Теория функций комплексной переменной
IV семестр

Глава 1. Комплексные числа и комплексная плоскость — 1
1. Комплексные числа и действия над ними — 1
2. Предел последовательности — 3

Глава 2. Функция комплексного переменного — 6
1. Предел функции в точке — 7
2. Непрерывность — 8
3. Производная и дифференциал — 11
4. Аналитические функции — 13
5. Свойства аналитических функций — 14
6. Геометрический смысл аргумента производной — 15

Глава 3. Элементарные аналитические функции и задаваемые ими конформные отображения — 19
1. Целая линейная функция — 19
2. Дробно-линейная функция — 23
3. Групповые свойства дробно-линейных преобразований — 25
4. Конформность — 28
5. Инвариантность двойного отношения. — 32
6. Круговое свойство — 33
7. Сохранение симметрии — 34
8. Функция Жуковского — 38
9. Показательная функция — 40
10. Тригонометрические и гиперболические ф-ии — 42

Глава 4. Интегрирование функций комплексного переменного — 45
1. Понятие интеграла — 45
2. Интегральная теорема Коши — 46
3. Первообразная и неопределенный интеграл — 51
4. Интегральная формула Коши — 54
5. Интегралы, зависящие от параметра — 57
6. Теорема о бесконечной дифференцируемости аналит. ф-ии — 59
7. Следствия из теоремы о бесконечной дифф-сти — 60

Глава 5. Ряды аналитических функций — 61
1. Общие утверждения отн. рядов — 61
2. Степенные ряды — 63
3. Теорема Тейлора — 65
4. Теорема о единственности — 67

Глава 6. Ряды Лорана и изолированные особые точки — 71
1. Классификация изолированных особых точек — 74
2. Особенность в бесконечно удаленной точке — 79

Глава 7. Вычеты и их приложения — 85
1. Вычет отн. бесконечно удаленной точки — 88
2. Применение вычетов к вычислению интегралов от вещественной прямой — 90 — —
3. Логарифмический вычет и принцип аргумента — 94
4. Обобщение формулы Ньютона-Лейбница — 98

Действительный и комплексный анализ, 4 семестр
Часть 2. ТФКП

1. Дифференцируемость функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана.
2. Свойства аналитических функций. Геометрический смысл производной.
3. Дробно-линейные функции: инвариантность двойного отношения, круговое свойство.
4. Сохранение симметрии. Примеры типовых дробно-линейных отображений.
5. Функция Жуковского и обратная к ней функция.
6. Показательная функция. Тригонометрические и гиперболические функции.
7. Выделение однозначных ветвей многозначных функций. Логарифмическая функция.
8. Интегральная теорема Коши и ее обобщения.
9. Неопределенный интеграл и теорема о первообразной.
10. Интегральная формула Коши.
11. Дифференцирование интеграла по параметру. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций.
12. Теоремы Морера и Лиувилля. Основная теорема высшей алгебры.
13. Равномерно и нормально сходящиеся ряды аналитических функций. Теоремы Вейерштрасса.
14. Аналитичность суммы степенного ряда. Теорема Тейлора.
15. Теорема единственности и ее следствия.
16. Ряды Лорана. Теорема Лорана.
17. Классификация изолированных особых точек. Устранимая особая точка. Полюс.
18. Существенно особая точка. Теорема Сохоцкого. Теорема Пикара (без доказательства).
19. Теоремы о вычетах и полной сумме вычетов. Вычет относительно полюса.
20. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.
21. Логарифмический вычет. Принцип аргумента. Теорема Руше.
22. Теорема об образе области. Принципы максимума и минимума модуля аналитической функции.
23. Преобразование Лапласа: существование и аналитичность.
24. Основные свойства преобразования Лапласа.
25. Определение оригинала по изображению. Формула Меллина.
26. Решение дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа.

I. Комплексные числа и комплексная плоскость

1. Комплексные числа и действия над ними

Опр. Комплексное число — упорядоченная пара вещественных чисел: $z = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$
Причем:
$a = \mathrm{Re}\, z$ — действительная часть
$b = \mathrm{Im}\, z$ — мнимая часть

Опр. Два комплексных числа наз. равными, если
$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$

Бинарные операции:

1. сложение
$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2)$

2. умножение
$w = z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2,\ a_1 b_2 + a_2 b_1)$

$\Rightarrow$ по отношению к этим операциям мн-во комплексных чисел есть поле, обозначаемое $\mathbb{C}$ (комм., ассоц., дистр., обратные операции)

Если $z_1 = (a_1, 0)$, $z_2 = (a_2, 0)$, то а) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, 0)$
б) $z_1 z_2 = (a_1 a_2, 0)$
$\Rightarrow$ операции с числами этого вида сводятся к одноименным операциям с их вещественными частями
$\Rightarrow$ соглашение: $z = (a, 0) \equiv a$ (действительные — част. случай комп.)
$(0, 1) \equiv i$ — мнимая единица
$i^2 = (-1, 0) = -1$ (по введенным правилам)

$z = (0, b) = (0, 1)(b, 0) \equiv ib$
$\Rightarrow z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) \equiv a + ib$ — алгебраическая форма

Опр. Сопряженным к числу $z = a + ib$ наз. число $\overline{z} = a - ib$.
Свойства:
1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

Опр. Обратным к числу $z = a + ib$ наз. число $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{a^2 + b^2}$

Комплексная плоскость.

Евклидову пл-ть называем комплексной, ось x — вещественной, ось y — мнимой $\Rightarrow$ a и b — координаты точки, соответствующ. числу $z = a + ib$

Можно ввести полярную систему координат $\Rightarrow$
$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ — модуль числа z
φ — аргумент, причем $\varphi \in [0; 2\pi)$ или $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
$a = \rho \cos\varphi$, $b = \rho \sin\varphi$

Опр. **Аргумент числа** — это $Arg\, z = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Опр. **Главное значение аргумента** $arg\, z$ — значение Arg, попадающее в основной интервал, т.е. $[0, 2\pi)$ или $(-\pi, \pi]$

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$

$\Rightarrow z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — **тригонометрическая форма**

Обозн. $e^{i\varphi} \equiv \cos\varphi + i\sin\varphi$

$\Rightarrow z = re^{i\varphi}$ — **показательная форма**

Умножение: $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i\varphi} = \rho_1\rho_2(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
где $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \pmod{2\pi}$

Формула Муавра: $z^n = \rho^n e^{in\varphi},\ n \in \mathbb{Z}$

Деление: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i\varphi} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
где $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \pmod{2\pi}$

Опр. Число $z_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$ наз. **корнем n-ой степени** из числа $z = \rho e^{i\varphi}$, если $z_0^n = z$

$\Rightarrow$ по ф-ле Муавра: $\rho_0^n e^{in\varphi_0} = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow \rho_0 = \sqrt[n]{\rho},\ \varphi_0 = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n},\ k \in \mathbb{Z}$

Операции сложения и вычитания позволяют интерпретировать комплексные числа как векторы на комплексной плоскости, причем и как связные, и как свободные
$|z - a| \leqslant r$ — замкнутый круг
$|z - a| = R$ — окружность

2. Предел последовательности

$K_\varepsilon(z_0)$ — открытый круг радиуса ε с центром в т. z_0 — иначе ε-окрестность т. z_0

Последовательность: $z_n = a_n + ib_n$

Опр. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) > 0 : \forall n \geq N \ |z_n - z_0| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ т.к. $z_0 = a_0 + ib_0$ $\sqrt{(a_n - a_0)^2 + (b_n - b_0)^2} < \varepsilon$

Теорема 1.1. $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0 \Leftrightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a_0$, $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b_0$
Сходимость комплексной последовательности равносильна одновременной сходимости двух вещественных п-ей

Теорема 1.2. (Больцано-Вейерштрасса) Из всякой ограниченной п-ти комплексных чисел можно извлечь сходящуюся п/п-ть.

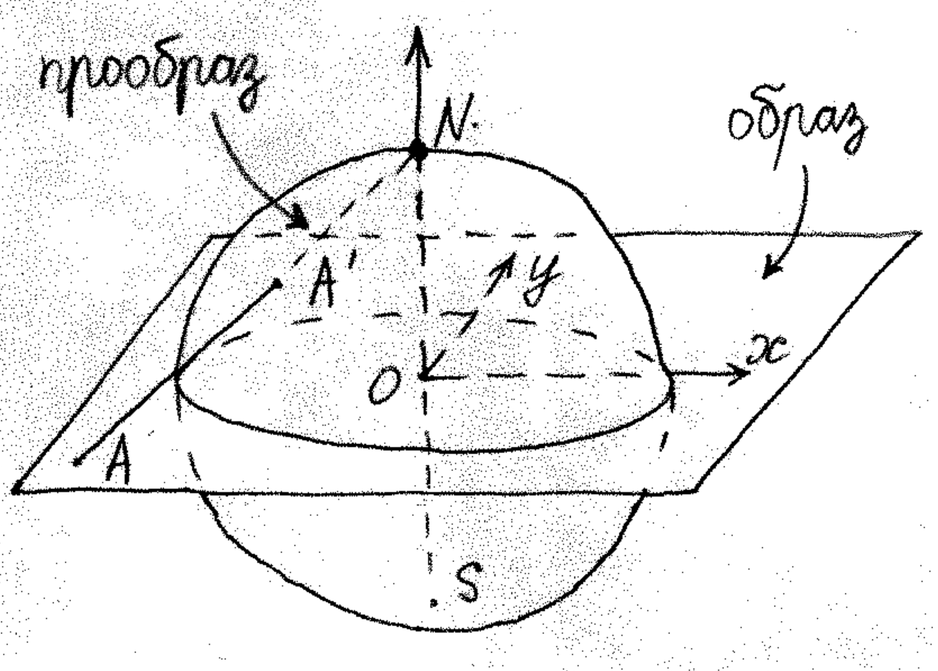
Теорема 1.3. (критерий Коши) П-ть $\{z_n\}$ – сходится $\Leftrightarrow$ $\{z_n\}$ – фундаментальна, т.е.
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) > 0 : \forall k, l \geq N \ |z_k - z_l| < \varepsilon$

$z = a + ib$ – конечные комплексные числа

∞ – число бесконечность.
Св-ва:
1. $\infty \pm a = a \pm \infty = \infty$
2. $\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty$
3. $\frac{a}{\infty} = 0$
4. $\frac{\infty}{a} = \infty$
5. $\frac{a}{0} = \infty$
6. Лишены смысла операции $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$
7. ρ-окрестность бесконечно удаленной точки есть $|z| > \rho$

$\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ – мн-во комплексных чисел
$\overline{\mathbb{C}}$ – расширенное мн-во комп. чисел (дополненное до ∞)

Риманова сфера – модель мн-ва комплексных чисел



Соответствие – центральная проекция из N точек сферы

точка входит с некоторой окрестностью

Опр. **Область** – открытое связное мн-во

Опр. **Расстояние от т. z_0 до мн-ва M** –
$$\rho(z_0, M) = \inf_{z \in M} |z - z_0|$$

Расширенная комп. плоскость – $\mathbb{C} + \infty$. Число есть стереографическая проекция точки на сфере.

1. Если z_0 – предельная точка мн-ва M, то $\rho(z_0, M) = 0$
2. Если M – замкнуто, $z_0 \notin M$, то $\rho(z_0, M) > 0$

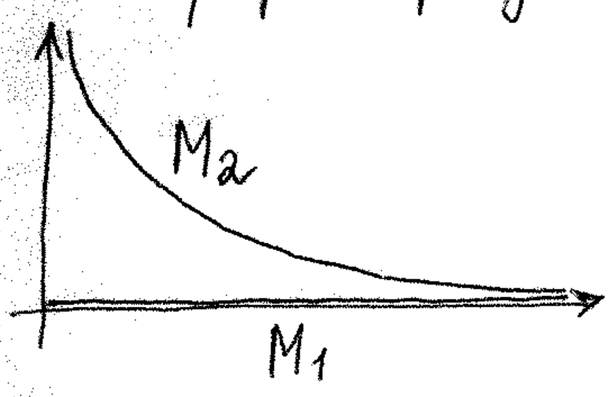
Опр. *Расстояние между мн-ми* M_1 и M_2 – это

$$\rho(M_1, M_2) = \inf_{\substack{z_1 \in M_1 \\ z_2 \in M_2}} |z_1 - z_2|$$

Теорема 1.4. *Пусть мн-ва* M_1 и M_2 *замкнуты, не пересекаются и хотя бы одно из них ограничено. Тогда расстояние между этими мн-вами положительно*

Контрпример для ограниченности:

$$\rho(M_1, M_2) = 0$$



Введем обозначения:

1. $\mathrm{dom}\, f$ (domain) – область определения
2. $\mathrm{im}\, f$ (image) – область значений

$f(E)$, $E \subset \mathrm{dom}\, f$

II. Функция комплексного переменного

Пусть E — произвольное подмножество комплексной плоскости и пусть каждому $z \in E$ поставлены в соответствие одно или *несколько* чисел w. В этом случае говорят, что на E задана функция комплексного переменного z и записывают этот факт символикой типа $w = f(z)$.

Примеры

Однозначные функции

$$\mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z, |z|, \arg z, \overline{z}, z^n \ (n \in \mathbf{N})$$

Многозначные функции

$$\sqrt[n]{z} \ (n \in \mathbf{N}), \mathrm{Arg}z$$

Положим $z = x + iy$, $w = u + iv$, где $x, y, u, v \in \mathbf{R}$. Тогда задание функции $w = f(z)$ на E равносильно заданию на E как подмножестве евклидовой плоскости двух вещественных функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$.

Для изображения графиков нужны два экземпляра комплексной плоскости: для аргумента и значения ф-ии. А можно привести к двум вещественным ф-иям.

