I. Комплексные числа и комплексная плоскость

Опр. **Комплексное число** — упорядоченная пара вещественных чисел: $z = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$

Приведем:

$$a = \operatorname{Re} z - \text{действительная часть}$$

$$b = \operatorname{Im} z - \text{мнимая часть}$$

1. Комплексные числа и действия над ними

Опр. Два комплексных числа наз. **равными**, если $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$

Бинарные операции:

1. сложение

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

2. умножение

$$w = z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

\Rightarrow по отношению к этим операциям мн-во комплексных чисел есть поле, обозначаемое \mathbb{C} (замкнут, ассоц., дистр., обратные операции)

Если $z_1 = (a_1, 0)$, $z_2 = (a_2, 0)$, то а) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, 0)$

б) $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2, 0)$

\Rightarrow операции с числами этого вида сводятся к операциям с их вещественными частями

\Rightarrow Соотношение: $z = (a, 0) \equiv a$ (действительные — част. случай комп.)

$$(0, 1) \equiv i - \text{мнимая единица}$$

$$i^2 = (-1, 0) = -1 \text{ (по введенным правилам)}$$

$$z = (0, b) = (0, 1)(b, 0) \equiv ib$$

$$\Rightarrow z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + ib - \text{алгебраическая форма}$$

Опр. **Сопряженным** к числу $z = a + ib$ наз. число $\bar{z} = a - ib$.

Свойства:

$$1. \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$2. \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

Опр. **Обратным** к числу $z = a + ib$ наз. число $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$

Комплексная плоскость.

Евклидову пл-ть называем комплексной, ось x — вещественной, ось y — мнимой $\Rightarrow a$ и b — координаты точки, соответствующ. числу $z = a + ib$

Можно ввести полярную систему координат \Rightarrow

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} - \text{модуль числа } z$$

φ — аргумент, причем $\varphi \in [0; 2\pi)$ или $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$$a = \rho \cos \varphi, b = \rho \sin \varphi$$

Опр. Аргумент числа — это $\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Опр. Главное значение аргумента $\operatorname{arg} z$ — значение $\operatorname{Arg} z$, попадающее в основной интервал, т.е. $[0, 2\pi)$ или $(-\pi, \pi]$

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$$

$$\Rightarrow z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) - \text{тригонометрическая форма}$$

Обозн. $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

$$\Rightarrow z = r e^{i\varphi} - \text{показательная форма}$$

Умножение: $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\varphi} = r_1 r_2 (\cos \varphi + i \sin \varphi)$
где $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \pmod{2\pi}$

Формула Муавра: $z^n = r^n e^{in\varphi}, n \in \mathbb{Z}$

Деление: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i\varphi} = \frac{r_1}{r_2} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$
где $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \pmod{2\pi}$

Опр. Число $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ наз. **корнем n -ой степени** из числа $z = r e^{i\varphi}$, если $z_0^n = z$

$$\Rightarrow \text{по ф-ле Муавра: } r_0^n e^{in\varphi_0} = r e^{i\varphi} \Rightarrow r_0 = \sqrt[n]{r}, \varphi_0 = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z}$$

Операции сложения и вычитания позволяют интерпретировать комплексные числа как векторы на комплексной плоскости, причем и как связанные, и как свободные

$$|z - a| \leq r - \text{замкнутый круг}$$

$$|z - a| = R - \text{окружность}$$

2. Предел последовательности

$K_\varepsilon(z_0)$ — открытый круг радиуса ε с центром в т. z_0 — ядре ε -окрестность т. z_0

Последовательность: $z_n = a_n + ib_n$

Опр. $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0 : \forall n \geq N |z_n - z_0| < \varepsilon$
 \Rightarrow т.к. $z_0 = a_0 + ib_0 \quad \sqrt{(a_n - a_0)^2 + (b_n - b_0)^2} < \varepsilon$

Теорема 1.1. $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0 \Leftrightarrow a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_0, b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b_0$
 Сходимость комплексной последовательности равносильна одновременной сходимости двух вещественных n -ей

Теорема 1.2. (Больцано-Вейерштрасса) Из всякой огр. n -ти комплексных чисел можно извлечь сходящуюся n/n -ть.

Теорема 1.3. (Критерий Коши) П-ть $\{z_n\}$ — сходится $\Leftrightarrow \{z_n\}$ — фундаментальна, т.е.
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0 : \forall k, l \geq N |z_k - z_l| < \varepsilon$

$z = a + ib$ — конечные комплексные числа

∞ — число бесконечность.

св-ва:

1. $\infty \pm a = a \pm \infty = \infty$

2. $\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty$

3. $\frac{a}{\infty} = 0$

4. $\frac{\infty}{a} = \infty$

5. $\frac{a}{0} = \infty$

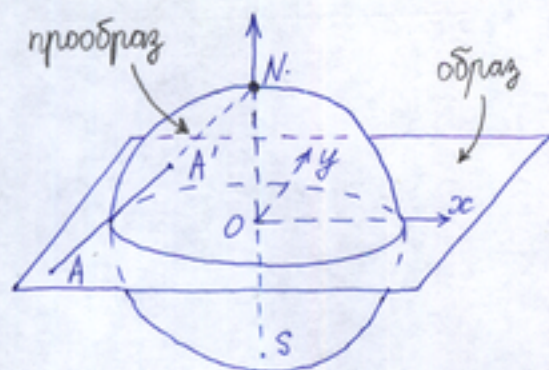
6. Лишены смысла операции $\infty \pm \infty, 0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$

7. ρ -окрестность бесконечно удаленной точки есть $|z| > \rho$

$\Rightarrow \mathbb{C}$ — м-во комплексных чисел

$\overline{\mathbb{C}}$ — расширенное м-во комп. чисел (дополненное до ∞)

Риманова сфера — модель м-ва комплексных чисел



Соответствие — центральная проекция из N точек сферы точка входит с некоторой окрестностью

Опр. Область — открытое связное м-во

Опр. Расстояние от т. z_0 до м-ва M

$$\rho(z_0, M) = \inf_{z \in M} |z - z_0|$$

Расширенная комп. плоскость — $\mathbb{C} + \infty$. Число есть стереографическая проекция точки на сферу.

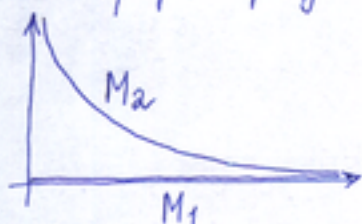
1. Если z_0 - предельная точка мн-ва M , то $\rho(z_0, M) = 0$
2. Если M - замкнуто, $z_0 \notin M$, то $\rho(z_0, M) > 0$

Опр. Расстояние между мн-ми M_1 и M_2 - это

$$\rho(M_1, M_2) = \inf_{\substack{z_1 \in M_1 \\ z_2 \in M_2}} |z_1 - z_2|$$

Теорема 1.4. Пусть мн-ва M_1 и M_2 замкнуты, не пересекаются и хотя бы одно из них ограничено. Тогда расстояние между этими мн-вами положительно

Контрпример для ограниченности:



$$\rho(M_1, M_2) = 0$$

Введем **обозначения**:

1. $\text{dom } f$ (*domain*) – область определения

2. $\text{im } f$ (*image*) – область значений

$f(E)$, $E \subset \text{dom } f$

II. Функция комплексного переменного

Пусть E — произвольное подмножество комплексной плоскости и пусть каждому $z \in E$ поставлены в соответствие одно или несколько чисел w . В этом случае говорят, что на E задана функция комплексного переменного z и записывают этот факт символически типа $w = f(z)$.

Примеры

Однозначные функции

$$\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, |z|, \arg z, z, z^n \quad (n \in \mathbf{N})$$

Многозначные функции

$$\sqrt[n]{z} \quad (n \in \mathbf{N}), \operatorname{Arg} z$$

→ Положим $z = x + iy$, $w = u + iv$, где $x, y, u, v \in \mathbf{R}$. Тогда задание функции $w = f(z)$ на E равносильно заданию на E как подмножестве евклидовой плоскости двух вещественных функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$.

для изображения парных точек два экземпляра комплексной плоскости: для аргумента значения ф-ии. А можно привести к двум вещественным ф-иям.

Пример

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy \rightarrow$$
$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

1. Предел функции в точке

Пусть $E \subset \text{dom } f$, и пусть z_0 — предельная точка для E . Запись

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

означает: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(z) - A| < \varepsilon$ при $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$, $z \in E$.

Положим $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $f(z) = u + iv$, $A = B + iC$.

Теорема 1 *Комплексное соотношение*

Лемма 2.1

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

равносильно двум вещественным предельным соотношениям

$$\lim_{z \rightarrow z_0, y \rightarrow y_0} u(x, y) = B, \quad \lim_{z \rightarrow z_0, y \rightarrow y_0} v(x, y) = C.$$

Следствие 1 Пусть $g(z)$ и $h(z)$ определены на одном и том же множестве E , причем

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = A_1, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = A_2.$$

Тогда

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [g(z) \pm h(z)] = A_1 \pm A_2, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} [g(z) \cdot h(z)] = A_1 \cdot A_2.$$

Если $A_2 \neq 0$, то

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{A_1}{A_2}.$$

2. Непрерывность

Пусть $E \subset \text{dom } f$, и пусть $z_0 \in E$ есть предельная точка для E .
Функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0 , если

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Если $f(z)$ непрерывна в каждой точке множества E , то говорят, что f непрерывна на E .

Теорема 2.2

Теорема 2 Функция $f(z) = u + iv$ тогда и только тогда непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, когда

$$\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} u(x, y) = u(x_0, y_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} v(x, y) = v(x_0, y_0).$$

Следствие 2 Пусть $g(z)$ и $h(z)$ непрерывны в точке z_0 . Тогда из суммы, разности и произведения также непрерывны в этой точке. Если $h(z_0) \neq 0$, то частное $g(z)/h(z)$ тоже непрерывно в z_0 .

Следствие 3 Пусть функция $w = f(z)$ непрерывна на множестве E и $\text{im } f \subset F$. Пусть на множестве F непрерывна функция $\zeta = g(w)$. Тогда сложная функция (суперпозиция) $\zeta = g[f(z)] \equiv G(z)$ непрерывна на E .

Пусть функция $w = f(z)$ непрерывна на ограниченном и замкнутом множестве E (компакте).

Следствие 4 (1-я теорема Вейерштрасса) Функция $w = f(z)$ ограничена на E , т.е. непрерывная ф-ция ограничена на компакте.

Следствие 5 (комплексная версия 2-й теоремы Вейерштрасса)

Модуль функции $w = f(z)$ достигает на E своей верхней и нижней грани.

Следствие 6 (Теорема Кантора) Функция $w = f(z)$ равномерно непрерывна на E .

Определить равномерную непрерывность!

Из-за отау
снвля пова
тия пояди
на колени.
плоскости
2-ая т.
Вейерштра
дается в
упрощенной
формулиров
— оперируем
модулем.

Важный частный случай функциональной зависимости

Пусть функция $z = \lambda(t)$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$. Говорят, что эта функция определяет **непрерывную кривую (линию, дугу)**; значения функции называют точками кривой, а уравнение $z = \lambda(t)$ — параметрическим уравнением этой кривой.

Пример

$$z = a \cos t + ib \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Разделим вещественную и комплексную часть:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

3. Производная и дифференциал

Пусть $E \subset \text{dom } f$, и пусть $z_0 \in E$ есть предельная точка для E .
 Функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 , если существует предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

Он называется производной от $f(z)$ в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$ или $\frac{df}{dz}(z_0)$.

Положим $z - z_0 \equiv \Delta z = dz$ (дифференциал независимого переменного), $f(z) - f(z_0) \equiv \Delta f(z)$ (приращение функции).

Теорема 2.3 Теорема 3 Функция $f(z)$ тогда и только тогда дифференцируема в точке z_0 , когда ее приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f(z) = A \cdot \Delta z + \varepsilon(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z,$$

зависит от расам. точки и Δz

бесконечно малая более высокого порядка, чем Δz

где A — константа, а $\varepsilon(z_0, \Delta z)$ — бесконечно малая при $z \rightarrow z_0$. Если такое представление возможно, то $A = f'(z_0)$.

Сложная ф-ия:

Формальные правила дифференцирования:

1) $E \subset \text{dom } f \quad W = f(z) \in \text{im } f$

$f'(z_0) : W_0 = f(z_0)$, z_0 — предельная точка $\Rightarrow \exists f'(z_0)$
 \Rightarrow непрерывна в т. z_0

2) $W_0 \in F \subset \text{dom } g$

$\xi = g(w) \quad \exists g'(w_0)$

$\xi = g[f(z)] = G(z)$

$\Rightarrow G'(z_0) = f'(z_0) \cdot g'(w_0)$

□ $\Delta f(z) = A \cdot \Delta z + \varepsilon(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z$

$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = A + \varepsilon(z_0, \Delta z)$

При переходе к пределу найдем A в.т.д. \Rightarrow непрерывна в т. W_0

\rightarrow просто обозначим

Теорема 2.4. (условия Коши - Римана) \square $W = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$
 (Даламбера-Эйлера) $(z = x + iy)$ определена в обл. G .

$f(z)$ - дифференцируема в т. $z_0 = x_0 + iy_0 \Leftrightarrow$
 ф-ии $u(x, y)$ и $v(x, y)$ диф-мы в т. (x_0, y_0) как
 ф-ии двух вещественных переменных и выполняются
 соотношения:

$$\left. \begin{aligned} u'_x(x_0, y_0) &= v'_y(x_0, y_0) \\ u'_y(x_0, y_0) &= -v'_x(x_0, y_0) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{условия} \\ \text{Коши-Римана (CR)} \end{array}$$

\square **Необходимость** По т. 2.3 (т.к. ф-ия - диф-ма) \Rightarrow справедливо представление (*)
 $\Delta f = f'(z_0) \Delta z + \varepsilon \Delta z$ (*) $\Rightarrow [\Delta u + i \Delta v] = (a + ib)(\Delta x + i \Delta y) + (\varepsilon_1 + i \varepsilon_2)(\Delta x + i \Delta y)$

$\Delta z = \Delta x + i \Delta y, \Delta f = \Delta u + i \Delta v, \varepsilon = \varepsilon_1 + i \varepsilon_2$
 $f'(z_0) = a + ib$ - представим ^{распишем что есть что} в таком виде и хотим показать, что
 это искомого сложение

1) $\Delta u = a \Delta x - b \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x - \varepsilon_2 \Delta y$ - выделим из скобки без i
 приращение ф-ии в т. (x_0, y_0) представлено в виде 4-ех
 слагаемых, причем первые два линейно зависят от
 приращения, а вторые два - имеют порядок малости
 меньше, чем $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \Rightarrow \delta/\mu \Rightarrow \Delta u$ - диф-ма в т. (x_0, y_0)

2) $\Delta v = b \Delta x + a \Delta y + \varepsilon_2 \Delta x + \varepsilon_1 \Delta y$ - выделим из скобки с i
 аналогичный анализ, как в п. 1

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} a &= u'_x(x_0, y_0), & b &= -u'_y(x_0, y_0) \\ a &= v'_y(x_0, y_0), & b &= v'_x(x_0, y_0) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{искомые} \\ \text{условия} \end{array}$$

Достаточность. $\Delta u = a \cdot \Delta x - b \Delta y - \alpha |\Delta z|$
 \uparrow специально выбранные обозначения,
 т.е. частные производные u и v

$$\Delta v = b \Delta x + a \Delta y + \beta |\Delta z|$$

коэффициенты получены из предыдущего
 шага и условия CR

$$\alpha, \beta \rightarrow 0, \text{ при } \Delta z \rightarrow 0$$

$$\Delta f = \Delta u + i \Delta v = \underbrace{(a + ib)}_A \underbrace{(\Delta x + i \Delta y)}_{\Delta z} + (\alpha + i \beta) |\Delta z| =$$

$$= A \Delta z + \varepsilon \Delta z, \text{ где } \varepsilon = \frac{(\alpha + i \beta) |\Delta z|}{\Delta z}, \text{ причем } |\varepsilon| = |\alpha + i \beta| \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0$$

\Rightarrow по т. 2.3 $\exists f'(z_0) = A$, что \blacksquare

Вывод: производную комплексной ф-ии можно вычислить
 через производные вещественных ф-ий (см. выражение A)

Следствие: $f'(z_0) = u'_x + i v'_x = v'_y - i u'_y = u'_x - i u'_y = v'_y + i v'_x$

4. Аналитические функции

Опр. Ф-ия $w = f(z)$ - аналитическая в обл. G , если она диф-ма в каждой точке из G (Маркушевич)

Опр. Ф-ия $w = f(z)$ - аналитическая в обл. G , если она диф-ма в каждой точке из G и $f'(z)$ непрерывна в G . (С-Т).

В дальнейшем придерживаемся второго определения. ← произв. доказывать

Пример. $w = f(z) = e^x (\cos y + i \sin y) = u + iv$

проверка на аналитичность

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= e^x \cos y \\ v(x, y) &= e^x \sin y \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{непрерывные} \\ \text{на } \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \end{array}$$

1) Для использования т. 2.4. необходимо проверить условия СВ

$$u'_x = e^x \cos y \quad u'_y = -e^x \sin y$$

$$v'_x = e^x \sin y \quad v'_y = e^x \cos y$$

\Rightarrow по т. 2.4 $f(z)$ - диф-ма в \mathbb{C}

2) Проверим непрерывность производной:

$$f'(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y = f(z) \Rightarrow f'(z) = f(z) \text{ (как у } e)$$

$\Rightarrow f(z) \in A(\mathbb{C})$ - аналитическая в области \mathbb{C}

П.к. $f'(z) = f(z) \Rightarrow w = e^x (\cos y + i \sin y)$ - показательная функция от z

Опр. Если $f(z)$ - аналитична во всей \mathbb{C} , то она называется **целой аналитической ф-цией**

$f(z) \in C(\mathbb{R})$ - непрерывность

5. Свойства аналитических функций

① $\square f(z), g(z) \in A(G)$. Тогда $f(z) \pm g(z) \in A(G)$.

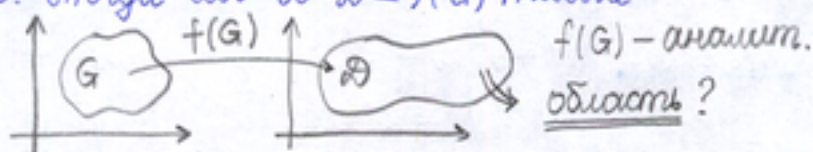
Если $g(z) \neq 0 \forall z \in G$, то $\frac{f(z)}{g(z)} \in A(G)$

\square вытекает из свойств дифференцируемости

② (Теорема об образе области — open mapping theorem)

$\square W = f(G) \in A(G), f(z) \neq \text{const}$. Тогда м-во $\mathcal{D} = f(G)$ также является областью

\square доп-во в конце курса



③ (Аналитичность сложной ф-ии) $f \neq \text{const}$

$\square W = f(z) \in A(G), F = f(G)$ (— область из пункта 2), $\zeta = g(w) \in A(F)$, тогда $\zeta = g[f(z)] = H(z) \in A(G)$ $W \in A(G)$ — аналитична в G

④ (Аналитичность обратной ф-ии)

$W = f(z) \in A(G), f'(z_0) \neq 0, z_0 \in G, \square (W_0) = f(z_0)$

Тогда $\exists K \in (W_0), z = \varphi(w)$:

1. $z = \varphi(w)$ обратна к f в окрестности $K \in (W_0)$, т.е. $\forall w \in K \in (W_0) f(\varphi(w)) = w$

2. $\varphi(w) \in A(K \in (W_0))$ — аналитична в ε -окр.

\nwarrow обратное отображение

3. $\varphi'(W_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$ — обратные производные т.е. формула для вычисления

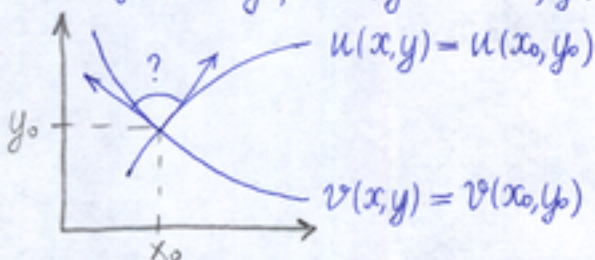
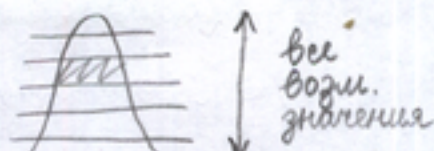
\square без док-ва

⑤ (Ортогональность линий уровня)

$W = f(z) \in A(G), f(z) = u(x, y) + iv(x, y), f \neq \text{const}$

$z = x + iy, u(x, y) = C, v(x, y) = K$ — линии уровня

$z_0 = x_0 + iy_0, u(x, y) = u(x_0, y_0), v(x, y) = v(x_0, y_0)$ — выберем из семейства, проходящего через m .



$$\vec{n}_1 = \text{grad } u = \{u'_x, u'_y\}$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } v = \{v'_x, v'_y\}$$

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

Угол между касательными = углу между нормальными \Rightarrow касат. нормали — а это градиенты

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = u'_x v'_x + u'_y v'_y = \{ \text{Косинус-Римана} \} = u'_x v'_x - v'_x u'_x = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{линии ортогональны, т.е.д.}$$

$\exists w = f(z), \exists f'(z_0) \neq 0, f$ — непрерыв. в окр-ти т. z_0 ; $\arg f'(z_0)$

\downarrow
аргумент не определен \Rightarrow не интересуется
(в противном случае)

6. Геометрический смысл аргумента производной !

Пусть L — непрерывная кривая с параметрическим уравнением $z = \lambda(t)$, где $t \in E = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. В каком случае функция λ имеет производную в точке $t_0 \in E$?

Положим $\lambda(t) = x(t) + iy(t)$ и составим разностное отношение

$$\frac{\lambda(t) - \lambda(t_0)}{t - t_0} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + i \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}.$$

предел левой части $\exists \Leftrightarrow \exists$ два предела правой части

При $t \rightarrow t_0, t \in E$ получаем:

Производная $\lambda'(t_0)$ существует тогда и только тогда, когда существуют обе вещественные производные $x'(t_0)$ и $y'(t_0)$. При этом

$$\lambda'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0).$$

— факт существования производных

$$\begin{aligned} x'(t_0) &= 0 \\ y'(t_0) &= 0 \end{aligned}$$

Значение параметра t_0 и точка $z_0 = \lambda(t_0)$ называются **регулярными**, если производная $\lambda'(t_0)$ существует и не равна нулю.

Если t_0 — регулярное значение параметра, то для всех $t \in E$, достаточно близких к t_0 и отличных от t_0 , точка $z = \lambda(t)$ на кривой L отлична от $z_0 = \lambda(t_0)$. Число

$$0 \neq \frac{\lambda(t) - \lambda(t_0)}{t - t_0} = \frac{z - z_0}{t - t_0},$$

при делении линия действия сохраняется (делим на число)

рассматриваемое как вектор на комплексной плоскости, лежит на прямой, соединяющей точки z_0 и z , т.е. на секущей. Угол, под которым эта секущая наклонена к действительной оси, равен

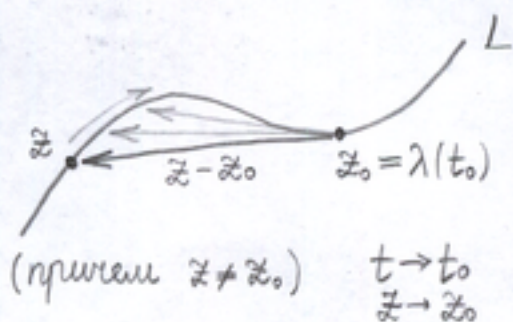
$$\text{Arg} \frac{z - z_0}{t - t_0}.$$

В пределе при $t \rightarrow t_0$, $t \in E$, получим

$$\text{Arg} \lambda'(t_0).$$

Вывод:

Таким образом, если при $t = t_0$ функция $z = \lambda(t)$ имеет ненулевую производную $\lambda'(t_0)$, то секущая кривой L , проходящая через точки z_0 и z , имеет предельное положение при $t \rightarrow t_0$. Это предельное положение есть касательная к кривой L в ее точке z_0 . Она наклонена к действительной оси под углом $\text{Arg} \lambda'(t_0)$.