Пример

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy \longrightarrow$$

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy$$

1. Предел функции в точке

Пусть $E \subset \operatorname{dom} f$, и пусть z_0 — предельная точка для E. Запись

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

означает: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(z) - A| < \varepsilon$ при $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$, $z \in E$.

Положим $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $f(z) = u + iv$, $A = B + iC$.

~~**Теорема 1**~~ *Комплексное соотношение*

Теорема 2.1.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

равносильно двум вещественным предельным соотношениям

$$\lim_{\substack{x \to x_0, \\ y \to y_0}} u(x, y) = B, \qquad \lim_{\substack{x \to x_0, \\ y \to y_0}} v(x, y) = C.$$

Следствие 1 *Пусть $g(z)$ и $h(z)$ определены на одном и том же множестве E, причем*

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = A_1, \qquad \lim_{z \to z_0} h(z) = A_2.$$

Тогда

$$\lim_{z \to z_0} [g(z) \pm h(z)] = A_1 \pm A_2, \qquad \lim_{z \to z_0} [g(z) \cdot h(z)] = A_1 \cdot A_2.$$

Если $A_2 \neq 0$, то

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{A_1}{A_2}.$$

2. Непрерывность

Пусть $E \subset \operatorname{dom} f$, и пусть $z_0 \in E$ есть предельная точка для E. Функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Если $f(z)$ непрерывна в каждой точке множества E, то говорят, что f непрерывна на E.

Теорема 2.2.

~~Теорема 2~~ *Функция $f(z) = u + iv$ тогда и только тогда непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, когда*

$$\lim_{x \to x_0,\ y \to y_0} u(x, y) = u(x_0, y_0), \qquad \lim_{x \to x_0,\ y \to y_0} v(x, y) = v(x_0, y_0).$$

Следствие 2 *Пусть $g(z)$ и $h(z)$ непрерывны в точке z_0. Тогда их сумма, разность и произведение также непрерывны в этой точке. Если $h(z_0) \neq 0$, то частное $g(z)/h(z)$ тоже непрерывно в z_0.*

Следствие 3 *Пусть функция $w = f(z)$ непрерывна на множестве E и $\operatorname{im} f \subset F$. Пусть на множестве F непрерывна функция $\zeta = g(w)$. Тогда сложная функция (суперпозиция) $\zeta = g[f(z)] \equiv G(z)$ непрерывна на E.*

Пусть функция $w = f(z)$ непрерывна на ограниченном и замкнутом множестве E (компакте).

Следствие 4 (1-я теорема Вейерштрасса) *Функция $w = f(z)$ ограничена на E,* т.е. непрерывная ф-ия ограничена на компакте.

Следствие 5 (комплексная версия 2-й теоремы Вейерштрасса) *Модуль функции $w = f(z)$ достигает на E своей верхней и нижней грани.*

Из-за отсутствия понятия порядка на комплексной плоскости 2-ая т. Вейерштрасса в упрощенной формулировке — оперирует модулей.

Следствие 6 (Теорема Кантора) *Функция $w = f(z)$ равномерно непрерывна на E.*

Определить равномерную непрерывность!

Важный частный случай функциональной зависимости

Пусть функция $z = \lambda(t)$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$. Говорят, что эта функция определяет *непрерывную кривую (линию, дугу)*; значения функции называют точками кривой, а уравнение $z = \lambda(t)$ — *параметрическим уравнением этой кривой.*

Пример

$$z = a\cos t + ib\sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Разделим вещественную и комплексную часть:

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t$$

3. Производная и дифференциал

Пусть $E \subset \mathrm{dom}\, f$, и пусть $z_0 \in E$ есть предельная точка для E. Функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, если существует предел

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

Он называется производной от $f(z)$ в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$ или $\frac{df}{dz}(z_0)$.

Положим $z - z_0 \equiv \Delta z = dz$ (дифференциал независимого переменного), $f(z) - f(z_0) \equiv \Delta f(z)$ (приращение функции).

Теорема 2.3 **~~Теорема 3~~** ***Функция $f(z)$ тогда и только тогда дифференцируема в точке z_0, когда ее приращение в этой точке можно представить в виде***

$$\Delta f(z) = A \cdot \Delta z + \epsilon(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z,$$

где A — константа, а $\epsilon(z_0, \Delta z)$ — бесконечно малая при $z \to z_0$. Если такое представление возможно, то $\boxed{A = f'(z_0).}$

Сложная ф-ия:

Формальные правила дифференцирования:

1) $E \subset \mathrm{dom}\, f \quad w = f(z) \in \mathrm{im}\, f$

$f'(z_0) : w_0 = f(z_0)$, z_0 - предельная точка $\Rightarrow \exists f'(z_0)$ $\Rightarrow$ непрерывна в т. z_0 $\Rightarrow$ непрерывна в т. w_0

2) $w_0 \in F \subset \mathrm{dom}\, g$

$\xi = g(w) \quad \exists g'(w_0)$

$\xi = g[f(z)] = G(z)$

$\Rightarrow G'(z_0) = f'(z_0) \cdot g'(w_0)$

□ $\Delta f(z) = A \cdot \Delta z + \varepsilon(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z$

$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = A + \varepsilon(z_0, \Delta z)$

При переходе к пределу получим A, ч.т.д.

Теорема 2.4. (условие Коши - Римана) (Даламбера - Эйлера) $\exists\ W=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ $(z=x+iy)$ определена в обл. G.

$f(z)$ – дифференцируема в т. $z_0=x_0+iy_0 \Leftrightarrow$

ф-ии $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дир-мы в т. (x_0,y_0) как ф-ии двух вещественных переменных и выполняются соотношения:

$$\left.\begin{aligned} u'_x(x_0,y_0) &= v'_y(x_0,y_0) \\ u'_y(x_0,y_0) &= -v'_x(x_0,y_0) \end{aligned}\right\}$$ условия Коши-Римана (CR)

□ *Необходимость.* По т. 2.3 (т.к. ф-ия – дир-ма) $\Rightarrow$ справедливо представление (*)

$\boxed{\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon\Delta z}$ (*) $\Rightarrow$ $\Delta u + i\Delta v = (a+ib)(\Delta x+i\Delta y) + (\varepsilon_1+i\varepsilon_2)(\Delta x+i\Delta y)$

$\Delta z = \Delta x+i\Delta y$, $\Delta f = \Delta u+i\Delta v$, $\varepsilon=\varepsilon_1+i\varepsilon_2$

$\boxed{f'(z_0)=a+ib}$ – представим (расписали что есть что) в таком виде и хотим показать, что это искомые слагаемые

1) $\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \varepsilon_1\Delta x - \varepsilon_2\Delta y$ – выделили из рамочки без i

приращение ф-ии в т. (x_0,y_0) представлено в виде 4-ех слагаемых, причем первые два линейно зависят от приращения, а вторые два – имеют порядок малости, больший, чем $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} \Rightarrow$ б/м $\Rightarrow$ Δu - дир-ма в т. (x_0,y_0)

2) $\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \varepsilon_2\Delta x + \varepsilon_1\Delta y$ – выделили из рамочки с i

аналогичный анализ, как в п. 1

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a &= u'_x(x_0,y_0),\ b=-u'_y(x_0,y_0) \\ a &= v'_y(x_0,y_0),\ b=v'_x(x_0,y_0) \end{aligned}\right\}$$ искомые условия

Достаточность. $\Delta u = a\cdot\Delta x - b\Delta y - \alpha|\Delta z|$

(специально выбранные обозначения, т.е. частные производные u и v)

$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \beta|\Delta z|$

коэффициенты получены из предыдущего шага и условий CR

$\alpha,\beta \to 0$, при $\Delta z \to 0$

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = \underbrace{(a+ib)}_{A}\underbrace{(\Delta x+i\Delta y)}_{\Delta x} + (\alpha+i\beta)|\Delta z| =$$

$$= A\Delta z + \varepsilon\Delta z, \text{ где } \varepsilon = \frac{(\alpha+i\beta)|\Delta z|}{\Delta z}, \text{ причем } |\varepsilon| = |\alpha+i\beta| \underset{\Delta z\to 0}{\to} 0$$

$\Rightarrow$ по т. 2.3 $\exists\ f'(z_0)=A$, что и требовалось ■

Вывод: производную комплексной ф-ии можно вычислить через производные вещественных ф-ий (см. выражение A)

Следствие: $f'(z_0) = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y = u'_x - iu'_y = v'_y + iv'_x$

4. Аналитические функции

Опр. ф-ия $w = f(z)$ – **аналитическая в обл. G**, если она дифф-ма в каждой точке из G (Маркушевич)

Опр. ф-ия $w = f(z)$ – **аналитическая в обл. G**, если она дифф-ма в каждой точке из G и $f'(z)$ непрерывна в G. (С-Т).

← проще доказывать

В дальнейшем придерживаемся второго определения.

Пример. $w = f(z) = e^x(\cos y + i\sin y) = u + iv$ — проверка на аналитичность

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= e^x \cos y \\ v(x,y) &= e^x \sin y \end{aligned}\right\} \text{ непрерывны на } \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$$

1) Для использования т. 2.4. Необходимо проверить условия CR

$u'_x = e^x \cos y \quad u'_y = -e^x \sin y$

$v'_x = e^x \sin y \quad v'_y = e^x \cos y$

$\Rightarrow$ по т. 2.4 $f(z)$ – дифф-ма в $\mathbb{C}$

2) Проверим непрерывность производной:

$f'(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = f(z) \Rightarrow f'(z) = f(z)$ (как у e)

$\Rightarrow f(z) \in A(\mathbb{C})$ – аналитическая в области $\mathbb{C}$

Т.к. $f'(z) = f(z) \Rightarrow w = e^x(\cos y + i\sin y)$ – показательная функция от z

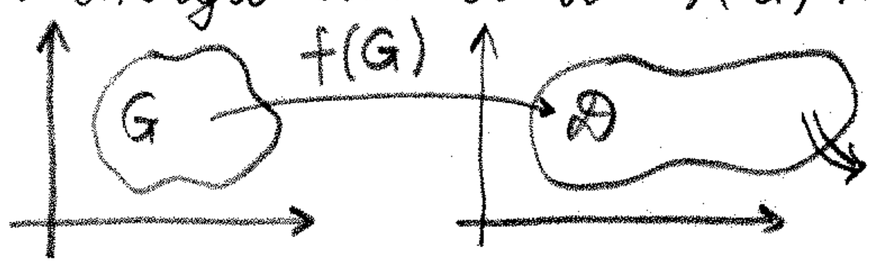
Опр. Если $f(z)$ – аналитична во всей $\mathbb{C}$, то она называется **целой аналитической ф-цией**.

$f(z) \in C(\mathcal{D})$ – непрерывность

5. Свойства аналитических функций

① $\exists\ f(z), g(z) \in A(G)$. Тогда $f(z) \overset{+}{*} g(z) \in A(G)$.
Если $g(z) \neq 0\ \ \forall z \in G$, то $\frac{f(z)}{g(z)} \in A(G)$
□ вытекает из свойств дифференцируемости

② (Теорема об образе области — open mapping theorem).
$\exists\ W = f(z) \in A(G)$, $f(z) \neq const$. Тогда мн-во $\mathcal{D} = f(G)$ также является областью
□ док-во в конце курса

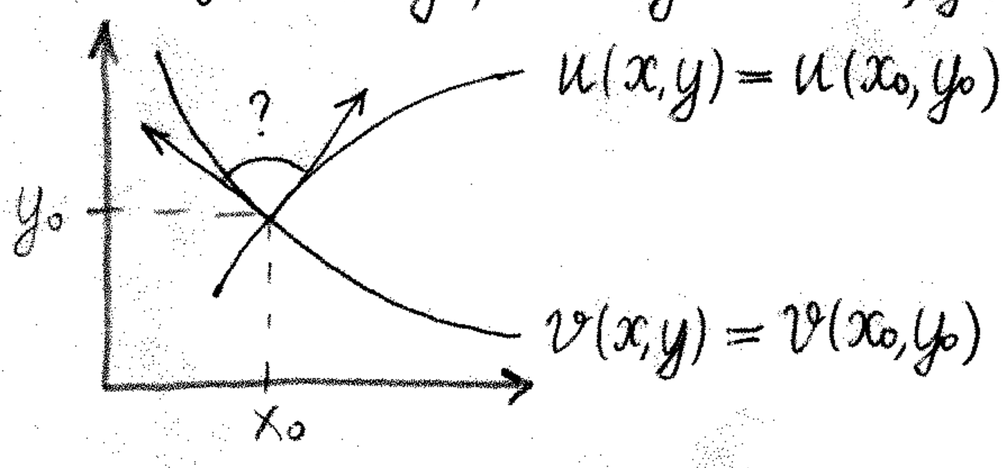


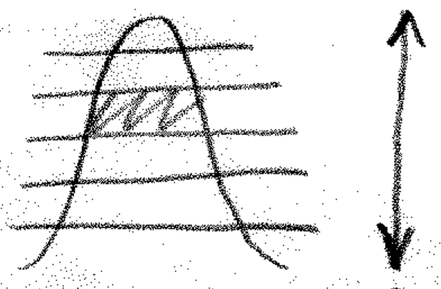
$f(G)$ – аналит. область?

③ (Аналитичность сложной ф-ии) $f \neq const$
$\exists\ W = f(z) \in A(\mathbb{C})$, $F = f(G)$ (– область из пункта 2), $\xi = g(w) \in A(F)$,
тогда $\xi = g[f(z)] = H(z) \in A(G)$ $\quad W \in A(G)$ – аналитична в G

④ (Аналитичность обратной ф-ии)
$W = f(z) \in A(G)$, $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in G$, $\exists (W_0) = f(z_0)$
Тогда $\exists\ K_\varepsilon(W_0)$, $z = \varphi(w)$:
1. $z = \varphi(w)$ обратна к f в окрестности $K_\varepsilon(W_0)$, т.е. $\forall w \in K_\varepsilon(W_0)\ \ f(\varphi w) = w$ ↖ обратное отображение
2. $\varphi(w) \in A(K_\varepsilon(W_0))$ – аналитична в ε-окр.
3. $\varphi'(W_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$ – обратные производные т.е. формула для вычислений
□ Без док-ва

⑤ (Ортогональность линий уровня)
$W = f(z) \in A(G)$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $f \neq const$
$z = x + iy$, $u(x,y) = C$, $v(x,y) = K$ – линии уровня
$z_0 = x_0 + iy_0$, $u(x,y) = u(x_0, y_0)$, $v(x,y) = v(x_0, y_0)$ – выбрали из семейства, проход. через т.





$\vec{n}_1 = grad\ u = \{u_x', u_y'\}$
$\vec{n}_2 = grad\ v = \{v_x', v_y'\}$
$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

Угол между касательными = углу между нормалями ⇒ расм. нормали – а это градиенты

$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = u_x' v_x' + u_y' v_y' = \{$Коши-Римана$\} = u_x' v_x' - v_x' u_x' = 0$

$\Rightarrow \vec{n}_1 \hat{\vec{n}}_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ линии ортогональны, ч.т.д.

$\exists\ w = f(z)$, $\exists\ f'(z_0) \neq 0$, f – непрер. в окр-ти т. z_0; $\arg f'(z_0)$

⇓

аргумент не определен ⇒ не интересует (в противном случае)

6. Геометрический смысл аргумента производной !

Пусть L — непрерывная кривая с параметрическим уравнением $z = \lambda(t)$, где $t \in E = [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$. В каком случае функция λ имеет производную в точке $t_0 \in E$?

Положим $\lambda(t) = x(t) + iy(t)$ и составим разностное отношение

$$\frac{\lambda(t) - \lambda(t_0)}{t - t_0} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + i\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}.$$

предел левой части ∃ ⇔ ∃ два предела правой част

При $t \to t_0$, $t \in E$ получаем:

Производная $\lambda'(t_0)$ существует тогда и только тогда, когда существуют обе вещественные производные $x'(t_0)$ и $y'(t_0)$. При этом

$$\lambda'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0).$$

— факт существования производных

$x'(t_0)=0$
$y'(t_0)=0$

Значение параметра t_0 и точка $z_0 = \lambda(t_0)$ называются регулярными, если производная $\lambda'(t_0)$ существует и не равна нулю.

Если t_0 — регулярное значение параметра, то для всех $t \in E$, достаточно близких к t_0 и отличных от t_0, точка $z = \lambda(t)$ на кривой L отлична от $z_0 = \lambda(t_0)$. Число

$$0 \neq \frac{\lambda(t) - \lambda(t_0)}{t - t_0} = \frac{z - z_0}{t - t_0},$$

при делении линия действия сохраняется (делим на число)

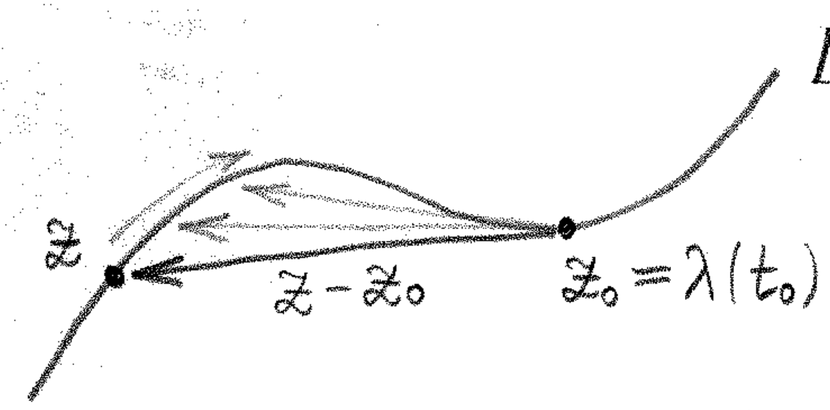
рассматриваемое как вектор на комплексной плоскости, лежит на прямой, соединяющей точки z_0 и z, т.е. на секущей. Угол, под которым эта секущая наклонена к действительной оси, равен

$$\mathrm{Arg}\frac{z - z_0}{t - t_0}.$$

В пределе при $t \to t_0$, $t \in E$, получим

$$\mathrm{Arg}\lambda'(t_0).$$

Вывод: **Таким образом, если при $t = t_0$ функция $z = \lambda(t)$ имеет ненулевую производную $\lambda'(t_0)$, то секущая кривой L, проходящая через точки z_0 и z, имеет предельное положение при $t \to t_0$. Это предельное положение есть касательная к кривой L в ее точке z_0. Она наклонена к действительной оси под углом $\mathrm{Arg}\lambda'(t_0)$.**



(причем $z \neq z_0$)

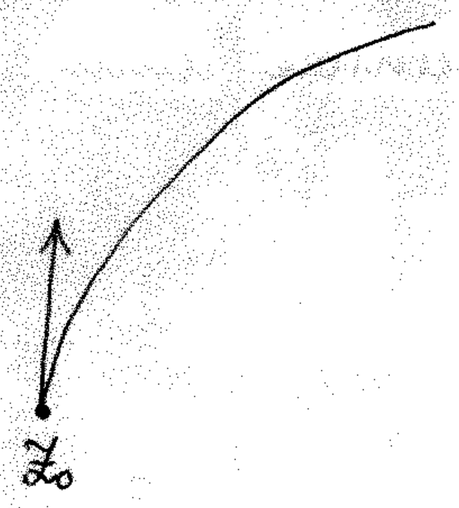
$t \to t_0$
$z \to z_0$

$\frac{z - z_0}{t - t_0} \xrightarrow[t \to t_0]{} \lambda'(t_0)$ — определение производной в точке

„Аргументируем":

$\mathrm{Arg}\ \frac{z - z_0}{t - t_0} \xrightarrow[t \to t_0]{} \mathrm{Arg}\ \lambda'(t_0)$

⇒ Вывод: 1) есть предельное положение касательной
2) угол наклона = $\mathrm{Arg}\ \lambda'(t_0)$



$z = \lambda(t)$

$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$

$z_0 = \lambda(\alpha)$

$\lambda'(\alpha) \neq 0$

$w = f[\lambda(t)] = \mu(t)$

$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$

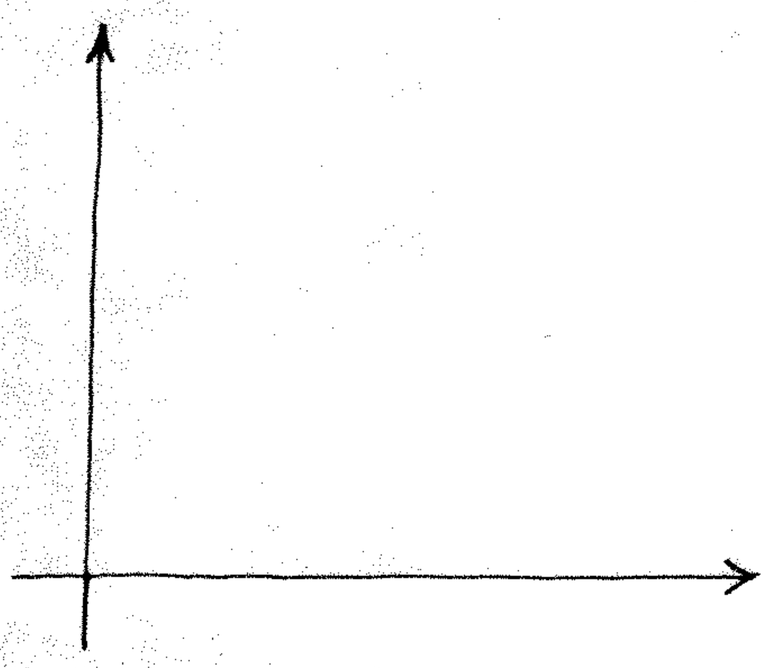
$w_0 = f[\underbrace{\lambda(\alpha)}_{z_0}] = \mu(\alpha)$ — производная сложной ф-ии

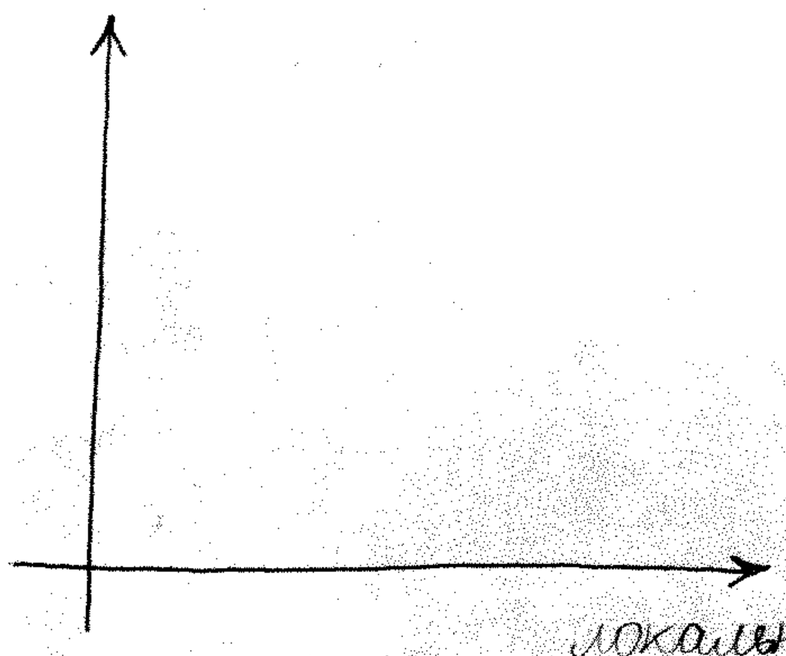
$w_0 = f(z_0)$

$\mu'(\alpha) = \lambda'(\alpha) \cdot f'(z_0) \neq 0$ — аргумент произведения равен сумме аргумент

$\operatorname{Arg} \mu'(\alpha) = \operatorname{Arg} \lambda'(\alpha) + \operatorname{Arg} f'(z_0)$

$$\boxed{\operatorname{Arg} \mu'(\alpha) - \operatorname{Arg} \lambda'(\alpha) = \arg f'(z_0)}$$





перерисовать

локально

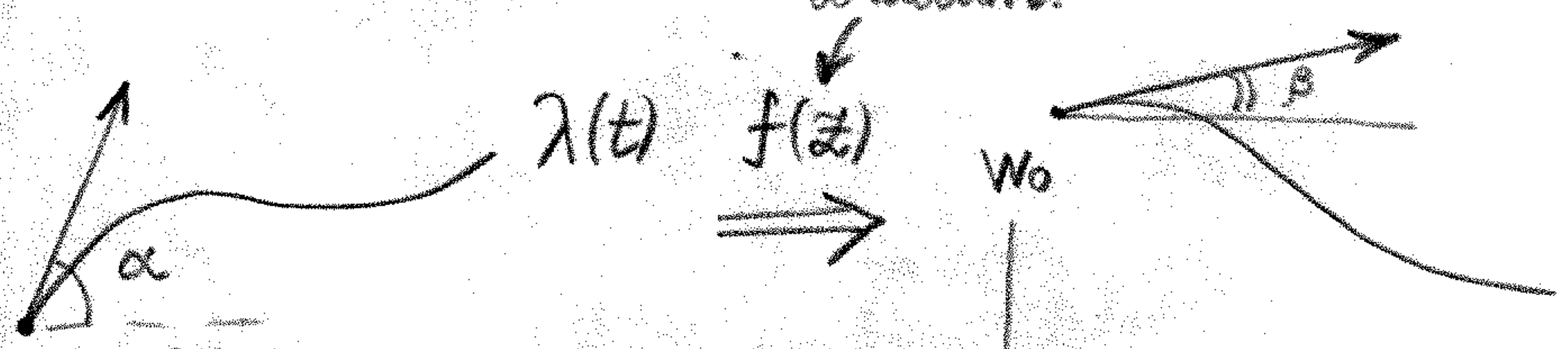
Опр. Отображение, задаваемое непрерывной ф-ией $f(z)$, **конформно в т. z_0**, если оно сохраняет углы между гладкими кривыми, проходящими через z_0.

(*критерий конформности*)

Теорема 2.5. Отображение $w = f(z)$ конформно в каждой т. z_0, где $f'(z_0) \neq 0$, т.е. $\operatorname{Arg} \mu'(\alpha) - \operatorname{Arg} \lambda'(\alpha) = \arg f'(z_0)$.

Опр. $\exists$ $w = f(z)$ отображает обл. G в обл. F. Если соответствие между точками этих областей взаимнооднозначно и отображение f конформно в каждой точке из G, то говорят, что f отображает G в F **конформно**.

аналит.



α — аргумент z_0

действие сложной ф-ии:

$f(\lambda(\alpha)) = \mu(\alpha)$

1. $f(z)$ – взаимнооднозначно
2. $\forall z$ – конформно

III. Элементарные аналитические функции и задаваемые ими конформные отображения

1. Целая линейная функция

(Маркушевич, гл. II, раздел 10)

$$w = L(z) = \alpha z + \beta, \qquad \alpha \neq 0.$$

область определения и область значения (1)

$$\operatorname{dom} L = \mathbf{C}, \qquad \operatorname{im} L = \mathbf{C},$$

так как при любом w уравнение $w = \alpha z + \beta$ разрешимо относительно z, т.е. всякое $w \in \mathbf{C}$ имеет прообраз z.