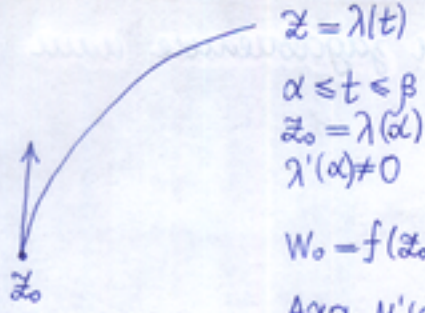


$$\frac{z - z_0}{t - t_0} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \lambda'(t_0) \text{ — определение производной в точке}$$

„Аргументируем“:

$$\text{Arg} \frac{z - z_0}{t - t_0} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \text{Arg} \lambda'(t_0)$$

\Rightarrow Вывод: 1) есть предельное положение касательной
2) угол наклона = $\text{Arg} \lambda'(t_0)$



$$z = \lambda(t)$$

$$\alpha \leq t \leq \beta$$

$$z_0 = \lambda(\alpha)$$

$$\lambda'(\alpha) \neq 0$$

$$w = f[\lambda(t)] = \mu(t)$$

$$\alpha \leq t \leq \beta$$

$$w_0 = f[\lambda(\alpha)] = \mu(\alpha)$$

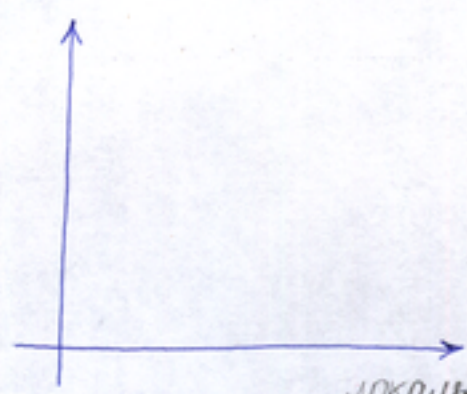
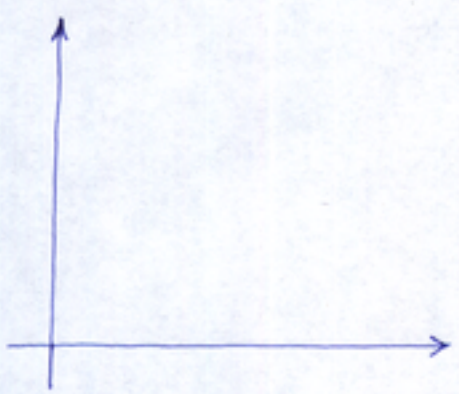
$$w_0 = f(z_0)$$

$$M'(\alpha) = \lambda'(\alpha) \cdot f'(z_0) \neq 0$$

$$\text{Arg } M'(\alpha) = \text{Arg } \lambda'(\alpha) + \text{Arg } f'(z_0)$$

производная сложной ф-ии
 аргумент произведения
 равен сумме аргументов

$$\boxed{\text{Arg } M'(\alpha) - \text{Arg } \lambda'(\alpha) = \text{Arg } f'(z_0)}$$



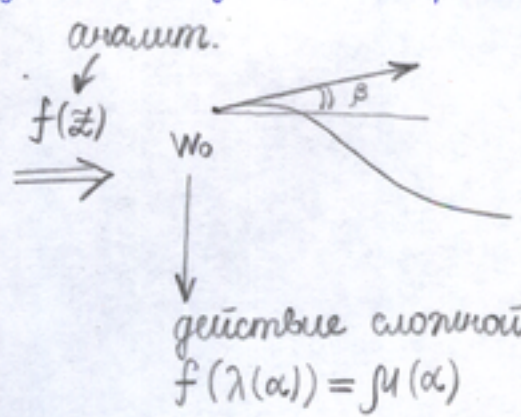
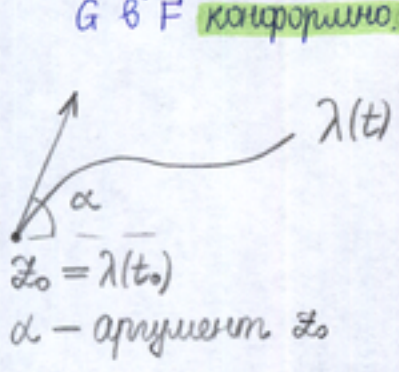
локально

перерисовать

Опр. **Отображение**, задаваемое непрерывной ф-ией $f(z)$, **конформно** в т. z_0 , если оно сохраняет углы между гладкими кривыми, проходящими через z_0 . (критерий конформности)

Теорема 2.5. Отображение $w = f(z)$ конформно в каждой т. z_0 , где $f'(z_0) \neq 0$, т.е. $\text{Arg } M'(\alpha) - \text{Arg } \lambda'(\alpha) = \text{Arg } f'(z_0)$.

Опр. $w = f(z)$ отображает обл. G в обл. F . Если соответствие между точками этих областей взаимнооднозначно и отображение f конформно в каждой точке из G , то говорят, что f отображает G в F **конформно**.



1. $f(z)$ - взаимноод
2. $\forall z$ - конформно

III. Элементарные аналитические функции и задаваемые ими конформные отображения

1. Целая линейная функция

(Маркушевич, гл. II, раздел 10)

$$w = L(z) = \alpha z + \beta, \quad \alpha \neq 0.$$

$$\text{dom } L = \mathbb{C}, \quad \text{im } L = \mathbb{C},$$

← область определения и область значения ①

так как при любом w уравнение $w = \alpha z + \beta$ разрешимо относительно z , т.е. всякое $w \in \mathbb{C}$ имеет прообраз z .

② является ли функция аналитичной

$$\rightarrow L'(z) = \alpha \neq 0 \quad \forall z.$$

③ является ли отображение конформным

Согласно достаточному условию конформности (теорема 2.5) отображение $w = L(z)$ конформно в каждой точке $z \in \mathbb{C}$. Так как при этом L действует взаимно однозначно, то имеет место и глобальная конформность, т.е. L конформно отображает конечную комплексную плоскость \mathbb{C} на себя.

Утв.

Справедливо и обратное утверждение: если аналитическая функция $w = f(z)$ конформно отображает комплексную плоскость \mathbb{C} на себя, то f является целой линейной функцией.

Выясним геометрический смысл линейной ф-ии:

Какое именно отображение осуществляет линейная функция?

Если $\alpha = 1$, т.е. если $w = z + \beta$, то происходит сдвиг комплексной плоскости как целого. В качестве вектора сдвига выступает число β , интерпретируемое как свободный вектор.

При $\alpha \neq 1$ отображение $w = L(z)$ имеет **неподвижную точку** γ , описываемую условием

$$L(\gamma) = \gamma,$$

т.е.

$$\gamma = \alpha\gamma + \beta, \quad (1)$$

или

$$\gamma = \frac{\beta}{1-\alpha}. \quad \text{— получили единственную неподвижную точку}$$

Вычитая из

$$w = \alpha z + \beta$$

равенство (1), получаем:

$$w - \gamma = \alpha(z - \gamma).$$

рассм. разность векторов в одной комплексной области

Будем рассматривать разности $z - \gamma$ и $w - \gamma$ как векторы, приложенные началом к точке γ . Записывая α в показательной форме

$$\alpha = re^{i\phi},$$

совершим переход от первого вектора ко второму в два этапа, а именно

1) сначала умножим на r :

$$z - \gamma \rightarrow r(z - \gamma),$$

2) а затем на $e^{i\phi}$.

разобрать



Таким образом, при $\alpha \neq 1$ линейная функция задает гомотетию с коэффициентом γ относительно точки γ , сопровождаемую поворотом комплексной плоскости на угол ϕ вокруг той же точки. Эти преобразования можно выполнить и в обратном порядке: сначала поворот, а потом гомотетию.

Геометрический смысл отображения линейной фии:

1. гомотетия отн. m, γ
2. поворот на угол ϕ отн. m, γ

Рассм. на \mathbb{C} , теперь хотим $\bar{\mathbb{C}}$
 \Rightarrow нужно ввести бесконечность

При $z \rightarrow \infty$ имеем $L(z) \rightarrow \infty$. Если нужно распространить определение линейной функции на $\bar{\mathbb{C}}$, то естественно положить

расширенная
 комплексная
 плоскость

$$L(\infty) = \infty.$$

Это приводит к появлению у L второй неподвижной точки (бесконечно удаленной). Если $\alpha = 1$, то ∞ является единственной неподвижной точкой, но в этом случае ее можно считать двойной.

Доопределенная линейная функция по-прежнему отображает $\bar{\mathbb{C}}$ на себя взаимно однозначно. Остается ли это отображение конформным?

Что означает конформность в бесконечно удаленной точке?

Выполним в плоскостях переменных z и w замены переменных

$$z = \frac{1}{\xi}, \quad w = \frac{1}{\zeta},$$

преобразующие бесконечно удаленные точки этих плоскостей соответственно в $\xi_0 = 0$ и $\zeta_0 = 0$. В новых переменных функция $w = L(z)$ запишется как

$$w = a z + b \\ \Rightarrow \frac{1}{\zeta} = \frac{a}{\xi} + b$$

\Rightarrow

$$\zeta = \frac{1}{\frac{a}{\xi} + b} = \frac{\xi}{\beta \xi + \alpha}.$$

Производная этой функции равна

$$\zeta' = \frac{\alpha}{(\beta \xi + \alpha)^2}.$$

по 2.5.

Она не обращается в нуль нигде, в том числе и при $\xi_0 = 0$. Следовательно, преобразованная функция конформна в точке $\xi_0 = 0$. В этом случае исходная функция $w = L(z)$ считается конформной в бесконечно удаленной точке.

локально конформна

Вывод:

\Rightarrow доопределенная ф-ия сохраняет конформность

Сохраняет ли замена конформность?

Конформность в $m. \infty$:

1. замена
2. выражение ф-ии
3. производная ф-ии
4. ее равенство нулю

2. Дробно-линейная функция

(Маркушевич, гл. II, раздел 10; гл. III, раздел 4)

$$w = L(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (*)$$

При этом не должно быть равно нулю число

$$\Delta = ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

в противном случае
числитель и знаменатель
пропорциональны \Rightarrow
 $w = c$ - плохо

называемое **определителем функции L** .

При $c = 0$ дробно-линейная функция превращается в целую линейную функцию.

Умножая на число $\lambda \neq 0$ числитель и знаменатель дроби в формуле (*), получим новое представление функции L :

$$w = L(z) = \frac{(\lambda a)z + \lambda b}{(\lambda c)z + \lambda d} \quad (**)$$

Определитель этого представления равен

$$\tilde{\Delta} = \lambda^2 \Delta. \quad (***)$$

Следствие. Для всякой дробно-линейной функции можно выбрать представление с определителем 1. Достаточно взять в (***) $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$.

- любой из корней

за счет
изменения
представи.

подумать!

Хотим понять как соотносятся коэффициенты

Есть ли в задании дробно-линейной функции еще какая-либо свобода помимо возможности умножения числителя и знаменателя на произвольное ненулевое число?

Предположим, что

$$L_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1} \equiv L_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}.$$

Равенство двух функций означает совпадение их значений при всех значениях аргумента из общей области определения. Отсюда получаем

$$(a_1z + b_1)(c_2z + d_2) = (c_1z + d_1)(a_2z + b_2) \quad \forall z.$$

Из равенства квадратных многочленов выводим

$$(1) \quad a_1c_2 = a_2c_1, \quad b_1d_2 = b_2d_1, \quad (2)$$

$$a_1d_2 + b_1c_2 = a_2d_1 + b_2c_1.$$

Задание. Показать, что эти соотношения равносильны равенствам

$$\frac{\overbrace{a_1}^{(1)}}{a_2} = \frac{\overbrace{c_1}^{(1)}}{c_2} = \frac{\overbrace{d_1}^{(2)}}{d_2} = \frac{\overbrace{b_1}^{(2)}}{b_2}.$$

Вывод: Итак, в задании функции L дробью никакой другой свободы кроме возможности умножения числителя и знаменателя на произвольное ненулевое число нет.

разобрать

3. Групповые свойства дробно-линейных преобразований

Рассмотрим суперпозицию дробно-линейных функций

$$L_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1} \quad \text{и} \quad L_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}.$$

Ее называют также **произведением** или **композицией** функций L_1 и L_2 и обозначают $L = L_2L_1$.

$$w = L(z) = L_2[L_1(z)] =$$

$$\frac{a_2 \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1} + b_2}{c_2 \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1} + d_2} = \frac{a_3z + b_3}{c_3z + d_3}.$$

Здесь

$$a_3 = a_2a_1 + b_2c_1, \quad b_3 = a_2b_1 + b_2d_1, \quad (x)$$

$$c_3 = c_2a_1 + d_2c_1, \quad d_3 = c_2b_1 + d_2d_1. \quad (xx)$$

Сопоставим функциям L_1 , L_2 и L матрицы:

$$L_1 \rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad L_2 \rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix},$$

$$L \rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}.$$

Формулы (x) и (xx) означают, что композиции дробно-линейных функций L_1 и L_2 соответствует матрица A_3 , являющаяся **произведением** A_2A_1 матриц A_1 и A_2 . Так как $\Delta_3 = \Delta_1\Delta_2 \neq 0$, то L_2L_1 — также дробно-линейная функция.

Вывод. Операция композиции на множестве дробно-линейных функций не выводит за пределы этого множества.

Свойства композиции

- Композиция любых (необязательно дробно-линейных) функций обладает свойством ассоциативности.
- Существует линейная функция

$$I(z) \equiv z,$$

композиция с которой не меняет никакую дробно-линейную функцию:

$$LI = IL = L \quad \forall L.$$

Записав эту функцию как

$$I(z) = \frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1},$$

видим, что ей соответствует единичная матрица

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Для всякой ^{дробно}линейной функции L существует обратная функция L^{-1} , т.е.

$$LL^{-1} = L^{-1}L = I. \quad (+)$$

Возьмем для L представление

$$L(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

с определителем 1. Построим L^{-1} как функцию, матрица которой обратна матрице

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

т.е.

$$L^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Соотношения (+) вытекают из матричных равенств

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_2.$$

Резюме. Множество дробно-линейных функций является (некоммутативной) группой относительно операции композиции. Эта группа изоморфна группе $SL_2(\mathbb{C})$ комплексных матриц 2-го порядка с определителями, равными единице (специальная линейная группа порядка 2 над полем \mathbb{C}).

$$W(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

4. Конформность

Пусть $w = L(z)$ — нецелая линейная функция, т.е.

$$c \neq 0.$$

Тогда

$$\text{dom } L = \{z \neq \delta = -\frac{d}{c}\}.$$

Как описать
область значений?
Как область
определения
обратной ф-ии

Точка δ называется **особой точкой** преобразования (функции) L .

Так как $w = L(z)$ обладает обратной функцией

$$z = L^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a},$$

то

$$\text{im } L = \text{dom } L^{-1} = \{w \neq \frac{a}{c}\}.$$

Какие $\text{dom } L$ и
 $\text{im } L \Rightarrow$
конформность?

Производная функции L в каждой точке $z \in \text{dom } L$ существует и
равна

$$\frac{ad - bc}{(cz + d)^2} = \frac{\Delta}{(cz + d)^2},$$

\Rightarrow т.к. существует и непрерывна
то есть аналитичность

Существование
производной
означает локальную
конформность

т.е. нигде не обращается в нуль. Локальная конформность в каждой
точке и наличие обратной функции означают: **Вывод!**

**Всякая дробно-линейная функция отображает свою область
определения на область значений конформно.**

разобрать?

При $z \rightarrow \delta = -\frac{d}{c}$ имеем $L(z) \rightarrow \infty$. Если $z \rightarrow \infty$, то $L(z) \rightarrow \frac{a}{c}$. Если нужно распространить определение линейной функции на всю плоскость $\bar{\mathbb{C}}$, то естественно положить

$$L(\delta) = \infty, \quad L(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Теперь $w = L(z)$ отображает расширенную комплексную плоскость на себя и это отображение по-прежнему взаимно однозначно. Остается ли это отображение конформным?

Задание. Проверить, что доопределенная функция L обладает локальной конформностью в обеих точках δ и ∞ :

- При исследовании поведения L в окрестности точки δ выполнить в плоскости w замену переменного $\zeta = \frac{1}{w}$. Убедиться, что полученная функция

$$\zeta = \frac{cz + d}{az + b} \left. \begin{array}{l} \text{дробно-линейная} \\ \text{функция} \end{array} \right\}$$

имеет ненулевую производную в точке $z = \delta$.

особая точка
изменилась

- При исследовании поведения L в окрестности точки ∞ выполнить в плоскости z замену переменного $\xi = \frac{1}{z}$. Убедиться, что полученная функция

$$w = \frac{b\xi + a}{d\xi + c}$$

имеет ненулевую производную в точке $\xi = 0$.

Умб. Вывод. L конформно отображает расширенную комплексную плоскость $\bar{\mathbb{C}}$ на себя.

Умб. Справедливо и обратное утверждение: если аналитическая функция $w = f(z)$ конформно отображает расширенную комплексную плоскость $\bar{\mathbb{C}}$ на себя, то f является дробно-линейной функцией.

Конформность: 1) взаимная однозначность — обратная ф-ия
 $L \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow L^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \frac{1}{\Delta}$
или выразить по-другому z через w
 $z(a - cw) = dw - b$
 $z = \frac{dw - b}{-cw + a} \Rightarrow$ все хорошо

Неподвижные точки дробно-линейного преобразования

Пусть

$$w = L(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

где $c \neq 0$. неподвижные точки преобразования $w = L(z)$ определяются условием

$$z = L(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

т.е. квадратным уравнением

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

т.к. $c \neq 0$, то \exists два корня квадратного уравнения.

Учитывая то, что известно о неподвижных точках целых линейных функций, приходим к следующему выводу:

Утв.

Всякая дробно-линейная функция имеет не более двух неподвижных точек. Единственным исключением является тождественная функция $I(z) = z$, для которой все точки из $z \in \bar{\mathbb{C}}$ являются неподвижными.

Лемма 3.1 $\exists L(z), \Lambda(z)$ — дробно-линейные ф-ии такие, что

$$L(z_i) = \Lambda(z_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

для трех попарно различных точек z_1, z_2, z_3 . Тогда $L(z) \equiv \Lambda(z)$

(т.е. дробно-линейная ф-ия однозначно определяется значениями в трех попарно различных точках).

□ Умножим обе части в (3.1) на Λ^{-1} и положим $U = \Lambda^{-1}L$:

$$\Lambda^{-1}L(z_i) = z_i, \quad i = 1, 2, 3 \Rightarrow U(z_i) = z_i \text{ — тождественное преобр.}$$

\Rightarrow ф-ия имеет 3 неподвижные точки $z_1, z_2, z_3 \Rightarrow U$ — тождеств.
ф-ия $\Lambda^{-1}L = I \sim L = \Lambda$ ■

5. Инвариантность двойного отношения

Задача 3.1. Пусть заданы z_1, z_2, z_3 — конечные и попарно разные числа и w_1, w_2, w_3 — конечные и попарно различные числа. Построить дробно-линейную ф-ию $w = L(z)$ такую, что $L(z_i) = w_i, i = 1, 2, 3$ (3.2)

□ Построить возможно — результат — неявное уравнение:

$$\frac{w_1 - w}{w_2 - w} : \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} = \frac{z_1 - z}{z_2 - z} : \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$
 (3.3)
 задание w от z
 единственная, т.к.
 для трех точек одной.

— это дробно-линейная ф-ия
 является искоимой ф-ией, поскольку при подстановке трех точек $(z_1, w_1), (z_2, w_2), (z_3, w_3)$ уравнение обращается в тождество. ■

Опр. □ a, b, c, d — конечные попарно различные числа. Число $\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$ наз. **двойным отношением** чисел a, b, c, d и обозначается символом (a, b, c, d) — инвариант дробно-линейных преобразований

В таком случае результат задачи 3.1. можно переписать в виде:
 $(w_1, w_2, w_3, w) = (z_1, z_2, z_3, z)$ — равенство двойных отношений

Теорема 3.2. Двойное отношение есть инвариант \forall дробно-линейного преобразования;

или

□ $w = L(z)$ — произвольная дробно-линейная ф-ия,
 a, b, c, d — произвольная четверка конечных попарно разл. чисел,
 $A = L(a), B = L(b), C = L(c), D = L(d)$

$\Rightarrow (a, b, c, d) = (A, B, C, D)$ (*) \Rightarrow дробно-линейные ф-ии сохраняют двойные отношения

□ Будем рассм. L как решение задачи 3.1 для троек (a, b, d) и (A, B, D) . Тогда L задается неявным уравнением (по задаче 3.1):

$$\frac{w-A}{w-B} : \frac{D-A}{D-B} = \frac{z-a}{z-b} : \frac{d-a}{d-b}$$

Используем последнее соотношение: т.к. $L(c) = C$, то пара (c, C) должна удовлетворять этому уравнению. После подстановки этой пары получим равенство (*). ■

Рассм. ослабленные требования, т.е. допустим возможность стремления точек к бесконечности, например $z_1 \rightarrow \infty$. Тогда отношение (3.3) упростится, поскольку один из множителей превратится в единицу.

В задаче 3.1. в каждой из троек может содержаться число $z_i = \infty$ или $w_j = \infty$. Тогда формула (3.3) по-прежнему решает задачу 3.1., если в ней заменить единицами разности, содержащие z_i или w_j

6. Кружовое свойство

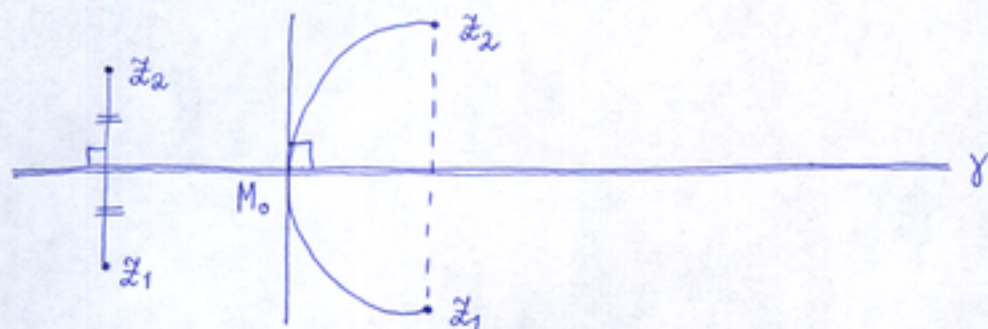
Лемма 3.3. Образы прямой или окружности под действием дробно-линейной ф-ии является либо прямой, либо окружностью.

□ См. стр. 35 ■

7. Сохранение симметрии

Теорема 3.4 \square γ - произвольная прямая или окружность на n -ти \mathbb{Z} , $W = L(\mathbb{Z})$ - произв. г/и φ -ия. Если т. z_1 и z_2 симметричны отн. γ , то их образы $w_1 = L(z_1)$ и $w_2 = L(z_2)$ симметричны отн. линии $\Gamma = L(\gamma)$

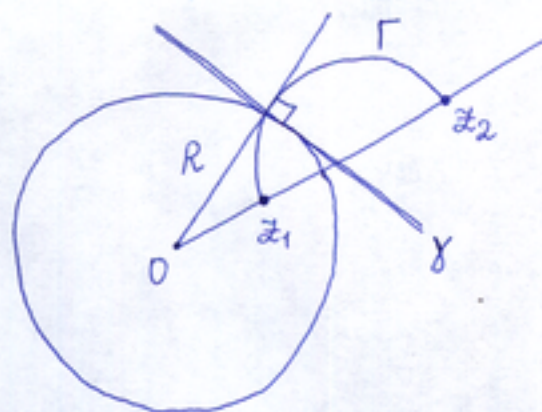
Симметрия отн. прямой:



Точки z_1 и z_2 наз. **симметричными отн. γ** , если:

1. прямая, соединяющая z_1 и z_2 , перпендикулярна γ и делится пополам точкой пересечения;
2. произвольная окружность, проведенная через z_1 и z_2 , пересекает γ под прямым углом

Симметрия отн. окружности:



- \Rightarrow 1. z_1 - находится внутри окружности, z_2 - вне окружности
2. $Oz_1 \cdot Oz_2 = R^2$ (по т. о касательной к окружности)
3. z_1 и z_2 лежат на прямой, проходящей через центр окруж.

$$\Rightarrow \gamma: |z - a| = R$$

$$z_2 = a + \frac{R^2}{z_1 - a}$$

$$(z_2 - a)(\overline{z_1 - a}) = R^2$$

\square Уравнение, описывающее и прямые, и окружности:

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0 \quad (3.4)$$

а именно: $A = 0, B^2 + C^2 \neq 0$ - прямая
 $A \neq 0, B^2 + C^2 - AD > 0$ - окружность

Покажем справедливость (3.4) для окружности:

$$\left(x^2 + 2\frac{B}{A}x + \frac{B^2}{A^2}\right) + \left(y^2 + 2\frac{C}{A}y + \frac{C^2}{A^2}\right) = \frac{B^2}{A^2} + \frac{C^2}{A^2} - \frac{D}{A} = \frac{B^2 + C^2 - AD}{A^2} = R^2$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{A}\right)^2 = R^2$$

Перейдем к плоскости комплексного переменного z через замены:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

и введем обозначение $E = B + iC$

Перепишем (3.4) через введенные переменные:

$$A z \bar{z} + \bar{E} z + E \bar{z} + D = 0 \quad (3.5)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 0, E \neq 0 - \text{прямая} \\ A \neq 0, |E|^2 - AD > 0 - \text{окружность} \end{array} \right\} (*)$$

Перейдем к непосредственному док-ву теоремы 3.3.