(2) является ли функция аналитичной

$$\longrightarrow \quad L'(z) = \alpha \neq 0 \qquad \forall z.$$

(3) является ли отображение конформным

Согласно достаточному условию конформности (теорема 2.5) отображение $w = L(z)$ конформно в каждой точке $z \in \mathbf{C}$. Так как при этом L действует взаимно однозначно, то имеет место и глобальная конформность, т.е. L конформно отображает конечную комплексную плоскость $\mathbf{C}$ на себя.

Утв.

Справедливо и обратное утверждение: если аналитическая функция $w = f(z)$ конформно отображает комплексную плоскость $\mathbf{C}$ на себя, то f является целой линейной функцией.

Выясним геометрический смысл линейной ф-ии:

Какое именно отображение осуществляет линейная функция?

Если $\alpha = 1$, т.е. если $w = z + \beta$, то происходит сдвиг комплексной плоскости как целого. В качестве вектора сдвига выступает число β, интерпретируемое как свободный вектор.

При $\alpha \neq 1$ отображение $w = L(z)$ имеет неподвижную точку γ, описываемую условием

$$L(\gamma) = \gamma,$$

т.е.

$$\gamma = \alpha\gamma + \beta, \qquad (1)$$

или

$$\gamma = \frac{\beta}{1-\alpha}.$$ — получили единственную неподвижную точку

Вычитая из

$$w = \alpha z + \beta$$

равенство (1), получаем:

$$\overbrace{w - \gamma} = \alpha(\overbrace{z - \gamma}).$$

рассм. разность векторов в одной комплексной области

Будем рассматривать разности $z - \gamma$ и $w - \gamma$ как векторы, приложенные началом к точке γ. Записывая α в показательной форме

$$\alpha = re^{i\phi},$$

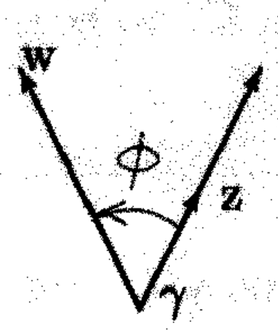
совершим переход от первого вектора ко второму в два этапа, а именно

1) **сначала умножим на r:**

$$z - \gamma \longrightarrow r(z - \gamma),$$

2) **а затем на $e^{i\phi}$.**

разобрано



Таким образом, при $\alpha \neq 1$ линейная функция задает гомотетию с коэффициентом r относительно точки γ, сопровождаемую поворотом комплексной плоскости на угол ϕ вокруг той же точки. Эти преобразования можно выполнить и в обратном порядке: сначала поворот, а потом гомотетию.

Геометрический смысл отображения линейной фи:

1. гомотетия отн. т.γ
2. поворот на угол φ отн. т.γ

Расш. на $\mathbb{C}$, теперь хотим $\overline{\mathbb{C}}$
$\Rightarrow$ нужно ввести бесконечность

При $z \to \infty$ имеем $L(z) \to \infty$. Если нужно распространить определение линейной функции на $\overline{\mathbf{C}}$, то естественно положить

расширенная комплексная плоскость

$$L(\infty) = \infty.$$

Это приводит к появлению у L второй неподвижной точки (бесконечно удаленной). Если $\alpha = 1$, то ∞ является единственной неподвижной точкой, но в этом случае ее можно считать двойной.

Доопределенная линейная функция по-прежнему отображает $\overline{\mathbf{C}}$ на себя взаимно однозначно. Остается ли это отображение конформным? Что означает конформность в бесконечно удаленной точке?

необходимо ввести беск. удал. точки к обычным окальным

Выполним в плоскостях переменных z и w замены переменных

$$z = \frac{1}{\xi}, \qquad w = \frac{1}{\zeta},$$

преобразующие бесконечно удаленные точки этих плоскостей соответственно в $\xi_0 = 0$ и $\zeta_0 = 0$. В новых переменных функция $w = L(z)$ запишется как

$W = az + b$
$\Rightarrow \frac{1}{\zeta} = \frac{a}{\xi} + b$

$$\Longrightarrow \qquad \zeta = \frac{1}{\frac{\alpha}{\xi} + \beta} = \frac{\xi}{\beta\xi + \alpha}.$$

Производная этой функции равна

$$\zeta' = \frac{\alpha}{(\beta\xi + \alpha)^2}.$$

по 2.5.

Она не обращается в нуль нигде, в том числе и при $\xi_0 = 0$. Следовательно, преобразованная функция конформна в точке $\xi_0 = 0$. В этом случае исходная функция $w = L(z)$ считается конформной в бесконечно удаленной точке.

локально конформна

Вывод: $\Rightarrow$ доопределенная ф-ия сохраняет конформность

Сохраняет ли замена конформность?

Конформность в т. ∞:
1. замена
2. выражение ф-ии
3. производная ф-ии
4. ее равенство нулю

2. Дробно-линейная функция

(Маркушевич, гл. II, раздел 10; гл. III, раздел 4)

$$w = L(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \qquad (*)$$

При этом не должно быть равно нулю число

$$\Delta = ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

в противном случае числитель и знаменатель пропорциональны $\Rightarrow$ $w = C$ – плоско

называемое **определителем функции** L.

При $c = 0$ дробно-линейная функция превращается в целую линейную функцию.

Умножая на число $\lambda \neq 0$ числитель и знаменатель дроби в формуле (*), получим новое представление функции L:

$$w = L(z) = \frac{(\lambda a)z + \lambda b}{(\lambda c)z + \lambda d}. \qquad (**)$$

за счет изменения представ.

Определитель этого представления равен

$$\tilde{\Delta} = \lambda^2 \Delta. \qquad (***)$$

Следствие. Для всякой дробно-линейной функции можно выбрать представление с определителем 1. Достаточно взять в (***) $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$. – любой из корней

подумать!

Хотим понять как соотносятся коэффициенты

Есть ли в задании дробно-линейной функции еще какая-либо свобода помимо возможности умножения числителя и знаменателя на произвольное ненулевое число?

Предположим, что

$$L_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \equiv L_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}.$$

Равенство двух функций означает совпадение их значений при всех значениях аргумента из общей области определения. Отсюда получаем

$$(a_1 z + b_1)(c_2 z + d_2) = (c_1 z + d_1)(a_2 z + b_2) \qquad \forall z.$$

Из равенства квадратных многочленов выводим

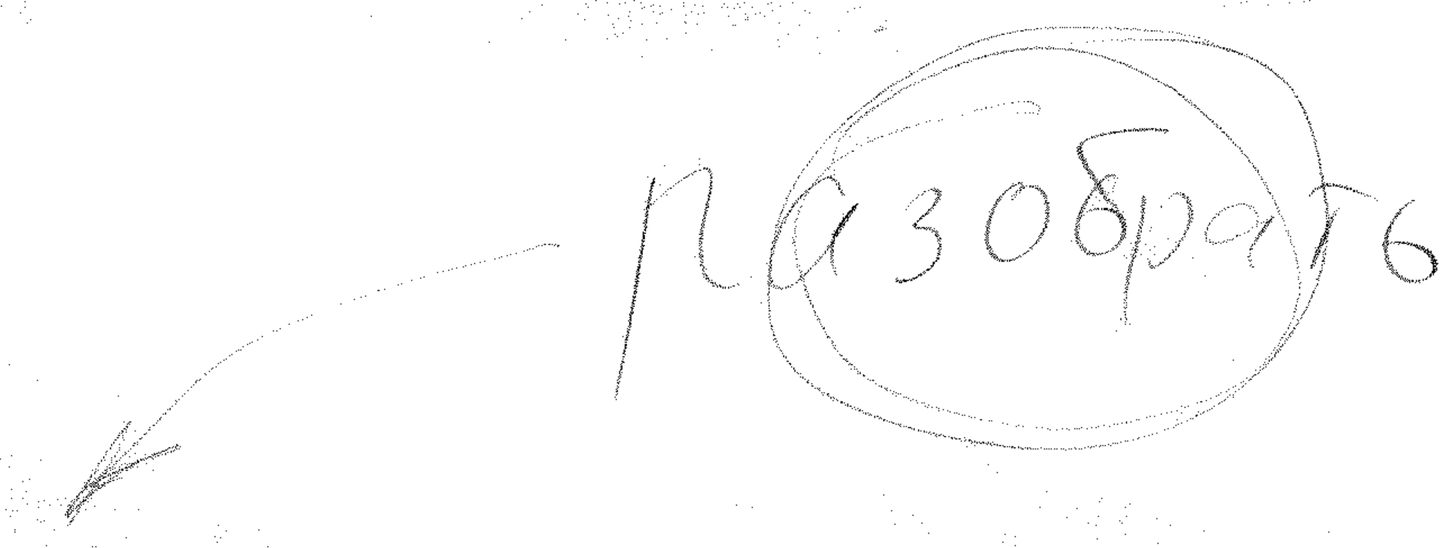
$$(1)\ a_1 c_2 = a_2 c_1, \qquad b_1 d_2 = b_2 d_1, \ (2)$$

$$a_1 d_2 + b_1 c_2 = a_2 d_1 + b_2 c_1.$$

Задание. **Показать, что эти соотношения равносильны равенствам**

$$\overbrace{\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}}^{(1)} = \overbrace{\frac{d_1}{d_2} = \frac{b_1}{b_2}}^{(2)}.$$

Вывод: **Итак, в задании функции L дробью никакой другой свободы кроме возможности умножения числителя и знаменателя на произвольное ненулевое число нет.**



3. Групповые свойства дробно-линейных преобразований

Рассмотрим суперпозицию дробно-линейных функций

$$L_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \qquad \text{и} \qquad L_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}.$$

Ее называют также **произведением** или **композицией** функций L_1 и L_2 и обозначают $L = L_2 L_1$.

$$w = L(z) = L_2[L_1(z)] =$$
$$\frac{a_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} = \frac{a_3 z + b_3}{c_3 z + d_3}.$$

Здесь

$$a_3 = a_2 a_1 + b_2 c_1, \qquad b_3 = a_2 b_1 + b_2 d_1, \qquad (x)$$

$$c_3 = c_2 a_1 + d_2 c_1, \qquad d_3 = c_2 b_1 + d_2 d_1. \qquad (xx)$$

Сопоставим функциям L_1, L_2 и L матрицы:

$$L_1 \longrightarrow A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \qquad L_2 \longrightarrow A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix},$$

$$L \longrightarrow A_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}.$$

Формулы (x) и (xx) означают, что композиции дробно-линейных функций L_1 и L_2 соответствует матрица A_3, являющаяся **произведением** $A_2 A_1$ матриц A_1 и A_2. Так как $\Delta_3 = \Delta_1 \Delta_2 \neq 0$, то $L_2 L_1$ — также дробно-линейная функция.

Вывод. Операция композиции на множестве дробно-линейных функций не выводит за пределы этого множества.

Свойства композиции

- Композиция любых (необязательно дробно-линейных) функций обладает свойством ассоциативности.

- Существует линейная функция

$$I(z) \equiv z,$$

композиция с которой не меняет никакую дробно-линейную функцию:

$$LI = IL = L \quad \forall L.$$

Записав эту функцию как

$$I(z) = \frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1},$$

видим, что ей соответствует единичная матрица

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

дробно

- **Для всякой линейной функции L существует обратная функция L^{-1},**

т.е.

$$LL^{-1} = L^{-1}L = I. \qquad (+)$$

Возьмем для L представление

$$L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

с определителем 1. Построим L^{-1} как функцию, матрица которой обратна матрице

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

т.е.

$$L^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}.$$

Соотношения (+) вытекают из матричных равенств

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_2.$$

Резюме. Множество дробно-линейных функций является (некоммутативной) группой относительно операции композиции. Эта группа изоморфна группе $SL_2(\mathbf{C})$ комплексных матриц 2-го порядка с определителями, равными единице (специальная линейная группа порядка 2 над полем $\mathbf{C}$).

$$W(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

4. Конформность

Пусть $w = L(z)$ — нецелая линейная функция, т.е.

$$c \neq 0.$$

Тогда

$$\operatorname{dom} L = \{z \neq \delta = -\frac{d}{c}\}.$$

Как описать область значений? Как область определения обратной ф-ии

Точка δ называется особой точкой преобразования (функции) L.

Так как $w = L(z)$ обладает обратной функцией

$$z = L^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a},$$

то

$$\operatorname{im} L = \operatorname{dom} L^{-1} = \{w \neq \frac{a}{c}\}.$$

Наличие dom L и im L ⇒ аналитичность? конформность

Производная функции L в каждой точке $z \in \operatorname{dom} L$ существует и равна

$$\frac{ad - bc}{(cz+d)^2} = \frac{\Delta}{(cz+d)^2},$$

⇒ т.к. существует и непрерывна то есть аналитичность

Отсутствие обращения в нуль производной дает локальную конформность

т.е. нигде не обращается в нуль. Локальная конформность в каждой точке и наличие обратной функции означают: Вывод:

Всякая дробно-линейная функция отображает свою область определения на область значений конформно.

разобрать?

При $z \to \delta = -\frac{d}{c}$ имеем $L(z) \to \infty$. Если $z \to \infty$, то $L(z) \to \frac{a}{c}$. Если нужно распространить определение линейной функции на всю плоскость $\overline{\mathbf{C}}$, то естественно положить

$$L(\delta) = \infty, \qquad L(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Теперь $w = L(z)$ отображает расширенную комплексную плоскость на себя и это отображение по-прежнему взаимно однозначно. Остается ли это отображение конформным?

Задание. Проверить, что доопределенная функция L обладает локальной конформностью в обеих точках δ и ∞:

- При исследовании поведения L в окрестности точки δ выполнить в плоскости w замену переменного $\zeta = \frac{1}{w}$. Убедиться, что полученная функция

$$\zeta = \frac{cz + d}{az + b}$$ } дробно-линейная функция

имеет ненулевую производную в точке $z = \delta$.

особая точка изменилась

- При исследовании поведения L в окрестности точки ∞ выполнить в плоскости z замену переменного $\xi = \frac{1}{z}$. Убедиться, что полученная функция

$$w = \frac{b\xi + a}{d\xi + c}$$

имеет ненулевую производную в точке $\xi = 0$.

Утв. **Вывод.** L конформно отображает расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbf{C}}$ на себя.

Утв. Справедливо и обратное утверждение: если аналитическая функция $w = f(z)$ конформно отображает расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbf{C}}$ на себя, то f является дробно-линейной функцией.

Конформность: 1) взаимная однозначность — обратная ф-ия

$L \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow L^{-1} \to \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \frac{1}{\Delta}$

или выразить по-тупому z через w

$z(a - cw) = dw - b$

$z = \frac{dw - b}{-cw + a} \Rightarrow$ все хорошо

Неподвижные точки дробно-линейного преобразования

Пусть

$$w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

где $c \neq 0$. Неподвижные точки преобразования $w = L(z)$ определяются условием

$$z = L(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

т.е. квадратным уравнением

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0.$$

Учитывая то, что известно о неподвижных точках целых линейных функций, приходим к следующему выводу:

Всякая дробно-линейная функция имеет не более двух неподвижных точек. Единственным исключением является тождественная функция $I(z) = z$, для которой все точки из $z \in \overline{\mathbf{C}}$ являются неподвижными.

Теорема 3.1 $\exists\ L(z),\ \Lambda(z)$ — дробно-линейные ф-ии такие, что

$$L(z_i) = \Lambda(z_i),\quad i = 1,2,3 \qquad (3.1)$$

для трех попарно различных точек z_1, z_2, z_3. Тогда

$$L(z) \equiv \Lambda(z)$$

(т.е. дробно-линейная ф-ия однозначно определяется значениями в трех попарно различных точках).

□ Умножим обе части в (3.1) на Λ^{-1} и положим $U = \Lambda^{-1}L$:

$\Lambda^{-1}L(z_i) = z_i$, $i = 1,2,3 \Rightarrow U(z_1) = z_1$ — тождественное преобр.

$\Rightarrow$ ф-ия имеет 3 неподвижные точки $z_1, z_2, z_3 \Rightarrow U$ — тождеств.

ф-ия $\Lambda^{-1}L = I \sim L = \Lambda$ ■

5. Инвариантность двойного отношения

Задача 3.1. Пусть заданы z_1, z_2, z_3 — конечные и попарно различ. числа и w_1, w_2, w_3 — конечные и попарно различные числа. Построить дробно-линейную ф-ию $w = L(z)$ такую, что

$$L(z_i) = w_i, \quad i = 1, 2, 3 \qquad (3.2)$$

□ Построить возможно — результат — неявное уравнение:

$$\frac{w_1 - w}{w_2 - w} : \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} = \frac{z_1 - z}{z_2 - z} : \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \qquad (3.3)$$

— это дробно-линейная ф-ия задание w от z единственная, т.к. для трех точек однозн.

является искомой ф-ией, поскольку при подстановке трех точек (z_1, w_1), (z_2, w_2), (z_3, w_3) уравнение обращается в тождество. ■

Опр. $\exists\, a, b, c, d$ — конечные попарно различные числа. Число $\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$ наз. **двойным отношением** чисел a, b, c, d и обозначается символом (a, b, c, d) — *инвариант дробно-линейных преобразований*

В таком случае результат задачи 3.1. можно переписать в виде:

$(w_1, w_2, w_3, w) = (z_1, z_2, z_3, z)$ — равенство двойных отношений

Теорема 3.2. Двойное отношение есть инвариант $\forall$ дробно-линейного преобразования;

или

$\exists\, w = L(z)$ — произвольная дробно-линейная ф-ия,
a, b, c, d — произвольная четверка конечных попарно разл. чисел,
$A = L(a),\ B = L(b),\ C = L(c),\ D = L(d)$

$\Rightarrow (a, b, c, d) = (A, B, C, D) \quad (*) \Rightarrow$ дробно-линейные ф-ии сохраняют двойные отношения

□ Будем рассм. L как решение задачи 3.1 для троек (a, b, d) и (A, B, D). Тогда L задается неявным уравнением (по задаче 3.1.):

$$\frac{w - A}{w - B} : \frac{D - A}{D - B} = \frac{z - a}{z - b} : \frac{d - a}{d - b}$$

Используем последнее соотношение: т.к. $L(c) = C$, то пара (c, C) должна удовлетворять этому уравнению. После подстановки этой пары получим равенство $(*)$. ■

Рассм. ослабленные требования, т.е. допустим возможность стремления точек к бесконечности, например $z_1 \to \infty$. Тогда отношение (3.3) упростится, поскольку один из множителей превратится в единицу.

В задаче 3.1. в каждой из троек может содержаться число $z_i = \infty$ и/и $w_j = \infty$. Тогда формула (3.3) по-прежнему решает задачу 3.1., если в ней заменить единицами разности, содержащие z_i или/и w_j

6. Круговое свойство

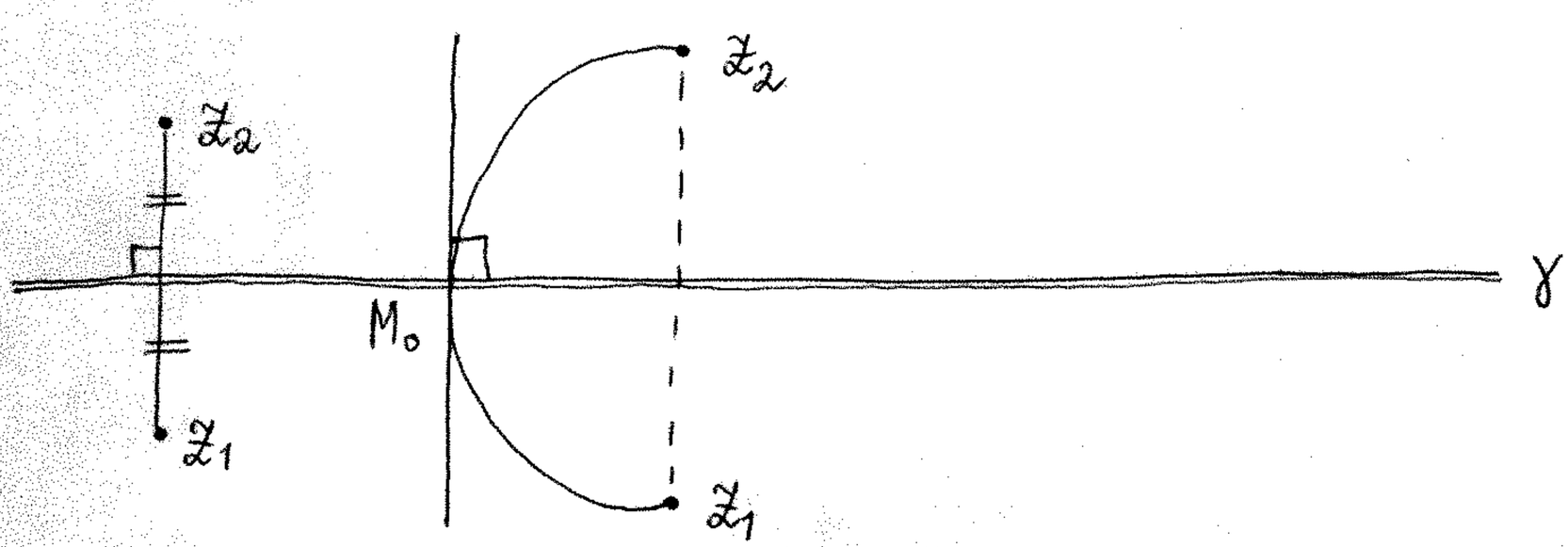
Теорема 3.3. *Образами прямой или окружности под действием дробно-линейной ф-ии является снова прямая или окружность.*

□ См. стр. 35 ■

7. Сохранение симметрии

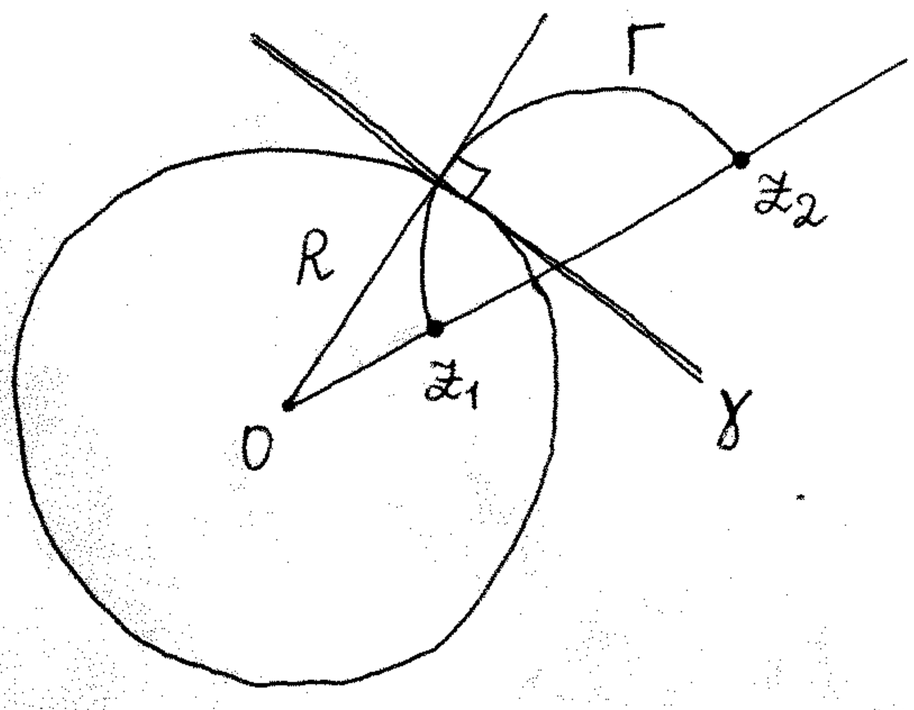
Теорема 3.4 $\exists\ \gamma$ – произвольная прямая или окружность на пл-ти $\mathbb{Z}$, $W = L(\mathbb{Z})$ – произв. д/л ф-ия. Если т. $\mathbb{Z}_1$ и $\mathbb{Z}_2$ симметричны отн. γ, то их образы $W_1 = L(\mathbb{Z}_1)$ и $W_2 = L(\mathbb{Z}_2)$ симметричны отн. линии $\Gamma = L(\gamma)$

Симметрия отн. прямой:



Точки $\mathbb{Z}_1$ и $\mathbb{Z}_2$ наз. **симметричными отн. γ**, если:
1. прямая, соединяющая $\mathbb{Z}_1$ и $\mathbb{Z}_2$, перпендикулярна γ и делится пополам точкой пересечения;
2. произвольная окружность, проведенная через $\mathbb{Z}_1$ и $\mathbb{Z}_2$, пересекает γ под прямым углом

Симметрия отн. окружности:



$\Rightarrow$ 1. $\mathbb{Z}_1$ – находится внутри окружности, $\mathbb{Z}_2$ – вне окружности

2. $O\mathbb{Z}_1 \cdot O\mathbb{Z}_2 = R^2$ (по т. о касательной к окружности)

3. $\mathbb{Z}_1$ и $\mathbb{Z}_2$ лежат на прямой, проходящей через центр окруж.

$\Rightarrow \gamma: |\mathbb{Z} - a| = R$

$$\mathbb{Z}_2 = a + \frac{R^2}{\overline{\mathbb{Z}_1 - a}}$$

$$(\mathbb{Z}_2 - a)(\overline{\mathbb{Z}_1 - a}) = R^2$$

□ Уравнение, описывающее и прямые, и окружности:

$$A(x^2+y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0 \quad (3.4)$$

а именно: $A = 0,\ B^2 + C^2 \neq 0$ – прямая

$A \neq 0,\ B^2 + C^2 - AD > 0$ – окружность

Покажем справедливость (3.4) для окружности:

$$\left(x^2 + 2\frac{B}{A}x + \frac{B^2}{A^2}\right) + \left(y^2 + 2\frac{C}{A}y + \frac{C^2}{A^2}\right) = \frac{B^2}{A^2} + \frac{C^2}{A^2} - \frac{D}{A} = \frac{B^2 + C^2 - AD}{A^2} = R^2$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{A}\right)^2 = R^2$$

Перейдем к плоскости комплексного переменного z через замены:
$x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
и введем обозначение $E = B + iC$

Перепишем (3.4) через введенные переменные:
$A z\bar{z} + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0$ (3.5)

$\Rightarrow$ $A = 0$, $E \neq 0$ – прямая
$A \neq 0$, $|E|^2 - AD > 0$ – окружность } (*)

Перейдем к непосредственно док-ву теоремы 3.3.