Покажем вначале, что круговое св-во выполнено для инверсии $w = \frac{1}{z}$.
 $\exists \gamma$ - произвольная прямая или ок-ть на пи-ти z , Γ - её образ под действием инверсии.

Зададим γ ур-ием вида (3.5). Тогда Γ описывается уравнением:

$$A \frac{1}{w\bar{w}} + \bar{E} \frac{1}{w} + E \frac{1}{\bar{w}} + D = 0 \sim Dw\bar{w} + Ew + \bar{E}\bar{w} + A = 0 \quad (3.6)$$

Осталось разобраться, какую линию описывает ур-ие. Рассмотрим несколько случаев:

$$D = 0 \left\{ \begin{array}{l} A = 0, E \neq 0 \Rightarrow \text{прямая} \\ A \neq 0, \text{ по (3.5) } |E|^2 - AD = |E|^2 > 0 \sim E \neq 0 \Rightarrow \text{прямая} \end{array} \right.$$

$$D \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} A = 0, E \neq 0 \Rightarrow |E|^2 - AD = |E|^2 > 0 \Rightarrow \text{окружность} \\ A \neq 0, |E|^2 - AD > 0 \Rightarrow \text{окружность} \end{array} \right.$$

(Для вывода пользовались парностью из (*)).

Сведем все остальные случаи к доказательству.

$\exists w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ - произвольная д/л (нечислая) ф-ия, где $c \neq 0$

Преобразуем $L(z)$ как композицию трёх преобразований: $z \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow w$

$$L(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)} \quad (\text{заметьте, что } bc-ad = -\Delta)$$

Исходим три преобразования:

1. $z_1 = L_1(z) = cz + d$

2. $z_2 = 1/z_1 = \Lambda(z_1)$

3. $w = \frac{a}{c} - \frac{\Delta(\text{определитель})}{c}$; $z_2 = L_2(z_2)$

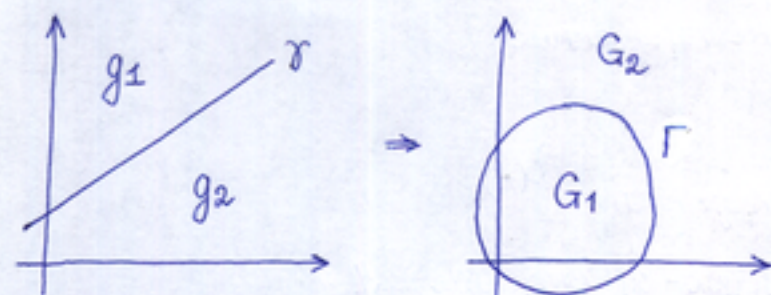
$$\Rightarrow L(z) = L_2 \Lambda L_1$$

L_2 и L_1 - не меняют типа кривой γ
 Λ (инверсия) - доказано выше ■

Замечание 1.

Всякая прямая или окружность, проходящая через особую точку, под действием ф-ии L переходит в прямую

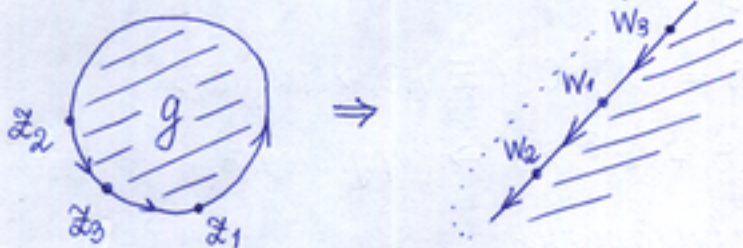
Замечание 2.



две разные полуплоскости
 \Rightarrow какая куда перейдет при отображении?

Это можно узнать через нахождение образов точек из g_1 и g_2 , т.е. $L(x_1), L(x_2)$, $x_1 \in g_1, x_2 \in g_2$ и выяснение местоположения отн. окружности.

Существует другой способ — **отображение областей**



Возьмем три точки z_1, z_2, z_3 так, чтобы при проходе по границе от z_1 к z_3 мы прошли бы через z_2 . Двух точек недостаточно! Мы хотим получить область $g \Rightarrow$ когда идем от z_1 к z_3 область находится слева. Далее найдем образы этих точек и пойдём от z_1 к z_3 через z_2 . Область, которая окажется слева — искомая.

Вернёмся к симметричности:

Точная запись для точек z_1 и z_2 , симметричных отн. окружности:

$$z_2 = a + \frac{R^2}{z_1 - a}$$

Докажем т. 3.4:

- Проведём через w_1 и w_2 прямую или окружность, которую обозн. Δ . Тогда линия $\delta = L^{-1}(\Delta)$ — образ Δ под действием обратной ф-ии, проходит через т. z_1 и z_2 и явл. прямой или окружностью. П.к. z_1 и z_2 симм. отн. γ , то $\delta \perp \gamma$. В силу конформности образы пересекаются под прямым углом, т.е. $\Delta \perp \Gamma \Rightarrow$ т. w_1 и w_2 симм. отн. Γ .

Пример. Построить дробно-линейное преобразование, которое отображает круг $K_R: |z| < R$ в круг $K_R: |w| < R$ так, чтобы заданная точка $\alpha \in K_R$ перешла в т. $w_0 = 0$

Введем обозн. $\gamma_R: |z| = R$, $\Gamma_R: |w| = R$

Рассм. два случая:

- ① $\alpha = 0 \quad 0 \rightarrow 0$, т.е. α совпадает с центром исх. круга
 $\infty \quad \infty \rightarrow \infty$ — неподвижная точка для ф-ии

Но только линейные ф-ии оставляют ∞ неподвижной (обычно переводят в т. $1/c$)

$$\Rightarrow L(z) = \alpha z + \beta$$

$$\text{П.к. } L(0) = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow L(z) = \alpha z$$

$$\text{Поскольку } |z| = R \rightarrow |w| = R \Rightarrow |\alpha| = 1 \Rightarrow \alpha = e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{L(z) = e^{i\varphi} z}$$

- ② $\alpha \neq 0 \quad \alpha \rightarrow 0$, т.е. α не совпадает с центром исх. круга

$$\alpha^* = \frac{R^2}{\alpha} \quad \alpha^* \rightarrow \infty$$

Эти условия с точностью до константы определяют вид ф-ии:

$$L(z) = \lambda \frac{z - \alpha}{z - \alpha^*} = \left\{ \begin{array}{l} \text{подставим} \\ \text{в-ия для } \alpha^* \end{array} \right\} = \lambda \frac{z - \alpha}{z - \frac{R^2}{\alpha}} =$$

↑
неизвестный множитель

$$= \underbrace{-\lambda \bar{\alpha}}_{\mu} \frac{z - \alpha}{R^2 - \bar{\alpha} z} = \mu \frac{z - \alpha}{R^2 - \bar{\alpha} z} \quad \text{возьмем модуль}$$

Подставим в формулу $|w| = |\mu| \frac{|z - \alpha|}{|R^2 - \bar{\alpha} z|}$ $z = R e^{i\varphi} \in \gamma$
 — точка на исходной окружности

$$|w| = |\mu| \frac{|R e^{i\varphi} - \alpha|}{|R^2 - \bar{\alpha} R e^{i\varphi}|} = \frac{|\mu|}{R} \cdot \frac{|R - \alpha e^{-i\varphi}|}{|R - \bar{\alpha} e^{i\varphi}|} = \frac{|\mu|}{R} = R, \quad |\mu| = R^2$$

Ответ в общем виде: $\boxed{L(z) = R^2 e^{i\varphi} \frac{z - \alpha}{R^2 - \bar{\alpha} z}}$

Чтобы избавиться от неоднозначности необходимо: $L'(\alpha) \in \mathbb{R}^+$ — значение производной в α есть действительное положительное число \Rightarrow аргумент равен 0 \Rightarrow кривые не должны поворачиваться.

8. Функция Мукковского

Опр. Функцией Мукковского наз. $W = \lambda(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$

Иследуем ее по плану.

$$\text{dom } \lambda = \{ z \neq 0 \} \quad \text{im } \lambda = \mathbb{C}$$

$$W - \text{произв. } z^2 - 2Wz + 1 = 0 \quad \begin{cases} W = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \cdot 2z \\ 2zW = z^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow z_1 z_2 = 1$$

↓
если один прообраз
лежит внутри
круга, то другой
вне

$$\lambda'(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) \Rightarrow \lambda(z) \in A(\text{dom } \lambda)$$

Иследуем на (локальную) конформность.

$z = \pm 1$ Если $z \neq \pm 1$, то $\lambda(z)$ - локально конформна

Опр. Ф-ия $W = f(z) \in A(G)$, такая, что из $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$, наз. **однозначной** (т.е. каждое свое значение ф-ия принимает один раз), в противном случае - **многозначной**. Если f однозначна во всей об-ти G , но однозначна в подобласти $g \subset G$, то g наз. областью однозначности ф-ии f .

Применим к ф-ии Мукковского.

$\lambda(z)$, раскл. на всей области определения, двузначна - т.е. принимает одно значение в двух точках.

Поскольку $z_1 z_2 = 1$, то

$$\left. \begin{array}{l} |z| < 1 \\ |z| > 1 \end{array} \right\} \text{ области однозначности для } \lambda(z).$$

Другой областью однозначности является:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Im } z > 0 \\ \text{Im } z < 0 \end{array} \right\}$$

Иследуем, куда переходят об-ти однозначности. Но для начала расширим ф-ию Мукковского на всю комплексную область расширительную, т.е. $\lambda(0) = \infty = \lambda(\infty)$

Разобьем окружность на окр-ти с центром в исходной но с равными радиусами \Rightarrow найдем образы \Rightarrow процимируем \Rightarrow найдем исконое (окружность = единичный круг)

$$\gamma_r: |z| = r$$

$$z = r(\cos t + i \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

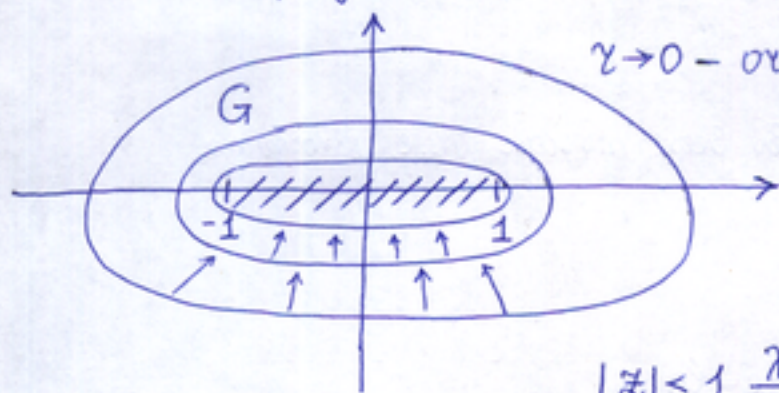
$$\Gamma_r: W = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + r \right)}_a \cos t - i \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - r \right)}_b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$W = u + iv \quad u = a \cos t, \quad v = -b \sin t$$

Получим эллипс. Найдём фокусы:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1 \Rightarrow \text{фокусы } w_1 = -1, w_2 = 1$$

\Rightarrow эллипсы софокусны



$\gamma \rightarrow 0$ - охват большой эллипс

$$\gamma \rightarrow 1 \quad a \rightarrow 1$$

G получается из каппы δ -ти вырезом отрезка от -1 до 1

$$|z| < 1 \xrightarrow[\text{конформ.}]{\lambda(z)} G = \{w \notin [-1, 1]\}$$

Рассм. единичную окружность как сумму двух полуокружностей:



$$\Rightarrow |z| < 1, \text{Im } z > 0 \xrightarrow[\text{конформ.}]{\lambda(z)} \text{Im } w < 0$$

$$|z| < 1, \text{Im } z < 0 \xrightarrow[\text{конформ.}]{\lambda(z)} \text{Im } w > 0$$

$$|z| > 1, \text{Im } z < 0 \xrightarrow[\text{конформ.}]{\lambda(z)} \text{Im } w < 0$$

$$|z| > 1, \text{Im } z > 0 \xrightarrow[\text{конформ.}]{\lambda(z)} \text{Im } w > 0$$

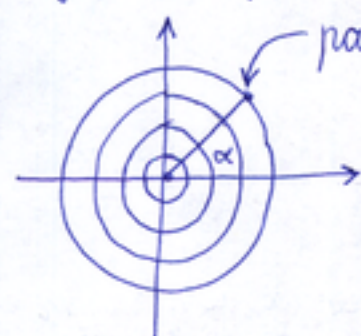
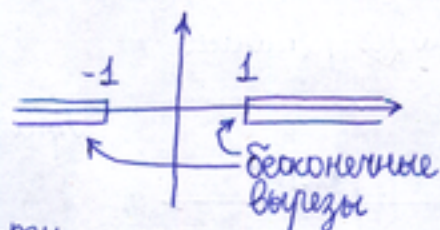
$\{ \text{Im } z > 0 \} = K_+ \cup K_- \cup \tilde{\gamma}$ \leftarrow верхняя окружность без граничных точек

$$K_+ \rightarrow \text{Im } w < 0$$

$$K_- \rightarrow \text{Im } w > 0$$

$$\tilde{\gamma} \rightarrow (-1, 1)$$

$$\Rightarrow \text{Im } z > 0 \xrightarrow[\text{конформ.}]{\lambda(z)} \mathbb{D}$$



рассм. радиус в первой γ -ти

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\gamma_\alpha: z = t(\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad 0 < t < 1$$

$$R_\alpha: w = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + t \right) \cos \alpha - i \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} - t \right) \sin \alpha$$

$$w = u + iv, \quad u = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + t \right) \cos \alpha, \quad v = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} - t \right) \sin \alpha, \quad 0 < t < 1$$

В результате:

$$\frac{u^2}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{t} + t \right)^2 \quad \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{t} - t \right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} = 1}$$

каноническое уравнение гиперболы с полуосями $|\cos \alpha|, |\sin \alpha|$
фокусное расстояние $c^2 = a^2 + b^2 = 1$ не зав. от $\alpha \Rightarrow$ софокусны

9. Показательная функция $e^z = \exp z = e^x (\cos y + i \sin y)$

Эта ф-ия получила название exp, потому что производная во всех точках совпадает с самой ф-ией:

$$(e^z)' = e^z$$

Кроме того ф-ия аналитична во всех точках, т.е. целостная.

Добавим другие сведения:

$$\text{dom } e^z = \mathbb{C}$$

$$\text{im } e^z = \{z \neq 0\}$$

$$\square \forall W \neq 0 \quad W = e^z, \quad |W| = e^x \Rightarrow x = \ln |W|$$

$$\text{Arg } W = y$$

\Rightarrow можем разрешить уравнение, причем решений бесконечно много

$$z = \ln |W| + i \text{Arg } W - \text{натуральные логарифмы числа } W = \text{Ln } W$$

$\Rightarrow \forall W \neq 0$ мы найдем преобразы ■

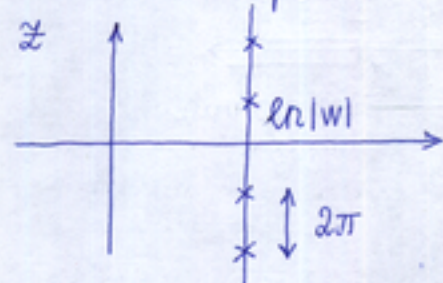
Каждое значение w ф-ия z принимает на счетной множестве $\rightarrow e^z$ - счетная ф-ия

Комплексная экспонента является периодической ф-ией:

$$e^{z+2\pi i} = e^x (\cos(y+2\pi) + i \sin(y+2\pi)) = e^z$$

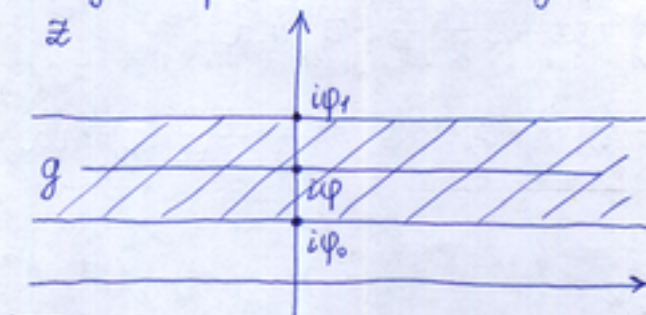
$$x = i(y+2\pi)$$

Расположение решений



Присутствует периодичность по вертикали

Найдем простые области однозначности:

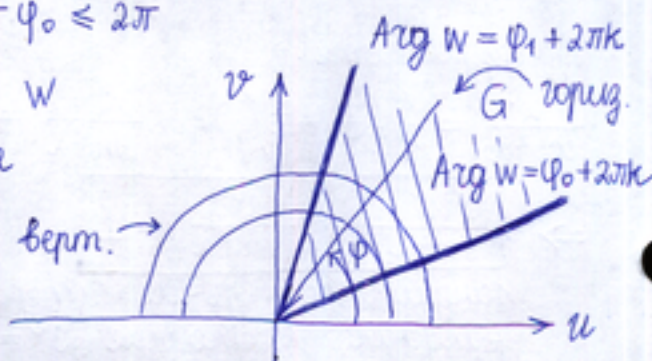


Рассм. $\varphi_0 < \varphi < \varphi_1$
 $l: z = t + i\varphi, -\infty < t < +\infty$ - горизонтальные прямые

$e^z = e^t (\cos \varphi + i \sin \varphi), -\infty < t < +\infty$
 - описывает множество точек лучей с углом наклона φ , не включая точку 0

Никакие два значения не попадут в полосу \Rightarrow полосу можно считать областью однозначности, т.е. обл. g

$$\varphi_1 - \varphi_0 \leq 2\pi$$



\Rightarrow В итоге полосу G переходит в сектор с границами $\varphi_0 + 2\pi k$ и $\varphi_1 + 2\pi k$ (нашние $+2\pi k$ - важно), т.е.

$$G \xrightarrow[\text{конф}]{e^z} G$$

Теперь расам вертикальные линии:

$$z = c + it, \quad -\infty < t < \infty$$

$$w = e^z = e^c (\cos t + i \sin t)$$

Два ортогональных семейства, т.е. вертикальные и горизонтальные прямые, переходят под действием показательной ф-ии в концентрические окружности с центром в $(0,0)$ и лучи, т.е. остаются ортогональными - проявление конформности.

Во что переходят прямые, не параллельные координатным осям?
В логарифмические кривые с уравнением:

$$\rho = c e^{k\varphi}, \quad c, k - \text{константы}, \quad c > 0$$

10. Тригонометрические и гиперболические ф-ии

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Верхний ряд — лк эквивалент \Rightarrow наследуют св-во аналитичности, т.е. целые.

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$$

нижний ряд

Кроме аналитичности верхний ряд наследует периодичность, причем период $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z - 2\pi i$, а у $\cos z$ и $\sin z - 2\pi$.

Проверим для косинуса совпадение на вещ. прямой с вещ. косинусом:

$$z = x \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\cos z = \cos x$$

\Rightarrow сохраняются нули:

$$z = \frac{\pi}{2} + \pi k - \text{нули } \cos z \text{ для } z \in \mathbb{R}$$

Как ведут себя ф-ии вне комплексной прямой?

Показать: $z = x + iy$

$$|\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$$

$$|\sin z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x}$$

воспользуемся рав-ми для оценки модуля снизу вне вещественной прямой
Оценка сверху: $|\cos z| \leq \operatorname{ch} y$

Оценка снизу: $|\cos z| \geq \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1} = |\operatorname{sh} y|$ — по осн. тригонометр. тождеству $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$

Оценка сверху: $|\sin z| \leq \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1} = \operatorname{ch} y$ (ОТТ) — задали $\sin x$ — max значение

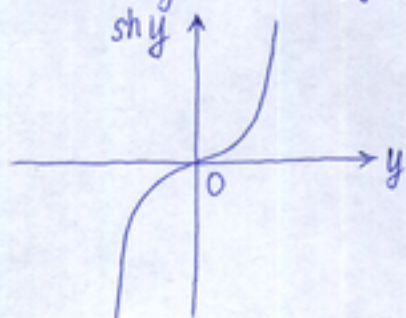
Оценка снизу: $|\sin z| \geq |\operatorname{sh} y|$

Что показывают оценки?

$\sin z$ и $\cos z$ — целые неограниченные ф-ии, в отличие от вещественных $\sin x$ и $\cos x$

Кроме того, нигде кроме вещественной оси функции в ноль не обращаются

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$



Между тригонометрическими и гиперболическими ф-ями есть простая связь:

$$\operatorname{ch} z = \cos(iz)$$

$$\operatorname{sh} z = -i \sin(iz)$$

Теперь расам. ф-ии кратно ряда

Аналитические; периодические, однако период сокращается:

$$\text{у } \operatorname{tg} x \text{ и } \operatorname{ctg} x - \pi, \operatorname{th} z \text{ и } \operatorname{cth} z - \pi i$$

Нули только на вещественной ($\operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$) и комплексной ($\operatorname{th}, \operatorname{cth}$) прямой

Формулы дифференцирования сохраняются:

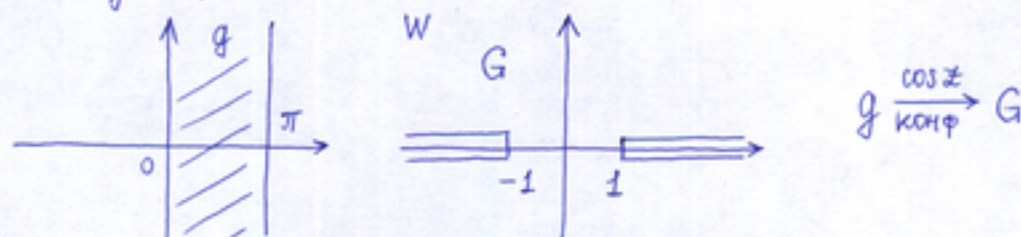
$$(\cos z)' = -\operatorname{sh} z$$

$$(\operatorname{sh} z)' = \cos z$$

Все изучаемые ф-ии можно представить в виде композиции ранее изученных ф-ий: тригонометрическая, Муковского, дробно-линейная.

Например: $\cos z = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$, где $t = e^{iz}$

Показать, что:



Не хватило времени, чтобы поговорить об обратных ф-иях.

Глава IV. Интегрирование ф-ий комплексного переменного

Примем соглашение: т.к. в дальнейшем будет процесс интегрирования, обычной непрерывности будет недостаточно \Rightarrow потребуем кусочную гладкость от кривой L .

1. Понятие интеграла

Пусть L — спрямляемая кривая с параметрическим уравнением

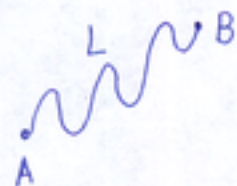
$$z = \lambda(t) = x(t) + iy(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Достаточное условие спрямляемости: $\lambda(t)$ — кусочно-гладкая кривая, т.е. $x(t)$ и $y(t)$ — кусочно-гладкие функции.

Для определенности выберем на L направление, соответствующее возрастанию параметра. Тогда точку $z_0 = \lambda(\alpha)$ назовем началом кривой L , а точку $\lambda(\beta)$ — ее концом. Ту же кривую с противоположным направлением будем обозначать через $-L$.

$$\lambda'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$$

Не должно быть особых точек, т.е. $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$, $\lambda'(t_0) = 0$ — таких t_0 — нет!



$L = AB$ — в направлении возрастания параметра
 $-L = BA$

Пусть

$$t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta \quad (1)$$

произвольное разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$,

опр. разбиение

$$\delta = \max_{1 \leq k < n} \{t_k - t_{k-1}\}$$

— диаметр этого разбиения. Разбиению (1) соответствует разбиение T кривой L на дуги

$$l_1, l_2, \dots, l_n.$$

Дуга l_k начинается в точке $z_{k-1} = \lambda(t_{k-1}) = x_{k-1} + iy_{k-1}$, а кончается в точке $z_k = \lambda(t_k)$.

$$\square S(t_k, \tau_k) = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k = \sum_{k=1}^n (u_k + i v_k) (\Delta x_k + i \Delta y_k) = \sum_{k=1}^n (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_{k=1}^n (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k) \oplus$$

$$\zeta_k = \xi_k + i \eta_k,$$

$$f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + i v(\xi_k, \eta_k) = u_k + i v_k$$

$$\oplus i \sum_{k=1}^n (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k) \rightarrow I = \int_L u dx - v dy + i \int_L v dx + u dy, \delta \rightarrow 0 \blacksquare$$

Пусть в точках кривой L определена функция $w = f(z)$. Выбрав в каждом сегменте $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ произвольное значение τ_k , получим на дуге l_k точку $\zeta_k = \lambda(\tau_k)$. Положим $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ и составим комплексную интегральную сумму

$$S(t_k, \tau_k) = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k, \text{ где } \Delta z_k = z_k - z_{k-1} = \Delta x_k + i \Delta y_k$$

соответствующую разбиению T .

Если существует предел сумм $S(t_k, \tau_k)$ при $\delta \rightarrow 0$, не зависящий от последовательности разбиений и выбора точек $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ на дугах этого разбиения, то этот предел обозначается символом

$$S(t_k, \tau_k) \rightarrow I = \int_L f(z) dz$$

и называется **интегралом от функции $f(z)$ вдоль кривой L** (в выбранном направлении). В этом случае об f говорят, что она интегрируема по L .

Теорема 4.1

Теорема 1. Пусть L — кусочно-гладкая кривая без особых точек. Если функция $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ определена и непрерывна вдоль L , то f интегрируема по L и

$$\int_L f(z) dz = \int_L u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_L v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

2. Интегральная теорема Коши

Кривая $L: z = \lambda(t), \alpha \leq t \leq \beta$, называется **замкнутой**, если ее начальная и конечная точки совпадают, т.е.

$$\lambda(\alpha) = \lambda(\beta).$$

Если точка $z_0 \in L$ такова, что

$$z_0 = \lambda(t_1) = \lambda(t_2), \quad \{t_1, t_2\} \neq \{\alpha, \beta\},$$

значения отличаются от граничных

то z_0 называется **кратной точкой** кривой L .

Кривая, не имеющая кратных точек, называется **простой или жордановой кривой**.

Замкнутая жорданова кривая называется **контуром**. Интеграл от функции $f(z)$ по контуру Γ часто называют **контурным интегралом** и обозначают символом

$$\oint_{\Gamma} f(z).$$

Свойства:

$$\textcircled{1} \int_L f d\bar{z} = \int_{-L} f d\bar{z}$$

$$\textcircled{2} L = L_1 \cup L_2 \quad \int_L f d\bar{z} = \int_{L_1} f d\bar{z} + \int_{L_2} f d\bar{z}$$

$$\textcircled{3} \int_L (c_1 f_1 + c_2 f_2) d\bar{z} = c_1 \int_L f_1 d\bar{z} + c_2 \int_L f_2 d\bar{z}$$

$$\textcircled{4} \left| \int_L f d\bar{z} \right| \leq \int_L |f| d\delta$$

$$\textcircled{4} \left| \int_L f(z) d\bar{z} \right| \leq M \cdot \text{длина } L$$

$$\text{где } M = \max_{z \in L} |f(z)|$$

$$\textcircled{5} L: z = \lambda(t), \alpha \leq t \leq \beta, d\bar{z} = \lambda'(t) dt$$

$$\int_L f(z) d\bar{z} = \int_{\alpha}^{\beta} f[\lambda(t)] \lambda'(t) dt$$

См. пример на стр. 49

$$\square |S(t_k, \tau_k)| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| \cdot |\Delta z_k| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| \delta_k$$

Строго доказывается в курсах топологии



Теорема 2 (Жордан): Всякая замкнутая жорданова кривая Γ делит плоскость \mathbb{C} на две различные области, общей границей которых она является. При этом одна из областей ограничена. Она называется **внутренностью** Γ и обозначается $\text{int } \Gamma$ (on interior). Вторая область не ограничена, называется **внешностью** Γ и обозначается $\text{ext } \Gamma$ (on exterior).

Положительным направлением обхода контура Γ считается то, при котором область $\text{int } \Gamma$ остается слева от наблюдателя, движущегося по Γ . В этом случае для контурного интеграла используется обозначение

$$\oint_{\Gamma^+} f(z).$$

Если движение по Γ происходит в противоположном направлении, то пишут

$$\oint_{\Gamma^-} f(z).$$

Область G называется **односвязной**, если для любого контура γ , принадлежащего G , внутренность γ также принадлежит G . Если это условие не выполнено хотя бы для одного контура, то область G называется **многосвязной**.

Теорема 3 (Основная теорема): Пусть область D ограничена контуром C , а функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в замкнутой области \bar{D} и имеют в D непрерывные частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$. Тогда справедлива формула Грина

$$\oint_{C^-} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

при условии, что двойной интеграл в правой части существует хотя бы как несобственный.

Интегральная теорема Коши: $\exists f(z) \in A(G)$, контур $\Gamma \subset G$, $\text{int } \Gamma \in G$.

Тогда:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

□ Запишем f -ию в алгебраической форме: $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$
Вспомним, что интеграл по \forall кривой, в данном случае по Γ , тоже можно записать в алгебраической форме:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{\Gamma} u dx - v dy + i \oint_{\Gamma} v dx + u dy$$

Контур со своей внутренностью лежит в области \Rightarrow применим к каждому интегралу основную теорему, т.к. выполняются все условия, а именно формулу Грина. Обозначим $\bar{D} = \text{int } \Gamma \cup \Gamma$ - область + контур. Тогда (выбрали положительное направление - не влияет на результат)

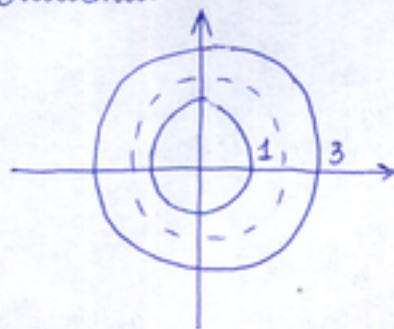
$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \iint_{\bar{D}} (-v'_x - u'_y) dx dy + i \iint_{\bar{D}} (u'_x - v'_y) dx dy$$

П.к. f -ии аналитичны, то выполняется условие Коши-Римана, а именно:

$$-v'_x - u'_y = 0; u'_x - v'_y = 0$$

Тогда интегральные f -ии равны нулю \Rightarrow интегралы равны 0, ч.т.д. ■

Пример. G - область с круговыми дырками в центре $(0, 0)$. Пример покажет важность требования о принадлежности контура к области.



$G: 1 < |z| < 3$ - двусвязная область

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

$$\gamma: |z| = 2$$

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i \quad (\text{см. пример на стр.})$$

Внутренность контура не вся принадлежит области ($1 > |z|$) \Rightarrow теорема не работает

Следствие $\exists G$ - односвязная область, $f(z) \in A(G)$, γ - произвольный контур из G . Тогда:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

(говорить о принадлежности внутренности не нужно, потому что это обеспечивается односвязностью)

Пример. Вычислить $I = \int \frac{dz}{z-a} \ominus$

$$f(z) = \frac{1}{z-a}; |z-a| = \rho$$

$$z = a + \rho e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$dz = \rho e^{it} \cdot i dt$$

$$\ominus \int_0^{2\pi} \frac{i \rho e^{it} dt}{\rho e^{it}} = 2\pi i$$

Обобщенная теорема Коши \square G — односвязная область, ограниченная контуром C , $f(z) \in A(G) \cap C(\bar{G})$ (и аналит., и непрерывная). Тогда:

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

\square Док-во как и в интегральной теореме Коши, но двойные интегралы нулю понимаются как несобственные. ■

Опр. Составной контур — объединение контуров $C = C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_n$,
примем 1) $\forall C_i \subset \text{int } G_0$ ($1 \leq i \leq n$);

2) $C_i \subset \text{ext } C_j$ ($i, j > 0; i \neq j$)
т.е. не пересекаются и не имеют
одни в другом



Опр. Область G , границей которой является составной контур $C = C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_n$, наз. **$(n+1)$ -связной**

Опр. Положительным направлением обхода составного контура C , являющегося границей области G , считается тот, при котором наблюдатель, двигаясь по C , видит G слева от себя

$$\Rightarrow \oint_{C^+} f dz = \oint_{C_0^+} f dz + \oint_{C_1^-} f dz + \dots + \oint_{C_n^-} f dz$$

Теорема о составном контуре \square G — область, ограниченная составным контуром $C = C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_n$, $f(z) \in A(G) \cap C(\bar{G})$. Тогда:

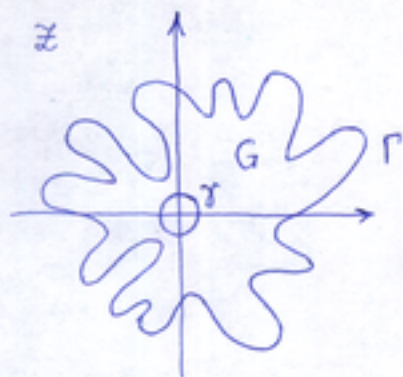
$$\oint_C f(z) dz = 0$$

\square Док-во остается прежним, т.к. основная теорема верна для областей с составной границей ■

$$\oint_{C^+} f dz = \oint_{C_0^+} f dz + \oint_{C_1^-} f dz + \dots + \oint_{C_n^-} f dz = 0 \Rightarrow \text{сгруппируем слагаемые}$$

$$\boxed{\oint_{C_0^+} f dz = \oint_{C_1^+} f dz + \dots + \oint_{C_n^+} f dz}$$

Пример. z



$$f(z) = \frac{1}{z}$$

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z} = ?$$

$$\oint_{\gamma^+} \frac{dz}{z} = \oint_{\gamma^+} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

3. Первообразная и неопределенный интеграл

Опр. $\exists f(z) \in C(G)$. \mathcal{F} -ия $F(z) \in A(G)$ наз. **первообразной** для $f(z)$, если $F'(z) = f(z) \forall z \in G$. Совокупность всех первообразных \mathcal{F} -ии $f(z)$ в обл. G наз. **неопределенным интегралом** этой \mathcal{F} -ии.

Условия независимости криволинейного интеграла от пути

Пусть G — область на декартовой плоскости переменных x и y , в которой непрерывны функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Следующие три условия эквивалентны:

- Для любой замкнутой кривой $L \subset G$ справедливо

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0.$$

- Для любых точек $A, B \in G$ значение интеграла

$$\int_L Pdx + Qdy$$

не зависит от (кусочно-гладкой) кривой $L \subset G$, соединяющей точки A и B .

- Существует непрерывно дифференцируемая в G функция $U(x, y)$ такая, что

$$dU = Pdx + Qdy.$$

откуда следует, что

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = U(B) - U(A).$$

$\Phi(z) = F(z) + C$ — неопределенный интеграл

Докажем, что всякая первообразная может быть получена из фиксированной:

$\exists \Phi(z), F(z)$ — две первообразных для $f(z)$ в G

$$w(z) = \Phi(z) - F(z)$$

$$w'(z) = \Phi'(z) - F'(z) = f(z) - f(z) \equiv 0 \text{ в } G$$

$$w(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$w'(z) \equiv 0 \Rightarrow u'_x = u'_y = v'_x = v'_y \equiv 0 \text{ в } G$$

$$u(x, y) = C_1, v(x, y) = C_2 \quad w(z) = C = C_1 + iC_2 \Rightarrow \Phi(z) = F(z) + C \quad \blacksquare$$

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$\int_L f(z) dz = \int_L u dx - v dy + i \int_L v dx + u dy$$

Следующие три условия эквивалентны:

1) (C-свойство) для \forall замкнутой кривой L $\oint_L f(z) dz = 0$, т.е. интеграл по замкнутой кривой равен 0

2) $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ является функцией только от z
 $z_0, z \in G$ ← потенциальные функции

3) $\exists U(x, y), V(x, y)$ — непр. дифф. в G и такие, что:

$$dU = u dx - v dy$$

$$dV = v dx + u dy$$

Теорема о первообразной. $\exists f(z) \in C(G)$ и обладает в G C-свойством.

Тогда:

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = F(z) \in A(G)$$

$$F'(z) = f(z) \quad \forall z \in G$$

□ Представим f в алгебраической форме: $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$

$$F(z) = \int_{z_0}^z u d\xi - v d\eta + i \int_{z_0}^z v d\xi + u d\eta$$

C-свойство позволяет утверждать, что для \forall дифф. ур-ия найдется потенциал:

$$U(x, y), V(x, y)$$

$$\begin{aligned} dU &= u dx - v dy \\ dV &= v dx + u dy \end{aligned} \Rightarrow \int_{z_0}^z u d\xi - v d\eta = U(x, y) - U(x_0, y_0)$$

Выберем для обоих интегралов потенциалы $U(x, y)$ и $V(x, y)$ так, чтобы

$$\int_{z_0}^z u d\xi - v d\eta = U(x, y), \quad \int_{z_0}^z v d\xi + u d\eta = V(x, y)$$

$$z = x + iy$$

$$\Rightarrow F(z) = U(x, y) + iV(x, y), \text{ причем } U'_x = u, U'_y = -v$$

$$V'_x = v, V'_y = u$$

\Rightarrow выполняются условия Коши-Римана: $U'_x = V'_y, U'_y = -V'_x$

$F(z)$ имеет непр. частные производные, подчиняющиеся условиям (CR)

$$\Rightarrow F(z) \in A(G)$$

$$F'(z) = U'_x + iV'_x = u + i v = f(z) \quad \forall z \in G \quad \blacksquare$$

Замечание: Условие теоремы о первообразной выполняется, в частности, если G — односвязная область и $f(z) \in A(G)$.

Вернемся к неопределенному интегралу:

$$\Phi(z) = F(z) + C = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi + C \quad (\text{выражение из доказанной теоремы})$$

Выясним смысл константы.

Положим $z = z_0$:

$$\Phi(z_0) = \int_{z_0}^{z_0} f(\xi) d\xi + C = C$$

$$\boxed{\Phi(z) - \Phi(z_0) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi} \quad \text{— комплексная версия формулы Ньютона — Лейбница}$$

4. Интегральная формула Коши



$f(z) \in A(G)$
 G - незамкнутая область
 $L \subset G, \text{int } L \subset G$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

интеграл Коши

Значение аналитической ф-ии на контуре однозначно определяет ф-ию внутри контура.

Докажем ф-лу Коши:

□ Построим окружность $\gamma_\rho: |z-z_0|=\rho$ так, чтобы $\gamma_\rho \subset \text{int } L$



Рассм. 2-связную область D , ограниченную составными контурами $L \cup \gamma_\rho$. По теореме о составном контуре:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

Как будет вести себя формула при $\rho \rightarrow 0$? Покажем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - f(z_0) \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow 0$$

Преобразуем $\oint_{\gamma_\rho^+} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i \Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz$ (поделим на $2\pi i$ и умн. на $f(z_0)$)

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz \right| \leq$$

Используем грубую оценку: $\left| \int_L f(z) dz \right| \leq \max_{z \in L} |f(z)| \cdot \text{длина } L$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{z \in \gamma_\rho} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} \cdot 2\pi \rho = \max_{z \in \gamma_\rho} |f(z)-f(z_0)| \rightarrow 0, \rho \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} f(z_0) \blacksquare$$

Замечание 1 □ G - односвязная обл., ограниченная простым контуром C , $f(z) \in A(G) \cap C(\bar{G})$.

Тогда для \forall точки $z_0 \in G$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

Замечание 2 □ G - $(n+1)$ -связная обл., огр. составными контурами $C = C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_n$, $f(z) \in A(G) \cap C(\bar{G})$. Тогда: $z_0 \in G$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

Замечание 3. \square G есть круг $|z - z_0| < R$, $\gamma_R: |z - z_0| = R$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R^+} \frac{f(z)}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\varphi})}{Re^{i\varphi}} Re^{i\varphi} i d\varphi \ominus$$

$$z = z_0 + Re^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$dz = Re^{i\varphi} i d\varphi$$

$$\ominus \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi - \text{формула Коши}$$

5. Интегралы, зависящие от параметра

Теорема 1. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике $\Pi = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ и имеет на нем непрерывную производную $f'_y(x, y)$. Тогда интеграл

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

является дифференцируемой функцией от y на $[c, d]$ и его производная может быть вычислена по правилу Лейбница

Обобщение теоремы 1

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx.$$

Теорема 2. Пусть функция $f(x, y_1, \dots, y_m)$ непрерывна на параллелепипеде $\Pi_m = \{a \leq x \leq b, c_i \leq y_i \leq d_i, (i = 1, 2, \dots, m)\}$ и имеет на нем непрерывные производные $f'_y(x, y_1, \dots, y_m), i = 1, 2, \dots, m$. Тогда интеграл

$$I(y_1, \dots, y_m) = \int_a^b f(x, y_1, \dots, y_m) dx$$

имеет непрерывные частные производные по переменным y_1, \dots, y_m в области $c_i \leq y_i \leq d_i (i = 1, 2, \dots, m)$, которые могут быть вычислены по правилу Лейбница

$$I'_y(y_1, \dots, y_m) = \int_a^b f'_y(x, y_1, \dots, y_m) dx, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Теорема 3. Пусть функции $P(x, y, z_1, \dots, z_m)$ и $Q(x, y, z_1, \dots, z_m)$ непрерывны на множестве $\{(x, y) \in L, c_i < z_i < d_i, (i = 1, 2, \dots, m)\}$ и имеют на нем непрерывные производные $P'_x(x, y, z_1, \dots, z_m)$ и $Q'_y(x, y, z_1, \dots, z_m) (i = 1, 2, \dots, m)$. Тогда криволинейный интеграл

$$I(z_1, \dots, z_m) = \int_L P dx + Q dy$$

имеет непрерывные частные производные по переменным z_1, \dots, z_m в области $c_i < z_i < d_i (i = 1, 2, \dots, m)$, которые могут быть вычислены по правилу Лейбница

$$I'_z(z_1, \dots, z_m) = \int_L P'_z(x, y, z_1, \dots, z_m) dx + Q'_z(x, y, z_1, \dots, z_m) dy,$$

$i = 1, 2, \dots, m.$

Свейников

$$F(z) = \int_L f(z, \zeta) d\zeta : (*)$$

1) $\zeta \in L$, $z \in \text{обл. } G$ на п. z ;

2) \forall фикс. $\zeta \in L$ $f \in A(G)$;

3) $f(z, \zeta)$, $f'_z(z, \zeta)$ — непрерывны по совокупности переменных $\zeta \in L$, $z \in G$

В дальнейшем все интегралы подчиняются этим условиям.

Теорема об интеграле с параметрами: \exists интеграл (*) удовлетворяет условиям 1-3. Тогда:

1) $F(z) \in A(G)$

2) Производную $F'(z)$ можно вычислять по правилу Лейбница:

$$F'(z) = \int_L f'_z(z, \zeta) d\zeta (**)$$

□ Все участвующие ф-ии запишем в алгебраической форме:

$$z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta$$

$$f(z, \zeta) = u(x, y, \xi, \eta) + i v(x, y, \xi, \eta)$$

$$F(z) = U(x, y) + i V(x, y)$$

Комплексный интеграл есть сумма вещественных:

$$\int_L \underbrace{u d\xi - v d\eta}_{U(x, y)} + i \int_L \underbrace{v d\xi + u d\eta}_{V(x, y)}$$

$$U'_x = \int_L u'_x d\xi - v'_x d\eta \quad V'_x = \int_L v'_x d\xi + u'_x d\eta = \int_L -u'_y d\xi + v'_y d\eta = -U'_y$$

$$U'_y = \int_L u'_y d\xi - v'_y d\eta \quad V'_y = \int_L v'_y d\xi + u'_y d\eta = \int_L u'_x d\xi - v'_x d\eta = U'_x$$

П.к. $F(z)$ — аналитична \Rightarrow выполняются условия (CR)

$F(z)$ — непрерывна
 \exists производные, удовл. условиям (CR) } дифференц. } $\Rightarrow F(z) \in A(G)$
 производные непрерывны, т.е. $F'(z)$ — непрерывная ф-ия от z
 \Rightarrow первое утв. доказано

Докажем правило Лейбница:

$$F'(z) = U'_x + i V'_x = \int_L u'_x d\xi - v'_x d\eta + i \int_L v'_x d\xi + u'_x d\eta \quad | \quad f'_z(z, \zeta) = u'_x + i v'_x$$

$$\int_L f'_z(z, \zeta) d\zeta = \int_L (u'_x + i v'_x)(d\xi + i d\eta) = \int_L u'_x d\xi - v'_x d\eta +$$

$$+ i \int_L v'_x d\xi + u'_x d\eta \Rightarrow \text{равенство (**)} \blacksquare$$

6. Теорема о бесконечной дифференцируемости аналитической функции

□ $f(z) \in A(D)$. Тогда $\forall m, z \in D$ $f(z)$ имеет производные всех порядков

□ Лемма. $\forall m, z \in D$. Построим контур L так, чтобы $L, \text{int } L \subset D$ и $z \in \text{int } L$. (его всегда можно построить).

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{— интегральная формула Коши}$$

Вытекают условия (*):

1) $G = \text{int } L$

2) $f'(z) = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$

\Rightarrow к интегралу Коши применима теорема об интеграле с параметром, откуда выводим:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \quad (**)$$

Применяя к (***) теорему об интеграле с параметром, получим

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta \quad (***)$$

Применяя снова эту теорему, имеем

$$f'''(z) = \frac{3!}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^4} d\zeta$$

\Rightarrow по индукции:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad \blacksquare$$

7. Следствия теоремы о бесконечной дифференцируемости

$$① f(z) \rightarrow f'(z) \rightarrow f''(z) \rightarrow f'''(z)$$

Производная n -и, аналитической в обл. G , сама является аналитической в G

② (**Теорема Морера**). $\square f(z) \in C(G)$ и обладает в G C -свойствами. Тогда $f(z) \in A(G)$

\square По т.о первообразной (условия в точности совпадают), существует первообразная:

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \text{ для } f(z): F'(z) = f(z) \quad \forall z \in G.$$

По следствию 1, $f(z) \in A(G)$

③ (**Теорема Лувивия**) Целая функция $f(z)$, ограниченная во всей \mathbb{C} , есть константа.

\square Выб. произвольную т. $z_0 \in \mathbb{C}$. $\gamma_R: |z - z_0| = R$
Запишем интегралом типа Коши:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

Используем оценку: $\exists M > 0: |f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{z \in \gamma_R} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^2} \cdot 2\pi R \leq \frac{M}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow f'(z_0) = 0$$

В виду произвольности т. z_0 , $f'(z) = 0$ в $\mathbb{C} \Rightarrow f(z) = \text{const}$ ■

④ (**Основная теорема алгебры**). Всякий многочлен $P_n(z)$ степени $n \geq 1$ имеет в \mathbb{C} хотя бы один корень.

\square (От противного) Пусть $P_n(z)$ не имеет корней в \mathbb{C} . Тогда ф-ия

$f(z) = \frac{1}{P_n(z)}$ определена и является аналитической во всей \mathbb{C}

$P_n(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty \Rightarrow f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty \Rightarrow f(z)$ оупан. во всей \mathbb{C}
(важно, что ф-ия имеет конечный предел на бесконечности)

\Rightarrow по т. Лувивия (целостность + ограниченность) $f(z) = \text{const}$ -

неверно, т.к. $P_n(z) \neq \text{const}$.

Противоречие вызвано предположением об отсутствии корней у $P_n(z)$ ■

Глава V. Ряды аналитических функций

$$\sum a_n = \sum v_n + i \sum c_n$$

$$a_n = v_n + i c_n$$

1. Общие утверждения относительно рядов

Теоремы для рядов с постоянными членами справедливы и в нашем случае.