Покажем вначале, что круговое св-во выполнено для инверсии $w = \frac{1}{z}$.
$\exists\ \gamma$ – произвольная прямая или ок-ть на пл-ти z, Γ – её образ под действием инверсии.
Зададим γ ур-нием вида (3.5). Тогда Γ описывается уравнением:
$A\frac{1}{w\bar{w}} + \bar{E}\frac{1}{w} + E\frac{1}{\bar{w}} + D = 0 \sim Dw\bar{w} + Ew + \bar{E}\bar{w} + A = 0$ (3.6)
Осталось разобраться, какую линию описывает ур-ие. Возможны несколько случаев:

$D = 0$ ⟨ $A = 0$, $E \neq 0 \Rightarrow$ прямая
$A \neq 0$, по (3.5) $|E|^2 - AD = |E|^2 > 0 \sim E \neq 0 \Rightarrow$ прямая

$D \neq 0$ ⟨ $A = 0$, $E \neq 0 \Rightarrow |E|^2 - AD = |E|^2 > 0 \Rightarrow$ окружность
$A \neq 0$, $|E|^2 - AD > 0 \Rightarrow$ окружность

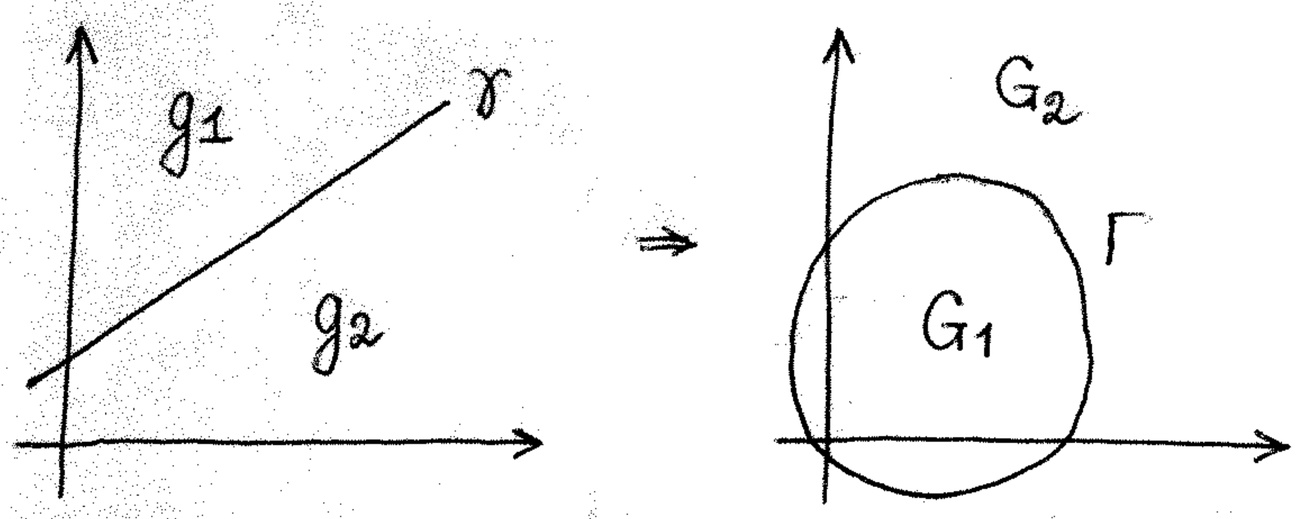
(Для вывода пользовались парностью из (*)).

Сведем все остальные случаи к доказанному.
$\exists\ w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ – произвольная д/л (нецелая) ф-ия, где $c \neq 0$
Преобразуем $L(z)$ как композицию трёх преобразований: $z \to z_1 \to z_2 \to w$
$L(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}$ (заметим, что $bc - ad = -\Delta$)
Искомые три преобразования:
1. $z_1 = L_1(z) = cz + d$
2. $z_2 = 1/z_1 = \Lambda(z_1)$
3. $w = \frac{a}{c} - \frac{\Delta\ (\text{определитель})}{c}$; $z_2 = L_2(z_2)$

$\Rightarrow L(z) = L_2 \Lambda L_1$
L_2 и L_1 – не меняют типа кривой γ
Λ (инверсия) – доказано выше ■

Замечание 1.
Всякая прямая или окружность, проходящая через особую точку, под действием ф-ии L переходит в прямую

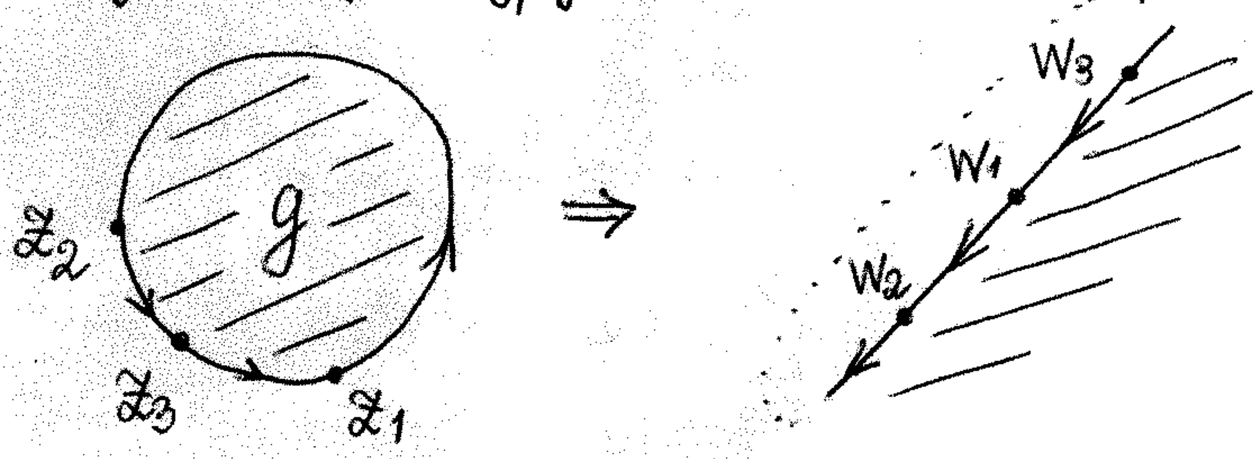
Замечание 2.



две разные полуплоскости
$\Rightarrow$ какая куда перейдет при отображении?

Это можно узнать через нахождение образов точек из g_1 и g_2, т.е. $L(x_1)$, $L(x_2)$, $x_1 \in g_1$, $x_2 \in g_2$ и выяснение местоположения отн. окружности.

Существует другой способ – отображение областей



Возьмем три точки z_1, z_2, z_3 так, чтобы при проходе по границе от z_1 к z_3 мы прошли бы через z_2. Двух точек недостаточно! Мы хотим получить область $g \Rightarrow$ когда идем от z_1 к z_3 область находится слева. Далее найдем образы этих точек и пойдем от z_1 к z_3 через z_2. Область, которая окажется слева – искомая.

Вернемся к симметричности:

Точная запись для точек z_1 и z_2, симметричных отн. окружности:

$$z_2 = a + \frac{R^2}{\overline{z_1 - a}}$$

Докажем т. 3.4:

□ Проведем через w_1 и w_2 прямую или окружность, которую обозн. Δ. Тогда линия $\delta = L^{-1}(\Delta)$ – образ Δ под действием обратной ф-ии, проходит через т. z_1 и z_2 и явл. прямой или окружностью. Т.к. z_1 и z_2 симм. отн. γ, то $\delta \perp \gamma$. В силу конформности образы пересекаются под прямым углом, т.е. $\Delta \perp \Gamma \Rightarrow$ т. W_1 и W_2 симм. отн. Γ.

Пример. Построить дробно-линейное преобразование, которое отображает круг $K_R: |z|<R$ в круг $K_R: |w|<R$ так, чтобы заданная точка $\alpha \in K_R$ перешла в т. $w_0=0$

Введем обозн. $\gamma_R: |z|=R$, $\Gamma_R: |w|=R$

Рассм. два случая:

① $\alpha=0 \quad 0\to 0$, т.е. α совпадает с центром исх. круга
$\infty \quad \infty\to\infty$ — неподвижная точка для ф-ии

Но только линейные ф-ии оставляют ∞ неподвижной (обычно переводят в т. $1/c$)

$\Rightarrow L(z)=\alpha z+\beta$

Т.к. $L(0)=0 \Rightarrow \beta=0 \Rightarrow L(z)=\alpha z$

Поскольку $|z|=R \to |w|=R \Rightarrow |\alpha|=1 \Rightarrow \alpha=e^{i\varphi}$

$\Rightarrow \boxed{L(z)=e^{i\varphi}z}$

② $\alpha\neq 0 \quad \alpha\to 0$, т.е. α не совпадает с центром исх. круга

$\alpha^*=\frac{R^2}{\bar\alpha} \quad \alpha^*\to\infty$

Эти условия с точностью до константы определяют вид ф-ии:

$L(z)=\lambda\frac{z-\alpha}{z-\alpha^*}=\left\{\begin{array}{l}\text{подставим}\\ \text{в-ия для } \alpha^*\end{array}\right\}=\lambda\frac{z-\alpha}{z-\frac{R^2}{\bar\alpha}}=$

↑ неизвестный множитель

$=\underbrace{-\lambda\bar\alpha}_{\mu}\frac{z-\alpha}{R^2-\bar\alpha z}=\mu\frac{z-\alpha}{R^2-\bar\alpha z}$ — возьмем модуль

Подставим в формулу $|w|=|\mu|\frac{|z-\alpha|}{|R^2-\bar\alpha z|}$ $\quad z=Re^{i\psi}\in\gamma$ — точка на исходной окружности

$|w|=|\mu|\frac{|Re^{i\psi}-\alpha|}{|R^2-\alpha Re^{i\psi}|}=\frac{|\mu|}{R}\cdot\frac{|R-\alpha e^{-i\psi}|}{|R-\bar\alpha e^{i\psi}|}=\frac{|\mu|}{R}=R,\ |\mu|=R^2$

Ответ в общем виде: $\boxed{L(z)=R^2e^{i\varphi}\frac{z-\alpha}{R^2-\bar\alpha z}}$

Чтобы избавиться от неоднозначности необходимо: $L'(\alpha)\in\mathbb{R}^+$ — значение производной в т. α есть действительное положит. число $\Rightarrow$ аргумент равен $0\Rightarrow$ кривые не должны поворачиваться.

8. Функция Жуковского

Опр. Функцией Жуковского наз. $W = \lambda(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

Исследуем ее по плану.

$\operatorname{dom}\lambda = \{z \neq 0\}$ $\quad \operatorname{im}\lambda = \mathbb{C}$

W – произв. $z^2 - 2Wz + 1 = 0$ $\quad \begin{cases} W = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \mid \cdot 2z \\ 2zW = z^2 + 1 \end{cases}$ $\Rightarrow z_1 z_2 = 1$

$\Downarrow$

если один прообраз лежит внутри круга, то другой вне

$\lambda'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) \Rightarrow \lambda(z) \in A(\operatorname{dom}\lambda)$

Исследуем на (локальную) конформность.

$z = \pm 1$ Если $z \neq \pm 1$, то $\lambda(z)$ – локально конформна

Опр. $\mathcal{F}$-ия $W = f(z) \in A(G)$, такая, что из $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$, наз. **однолистной** (т.е. каждое свое значение ф-ия принимает один раз), в противном случае — **многолистной**. Если f многолистна во всей об-ти G, но однолистна в подобласти $g \subset G$, то g наз. областью однолистности ф-ии f.

Применим к ф-ии Жуковского.

$\lambda(z)$, рассм. на всей области определения, двулистна – т.е. принимает одно значение в двух точках.

Поскольку $z_1 z_2 = 1$, то

$\left.\begin{matrix} |z| < 1 \\ |z| > 1 \end{matrix}\right\}$ области однолистности для $\lambda(z)$.

Другой областью однолистности является:

$\left.\begin{matrix} \operatorname{Im} z > 0 \\ \operatorname{Im} z < 0 \end{matrix}\right\}$

Исследуем, куда переходят об-ти однолистности. Но для начала распространим ф-ию Жуковского на всю комплексную область расширенную, т.е. $\lambda(0) = \infty = \lambda(\infty)$

Разобьем окружность на окр-ти с центром в исходной но с разными радиусами $\Rightarrow$ найдем образы $\Rightarrow$ просуммируем $\Rightarrow$ получим искомое (окружность = единичный круг)

$\gamma_r : |z| = r$

$z = r(\cos t + i\sin t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$

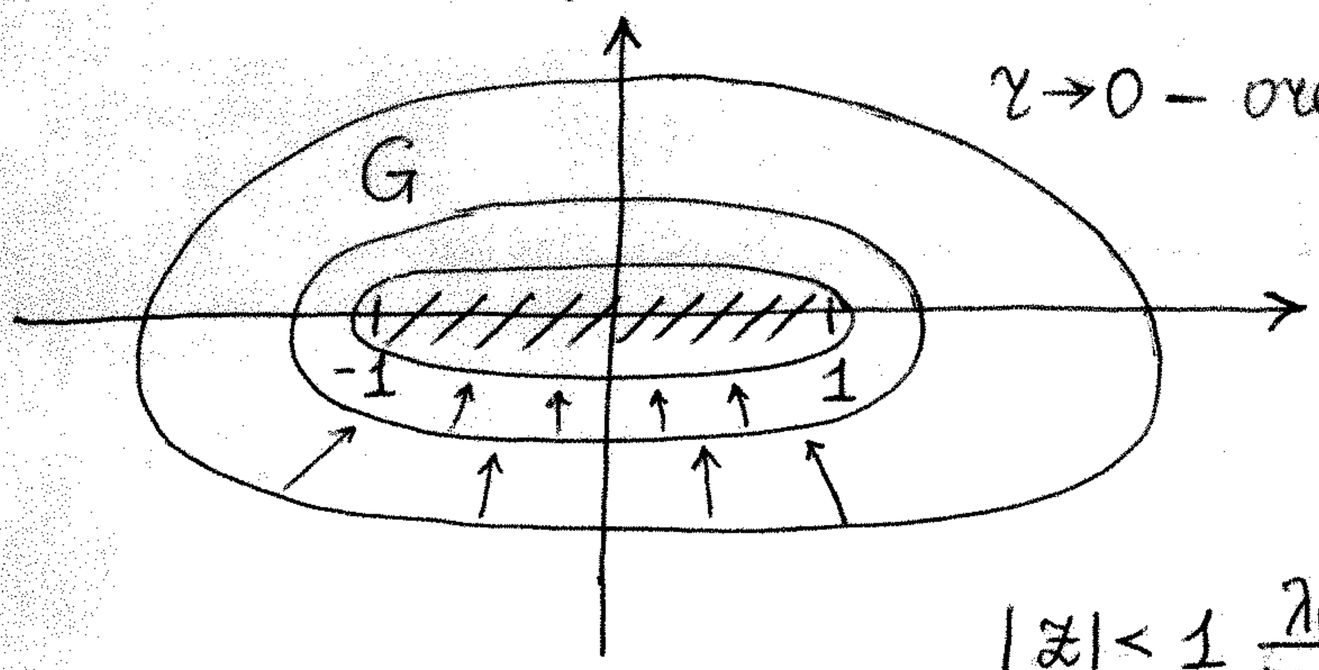
$\Gamma_r : W = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + r\right)}_{a}\cos t - i\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - r\right)}_{b}\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$W = u + iv \qquad u = a\cos t,\ v = -b\sin t$