$\sum |a_n|$ — понятие абсолютной сходимости

Нас интересуют ряды с аналитическими ф-циями: $\sum u_n(z)$

Почленная сходимость \nrightarrow равномерная сходимость

Опр. Ряд из $u_n(z)$ **сходится равномерно** к ф-ии $f(z)$ на мн-ве $\{z\}$, т.е.

$$\sum u_n(z) \xrightarrow{\{z\}} f(z),$$

$$\text{если } \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \left| f(z) - \sum_{k=1}^n u_k(z) \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq N, \forall z \in \{z\}$$

Критерий Коши:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(z) \right| < \varepsilon$$

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости:

$$\sum u_n(z); \sum c_n: \forall n \quad c_n \geq 0$$

$$|u_n(z)| \leq c_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Если } \sum c_n \text{ — сходя., то } 1) \sum u_n(z) \xrightarrow{\{z\}}$$

$$2) \sum |u_n(z)| \xrightarrow{\{z\}}$$

Утв. $\square \sum u_n(z) \xrightarrow{\{z\}}$, $\varphi(z)$ опр. на $\{z\}$. Тогда и ряд $\sum \varphi(z) u_n(z) \xrightarrow{\{z\}}$

Теорема 5.1 \square ф-ии $u_n(z) \in C(G)$ ($n = 1, 2, \dots$) и $\sum u_n(z) \xrightarrow{G} f(z)$. Тогда:

1) $f(z) \in C(G)$;

2) Если $L \subset G$, то возможно почленное интегрирование по L , т.е.

$$\int_L f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_L u_n(z) dz$$

□ Аналогично вещественному случаю ■

Опр. Говорят, что ряд $\sum u_n(z)$ **сходится к ф-ии $f(z)$ нормально** в области G , если $\sum u_n(z) \xrightarrow{K} f(z)$ на любой компакте $K \subset G$

1-ая т. Вейерштрасса (о рядах аналитических ф-ий). $\square \cup_n(z) \in A(G)$
 ($n=1, 2, \dots$) и $\sum \cup_n(z)$ сходится к $f(z)$ нормально
 в области G . Тогда:

- 1) $f(z) \in A(G)$;
- 2) ряд $\sum \cup_n(z)$ можно почленно диф-ть в G
 любое число раз, т.е.
 $f^{(k)}(z) = \sum \cup_n^{(k)}(z), \forall k \in \mathbb{N}$
- 3) все продифференцированные ряды сходятся
 в G нормально. (не показывается - без док-ва)

\square 1) Покажем, что $f(z)$ аналитична в окрестности всякой точки $z_0 \in G$.
 Построим круг так, чтобы $\bar{K} \subset G$, где $K: |z - z_0| < R$
 \bar{K} - простейший компакт из области G . Имеем, что
 $\sum \cup_n(z) \xrightarrow{\bar{K}} f(z)$

По т. 5.1, $f(z) \in C(\bar{K})$.
 Расм. открытый круг, т.е. $\square K: |z - z_0| < R$, и пусть L - произвольн.
 контур, принадлежащий G . По т. 5.1,
 $\oint f(z) dz = \sum \oint \cup_n(z) dz = 0$
 $\xrightarrow{L} f(z) \in C(K)$ и имеет C -свойство $\oint f(z) dz = 0 \Rightarrow$
 по т. Морера $f(z) \in A(K) \Rightarrow$ в силу произвольности области
 доказан первый пункт.

2) Фикс. произв. т. $z_0 \in G$ и строим окр-ть $\gamma_\rho: |z - z_0| = \rho$. В
 точках этой окр-ти расм. рав-во:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \cup_n(z) \xrightarrow{\gamma_\rho} (*)$$

т.е. если z_0 не выходит из γ_ρ - простейшего компакта, то
 есть равномерная сходимость.

Фикс. $k \in \mathbb{N}$ и умножим обе части (*) на $\psi_k(z) = \frac{k!}{2\pi i (z - z_0)^{k+1}}$

$$|\psi_k(z)| = \frac{1}{2\pi \rho^{k+1}}$$

Важно, что ф-ия ограничена (а не только сохранение знака) \Rightarrow
 равн. сходимость сохраняется:

$$\psi_k(z) f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_k(z) \cup_n(z) \xrightarrow{\gamma_\rho}$$

Тогда по т. 5.1 возможно почленное интегрирование по γ_ρ :

$$\frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho^+} \frac{\cup_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

Интеграл в левой части есть значение k -ой производной ф-ии
 $f(z)$ в т. z_0 :

$$f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \cup_n^{(k)}(z_0)$$

Равенство означает возможность почленного диф-ия любое
 число раз. \blacksquare

2. Степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \quad (*)$$

Какова область сходимости ряда?

Теорема 5.2 Пусть дан ряд (*). Положим

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}} \quad - \text{ радиус сходимости - равенство Коши-Адамара (СН)}$$

Если $R = 0$, то ряд (*) сходится только в т. z_0
 Если $R > 0$ (возможен случай $R = \infty$), то ряд (*) сходится абсолютно для $|z - z_0| < R$ и расходится при $|z - z_0| > R$.

Обозн. $K_R: |z - z_0| < R$ - круг сходимости

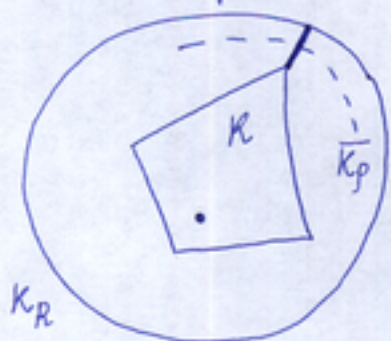
Пусть имеем ряд (*), известно $R > 0$. Тогда во \forall точке круга ряд (*) определяет ф-ию:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \quad (**)$$

Докажем лемму, вспомагательную к дока-вам других свойств (**).

Лемма. \square для ряда (*) $R > 0$. Тогда в круге K_R ряд (*) сходится нормально.

\square \square $K \subset K_R$ - произвольный компакт. Построим круг $\bar{K}_\rho: |z - z_0| \leq \rho$ так, чтобы сам круг содержался в круге сходимости, а с другой - содержал компакт K , т.е. $K \subset \bar{K}_\rho \subset K_R$. Почему такой круг можно построить? Если $R = \infty$, то ввиду ограниченности компакта K найдется число $\rho > 0$ такое, что $\bar{K}_\rho \supset K$. Если $0 < R < \infty$, то $\rho(K, \partial K_R) = \delta > 0$, т.к. имеем два замкнутых непересекающихся м-ва, и можно положить $\rho = R - \delta/2$.
 Поясним картинкой:



В т. $z = z_0 + \rho$ ряд (*) сходится абсолютно, т.е. сходится неотрицательный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n| \rho^n$. Этот ряд служит матричной Вейерштрасса для ряда (*), когда $z \in \bar{K}_\rho \Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса ряд (*) $\xrightarrow[\bar{K}_\rho]{} \Rightarrow$ ряд (*) $\xrightarrow[K]{} \Rightarrow$ (т.к. $K \subset \bar{K}_\rho$) \Rightarrow есть нормальная сходимости. \blacksquare

Следствие. По 1-ой т. Вейерштрасса:

1) $f(z) = A(K_\rho)$

2) $\forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} C_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) (z - z_0)^{n-k} \quad (***)$

Из ф-мы (СН) следует, что продифференцированные ряды имеют тот же радиус сходимости R , что и исходный ряд (*).

Замечание о единственности. Ряд (*) с $R > 0$ однозначно определяется своей суммой $f(z)$.

□ Положим $z = z_0$ в равенствах (***) и (***):

$$c_0 = f(z_0)$$

$$f^{(k)}(z_0) = c_k \cdot k!$$

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

⇒ коэффициенты однозначно определяются по формулам. ■

Опр. Ряд с коэффициентами $c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)
наз. рядом Тейлора для $f(z)$.

Пример. Подсчет суммы ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n$$

Рассм. как степенной ряд с $c_n = 1 \forall n$. $R = 1$

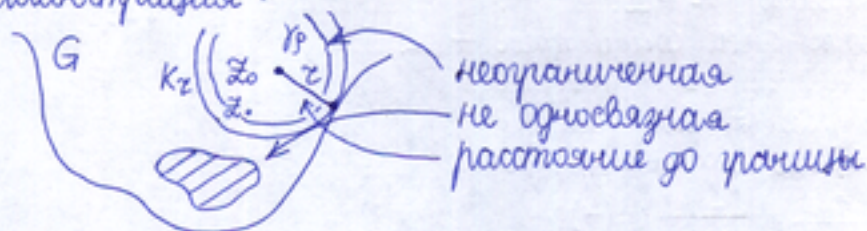
⇒ $K_R: |z - z_0| < 1$

$$S_n(z) = 1 + (z - z_0) + \dots + (z - z_0)^n = \frac{1 - (z - z_0)^{n+1}}{1 - (z - z_0)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - (z - z_0)}$$

3. Теорема Тейлора

Теорема Тейлора $\square f(z) \in A(G)$, z_0 — произв. т. из G , $\gamma = \varphi(z_0, \partial G)$.
Тогда в круге $K_\gamma: |z - z_0| < \gamma$ $f(z)$ может быть представлена как сумма ряда по степеням $z - z_0$, причем это представление единственно.

\square Иллюстрация:



1) Единственность. Если разложение $f(z)$ по степеням $z - z_0$ существует, то оно единственно согласно замечанию о единственности.

2) Существование. Покажем, что разложение \exists . Рассмотрим произвольную т. $z \in K_\gamma$. Построим окружность:

$$\gamma_\rho: |\xi - z_0| = \rho$$

так, чтобы $\gamma_\rho \subset K_\gamma$ и $z \in \text{int } \gamma_\rho$.

По лемме ρ -й Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \quad (\xi \in \gamma_\rho). \quad \text{Получим разложение ядра по степеням:}$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \left\{ \frac{|z - z_0|}{|\xi - z_0|} < 1 \right\}$$

$$= \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}$$

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \xrightarrow{\text{по } \gamma_\rho}$$

Заметим, что ряд в правой части сходится равномерно на окр. γ_ρ , т.к. есть сходящийся мажорирующий ряд:

$$\max_{\xi \in \gamma_\rho} |f(\xi)| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z - z_0|^n}{\rho^{n+1}}$$

\Rightarrow Пошлемо интегрируем по γ_ρ и умножим обе части на $\frac{1}{2\pi i}$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}}_{C_n} (z - z_0)^n$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

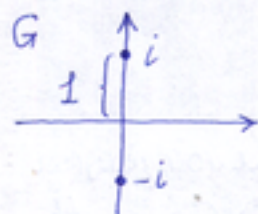
$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n} \quad \text{— искомое степенное разложение}$$

Доказывает возможность разложения \blacksquare

Пример. $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ разложить в ряд по степеням z и $z-1$

Где будет аналитична $f(z)$? Во всей конп. п-ти, кроме $(0, i)$ и $(0, -i)$. — область аналитичности.

$$|z| < 1 - \text{сходится, } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^{2n}$$



По Коши-Адамару $R=1$.

Граница области аналитичности — 1.

Рассм. случай для $z-1$.

Разложим $f(z)$ на простые дроби:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i} \right\} (*)$$

Разложим каждое из слагаемых по степеням:

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z-1+1-i} = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{1-i}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{(1-i)^{n+1}}$$

Необходимо потребовать $|z-1| < |1-i| = \sqrt{2}$

$$\frac{1}{z+i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{(1+i)^{n+1}}$$

В данном случае потребуем $|z-1| < |1+i| = \sqrt{2}$



Сходится в одной области $|z-1| < \sqrt{2} \Rightarrow$ заменим в (*) разложившие слагаемые:

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)^{n+1}} \right] (z-1)^n, \quad |z-1| < \sqrt{2}$$

Если применить формулы: $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

4. Теорема о единственности

Область G , в которой выделено подмножество E , имеющее пред. конечн. точку $z_0 \in G$

1-ая формулировка. Может существовать лишь одна φ -ия $f(z) \in A(G)$, принимающая значения на под-тве E

2-ая формулировка. Если φ -ия $\varphi(z) \in A(G)$ обращается в нуль во всех точках из E , то $\varphi(z) = 0$ в G

Задача. Док-ть эквивалентность дв-х формулировок теоремы о единственности.

При док-ве будем исп-ть 2-ую формулировку.

□ Выделим в E послед-ть $\{z_k\}$ такую, что $z_k \rightarrow z_0, z_k \neq z_0 \forall k$

Пусть $\gamma = \rho(z_0, \partial G)$. По т. Штейнера, в круге $|z - z_0| < \gamma$ $\varphi(z)$ можно

представить степенным рядом $\varphi(z) = \overbrace{c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots}^{g(z)} \quad (*)$
 Покажем по индукции, что все коэффициенты $c_n = 0$, т.е. $\varphi(z) \equiv 0$ в круге $|z - z_0| < \gamma$

Подставляя в (*) $z = z_k$, имеем $0 = \varphi(z_k) = c_0 + c_1(z_k - z_0) + \dots + c_n(z_k - z_0)^n$

Перейдем к пределу $z_k \rightarrow z_0, k \rightarrow \infty \Rightarrow 0 = c_0$ — база индукции.

Пусть уже доказано, что $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$. Покажем, что $c_n = 0$

$\varphi(z) = c_n(z - z_0)^n + c_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots \quad (**)$

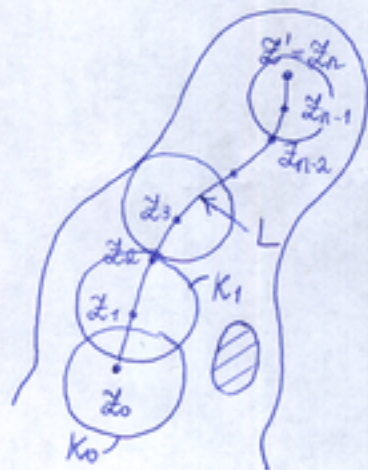
Подставим в (**) $z = z_k$:

$$0 = \varphi(z_k) = c_n(z_k - z_0)^n + c_{n+1}(z_k - z_0)^{n+1} + \dots$$

$$0 = c_n + c_{n+1}(z_k - z_0) + c_{n+2}(z_k - z_0)^2 + \dots$$

$$z_k \rightarrow z_0, k \rightarrow \infty \quad c_n = 0$$

Первая часть док-ва проведена. Перейдем ко второй



Вик. произвольную т. $z' \in G$. Покажем, что $\varphi(z') = 0$

Пользуясь связностью, проведем непрерывную кривую $L \subset G$, соединяющую z_0 и z' , где z_0 — предельная точка.

Пусть $\delta = \rho(L, \partial G) > 0$ (по задаче из лекции 1)

Разобьем L точками $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n$ так, что $|z_{i+1} - z_i| < \delta$, $i = 0, 1, \dots, n-1$

$K_0: |z - z_0| < \delta$. По первой части $\varphi(z) \equiv 0$ в K_0

Проведем индуктивный процесс:

Шаг 1. Построим круг $K_1: |z - z_1| < \delta$, $E_1 = K_0 \cap K_1$
Обозн. $K_1 \rightarrow G_1$, $E_1 \rightarrow E$, z_1 - пред. т. для E_1

Рассуждая как в первой части док-ва, покажем, что из $\varphi(z) = 0 \forall z \in E_1$ следует, что $\varphi(z) \equiv 0$ в K_1

Шаг 2. Построим круг $K_2: |z - z_2| < \delta$, $E_2 = K_1 \cap K_2$

Рассуждая как в первой части:
 $\varphi(z) = 0 \forall z \in E_2 \Rightarrow \varphi(z) \equiv 0$ в K_2

После $n-1$ шагов процесса получим круг

$K_{n-1}: |z - z_{n-1}| < \delta$, в котором $\varphi(z) \equiv 0$. П.к. $z' = z_n \in K_{n-1}$, то $\varphi(z') = 0 \Rightarrow$ доказано ■

Ситуации использования теоремы.

- ① $[a, b] \subset \mathbb{R}$ $\varphi(x)$ определена на $[a, b]$. Γ область $G \supset [a, b]$. Применяя 1-ую формулировку: может существовать не более одной ф-ии $f(z) \in A(G)$, совпадающей всюду на $[a, b]$.

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ 0 \qquad \qquad 2\pi \\ \sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) \end{array} \quad y = \sin x$$

$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})$ - никакими другими способами ф-ию нельзя распространить на комп. пл-ть

$f(z)$ - аналитическое продолжение ф-ии $\varphi(x)$ с $[a, b]$ на \mathbb{C}

- ② (несуществование аналит. ф-ии с заданными свойствами)
Существует ли ф-ия $f(z) \in A(K)$, $K: |z| < 1$, такая, что $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$, $n = 2, 3, \dots$? Не существует. Покажем

$$f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}, n = 2, 3, \dots$$

$g(z) = z$ - аналитическая всюду (*)

$$G = K, E = \left\{ \frac{1}{n} \right\}, z_0 = 0$$

Если решение \exists , то оно имеет вид (*). Однако она не удовл. второму условию \Rightarrow противоречие.

③ (продолжение соотношений)

1) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

$F(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ — целая

$F(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$G = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{R}$. Используем т. о единственности во второй формулировке:

$F(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

2) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$ (*)

Используем т. о второй формулировке и докажем в 2 этапа.
Риск. произв. всег. значение $z_2 = x_2$

$f(z_1) = \cos(z_1 + x_2)$, $g(z_1) = (\cos x_2) \cos z_1 - (\sin x_2) \sin z_2$ — целые

$f(z_1) = g(z_1) \quad \forall z_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(z_1) = g(z_1) \quad \forall z_1 \in \mathbb{C}$

\Rightarrow промежуточный итог: формула (*) верна для $\forall z_2 \in \mathbb{R}$ и $\forall z_1 \in \mathbb{C}$.
Замечательная задача — охват комплексности.

Риск. произв. $z_1 \in \mathbb{C}$ и рассм. обе части в (*) как ф-ии от z_2

$F(z_2) = \cos(z_2 + z_1)$, $G(z_2) = (\cos z_1) \cos z_2 - (\sin z_1) \sin z_2$ — целые ф-ии

$F(z_2) = G(z_2) \quad \forall z_2 \in \mathbb{R}$

$G = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{R}$

$F(z_2) = G(z_2) \quad \forall z_2 \in \mathbb{C}$

Формула (*) верна для всех $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Глава VI. Ряды Лорана и изолированные особые точки

Опр. $f(z) \in A(\mathfrak{D})$, $\mathfrak{D}: 0 < |z - z_0| < R$ — проколотая R -окрестность т. z_0 , z_0 — изолированная особая точка ф-ии $f(z)$. Т.е. в т. z_0 ф-ия $f(z)$ теряет аналитичность \Rightarrow не может быть разложена в этой т. z в ряд Тейлора.

Рассм. ряд Лорана, который позволяет произвести разложение:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} = I + II$$

Из-за нового вида ряда необходимо ввести понятие сходимости — ряд (*) сходится, если сходятся оба ряда I и II.

Изучим типичные области сходимости.

Ряд I сход. в круге $K_1: |z - z_0| < R_1$ абсолютно и нормально к некоторой аналитической ф-ии $f_1(z)$.

Ряд II не явл. степенным \Rightarrow сделаем замену $\xi = \frac{1}{z - z_0}$ к степенному стн. т. т. 0

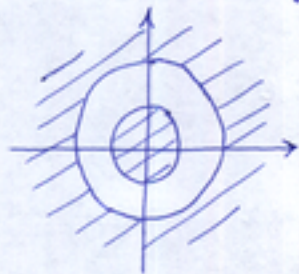
$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} \xi^n$$

Считаем, что ряд имеет положительный радиус сходимости:

$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} \xi^n$ сход. в круге $K_2: |\xi| < R_2^{-1}$ абсолютно и нормально к некоторой аналитической ф-ии $f_1(z)$.

Ряд II сход. в обл. $|z - z_0| > R_2$ абсолютно и нормально к некоторой аналит. ф-ии $f_2(z)$

① $R_1 < R_2 \Rightarrow$ Ряд Лорана (*) нигде не сходится



② $R_1 = R_2 = R$

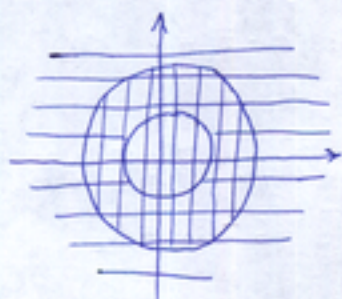
$$\gamma_R: |z - z_0| = R$$

\Rightarrow может быть сходимость на границе, но точный вывод возможен после дополнительного исследования

③ $R_1 > R_2 \Rightarrow$ Ряд Лорана (*) сходится в кольце $\mathfrak{D}: R_2 < |z - z_0| < R_1$ абсолютно и нормально к ф-ии:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

Есть типичный случай.



Есть ф-ия аналитическая в кольце. Можно ли представить ее в виде ф-ии Лорана? Да.

Замечание о единственности. Ряд Лорана с нетривиальными кольцами сходимости однозначно определяется своей суммой $f(z)$, где кольцо сходимости $\mathcal{D}: R_2 < |z - z_0| < R_1$

□ Построим окружность $\gamma_\rho: |z - z_0| = \rho, R_2 < \rho < R_1$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \Rightarrow$$

$$\varphi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}}$$

При $\forall k$ ф-ия имеет постоянный модуль на ок-сти: $|\varphi_k(z)| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho^{k+1}}, z \in \gamma_\rho$.
Важнее тот факт, что он ограничен \Rightarrow умножение не испортит сходимости:

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_n}{2\pi i} (z - z_0)^{n-k-1} \Rightarrow$$

Интегрируем поочередно по γ_ρ :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_n}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} (z - z_0)^{n-k-1} dz$$

$$\oint_{\gamma_\rho} (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 0, & m \neq -1 \\ 2\pi i, & m = -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} n-k-1 = -1 \\ n=k \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)^p}{(z - z_0)^{k+1}} dz} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \blacksquare$$

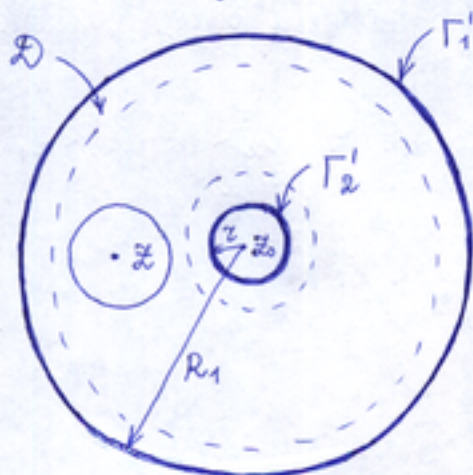
Теорема Лорана. Ф-ия $f(z)$, аналитическая в кольце

$$\mathcal{D}: R_2 < |z - z_0| < R_1,$$

представляется в \mathcal{D} как сумма ряда Лорана, причем это представление единственно.

□ Единственность представления вытекает из замечания о единственности.

Докажем возможность такого представления.



Лик. произвольную $m. z \in \mathcal{D}$. Строим вспомогательное кольцо:

$\mathcal{D}': R_2' < |z - z_0| < R_1'$, так, чтобы $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$,
 $z_0 \in \mathcal{D}'$ и окр-ть $\gamma_\rho: |z - z_0| = \rho$ так, чтобы $\gamma_\rho \subset \mathcal{D}'$.

Рассм. составной контур $\Gamma_1' \cup \Gamma_2' \cup \gamma_\rho$, где $\Gamma_1': |z - z_0| = R_1'$ и $\Gamma_2': |z - z_0| = R_2'$

Применяя к ф-ии $\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ теорему о составной контуре, имеем:

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz = \oint_{\Gamma_2'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \oint_{\Gamma_3'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_3'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$\boxed{\zeta \in \Gamma_1'}: \underbrace{\frac{|\zeta - z_0|}{|z - z_0|}}_{R_1'} = \theta < 1$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \xrightarrow{\Gamma_1'} \sum \underbrace{\frac{|z - z_0|^n}{|\zeta - z_0|^{n+1}}}_{R_1'}$$

Почленно интегрируем по Γ_1' :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\boxed{\zeta \in \Gamma_2'}: \frac{|\zeta - z_0|}{|z - z_0|} = \frac{R_2'}{|z - z_0|} = \rho < 1$$

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{(z - z_0) - (\zeta - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}$$

$$-\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=1}^{\infty} f(\zeta) (\zeta - z_0)^{n-1} \frac{1}{(z - z_0)^n} \xrightarrow{\Gamma_2'}$$

Интегрируем почленно по Γ_2' и делим на $2\pi i$:

$$-\oint_{\Gamma_2'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} (z - z_0)^{-n}, \quad C_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta, \quad n = -1, -2, \dots$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} (z - z_0)^{-n} \blacksquare$$

Замечание. Пользуясь теоремой о составной контуре, интегрирование в формулах для C_n при $n \geq 0$ и $n < 0$ можно проводить по одной и той же окружности:

$$\gamma_R: |z - z_0| = R, \quad R_2 < R < R_1$$

1. Классификация изолированных особых точек

$$f(z) \in A(D), \quad D: 0 < |z - z_0| < R$$

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n}_{\text{правильная часть}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}}_{\text{главная часть}}$$

Классификация:

- ① В ряде (*) отсутствуют члены с отрицательными степенями $z - z_0$
 $\Rightarrow z_0$ — устранимая особая точка (УОТ) ф-ии f
- ② В ряде (*) присутствует лишь конечное число членов с отриц. степенями $z - z_0$
 $\Rightarrow z_0$ — полюс ф-ии f
- ③ Ряд (*) содержит бесконечно много членов с отриц. степенями $z - z_0$
 $\Rightarrow z_0$ — существенно особая точка (СОТ) ф-ии f

Теорема 6.1. Следующие три высказывания эквивалентны:

- 1) z_0 — УОТ ф-ии $f(z)$
- 2) \exists конечный предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$
- 3) $f(z)$ ограничена в некоторой окр-ти $m. z_0$

□ 1) \rightarrow 2) z_0 — УОТ ф-ии f
 \exists конечный предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$

$$f(z) = \underbrace{C_0 + C_1(z - z_0) + \dots}_{g(z)} \quad \forall z \in D$$

$$f(z) = g(z) \quad \forall z \in D, z \neq z_0$$

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = g(z_0) = C_0 \Rightarrow \exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C_0$$

2) \rightarrow 3) \exists конечный предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \Rightarrow f(z)$ ограничена в некоторой окр. $m. z_0$

Очевидно

3) \rightarrow 1) $\exists U_\delta: 0 < |z - z_0| < \delta$ и $M > 0$ такие, что $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in U_\delta$
 Построим окружность $\gamma_\rho: |z - z_0| = \rho$ так, чтобы $\gamma_\rho \subset U_\delta$.

Во всем кольце $\mathfrak{A} \Rightarrow$ и в U_δ действует лорановское разложение самого объекта вида:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

В силу наших предположений точка устранимая \Rightarrow второе слагаемое отсутствует.

Найдем и оценим величину коэффициента C_n :

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

Достаточно грубой оценки:

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{\zeta \in \gamma_\rho} \frac{|f(\zeta)|}{\underbrace{|\zeta - z_0|^{n+1}}_{\rho^{n+1}}} \cdot 2\pi\rho \leq \frac{M}{\rho^n}$$

Справедливо как для положительных, так и для отрицательных. Используем ее для отрицательных $n = -1, -2, \dots$

$$|c_n| \leq M \cdot \rho^{-n} \rightarrow 0$$

Исследуем при $\rho \rightarrow 0$:

$$c_n = 0, \quad n = -1, -2, \dots$$

$\Rightarrow z_0$ — ЧОТ ф-ии f ■

Вывод из теоремы. Если z_0 не является ЧОТ ф-ии f , то f не ограничена в любой окрестности z_0

Переходим к исследованию точек 2-го рода — полюсов. В таком случае лорановское разложение должно выглядеть как:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m-1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots \quad (**)$$

$c_{-m} \neq 0$, причем не обязательно $c_{-m-1} \neq 0$

$\Rightarrow z_0$ — полюс порядка (кратности) m . Если $m=1$ — простой полюс, если $m > 1$ — кратный полюс

Теорема 6.2 Точка z_0 тогда и только тогда является полюсом ф-ии $f(z)$, когда $f(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow z_0$.

□ Необходимость. Перепишем разложение (**), в виде (вынесем из каждого слагаемого $(z-z_0)^m$ в знаменателе):

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \underbrace{\left[c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{m+1} + c_0(z-z_0)^m + \dots \right]}_{\varphi(z) \text{ — аналит. в } \mathcal{D}: 0 < |z-z_0| < R}$$

$$\varphi(z) \rightarrow c_{-m} \neq 0 \Rightarrow f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \infty.$$

Промежуточное замечание.

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m} \quad \forall z \in \mathcal{D}$$

$$\varphi(z_0) = c_{-m} \neq 0$$

Определим $g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \neq z_0 \text{ — имеет конечный предел и опред-на} \\ 0, & z = z_0 \text{ — доопределим по непрерывности} \end{cases}$

$g(z) \in A(\mathcal{D})$. Если $g(z)$ допускает представление $g(z) = (z-z_0)^m \psi(z)$, $\psi(z_0) \neq 0$, то z_0 — нуль порядка (кратности) m для $g(z)$, если $g(z_0) = g'(z_0) = \dots = g^{(m-1)}(z_0) = 0$, $g^{(m)}(z_0) \neq 0$

$$\Rightarrow g(z) = (z - z_0)^m \frac{1}{\varphi(z)} = (z - z_0)^m \psi(z)$$

$$\psi(z_0) = \frac{1}{c_m} \neq 0$$

Мы специально ввели ф-ию $g(z)$, чтобы док-ть достаточность.

Достаточность. $f(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow z_0$.

$$\text{Положим } g(z) = \begin{cases} 1/f(z), & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0 \end{cases} \text{ — по непрерывности}$$

Обозначим через m кратность m . z_0 как нуля ф-ии $g(z)$. Можем записать $g(z)$ через m :

$$g(z) = (z - z_0)^m \psi(z), \quad \psi(z_0) \neq 0$$

Из представления для $g(z)$ выведем представление для $f(z)$: $d_m(z - z_0)^m$

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot \frac{1}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m} = \frac{1}{(z - z_0)^m} [d_0 + d_1(z - z_0) + \dots + d_{m-1}(z - z_0)^{m-1} + \dots] \ominus$$

$$d_0 = \varphi(z_0) = \frac{1}{\psi(z_0)} \neq 0$$

$$\ominus \frac{d_0}{(z - z_0)^m} + \frac{d_1}{(z - z_0)^{m+1}} + \dots + \frac{d_{m-1}}{z - z_0} + d_m + d_{m+1}(z - z_0)$$

конечное

Лорановское разложение для полюса имеет \checkmark кол-во слагаемых, причем их кол-во равно кратности m . z_0 как нуля ф-ии $g(z)$. Это и доказывает теорему. ■

Теорема 6.3 Точка z_0 тогда и только тогда является полюсом порядка m для ф-ии $f(z)$, когда z_0 есть нуль порядка m для ф-ии

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

Исследуем существенно особые точки. Если z_0 — СОР ф-ии $f(z)$, то $\nexists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ (ни конечный, ни бесконечный)

Теорема (Соханского-Казарати-Вейерштрасса) $\exists z_0$ — СОР ф-ии $f(z)$.

Тогда для любого числа A , конечного или бесконечного,

$\exists \{z_n\}$ такая, что $z_n \rightarrow z_0, f(z_n) \rightarrow A$

(\forall число A может быть конечным или бесконечным пределом ф-ии $f(z)$ в m . z_0)

$\{z_n\}$ — A -последовательность Соханского

□ $f(z)$ — неограничена в \forall окр. m . z_0 (иначе точка была бы устранимой)

$$\Rightarrow \forall n \text{ найдется } m. z'_n \text{ такая, что } |z'_n - z_0| < 1/n$$

$$|f(z'_n)| > n$$

Пос-ть $\{z'_n\}$ — есть послед. Соханского для $A = \infty$.

Пусть A — произвольное конечное число. Докажем для такого A от противного.

□ A - конечное число. Предположим, что A - последовательности Коши не существует. Тогда найдутся:

1) окрестность $U_\delta: 0 < |z - z_0| < \delta$

2) число $\alpha > 0$

такие, что $|f(z) - A| \geq \alpha$.

В этой окрестности корректно (т.е. не обращается в нуль) определена ф-ия $\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A} \in A(U_\delta)$

$|\varphi(z)| \leq \frac{1}{\alpha} \quad \forall z \in U_\delta \Rightarrow z_0 - \text{ГОТ для } \varphi(z) \Rightarrow \exists \text{ кон. } \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z)$

Вычислим этот предел, приближаясь к т. z_0 вдоль ∞ -последовательн. Коши:

$\varphi(z'_n) = \frac{1}{f(z'_n) - A} \rightarrow 0$ (т.к. $f(z'_n) \rightarrow \infty$)

Показано, что $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z) - A} = 0$

\Rightarrow необходимо $f(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow z_0 \Rightarrow z_0$ - полюс ф-ии $f(z)$.

Получим противоречие, доказывающее A - послед. Коши, т.к. z_0 - ГОТ, а не полюс ■

Пример. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$ - особая точка

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$$R = \infty$$

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n}$$

$$\text{Если } A = \infty \quad z'_n = \frac{1}{n}, \quad f(z'_n) = e^n \rightarrow \infty$$

$$\text{Если } A = 0 \quad z''_n = -\frac{1}{n}, \quad f(z''_n) = e^{-n} \rightarrow 0$$

Рассм. произвольное $0 < |A| < \infty$.

Построим последовательность Коши так, чтобы $f(z_n) = A$

\Rightarrow нужно решить ур-ие $e^{\frac{1}{z_n}} = A$

$$\frac{1}{z_n} = \text{Ln } A$$

$$\text{Ln } A = \ln |A| + i \text{Arg } A$$

Выделим одно значение:

$$\ln A = \ln |A| + i \arg A - \text{ главное значение логарифма}$$

Тогда $\text{Ln } A = \ln A + 2\pi i$.

$$\Rightarrow z_n = \frac{1}{\ln A + 2\pi i}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Почему удалось сделать в данном примере так, чтобы $f(z_n) = A$? Это объясняет следующая теорема - (большая) теорема Ликара

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}, z_0 = 0$$

$$A = \infty, z_n' = \frac{1}{n}$$

$$A = 0, z_n' = -\frac{1}{n}$$

$$0 \neq A, |A| < \infty, e^{\frac{1}{z_n}} = A$$

Теорема Липара (большая) $\exists z_0$ - СOT. ф-ии $f(z)$. Тогда для любого конечного числа A (с единственным возможным исключением) найдется последовательность A -точек ф-ии f , сходящаяся к т. z_0

$$f(z) = \sin \frac{1}{z}, z_0 = 0$$

Иск. значений нет.

2. Особенность в бесконечно удаленной точке

(Маркушевич, гл. VII, раздел 6)

Пусть функция $f(z)$ — аналитическая в окрестности D бесконечно удаленной точки:

$$D : |z| > R.$$

Сопоставим $f(z)$ вспомогательную функцию

$$g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

*делаем замену
переменного на
окрестности z*

определенную в окрестности

$$0 < |\zeta| < \frac{1}{R}$$

точки $\zeta_0 = 0$.

Определение. Точка $z_0 = \infty$ является для $f(z)$ **устранимой особенностью, полюсом или существенно особой точкой**, если $\zeta_0 = 0$ есть соответственно **устраняемая особенность, полюс или существенно особая точка** для функции $g(\zeta)$.

лорановские
разложения

*вспомогательная
функция*

$$\left. \begin{array}{l} \text{УОТ} \quad g(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \dots + a_n\zeta^n + \dots \\ \text{Полюс} \quad a_{-m}\zeta^{-m} + \dots + a_{-1}\zeta^{-1} + a_0 + a_1\zeta + \dots, \quad a_{-m} \neq 0 \\ \text{СОТ} \quad \dots + a_{-n}\zeta^{-n} + \dots + a_{-1}\zeta^{-1} + a_0 + a_1\zeta + \dots + a_n\zeta^n + \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \text{делаем} \\ \text{обратную} \\ \text{замену} \end{array}$$
$$\left. \begin{array}{l} \text{УОТ} \quad f(z) = a_0 + a_1\frac{1}{z} + \dots + a_n\frac{1}{z^n} + \dots \\ \text{Полюс} \quad a_{-m}z^m + \dots + a_{-1}z + a_0 + a_1\frac{1}{z} + \dots, \quad a_{-m} \neq 0 \\ \text{СОТ} \quad \dots + a_{-n}z^n + \dots + a_{-1}z + a_0 + a_1\frac{1}{z} + \dots + a_n\frac{1}{z^n} + \dots \end{array} \right\}$$

Вывод: Тип особенности в бесконечно удаленной точке определяется совокупностью членов с **положительными** степенями z в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = \infty$. Эта часть ряда Лорана считается на бесконечности **главной**, тогда как члены с неположительными степенями z составляют **правильную** часть ряда Лорана.

эквивалент
теоремы 6.1.

- $z_0 = \infty$ тогда и только тогда является **устранимой особой точкой** функции $f(z)$, когда существует конечный предел $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$, или, что равносильно, когда $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки.

аналог
теоремы 6.2

- $z_0 = \infty$ тогда и только тогда является **полюсом** функции $f(z)$, когда $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$.
- $z_0 = \infty$ тогда и только тогда является **существенно особой точкой** функции $f(z)$, когда не существует ни конечного, ни бесконечного предела $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$.

Примеры

- $f(z) = \sin^2 \frac{1}{z}$

Поскольку $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, то $z_0 = \infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$.

Так как для вспомогательной функции $g(\zeta) = \sin^2 \zeta$ точка $\zeta_0 = 0$ есть нуль кратности два, то $z_0 = \infty$ можно считать двойным нулем функции $f(z)$.

- $f(z)$ есть многочлен степени n ($n \geq 1$).

Запись этого многочлена по степеням z

$$f(z) = a_0 z^n + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

есть его лорановское разложение, сходящееся во всей комплексной плоскости и, в частности, в любой окрестности нуля. Из него видно, что $z_0 = \infty$ есть полюс порядка n для $f(z)$.

иллюстрация
для 1-го типа



- $f(z) = e^z$

Всюду в \mathbb{C} сходится ряд

$$e^z = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

который можно считать лорановским разложением функции $f(z)$.

Так как все члены этого ряда содержат неотрицательные степени z , то $z_0 = \infty$ есть существенно особая точка для $f(z)$.

Глава 7. Вычеты и их приложения

□ $f(z)$ — аналит. в обл. G за исключением некот. кол-ва ИОТ. Задача — научиться эффективно вычислять инт-лы:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz, \text{ где } \Gamma \in G$$

Далее придерживаемся соглашения о контурах: все рассм. контуры не проходят через особые точки ф-ии $f(z)$.

□ z_0 — ИОТ ф-ии $f(z)$. Тогда в некот. ок-ти $\mathcal{D}: D < |z - z_0| < R$ $f(z)$ представима рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \quad (*)$$

Опр. Вычетами ф-ии $f(z)$ отн. т. z_0 наз. коэффициент C_{-1} в ряде (*):
 $\dots + C_{-1} \frac{1}{z - z_0} + \dots$

В окр-ти \mathcal{D} построим окружность $\gamma_\rho: |z - z_0| = \rho, 0 < \rho < R$. Тогда для вычета получим выражение:

$$C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho^+} f(z) dz \quad (**)$$

Обозн. $C_{-1} = \text{res}[f(z), z_0] = \underset{z=z_0}{\text{res}} f(z)$ (от франц. residue — вырост)

Теорема о вычетах. □ z_1, z_2, \dots, z_n — все особые точки ф-ии $f(z)$ внутри контура Γ . Тогда:

$$\oint_{\Gamma^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[f(z), z_k]$$

□ Почему внутри Γ конечное число ОТ? Это предположительно \exists только ИОТ (изолированные). Если допустить бесконечное число точек, то у них образуется предел — не ИОТ \Rightarrow противоречие.



Построим окружности $\gamma_i: |z - z_i| = \rho_i$; так, чтобы $\gamma_i \subset \text{int } \Gamma, i = 1, 2, \dots, n$ — лежат внутри контура Γ
 $\gamma_i \subset \text{ext } \gamma_j, i \neq j$ — не пересекаются

□ F — обл., ограниченная составными контурами $\Gamma \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$. По т. о составной контуре:

$$\oint_{\Gamma^+} f(z) dz = \oint_{\gamma_1^+} f(z) dz + \dots + \oint_{\gamma_n^+} f(z) dz = \{ \text{по ф-ле (**)} \} =$$

$$= 2\pi i [\text{res}[f(z), z_1] + \dots + \text{res}[f(z), z_n]] \blacksquare$$

Какие точки нужно учитывать, т.е. какие точки дают вклад в сумму?

$$1) \square z_0 - \text{УОТ. } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n \quad C_{-1} = 0$$

\Rightarrow УОТ не дают вклад.

Остальные виды точек вклад дают и приходится считать лорановское разложение по-честному. Но бывают отдельные хорошие варианты:

$$2) \square z_0 - \text{простой полюс ф-ии } f(z)$$

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z-z_0} + C_0 + C_1(z-z_0) + \dots$$

$$f(z)(z-z_0) = C_{-1} + C_0(z-z_0) + C_1(z-z_0)^2 + \dots$$

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z-z_0) = C_{-1} = \text{res}[f(z), z_0]$$

Выведем еще одну ф-лу для вычета простого полюса.

$$\square f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad \varphi(z), \psi(z) - \text{аналит. в ок-ти } m \cdot z_0$$

$$\varphi(z_0) \neq 0,$$

$$\psi(z_0) = 0, \quad \psi'(z_0) \neq 0 - \text{чтобы полюс был простым, а не кратным}$$

Подставим $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ в имеющуюся ф-лу для вычета:

$$C_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} (z-z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)(z-z_0)}{\psi'(z_0)(z-z_0) + \psi''(z_0)/2 (z-z_0)^2 + \dots} = \left\{ \text{сократили} \right\} =$$

\searrow подставим степенное разложение \nearrow

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi'(z_0) + \psi''(z_0)/2 (z-z_0) + \dots} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

— вторая ф-ла для вычета (если представление для $f(z)$ получено)

$$3) \square z_0 - \text{полюс кратности } m \text{ ф-ии } f(z)$$

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{C_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{C_{-1}}{z-z_0} + C_0 + C_1(z-z_0) + \dots, \quad C_m \neq 0$$

Умножим на $(z-z_0)^m$, чтобы избавиться от знаменателей:

$$f(z)(z-z_0)^m = C_{-m} + C_{-m+1}(z-z_0) + \dots + C_{-1}(z-z_0)^{m-1} + C_0(z-z_0)^m + \dots$$

Дифференцируем:

$$\frac{d^{m-1} [f(z)(z-z_0)^m]}{dz^{m-1}} = (m-1)! C_{-1} + m(m-1) \dots 2 C_0 (z-z_0) + \dots$$

Перейдем к пределу $z \rightarrow z_0$:

$$(m-1)! C_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1} [f(z)(z-z_0)^m]}{dz^{m-1}}$$

$c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1} [f(z)(z-z_0)^m]}{dz^{m-1}}; m=1$ — для простого полюса, если
счетовать слагаемыми:

$$\begin{cases} f^{(0)}(z) = f(z) \\ 0! = 1 \end{cases}$$

1. Вычет отн. бесконечно удаленной точки

Ранее рассм. вычеты только в конечных точках.

$$\mathcal{D}: |z| > R \quad f(z) \in A(\mathcal{D})$$

$$z_0 = \infty \text{ НОТ для } f(z)$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$$

Опр. Вычетом ф-ии $f(z)$ отн. т. $z_0 = \infty$ наз. число $-C_{-1}$



$$\gamma_\rho: |z| = \rho$$

$$\rho > R$$

Чтобы в обоих случаях видеть особую т. слева от себя добавляется $-$ в формуле.

$$C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho^+} f(z) dz$$

$$-C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho^-} f(z) dz \quad (*)$$

$$z_0 = \text{НОТ для } f(z) \Rightarrow C_{-1} = 0$$

$$z_0 = \infty - \text{НОТ для } f(z); C_{-1} = 0 \text{ не обязательно}$$

$$f(z) = \frac{1}{z}, z_0 = \infty, \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$$

$$C_{-1} = 1 \quad \text{res}[f(z), \infty] = -1$$

Теорема о полной сумме вычетов. \square ф-ия $f(z)$ имеет во всей \mathbb{C} только конечное число особых точек z_1, \dots, z_n . Положим $z_0 = \infty$. Тогда:

$$\sum_{k=0}^n \text{res}[f(z), z_k] = 0$$

$\square \square$ число ρ таково, что $|z_i| < \rho, i = 1, 2, \dots, n$

$$\gamma_\rho: |z| = \rho$$

$$\text{По теореме о вычетах, } \left. \begin{aligned} \oint_{\gamma_\rho^+} f(z) dz &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[f(z), z_k] \\ \oint_{\gamma_\rho^-} f(z) dz &= 2\pi i \text{res}[f(z), z_0] \end{aligned} \right\}$$

Перепишем (*):

$$\oint_{\gamma_\rho^-} f(z) dz = 2\pi i \text{res}[f(z), z_0]$$

Складывая, получим:

$$2\pi i \sum_{k=0}^n \text{res}[f(z), z_k] = 0 \quad \blacksquare$$

Замечание. Условие теоремы выполнено для \forall рау. ф-ии:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Пример. Вычислить интеграл:

$$I = \oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z^5-1)}$$

Особые точки:

z_1, z_2, \dots, z_5 — корни 5-ой степени из 1

$$z_6 = 3$$

$$z_0 = \infty$$

По т. о вычетах, $I = 2\pi i \sum_{k=1}^5 \text{res}[f(z), z_k] \ominus$

$$5z^4 = (z^5-1)' \neq 0, z = z_k$$

возле т. z_k $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z_k) \neq 0$, $\psi(z_k)$, $\psi'(z_k) \neq 0$,

$$\text{где } \varphi(z) = \frac{1}{z-3}, \psi(z) = z^5-1, \psi'(z) = 5z^4$$

$$\text{res}[f(z), z_k] = \frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)} = \frac{1}{z_k-3} \cdot \frac{1}{5z_k^4} = \frac{z_k}{(z_k-3)5z_k^5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{z_k}{z_k-3}$$

$$\ominus 2\pi i \sum_{k=1}^5 \frac{z_k}{z_k-3} \cdot \frac{1}{5} = \boxed{-\frac{\pi i}{121}}$$

По т. о наим. сумме вычетов,

$$\sum_{k=1}^5 \text{res}[f(z), z_k] = -\frac{\text{res}[f(z), 3]}{\frac{1}{242}} - \frac{\text{res}[f(z), \infty]}{0} = -\frac{1}{242}$$

$$\text{res}[f(z), 3] = \frac{\varphi(3)}{\psi'(3)} = \frac{1}{3^5-1} = \frac{1}{242}$$

$$f(z) \varphi(z) = \frac{1}{z^5-1}; \psi(z) = z-3$$

$$\varphi(3) \neq 0, \psi(3) = 0, \psi' = 1 \neq 0$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} = \frac{1}{z^6} \cdot \frac{1}{1-3/z} \cdot \frac{1}{1-1/z^5} = \frac{1}{z^6} \left(1 + \frac{3}{z} + \frac{9}{z^2} + \frac{27}{z^3} + \dots\right)$$

$$\cdot \left(1 + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^{10}} + \dots\right) = \frac{1}{z^6} + \frac{3}{z^7} + \frac{9}{z^8} + \dots$$

$$\Rightarrow \text{отсутствует член с } \frac{1}{z} \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow \text{res}[f(z), z_0] = 0$$

2. Применение вычетов к вычислению интегралов от вещественной переменной

① Интегралы вида $I = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi \ominus$

$$\text{где } R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

Перейдем от вещ. инт-ла по пер. φ к комплексному интегралу замкнутой:

$$z = e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Подготовимся к замене:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

$$dz = e^{iz} i d\varphi \Rightarrow d\varphi = \frac{dz}{ie^{i\varphi}} = \frac{dz}{iz}$$

Перепишем исходный интеграл:

$$\ominus \oint_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{z} = \oint_{|z|=1} \tilde{R}(z) dz$$

Пример. Вычислить $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 + 3\cos \varphi}$

Перепишем в комплексный интеграл:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z \left(5 + \frac{3}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right)} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{3z^2 + 10z + 3}$$

Имеем функцию $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{3z^2 + 10z + 3}$$

$f(z)$ имеет 2 конечные особые точки: $z_1 = -\frac{1}{3}$, $z_2 = -3$

По т. о вычетах учитываем только те точки, что в контуре, т.е. z_1

$$\Rightarrow I = \frac{2}{i} 2\pi i \cdot \text{res}[f(z), z_1] = 4\pi \cdot \frac{\varphi(z_1)}{\psi'(z_1)} =$$

$$= 4\pi \frac{1}{6z + 10} \Big|_{z = -\frac{1}{3}} = 4\pi \frac{1}{8} = \frac{\pi}{2}$$

Важно, что получили вещественный ответ, т.к. изначально вычисляли вещественный интеграл. В противном случае — ошибка в вычислениях.

② Интегралы вида $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

Обозн. P_+ : $\text{Im } z > 0$; \bar{P}_+ : $\text{Im } z \geq 0$

Сформулируем требования к ф-ии $f(z)$.