Получили эллипс. Найдем фокусы:

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1 \Rightarrow$ фокусы $w_1 = -1$, $w_2 = 1$

$\Rightarrow$ эллипсы софокусны



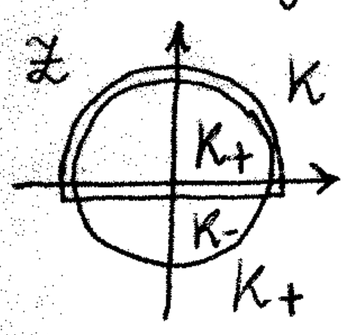
$r \to 0$ – очень большой эллипс

$r \to 1 \quad a \to 1$

G получается из компл. об-ти вырезом отрезка от -1 до 1

$|z| < 1 \xrightarrow[\text{конф.}]{\lambda(z)} G = \{ w \notin [-1, 1] \}$

Рассм. единичную окружность как сумму двух полуокружностей:



$\Rightarrow |z| < 1, \ \mathrm{Im}\, z > 0 \xrightarrow[\text{конформ.}]{\lambda(z)} \mathrm{Im}\, w < 0$

$|z| < 1, \ \mathrm{Im}\, z < 0 \xrightarrow[\text{конформ}]{\lambda(z)} \mathrm{Im}\, w > 0$

$|z| > 1, \ \mathrm{Im}\, z < 0 \xrightarrow[\text{конформ}]{\lambda(z)} \mathrm{Im}\, w < 0$

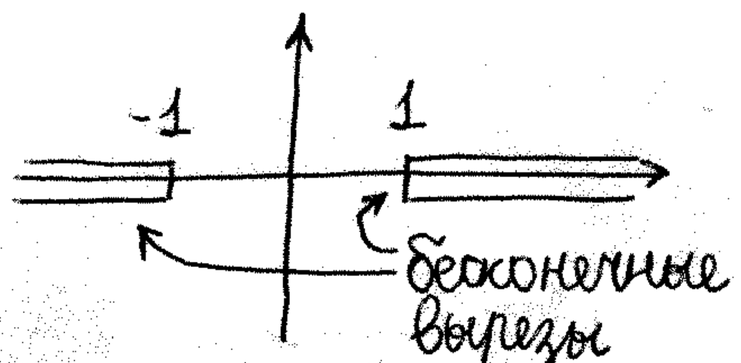
$|z| > 1, \ \mathrm{Im}\, z > 0 \xrightarrow[\text{конформ}]{\lambda(z)} \mathrm{Im}\, w > 0$

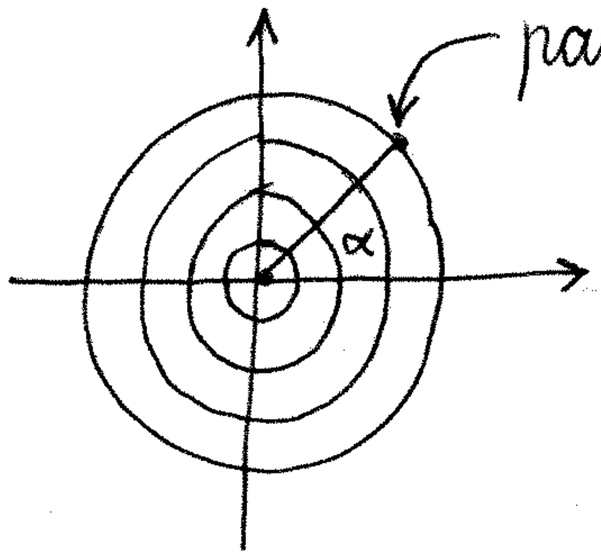
$\{ \mathrm{Im}\, z > 0 \} = K_+ \cup K_- \cup \tilde{\gamma}$ ← верхняя окружность без граничных точек

$K_+ \to \mathrm{Im}\, w < 0$

$K_- \to \mathrm{Im}\, w > 0 \quad \Rightarrow \mathrm{Im}\, z > 0 \xrightarrow[\text{конф.}]{\lambda(z)} \mathcal{D}$

$\tilde{\gamma} \to (-1, 1)$





рассм. радиус в первой ч-ти

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$r_\alpha : z = t(\cos\alpha + i\sin\alpha), \ 0 < t < 1$

$R_\alpha : w = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + t\right)\cos\alpha - i\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - t\right)\sin\alpha$

$w = u + iv, \quad u = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + t\right)\cos\alpha, \quad v = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - t\right)\sin\alpha,$
$0 < t < 1$

В результате:

$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t} + t\right)^2 \qquad \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t} - t\right)^2$

$\Rightarrow \boxed{\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1}$

каноническое ур-ие гиперболы с полуосями $|\cos\alpha|, |\sin\alpha|$
фокусное расстояние $c^2 = a^2 + b^2 = 1$ не зав. от $\alpha \Rightarrow$ софокусны

9. Показательная функция $e^z = \exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$

Эта ф-ия получила название exp, потому что производная во всех точках совпадает с самой ф-ией:
$(e^z)' = e^z$

Кроме того ф-ия аналитична во всех точках, т.е. целостная.

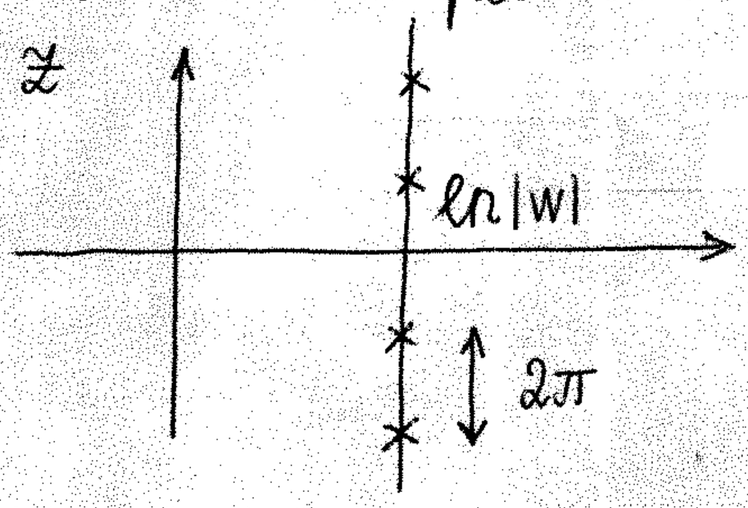
Добавим другие сведения:
$\mathrm{dom}\, e^z = \mathbb{C}$

$\mathrm{Im}\, e^z = \{z \neq 0\}$
□ $\forall w \neq 0 \quad w = e^z, \quad |w| = e^x \Rightarrow x = \ln|w|$
$\mathrm{Arg}\, w \ni y$
$\Rightarrow$ можем разрешить уравнение, причем решений бесконечно много
$\boxed{z = \ln|w| + i\,\mathrm{Arg}\, w}$ – натуральные логарифмы числа w $= \mathrm{Ln}\, w$
$\Rightarrow \forall w \neq 0$ мы найдем прообразы ■

Каждое значение w ф-ия z принимает на счетном множестве $\Rightarrow$
e^z – счетнолистная ф-ия

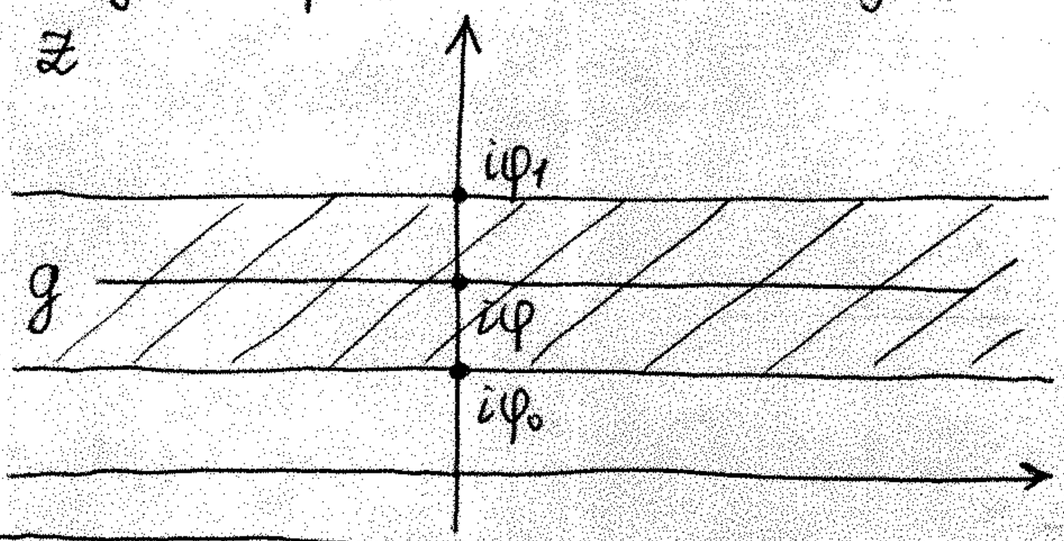
Комплексная экспонента является периодической ф-ией:
$e^{z+2\pi i} = e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)) = e^z$
$x \quad i(y+2\pi)$

Расположение решений



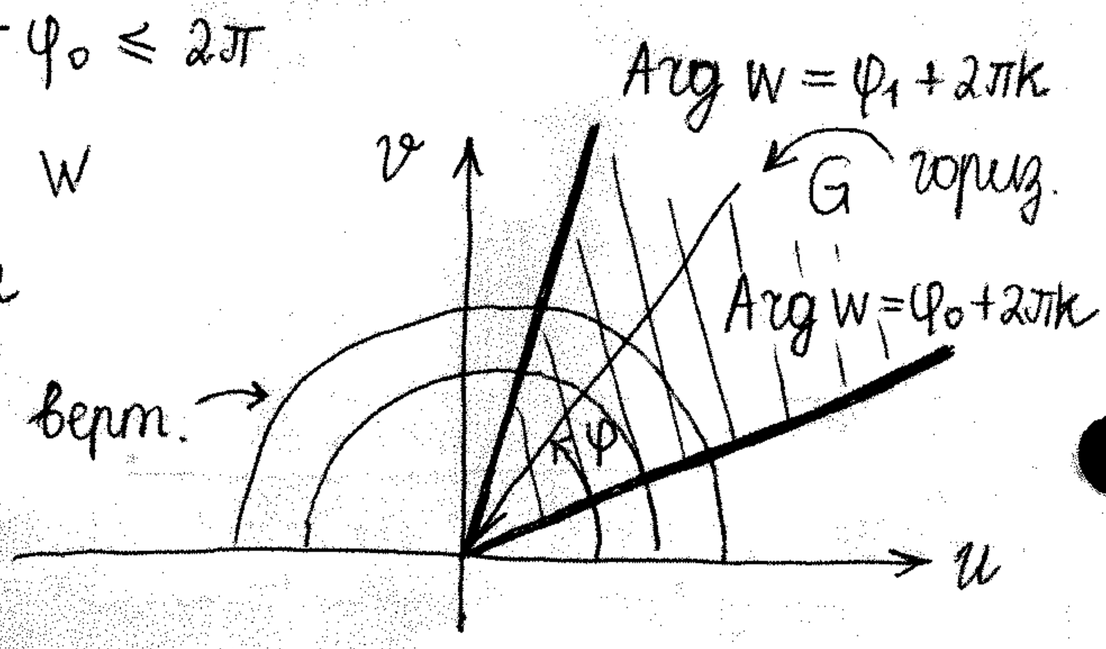
Присутствует периодичность по вертикали

Найдем простые области однолистности:



Никакие два значения не попадут в полосу $\Rightarrow$ полосу можно считать областью однолистности, т.е. обл. g

$\varphi_1 - \varphi_0 \leq 2\pi$



$\boxed{\text{Рассм. } \varphi_0 < \varphi < \varphi_1 \quad \ell: z = t + i\varphi, \ -\infty < t < +\infty}$ – горизонтальные прямые

$e^z = e^t(\cos\varphi + i\sin\varphi), \ -\infty < t < +\infty$
– описывает множество точек лучей с углом наклона φ, не включая точку 0

$\Rightarrow$ В итоге полоса g переходит в сектор с границами $\varphi_0 + 2\pi k$ и $\varphi_1 + 2\pi k$ (наличие $+2\pi k$ — важно), т.е.

$g \xrightarrow[\text{конф}]{e^z} G$

Теперь рассм. вертикальные линии:

$z = c + it, \ -\infty < t < \infty$

$w = e^z = e^c(\cos t + i \sin t)$

Два ортогональных семейства, т.е. вертикальные и горизонтальные прямые, переходят под действием показательной ф-ии в концентрические окружности с центром в $(0,0)$ и лучи, т.е. остаются ортогональными — проявление конформности.