Теорема 7.1 \square $f(z)$ удовл. условиям:

1) $f(z)$ - аналит. в P_+ за исключением ИОТ z_1, \dots, z_n и непрерывная в т. вещественной оси

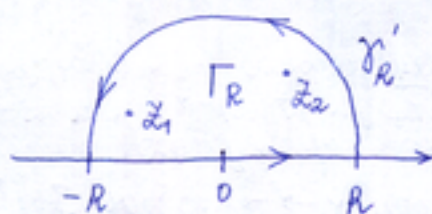
2) для всех достаточно больших z из \bar{P}_+ выполняется неравенство ($M(z)$ - вещ. ф-ия):
 $|f(z)| \leq \frac{M(z)}{|z|}$, где $M(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty, z \in \bar{P}_+$

(т.е. $f(z)$ убывает с хоть немого большей скоростью, чем $1/z$)

Тогда интеграл $I \exists$ хотя бы в смысле главного значения и:

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[f(z), z_k]$$

\square Построим вспомогательный контур:



Выберем R настолько большим, чтобы все точки особые попали в контур Γ_R' :
 $|z_i| < R, i = 1, \dots, n$

По т. о вычетах:

$$\underbrace{\int_{-R}^R f(x) dx}_{\text{вещественный интеграл по оси}} + \int_{\Gamma_R'} f(z) dz = \oint_{\Gamma_R'} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[f(z), z_k]$$

не зависит от R

Перейдем к пределу при $R \rightarrow \infty$. Достаточно грубой оценки:

$$\left| \int_{\Gamma_R'} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \Gamma_R'} |f(z)| \pi R \leq \frac{\max_{z \in \bar{P}_+} M(z)}{R} \pi R = \pi \max_{z \in \bar{P}_+} M(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$$

$$\exists \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = (v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[f(z), z_k] \blacksquare$$

Замечание. Можно вместо положительной полуоси рассмотреть отрицательную полуоси — она была выбрана для определенности.

Пример. Вычислить $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

Имеем дело с ф-цией $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$, у нее 2 особые точки $z_1 = -i$, $z_2 = i$. нас интересует только z_2 , т.к. она находится в верхней полуплоскости:

$$I = 2\pi i \cdot \text{res}[f(z), i] \ominus$$

z_2 — полюс кратности 3.

Ф-ла для вычета полюса кратности m :

$$\frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1} [f(z)(z-z_0)^m]}{dz^{m-1}}$$

Применим формулу: $\frac{g(z)}{(z-i)^3}$

$$\ominus 2\pi i \cdot \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2 [f(z)(z-i)^3]}{dz^2} \ominus$$

$$g(z) = \frac{1}{(z+1)^3}; \quad g''(z) = \frac{12}{(z+1)^5}$$

$$\ominus \pi i \frac{12}{(2i)^5} = \pi \frac{12}{32} = \frac{3}{8} \pi \text{ — вещественный!}$$

③ Интегралы вида $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx$

Лемма Моргана] $f(z)$ определена и непрерывна для всех достаточно больших $z \in \overline{\mathbb{P}}_+$ и $f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty, z \in \overline{\mathbb{P}}_+$. Тогда для всех $a > 0$ справедливо

$$\int_{\gamma'_R} e^{iaz} f(z) dz \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty, \text{ обзвн. } J$$

$$\square |J| \leq \int_{\gamma'_R} |e^{iaz}| |f(z)| \frac{d\sigma}{dl} \text{ (по св-ву 4 из первоначального списка)} \ominus$$

$$M_R = \max_{z \in \gamma'_R} |f(z)|, \quad M_R \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty$$

$$\gamma'_R: z = R(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

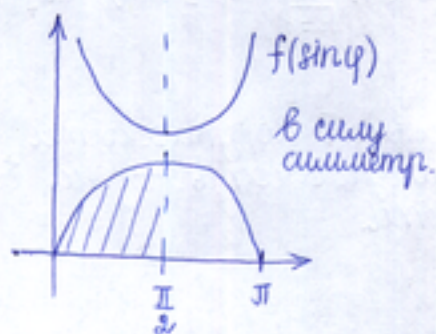
$$iaz = -aR \sin \varphi + iaR \cos \varphi$$

$$\ominus \{d\sigma = R d\varphi\} = M_R R \int_0^\pi |e^{iaz}| d\varphi = M_R R \int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} d\varphi =$$

$$= 2 M_R R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi \ominus$$

На отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$ действует оценка:

$$\frac{2}{\pi} \varphi \leq \sin \varphi \leq \varphi \text{ (в концевых точках превращается в равенство)}$$



Преобразуем нер-во: $-\frac{2}{\pi} aR\varphi \geq -aR \sin \varphi$

$$\ominus 2M_R R \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{\pi}{2} aR\varphi} d\varphi = 2M_R R \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{aR} e^{-\frac{\pi}{2} aR\varphi} \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} M_R (1 - e^{-aR}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad \blacksquare$$

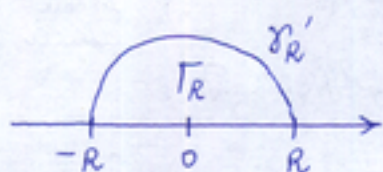
Теорема 7.2 \square $f(z)$ удовн. условию 1 м. 7.1 и

$f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty, z \in \bar{P}_+$.

Тогда \forall интеграл $I \exists$ (хотя бы в смысле главного значения) и

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}[e^{iaz} f(z), z_k] \quad (*)$$

\square Построим такой же контур Γ_R , что и в м. 7.1.



Тогда по м. 0 вычета: $\rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$ по лемме Морганна

$$\int_{-R}^R e^{iax} f(x) dx + \int_{\Gamma'_R} e^{iaz} f(z) dz =$$

$$= \oint_{\Gamma_R} e^{iaz} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}[e^{iaz} f(z), z_k]$$

не зависит от R

Переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ получим р-во (*). \blacksquare

Пример. Вычислить $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + a^2} dx$ - интеграл Лапласа

Сведем к интегралу третьего типа:

$$\cos ax = \operatorname{Re}(e^{iax})$$

$$I = \operatorname{Re} J, \quad J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + a^2} dx \quad \ominus$$

Считаем $a > 0, \alpha > 0$.

$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$, $z_0 = ia$ - единственная т. в контуре

$$\ominus 2\pi i \cdot \operatorname{res}[e^{iaz} f(z), ia] = \left\{ \begin{array}{l} \text{по ф-ле вычета} \\ \text{отв. простого полюса} \end{array} \right\} =$$

$$= 2\pi i \frac{e^{ia \cdot ia}}{2z} \Big|_{z=ia} = 2\pi i \frac{e^{-\alpha a}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-\alpha a} - \text{вещественный}$$

$$\Rightarrow I = J = \frac{\pi}{a} e^{-\alpha a}$$

3. Логарифмический вычет и принцип аргумента

Уточнение соглашения о контурах:

- 1) Все ИОТ φ -ии $f(z)$ являются полюсами
- 2) Все раскл. контуры не проходят через полюсы и через нули φ -ии $f(z)$

Пусть контур $\Gamma \subset G$: на самом контуре полюсов и нулей нет, а внутри конечное число нулей — иначе φ -ия топологически навь по m . о единственности, а также полюсов. Перенумеруем их:

z_1, \dots, z_p — все полюсы $f(z)$ внутри Γ
 $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ — их кратности
 ζ_1, \dots, ζ_n — все нули $f(z)$ внутри Γ
 β_1, \dots, β_n — их кратности

$$\left. \begin{aligned} N_f(\Gamma) &= \sum_{k=1}^n \beta_k - \text{полное число нулей } \varphi\text{-ии } f \text{ внутри } \Gamma \\ P_f(\Gamma) &= \sum_{l=1}^p \alpha_l - \text{полное число полюсов } \varphi\text{-ии } f \text{ внутри } \Gamma \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{целые} \\ \text{числа} \end{array}$$

Теорема (о логарифмическом вычете)

$$N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz}_{\text{логарифмический вычет}}$$

[Назван вычетом за внешнее сходство с $C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz$]

□ Положим $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$.

Особые точки φ -ии $\varphi(z)$ — это нули и полюсы φ -ии $f(z)$.

Вокруг m . ζ_k φ -ии $f(z)$ можно записать в виде:

$$f(z) = \underbrace{(z - \zeta_k)^{\beta_k}}_{(1)} g(z), \quad g(z) - \text{аналит. в окр-ти } m. \zeta_k, \quad g(\zeta_k) \neq 0$$

Продифференцируем (1):

$$f'(z) = \beta_k (z - \zeta_k)^{\beta_k - 1} g(z) + (z - \zeta_k)^{\beta_k} g'(z) = \beta_k (z - \zeta_k)^{\beta_k - 1} h(z), \quad (2)$$

где $h(z) = g(z) + \frac{1}{\beta_k} (z - \zeta_k) g'(z)$. Заметим, что:

$$h(\zeta_k) = g(\zeta_k)$$

Разделим (2) на (1):

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\beta_k}{z - \zeta_k} + \psi(z), \quad \text{где } \psi(z) - \text{аналит. в окр-ти } m. \zeta_k$$

||
 $\varphi(z)$ по обозн.

Покажем справедливость представления:

$$\varphi(z) = \frac{\beta_k h(z)}{(z - \zeta_k) g(z)} = \frac{\beta_k}{z - \zeta_k} \cdot \frac{h(z)}{g(z)} \quad \ominus$$

Представим $\frac{h(z)}{g(z)}$ в виде степенного ряда:

$$\frac{h(z)}{g(z)} = a_0 + a_1(z - \zeta_k) + \dots = 1 + a_1(z - \zeta_k) + \dots$$

$$a_0 = \frac{h(\zeta_k)}{g(\zeta_k)} = 1$$

Подставим обратно:

$$\ominus \frac{\beta_k}{z - \zeta_k} [1 + a_1(z - \zeta_k) + a_2(z - \zeta_k)^2 + \dots] = \frac{\beta_k}{z - \zeta_k} + \underbrace{\beta_k(a_1 + a_2(z - \zeta_k) + \dots)}_{\psi(z)}$$

Вывод: m . ζ_k является полюсом, причем простым, φ -ии $\varphi(z)$;
новая интерпретация — $\beta_k = \text{res}[\varphi(z), \zeta_k]$

Проведем аналогичный анализ: в окр-ти m . z_m справедливо представление:

$$f(z) = \frac{\gamma(z)}{(z - z_m)^{\alpha_m}}, \quad \text{где } \gamma(z) \text{ — аналит. в окр-ти } m. z_m \text{ и } \gamma(z_m) \neq 0 \quad (3)$$

кратность полюса z_m

Продифференцируем (3):

$$f'(z) = -\frac{\alpha_m}{(z - z_m)^{\alpha_m + 1}} \gamma(z) + \frac{\gamma'(z)}{(z - z_m)^{\alpha_m}} = -\frac{\alpha_m}{(z - z_m)^{\alpha_m + 1}} \cdot s(z), \quad (4)$$

$$\text{где } s(z) = \gamma(z) - \frac{\gamma'(z)}{\alpha_m} (z - z_m)$$

$s(z)$ — аналит. в окр-ти m . z_m и $s(z_m) = \gamma(z_m)$.

Велим (4) на (3):

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-\alpha_m}{z - z_m} + \xi(z), \quad \xi(z) \text{ — аналит. в окр-ти } z_m$$

\Rightarrow аналогичные выводы: z_m — простой полюс φ -ии $\varphi(z)$
— $\alpha_m = \text{res}[\varphi(z), z_m]$

То m . 0 вытекает:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \varphi(z) dz &= \underbrace{\sum_{k=1}^n \text{res}[\varphi(z), \zeta_k]}_{\text{нули}} + \underbrace{\sum_{\ell=1}^p \text{res}[\varphi(z), z_\ell]}_{\text{полюсы}} = \\ &= \sum_{k=1}^n \beta_k - \sum_{\ell=1}^p \alpha_\ell = N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Почему логарифмический?

П.к. $\frac{f'(z)}{f(z)}$ наз. логарифмической производной

Рассм. логарифм как ф-ю обратной экспоненте. Формально продифференцируем:

$$(\ln f(z))' = \frac{1}{f(z)} f'(z) = \varphi(z)$$

Принцип аргумента? Такая формулировка т.о логарифмической вычета за счет значения 0 первообразных. Рассуждения будут сложны, но мы сможем упростить формулу вычисления лог. вычета.

Применить формулу Ньютона - Лейбница нельзя из-за отсутствия С-свойства. Также непрерывность видна на примере:



$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = F(z_0) - F(z_0) = 0$$

А интегралы по замкнутому контуру могут быть не равны нулю! Как-то влияет многозначность ф-ии на это.

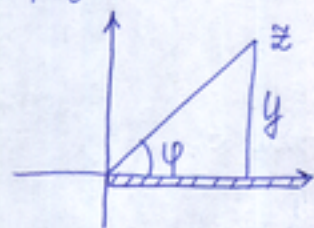
Что есть производная многозначной ф-ии? Рассм. $\ln z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$, определена всюду, кроме нуля, и принимает счетное число значений. Также введем:

$$\ln z = \ln|z| + i \operatorname{arg} z, \quad z \neq 0$$

Малый логарифм аналитичен в $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$, причем там $(\ln z)' = \frac{1}{z}$. Можно это проверить через $\ln z = u(x, y) + i v(x, y)$:

$$u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

Представим $v(x, y)$ иначе:



В правой полуплоскости можно как:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

(В левой нужно действовать по другому)

Если все подставим: $(\ln z)'_z = u'_x + i v'_x$

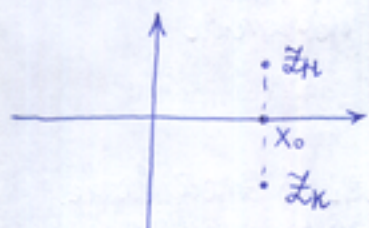
$\ln z$ не единственная однозначная ф-ия, выводимая из $\ln z$. Определим семейство однозначных ф-ий:

$$\ln_k z = \ln|z| + i[\operatorname{arg} z + 2\pi k], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ и определена на } z \neq 0$$

$$\text{Примем при } k=0 \quad \ln z = \ln_0 z; \quad (\ln_k z)' = (\ln z)' = \frac{1}{z}$$

Те ф-ии, которые выделяются из многозначной, наз. однозначными ветвями многозначной ф-ии $\ln z$

Они обладают тем недостатком, что теряют однозначность на своей области определения. Например:



$$\ln z_n = \ln |z_n| + i\varphi_n$$

$$\ln z_k = \ln |z_k| + i\varphi_k$$

С вещ. частями будет все хорошо.
Устроим $z_n, z_k \rightarrow z_0$

$$\Rightarrow \ln z_n \rightarrow \ln x_0 + 0$$

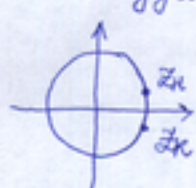
$$\ln z_k \rightarrow \ln x_0 + \underbrace{i2\pi}$$

при стремлении в $[0, 2\pi)$

$\Rightarrow \forall m. x_0$ является т. разрыва \Rightarrow есть негуманности

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

Если будем интегрировать не по всей окружности, а чуть отступим:



$$\int_{z_n}^{z_k} \frac{dz}{z} = \ln z \Big|_{z_n}^{z_k} \ominus$$

$$\parallel$$

$$i(\varphi_k - \varphi_n)$$

\Rightarrow ф-ла Ньютона Лейбница работает, пока мы не замкнем окружность. Это нужно поправить?

$$\ominus \ln z_k - \ln z_n$$

$$\downarrow \quad \quad \downarrow$$

$$2\pi i \quad \quad \ln 1 = 0$$

$\Rightarrow z_k$ стремится принять не то значение, которое приписано ей, а то, которое приписано:

$$\ln_1 z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi), \quad \ln_1 1 = 2\pi i$$

то есть та ветвь, которая принадлежит 1, а не 0

Свойство: одна ветвь старается непрерывно перейти в ветвь с следующим индексом при обходе по контуру. Действует при повторных обходах и при обходах в другом направлении

\Rightarrow чтобы восстановить правильность ф-лы Ньютона-Лейбница необходимо приписать т. не то значение, которое ей приписано, а то, которое она стремится принять

4. Обобщение формулы Ньютона-Лейбница

Пусть нужно вычислить интеграл $\oint_L f(z) dz$, если известна однозначная первообразная ф-ия $F(z)$.

Фикс. т. $z_n \in L$ и выберем какое-либо значение $F(z_n)$ в этой точке. Совершаем обход L , выбирая в каждой точке единственное значение первообразной исходя из требования ее (т.е. первообразной) непрерывности вдоль контура. Пусть $F(z_k)$ — значение F , с которым мы вернемся в начальную точку z_n по завершении обхода.

Тогда $\boxed{\oint_L f(z) dz = F(z_k) - F(z_n)}$ — обобщения правила Ньютона-Лейбница для многозн. первообр.

Применим к нашей ситуации с вычитанием:

$$F(z) = \operatorname{Ln} f(z)$$

$$F(z_k) = \operatorname{Ln} f(z_k) = |\ln f(z_k)| + i\varphi_k$$

φ_k — значение, приписываемое аргументу $f(z)$ в начале обхода

$$F(z_k) = \ln |f(z_k)| + i\varphi_k$$

⇒ Применим формулу:

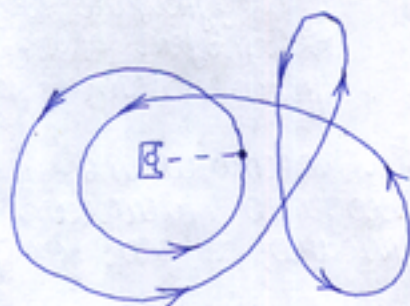
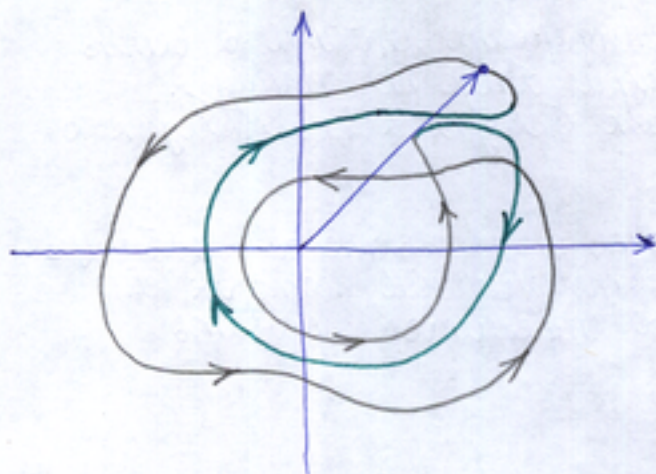
$$\oint_L \varphi(z) dz = i(\varphi_k - \varphi_n)$$

⇒ сама формула из т. о лог. вычете приобретает вид:

$$N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \underbrace{(\varphi_k - \varphi_n)}_{\text{обозн. } \operatorname{Var}_{\Gamma} \operatorname{Arg} f(z)} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}_{\Gamma} \operatorname{Arg} f(z) \text{ — принцип аргумента}$$

Можно дать теореме еще одну формулировку:

Порядок точки отн. кривой



То, что назвали приращением аргумента, через индекс точки:

$$2\pi \operatorname{ind}_0 L = \operatorname{Var}_{\Gamma} \operatorname{Arg} f(z) \quad \text{где } L = f(\Gamma)$$

Тогда третья формулировка:

$$N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) = \operatorname{ind}_{w=0} L, \quad \text{где } L = f(\Gamma)$$

Следствие: $\exists f(z) \in A(G)$, контур $\Gamma \subset G$, $\operatorname{Int} \Gamma \subset G$. Тогда $N_f(\Gamma) = \operatorname{ind}_0 L$, $L = f(\Gamma)$

Сорформулируем следствие из трех формулировок.

Теорема Руше. $\exists f(z), \varphi(z) \in A(G)$, контур $\Gamma \subset G$, $\operatorname{Int} \Gamma \subset G$. Пусть $|f(z)| > |\varphi(z)|, \forall z \in \Gamma$ (*)

$$\text{Положим } F(z) = f(z) + \varphi(z).$$

$$\text{Тогда } N_F(\Gamma) = N_f(\Gamma).$$

(Хорошо работает для простых F и простых f)

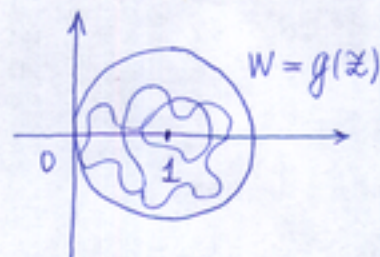
$$\square \text{ Из } (*) \Rightarrow f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Gamma$$

$$F(z) = f(z) \left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right] = f(z) g(z)$$

$$\operatorname{Arg} F(z) = \operatorname{Arg} f(z) + \operatorname{Arg} g(z)$$

$$\operatorname{Var}_{\Gamma} \operatorname{Arg} F(z) = \operatorname{Var}_{\Gamma} \operatorname{Arg} f(z) + \operatorname{Var}_{\Gamma} \operatorname{Arg} g(z)$$

$$|g(z) - 1| = \frac{|\varphi(z)|}{|f(z)|} < 1, \quad \forall z \in \Gamma$$



Содержится в круге и не выходит за него \Rightarrow не может сделать полный оборот вокруг 0

Пример. Найти число корней уравнения $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ внутри единичного круга $\Gamma: |z| = 1$

$$f(z) = -4z^5 \quad \varphi(z) = z^8 + z^2 - 1$$

$$z \in \Gamma \sim |z| = 1$$

$$|f(z)| = 4$$

$$|\varphi(z)| \leq |z|^8 + |z|^2 + 1 \leq 3$$

$$N_F(\Gamma) = N_f(\Gamma) = 5$$

$-4z^5$ имеет 5 корней

Лемма (Пуанкаре)

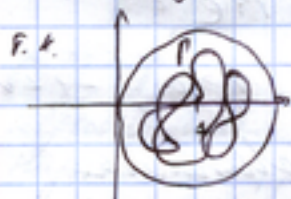
Пусть $f(z), \varphi(z) \in A(G)$, $\Gamma \subset G$, $\text{int } \Gamma \subset G$
Пусть $|f(z)| > |\varphi(z)| \quad \forall z \in \Gamma$ (*)
Тогда две функции $F(z) = f(z) + \varphi(z)$
 $N_F(\Gamma) = N_f(\Gamma)$

Д-во: (*) $\Rightarrow f(z) \neq 0, \forall z \in \Gamma \Rightarrow$

$$\Rightarrow F(z) = f(z) \left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right] = f(z)g(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Arg } F(z) = \text{Arg } f(z) + \text{Arg } g(z)$$

$$\text{Var Arg } F(z) = \text{Var Arg } f(z) + \text{Var Arg } g(z) \stackrel{(*)}{=} 0$$



$$|g(z) - 1| < 1$$

$$|g(z) - 1| < 1$$

Теорема (Основная в алгебре)

Многочлен $P(z)$ степени $n \geq 1$ имеет в \mathbb{C} ровно n корней с учетом кратности

Д-во: $P(z) = \underbrace{a_0 z^n}_{f(z)} + \underbrace{a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}_{\varphi(z)}$

(4)

$\frac{\varphi(z)}{f(z)} \rightarrow 0$ Рассмотрим контур $\Gamma: |z|=R$, где $R: |f(z)|/|\varphi(z)| < 1, \forall z$.

по φ Риме $N_p(\Gamma) = N_f(\Gamma) = n$

Теорема (об образе области)

$\exists f(z) \in A(G), f(z) \neq const$. Тогда $D = f(G)$ - сама есть область.

D-во: ① связность

Пусть w_1, w_2 - \forall точки из D , а z_1, z_2 - произвольные (какие-то из G , и.б., нескольких) их прообразы: $w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2)$. соединим z_1 и z_2 непр. кривой $L: z = \varphi(t), t \in [a, b], L \subset G$. Тогда кривая $\Delta: w = f[\varphi(t)] = \mu(t), t \in [a, b]$ является непрерывной, $\in D$, соедин $w_1, w_2 \Rightarrow \Rightarrow$ в силу произвольности w_1, w_2 D - связно

② открытость

Пусть w_0 - \forall т. из D, z_0 - \forall ее прообраз в G , т.е. $w_0 = f(z_0)$. Положим, что $\exists K_\mu: |w - w_0| < \mu: K_\mu \in D$ (т.е. \forall точка вблизи w_0 в некоторой окрестности) построим замкн. круг $C_\rho: |z - z_0| \leq \rho$ так, чтобы $C_\rho \subset G, z_0$ - единств. w_0 -точка в круге C_ρ ($w_0 = f(z_0)$) построим \forall круг и дуги во внутренности, пока условие не будет выполнено. процесс остановится, т.к. его пер. единственность, а $f(z) \neq const$. Обозн. $d_\rho: |z - z_0| = \rho; \mu = \inf_{d_\rho} |f(z) - w_0| = \min_{d_\rho} |f(z) - w_0| > 0$ (непр. \Rightarrow достигается \inf, z_0 - единств. прообраз $w_0 \Rightarrow f(z) \neq w_0, z \in d_\rho$) Покажем, что $K_\mu \subset D$. Пусть w' - \forall т. из K_μ , т.е. $|w - w_0| < \mu$ Обозн. $g(z) = f(z) - w_0, h(z) = f(z) - w'$ Сколько нулей имеет g и h внутри d_ρ ? $N_g(d_\rho) > 0$, т.к. $g(z_0) = 0, z_0 \in \text{int } d_\rho$. $h(z) = f(z) - w_0 - (w' - w_0), |h(z) - w_0| \geq \mu, \forall z \in d_\rho; |w' - w_0| < \mu$ Тогда по φ Риме $N_h(d_\rho) = N_g(d_\rho) > 0 \Rightarrow \exists$ $z' \in \text{int } d_\rho: f(z') = w'$ Получим, что \forall т. w' из $K_\mu \exists$ прообраз $z' \in G \Rightarrow \Rightarrow K_\mu \subset D$, т.е. D .

имеет кратостей

⑤

Принцип максимума модуля аналитической функции.

$\exists f(z) \in A(G)$, $f(z) \neq \text{const}$. Тогда ни в одной точке $z \in G$ $|f(z)|$ не может достигать максимума. Если G - огранич. область и $f(z) \in C(\bar{G})$, то $|f(z)|$ достигает своего максимума на ∂G (на границе).

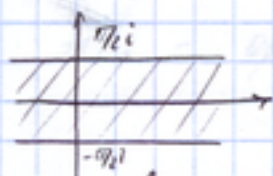
D-во: Предположим противное: пусть $|f(z)|$ достигает свой \max в $z_0 \in G$, т.е. $|f(z_0)| > |f(z)| \forall z \in G$. По δ окр. z_0 область $D = f(G) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z - f(z_0)| < \delta\}$ имеет ∞ точек.



Тогда найдётся z' : $|f(z')| = |w_1| > |w_0| \Rightarrow \Rightarrow$ противоречие.

Второе η в следуют из первого и второй δ . Вейерштрасса η не на компакте функции.

Пример: $f(z) = e^{e^z}$



$$z = x \pm \frac{\pi}{2}i \Rightarrow e^z = e^{x \pm \frac{\pi}{2}i} = e^x (\cos \frac{\pi}{2} \pm i \sin \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow |e^{e^z}| = |e^{\pm i e^x}| = 1, \quad e^{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

Принцип минимума модуля

$\exists f(z) \in A(G)$, $f(z) \neq \text{const}$, $f(z) \neq 0 \forall z \in G$. Тогда ни в одной точке $z \in G$ $|f(z)|$ не может достигать минимума. Если G - ограниченная область и $f(z) \in C(\bar{G})$, то $|f(z)|$ достигает своего минимума на ∂G .

D-во: $g(z) = \frac{1}{f(z)} \in A(G)$, $\min |f(z)| = \max |g(z)| \Rightarrow \Rightarrow$ очевидно.

Теорема (2-ая г. Вейерштрасса
о рядах аналит. функций)

Пусть G - оран. область, $u_n(z) \in A(G) \cap C(\bar{G})$
Если $\sum u_n(z) \xrightarrow{\bar{G}}$, то $\sum u_n \xrightarrow{\bar{G}}$.

Д-во: критерий Коши: $\forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n \geq N, \forall z \in \bar{G}$
 $|\varphi_{n,p}(z)| = |u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon, \forall z \in \bar{G}$
 $\varphi_{n,p}(z) \in A(G) \cap C(\bar{G})$. По принципу макс
 \Rightarrow по кр. Коши $\sum u_n \xrightarrow{\bar{G}}$

VIII

Основные понятия
операционного исчисления

Опр. Пусть $f(t)$ - функции действительной
переменной. Ее преобразование Лапласа
называется функцией:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad p \in \mathbb{C} \quad (8.1)$$

Класс L функций $f(t)$:

1. $f(t) \equiv 0, t < 0$
2. На \forall оран. промежутке неотриц. полуоси
 $f(t)$ может иметь лишь конечное число
точек разрыва, причем только 1-ого рода.
3. Для $t \rightarrow \infty$ $f(t)$ имеет оран. рост, т.е.
 $\exists M, a > 0: |f(t)| < Me^{at}, \forall t > 0 \quad (8.2)$

Опр. Показателем роста функции $f(t)$ -
такая наименьшая грань a , для которой
суперлимитно (8.2)

Опр: $f(t) \in L(a)$

Опр: $f(t) \doteq F(p)$

(7)

Теорема 8.1 $\int f(t) \in L(a)$. Тогда $F(p)$ с.с. в открытой полуплоскости $\Pi_a = \{p \mid \operatorname{Re} p > a\}$.
 Во всякой замкнутой полуплоскости $\Pi_b = \{p \mid \operatorname{Re} p \geq b\}$,
 где $b > a$, $F(p) \rightarrow 0$ (с.с. равномерно).

До-во: $p = x + iy \in \Pi_a$. Найдем $a_1, M > 0$:

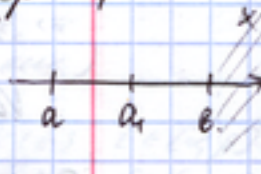
$a < a_1 < x$, $|f(t)| \leq M e^{at}$
 $g(t) = e^{-x_1 t} M e^{at} = M e^{(a-x_1)t}$

$|e^{-pt} f(t)| \leq e^{-x_1 t} M e^{at} = g(t)$

$\int_0^\infty g(t) dt = \int_0^\infty M e^{(a-x_1)t} dt = \frac{M}{a-x_1} (0-1) = \frac{M}{\operatorname{Re} p - a_1}$

$\exists b > a: a_1 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a_1 - x \leq a - b = \frac{a-b}{2}$

$|e^{-pt} f(t)| = e^{-x_1 t} |f(t)| \leq \{x > b\} \leq M e^{\frac{a-b}{2} t}$



Пример: $\int_0^\infty e^{-pt} t^v dt = F(p)$, $v \geq 0, -1 < v < 0$

$F(p)$ - изображение (образ) функции $f(t)$

$f(t)$ - оригинал функции $F(p)$

Теорема 8.2
 Пусть дана ф-ция $f(t)$ интегрируемая $F(p_0)$ с.с. в
 ф.с. нек-рой точки $p_0 \in \mathbb{C}$. Тогда $F(p)$ с.с. в
 во всей полуплоскости Π_{p_0} .

Теорема 8.3 $\int f(t) \in L(a)$. Тогда $F(p) \in A(\Pi_a)$

Доказательство: Построим разбиение $0 = t_0 < \dots < t_n < \dots$ так, что $t_n \rightarrow \infty$ и в нем выстроены все точки разрыва функции $f(t)$ (если такие имеются).

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-pt} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(p)$$

По теореме об интегрировании по частям в параллельном все функции $U_n(p)$ - целые.

По 1-ой лемме Вейерштрасса о пределе целых функций $F(p) \in A(\Pi_a)$

Из того, что $F(p) \in A(\Pi_a)$ следует, что $\sum U_n(p)$ есть в Π_a нормальное

$$F'(p) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n'(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-pt} (-t) f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} (-t) f(t) dt$$

Примеры: ① $G_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$

$G_0(t)$ - единичная функция Хевисайда
 $G_0(t) \in L(0)$, $F(p) \in A(\Pi_0)$

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = 1/p \Rightarrow G_0(t) \equiv \frac{1}{p}$$

② $f(t) = \begin{cases} e^{\alpha t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \Rightarrow F(p) = \int_0^{\infty} e^{(\alpha-p)t} dt = \frac{1}{p-\alpha}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$.

③ $f_n(t) = \begin{cases} t^n, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad f_n(t) \equiv F_n(p)$

④ $F_0(p) = 1/p$; $F_n(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^n dt = \frac{1}{p} e^{-pt} t^n \Big|_0^{\infty} + \frac{n}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{n-1} dt = \frac{n}{p} F_{n-1}(p) \Rightarrow F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$

$\in A(\Pi_a)$

Свойства преобразования Лапласа

... так,
все
этим

① Линейность

$$] f_i \equiv F_i(p), \operatorname{Re} p > a_i, \quad i = \overline{1, n}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(p)$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t) \equiv F(p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(p), \operatorname{Re} p > a = \max_i a_i$$

ром

② $f(t) \equiv F(p), \operatorname{Re} p > a$

$$f(\alpha t) \equiv \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \operatorname{Re} p > \alpha a$$

мисл

③ Теорема запаздывания

$$f(t) \equiv F(p), \operatorname{Re} p > a$$

ува,
чно

Пусть $\tau > 0$ и определим функцию:

$$f_{\tau}(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ f(t-\tau), & t \geq \tau \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = e^{-p\tau} \int_{\tau}^{\infty} e^{-p(u-\tau)} f(u) du$$

?

④ Теорема сдвига

$$f(t) \equiv F(p), \operatorname{Re} p > a \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

$$F(p+\lambda) \equiv e^{-\lambda t} f(t), \operatorname{Re} p > a - \operatorname{Re} \lambda$$

$\frac{1}{p-\alpha}$,

Пример: $\operatorname{Re} p > 0 \quad t^n \equiv \frac{n!}{p^{n+1}}; \sin wt \equiv \frac{w}{p^2 + w^2}$

$$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha \quad t^n e^{\alpha t} \equiv \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$$

$$\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} w| - \operatorname{Re} \alpha \quad e^{-\alpha t} \sin wt \equiv \frac{w}{(p+\alpha)^2 + w^2}$$

$\frac{n!}{p^{n+1}}$

⑤ Удобратение производной

Стыма $f(t)$ - кусочно-лажная функция
 и класса $L(a)$

$$f(t) \equiv F(p), \quad \text{Re } p > a$$

Тогда $f'(t) \equiv pF(p) - f(+0)$, $\text{Re } p > a$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

Следствие: Стыма $f(t)$ и ее производные до
 порядка n и класса $L(a)$. Тогда

$$f^{(n)}(t) \equiv p^n \left\{ F(p) - \frac{f(+0)}{p} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(+0)}{p^n} \right\}, \text{Re } p > a$$

⑥ Дифференцирование удобратение

$$F(p) \equiv f(t), \quad \text{Re } p > a. \quad \text{Тогда}$$

$$F'(p) \equiv -t f(t), \quad \text{Re } p > a.$$

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad F'(p) = \int_0^{\infty} (-t) e^{-pt} f(t) dt$$

⑦ Удобратение интегрирования

Стыма $f(t) \equiv F(p)$, $\text{Re } p > a$, $f(t) \in L(a)$

Тогда $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \equiv \frac{1}{p} F(p)$, $\text{Re } p > a$

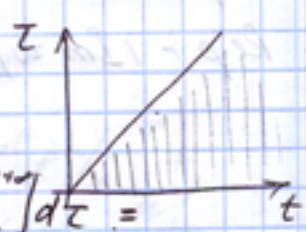
$$|f(t)| \leq M e^{at} \Rightarrow |\varphi(t)| \leq M e^{at} \int_0^t d\tau = M t e^{at} \leq M_1 e^{a_1 t}, \quad a_1 > a = \inf a_1 \Rightarrow \varphi(t) \in L(a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \varphi(p), \quad \varphi(t) \equiv \varphi(p)$$

$$\varphi(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \int_0^t f(\tau) d\tau dt \quad \text{⑧}$$

$$\text{⑨} \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(\tau) \cdot \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} \right] d\tau =$$

перенос
 интеграла



$$= \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{p} \cdot F(p)$$

⑧ Универсальное свойство

Система $f(t) \doteq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$.

$f(t) \in L(a)$, $\frac{f(t)}{t} \in L(a)$.

Тогда $\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p F(q) dq$

$$p = x + iy, |f(t)| \leq M e^{at}$$

$$|F(p)| \leq \frac{M}{x-a} = \frac{M}{\operatorname{Re} p - a} \Rightarrow$$

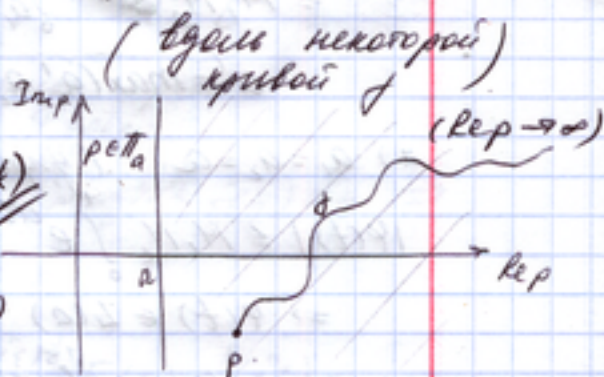
$$\Rightarrow |F(p)| \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{p \in \Pi_a} 0 \quad (\text{т.е. } \operatorname{Re} p \rightarrow \infty)$$

$$\frac{f(t)}{t} \doteq I(p), \quad p \in \Pi_a$$

$$I(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt$$

$$I'(p) = \int_0^{\infty} (-t) e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt = -F(p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(p) = \int_p F(q) dq$$



$$\left\{ \begin{array}{l} (*) \Rightarrow I(p) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0 \\ \text{т.е. } \frac{f(t)}{t} \in L(a) \end{array} \right\}$$

(a)

Опр. Система φ -члн $f_1(t)$ и $f_2(t)$ - универсально
сблжимаема, φ -члн f_1 и f_2 наз-во функциями

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

$t e^{at} \leq$

(a)

\Rightarrow ⑨ Система $f_1(t) \doteq F_1(p)$, $p \in \Pi_{a_1}$
 $f_2(t) \doteq F_2(p)$, $p \in \Pi_{a_2}$
Тогда $\{\varphi(t)\}$ - сблжима функция f_1 и f_2

$$\varphi(t) \doteq F_1(p) F_2(p), \quad p \in \Pi_a, \quad a = \max(a_1, a_2)$$

Справедливо, что $\varphi(t) \in L(a)$. (iii, iii-орел).

$$\begin{aligned}
 1) \quad a_1 \neq a_2, \quad |f_1(t)| \leq M_1 e^{a_1 t}, \quad |f_2(t)| \leq M_2 e^{a_2 t} \\
 |\varphi(t)| \leq M_1 M_2 \int_0^t e^{a_1 \tau} e^{a_2 (t-\tau)} d\tau = \\
 = M_1 M_2 e^{a_2 t} \int_0^t e^{(a_1 - a_2) \tau} d\tau = \\
 = M_1 M_2 \cdot \frac{1}{a_1 - a_2} \cdot (e^{a_1 t} - e^{a_2 t}) \leq M e^{a' t}
 \end{aligned}$$

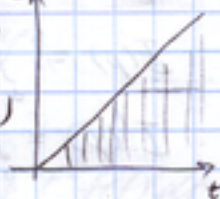
$$a' = \max(a_1, a_2) \Rightarrow a = \inf a' = \max(a_1, a_2) \Rightarrow \varphi \in L(a)$$

$$2) \quad a_1 = a_2 = a \quad (\text{универсально } |f(t)| \leq M e^{at})$$

$$|\varphi(t)| \leq M_1 M_2 \int_0^t e^{at+at-a\tau} d\tau = M_1 M_2 e^{at} \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(t) \in L(a)$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &= \varphi(p) = \int_0^t e^{-pt} dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \\
 &= \int_0^t f_1(\tau) d\tau \int_0^t e^{-pt} f_2(t-\tau) dt = \{t = \tau + u\} = \\
 &= \int_0^t f_1(\tau) d\tau e^{-p\tau} \int_0^{t-\tau} f_2(u) e^{-pu} du = F_1(p) F_2(p)
 \end{aligned}$$



Определение оригинала по изображению

Функция $F(p)$ определена в Π_a

Теорема 8.4 Функция $F(p) \in A(\Pi_a)$, причем является образом Лапласа некоторой кусочно-линейной функции $f(t) \in L(a)$. Тогда в каждой своей точке непрерывности $f(t)$ имеет для оригинала по формуле:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \text{V.p.} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad \forall \gamma > a \quad (8.7)$$

формула Мелина (обращение)

$$y_2 e^{a_2 t}$$

Р-во: Асимптотически $\psi(t) = e^{-xt} f(t) \in L(-\infty, +\infty)$
 (т.е. $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)| dt$).

В точках непрерывности φ -функции $f(t)$ φ -функция $\psi(t)$ имеет непрерывную.

$$Me^{at}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} dz}_{\text{образное пространство}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-isz} \varphi(y) dy}_{\text{образное пространство}}$$

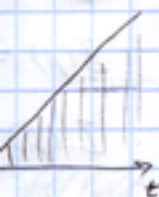
$$a_1, a_2) \Rightarrow \varphi \in L(a)$$

$$e^{-xt} f(t) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} dz \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+iz)t}{p}} f(y) dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \rho = x + iz \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{(x+iz)t} F(p) d(iz) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp$$



Замечание: В точках разрыва φ -функции $f(t)$ φ -функция имеет значение $\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$.

Теорема 8.5 Пусть $f_1(t) \equiv F_1(p)$, $p \in \Pi_{a_1}$, $f_2(t) \equiv F_2(p)$, $p \in \Pi_{a_2}$. Тогда $f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) \equiv$
 $\equiv F(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q) F_2(p-q) dq = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(p-q) F_2(q) dq$
 ($a_1 < x < \text{Re } p - a_2$) ($a_2 < x < \text{Re } p - a_1$)

Пусть $F(p) \in A(\Pi_{a_1+a_2})$

всем
 элементарно-
 каноническим
 - образ

Теорема 8.6 Пусть две функции $F(p)$ заданы:

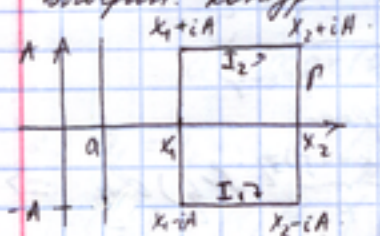
1. $F(p) \in A(\Pi_{a_1})$
2. $F(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$, $p \in \Pi_{a_1}$
3. $\forall x > a_1 \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)| dp$ сходится

Тогда $F(p)$ есть образ Лапласа некоторой функции $f(t) \in L(a)$. Эта функция может быть восстановлена по формуле Меллина

(8.7)

- В-во: 1. Функт. габаритной ф-ции элементна не зависит от выбора $x > a$.
2. Фкт), - " - , принадлежат классу $L(a)$
3. Оораз мнимаса ф-ции $f(t)$ есть $F(p)$

1. Фикс. $\forall x_1, x_2: x_1, x_2 > a, x_1 \neq x_2$, фикс. $\forall A > 0$.
 Выборим контур Γ :

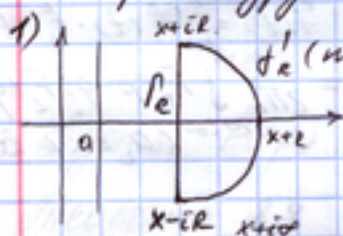


$$0 = \oint_{\Gamma} e^{pt} F(p) dp = \int_{x_1 - iA}^{x_2 - iA} - \int_{x_1 + iA}^{x_2 + iA} + \int_{x_2 - iA}^{x_2 + iA} - \int_{x_1 - iA}^{x_1 + iA}$$

$$\left. \begin{aligned} \left| \int_{I_1} \right| &\leq (x_2 - x_1) e^{x_2 t} \max_{p \in I_1} |F(p)| \\ \left| \int_{I_2} \right| &\leq (x_2 - x_1) e^{x_2 t} \max_{p \in I_2} |F(p)| \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} F(p) \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_{x_1 - i\infty}^{x_2 - i\infty} e^{pt} F(p) dp = \int_{x_2 + i\infty}^{x_1 + i\infty} e^{pt} F(p) dp$$

2. Выберем другой контур Γ_r : (фикс. $\forall x > a$)



$$0 = \oint_{\Gamma_r} e^{pt} F(p) dp = \int_{x - iR}^{x + iR} - \int_{x + iR}^{x - iR} \Rightarrow$$

(по lemma Морганя)

$$\Rightarrow \int_{x - i\infty}^{x + i\infty} e^{pt} F(p) dp = 0$$

2) кусочная непр-но следует из теоремы о непр-ти неубыв. $\forall t > 0$.

$$\Rightarrow |f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} e^{xt} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)| dp \leq \{t \in [0, T]\} \leq \frac{e^{xT}}{2\pi} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)| dp$$

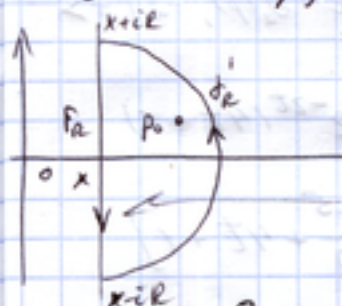
\Rightarrow интеграл элементна и равномерно на A отрезке

$$\Rightarrow |f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} e^{xt} \int_{x-i\sigma}^{x+i\sigma} |F(p)| dp \leq M e^{xt} \Rightarrow f(t) \in L(a)$$

3. Прямой $p_0 - \forall r, \forall \theta$. $G(p)$ - о́рып лануаца
 ырлым $f(t)$.

$$G(p_0) = \int_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\sigma}^{x+i\sigma} e^{-p_0 t} dt \int_{x-i\sigma}^{x+i\sigma} e^{pt} F(p) dp =$$

$$= \int_{a < x < \text{Re } p_0} F(p) dp \int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\sigma}^{x+i\sigma} F(p) \frac{dp}{p_0 - p}$$



$$\int_{x-i\sigma}^{x+i\sigma} \frac{F(p)}{p_0 - p} dp = 2\pi i \operatorname{res} \left[\frac{F(p)}{p_0 - p}, p_0 \right]; \quad \int_{x-i\sigma}^{x+i\sigma} \frac{F(p)}{p_0 - p} dp =$$

$$\int_{x-i\sigma}^{x+i\sigma} \frac{F(p)}{p_0 - p} dp = -2\pi i \operatorname{res} \left[\frac{F(p)}{p_0 - p}, p_0 \right] =$$

$$= -2\pi i \cdot \frac{F(p_0)}{-1} = 2\pi i F(p_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall p_0 \in \mathbb{R} \quad G(p_0) = F(p_0) \Rightarrow G(p) \equiv F(p), \quad p \in \mathbb{R}$$

Диринер: Пемуро жаганы Коуун:

$$y'' + 4y' + 4y = t^3 e^{-2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

$$t^3 \doteq \frac{3!}{p^4} = \frac{6}{p^4}, \quad \operatorname{Re} p > 0$$

$$t^3 e^{-2t} \doteq \frac{6}{(p+2)^4}, \quad \operatorname{Re} p > -2$$

$$y(t) \doteq Y(p), \quad \operatorname{Re} p > -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) - 1$$

$$y''(t) \doteq p^2 \left(Y(p) - \frac{1}{p} - \frac{2}{p^2} \right) = p^2 Y(p) - p - 2$$

$$y(p) (p^2 + 4p + 4) - p - 2 - 4 = \frac{6}{(p+2)^4}, \quad \operatorname{Re} p > -2$$

$$y(p) = \frac{p+6}{(p+2)^2} + \frac{6}{(p+2)^4} = y_2(p) + y_1(p)$$

$$y_1(t) \doteq y_1(p) \quad ; \quad y_2(t) \doteq y_2(p)$$

$$1) \text{ T.K. } t^n \doteq n! / p^{n+1} \Rightarrow \frac{6}{p^6} = \frac{1}{20} \cdot \frac{120}{p^6} \doteq \frac{1}{20} t^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1(t) = \frac{1}{20} t^5 \cdot e^{-2t}$$

$$2) y_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} y_2(p) dp, \quad x > -2$$



$$\oint_{\Gamma_R} \frac{(p+6)e^{pt}}{(p+2)^2} dp = 2\pi i \operatorname{res}[e^{pt} y_2(p), -2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{numera} \\ \text{mopgan} \end{array} \right\} \Rightarrow y_2(t) = e^{-2t} (4t + 1)$$

$$\Rightarrow y(t) = y_1(t) + y_2(t) = e^{-2t} \left[\frac{t^5}{20} + 4t + 1 \right]$$