Во что переходят прямые, не параллельные координатным осям?
В логарифмические кривые с уравнением:

$\rho = Ce^{k\varphi}$, C, k — константы, $C > 0$

10. Тригонометрические и гиперболические ф-ии

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$
$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

} верхний ряд — ук экспонент ⇒ наследуют св-во аналитичности, т.е. целые

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$
$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$$

} нижний ряд

Кроме аналитичности верхний ряд наследует периодичность, причем период $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$ — $2\pi i$, а у $\cos z$ и $\sin z$ — 2π.

Проверим для косинуса совпадение на вещ. прямой с вещ. косинусом:

$z = x$ $\quad e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$

$\cos z = \cos x$

⇒ сохраняются нули:

$z = \frac{\pi}{2} + \pi k$ — нули $\cos z$ для $z \in \mathbb{R}$

Как ведут себя ф-ии вне комплексной прямой?

Показать: $z = x + iy$

$$|\cos z| = {}_{+}\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$$

$$|\sin z| = {}_{+}\sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x}$$

Воспользуемся рав-ми для оценки модуля снизу вне вещественной прямой

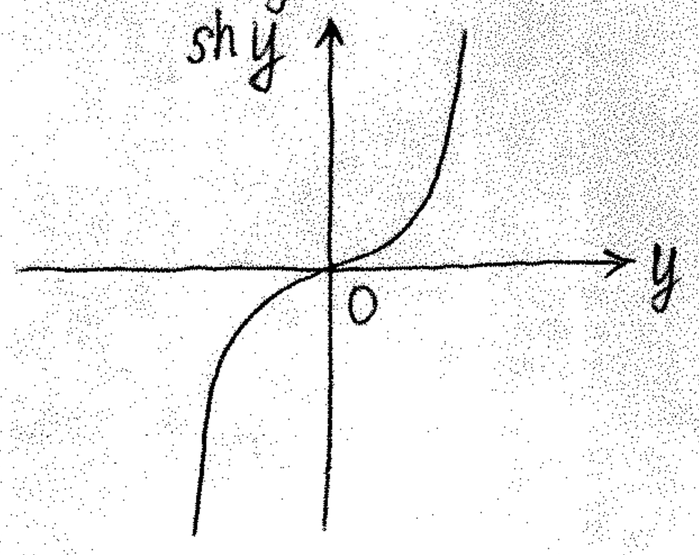
Оценка сверху: $|\cos z| \leq \operatorname{ch}$

Оценка снизу: $|\cos z| \geqslant {}_{+}\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1} = |\operatorname{sh} y|$ — по осн. тригонометр. тождеству $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$

Оценка сверху: $|\sin z| \leqslant \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1} = \operatorname{ch} y$ (ОТТ) — задали $\sin x$ — max значение

Оценка снизу: $|\sin z| \geqslant |\operatorname{sh} y|$

Что показывают оценки? $\sin z$ и $\cos z$ — целые неограниченные ф-ии, в отличие от вещественных $\sin$ и $\cos$



Кроме того, нигде кроме вещественной оси функции в ноль не обращаются

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

Между тригонометрическими и гиперболическими ф-циями есть простая связь:

$ch\, z = \cos(iz)$

$sh\, z = -i \sin(iz)$

Теперь расам. ф-ии нитного ряда

Аналитические, периодические, однако период сокращается:
У tgx и $ctg\, x - \pi$, $th\, z$ и $cth\, z - \pi i$
Нули только на вещественной (tg, ctg) и комплексной (th, cth) прямой

Формулы дифференцирования сохраняются:
$(\cos z)' = -\sin z$
$(\sin z)' = \cos z$

Все изучаемые ф-ии можно представить в виде композиции ранее изученных ф-ий: тригонометрическая, Жуковского, дробно-линейная.
Например: $\cos z = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$, где $t = e^{iz}$

Показать, что:



$g \xrightarrow[\text{конф}]{\cos z} G$

Не хватило времени, чтобы поговорить об обратных ф-иях.

Глава IV. Интегрирование ф-ий комплексного переменного

Примем соглашение: т.к. в дальнейшем будет процесс интегрирования, обычной непрерывности будет недостаточно ⇒ требуем кусочную гладкость от кривой L.

1. Понятие интеграла

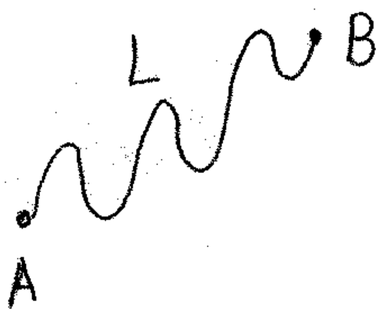
Пусть L — спрямляемая кривая с параметрическим уравнением

$$z = \lambda(t) = x(t) + iy(t), \qquad \alpha \le t \le \beta.$$

Достаточное условие спрямляемости: **$\lambda(t)$ — кусочно-гладкая кривая, т.е. $x(t)$ и $y(t)$ — кусочно-гладкие функции.**

Для определенности выберем на L направление, соответствующее возрастанию параметра. Тогда точку $z_0 = \lambda(\alpha)$ назовем началом кривой L, а точку $\lambda(\beta)$ — ее концом. Ту же кривую с противоположным направлением будем обозначать через $-L$.

$\lambda'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$
Не должно быть особых точек, т.е. $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$, $\lambda'(t_0) = 0$ — таких t_0 – нет!



$L = AB$ – в направлении возрастания параметра
$-L = BA$

Пусть

$$l_0 = \alpha < t_1 < l_2 < \cdots < l_n = \beta \qquad (1)$$

опр. разбиение

произвольное разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$,

$$\delta = \max_{1 \le k \le n} \{t_k - t_{k-1}\}$$

— диаметр этого разбиения. Разбиению (1) соответствует разбиение T кривой L на дуги

$$l_1, l_2, \ldots, l_n.$$

Дуга l_k начинается в точке $z_{k-1} = \lambda(t_{k-1}) = x_{k-1} + iy_{k-1}$, а кончается в точке $z_k = \lambda(t_k)$.

□ $S(t_k, \tau_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} (u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) = \sum_{k=1}^{n} (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) \oplus$

$\zeta_k = \xi_k + i\eta_k,$

$f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k) = u_k + iv_k$

$\oplus\, i\sum_{k=1}^{n} (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k) \to I = \int_L u\,dx - v\,dy + i\int_L v\,dx + u\,dy,\ \delta \to 0$ ■

Пусть в точках кривой L определена функция $w = f(z)$. Выбрав в каждом сегменте $t_{k-1} \le t \le t_k$ произвольное значение τ_k, получим на дуге l_k точку $\zeta_k = \lambda(\tau_k)$. Положим $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ и составим комплексную интегральную сумму

$$S(t_k, \tau_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k, \text{ где } \Delta z_k = z_k - z_{k-1} = \Delta x_k + i\Delta y_k$$

соответствующую разбиению T.

Если существует предел сумм $S(t_k, \tau_k)$ при $\delta \to 0$, не зависящий от последовательности разбиений и выбора точек $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ на дугах этого разбиения, то этот предел обозначается символом

$$S(t_k, \tau_k) \to I = \int_L f(z)dz$$

и называется интегралом от функции $f(z)$ вдоль кривой L (в выбранном направлении). В этом случае об f говорят, что она интегрируема по L.

Теорема 4.1

~~Теорема 1.~~ *Пусть L – кусочно-гладкая кривая без особых точек. Если функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ определена и непрерывна вдоль L, то f интегрируема по L и*

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int_L v(x, y)dx + u(x, y)dy.$$

2. Интегральная теорема Коши

Кривая $L : z = \lambda(t),\ \alpha \le t \le \beta$, называется замкнутой, если ее начальная и конечная точки совпадают, т.е.

$$\lambda(\alpha) = \lambda(\beta).$$

значения отличаются от граничных

Если точка $z_0 \in L$ такова, что

$$z_0 = \lambda(t_1) = \lambda(t_2), \qquad \{t_1, t_2\} \neq \{\alpha, \beta\},$$

то z_0 называется кратной точкой кривой L.

Кривая, не имеющая кратных точек, называется простой или жордановой кривой.

Замкнутая жорданова кривая называется контуром. Интеграл от функции $f(z)$ по контуру Γ часто называют контурным интегралом и обозначают символом

$$\oint_\Gamma f(z).$$

Свойства:

① $\int_L f\,dz = \int_{-L} f\,dz$

② $L = L_1 \cup L_2 \qquad \int_L f\,dz = \int_{L_1} f\,dz + \int_{L_2} f\,dz$

③ $\int_L (c_1 f_1 + c_2 f_2)\,dz = c_1 \int_L f_1\,dz + c_2 \int_L f_2\,dz$

④ $\left|\int_L f\,dz\right| \le \int_L |f|\,d\sigma$

□ $|S(t_k, \tau_k)| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)| \cdot |\Delta z_k| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\sigma_k$

④ $\left|\int_L f(z)dz\right| \le M \cdot$ длина L

где $M = \max_{z \in L} |f(z)|$

⑤ $L: z = \lambda(t),\ \alpha \le t \le \beta,\ dz = \lambda'(t)dt$

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[\lambda(t)]\,\lambda'(t)dt$$

См. пример на стр. 49

Строго доказывается в курсах топологии

Теорема 2 (Жордан). *Всякая замкнутая жорданова кривая* Γ *делит плоскость* $\mathbf{C}$ *на две различные области, общей границей которых она является. При этом одна из областей ограничена. Она называется* **внутренностью** Γ *и обозначается* $\operatorname{int}\Gamma$ *(от interior). Вторая область не ограничена, называется* **внешностью** Γ *и обозначается* $\operatorname{ext}\Gamma$ *(от exterior).*

Положительным направлением обхода контура Γ считается то, при котором область $\operatorname{int}\Gamma$ остается слева от наблюдателя, движущегося по Γ. В этом случае для контурного интеграла используется обозначение

$$\oint_{\Gamma+} f(z).$$

Если движение по Γ происходит в противоположном направлении, то пишут

$$\oint_{\Gamma-} f(z).$$

Область G называется односвязной, если для любого контура γ, принадлежащего G, внутренность γ также принадлежит G. Если это условие не выполнено хотя бы для одного контура, то область G называется многосвязной.

Теорема 3 (Основная теорема). *Пусть область D ограничена контуром C, а функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в замкнутой области $\overline{D}$ и имеют в D непрерывные частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$. Тогда справедлива формула Грина*

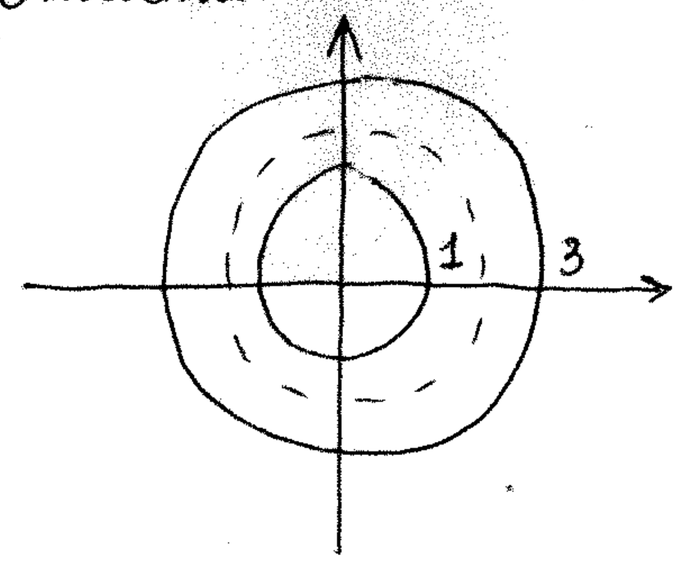
$$\oint_{C-} Pdx + Qdy = \int\int_{\overline{D}} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx\,dy$$

при условии, что двойной интеграл в правой части существует хотя бы как несобственный.

Интегральная теорема Коши: $\exists\ f(z) \in A(G)$, контур $\Gamma \subset G$, $\text{int}\,\Gamma \in G$.
Тогда:
$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

□ Запишем ф-ию в алгебраической форме: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$
Вспомним, что интеграл по $\forall$ кривой, в данном случае по Γ, тоже можно записать в алгебраической форме:
$$\oint_{\Gamma+} f(z)\,dz = \oint_{\Gamma+} \underset{P}{u}dx - \underset{Q}{v}dy + i\oint_{\Gamma+} \underset{P}{v}dx + \underset{Q}{u}dy$$
Контур со своей внутренностью лежит в области $\Rightarrow$ применим к каждому интегралу основную теорему, т.к. выполняются все условия, а именно формулу Грина. Обозначим $\bar{D} = \text{int}\,\Gamma \cup \Gamma$ — область + контур. Тогда (выбрали полож. направление — не влияет на результат)
$$\oint_{\Gamma+} f(z)\,dz = \iint_{\bar{D}} (-v_x' - u_y')\,dx\,dy + i\iint_{\bar{D}} (u_x' - v_y')\,dx\,dy$$
т.к. ф-ии аналитичны, то выполняется условие Коши-Римана, а именно:
$$-v_x' - u_y' = 0\ ;\ u_x' - v_y' = 0$$
Подынтегральные ф-ии равны нулю $\Rightarrow$ интегралы равны 0, ч.т.д. ■

Пример. G — область с круговым кольцом в центре $(0,0)$. Пример покажет важность требования о принадлежности контура к области.



$G: 1 < |z| < 3$ — двусвязная область
$f(z) = \frac{1}{z}$
$\gamma: |z| = 2$
$\oint_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$ (см. пример на стр.)
Внутренность контура не вся принадлежит области ($1 > |z|$) $\Rightarrow$ теорема не работает

Следствие. $\exists$ G — односвязная область, $f(z) \in A(G)$, γ — произвольный контур из G. Тогда:
$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0$$
(говорить о принадлежности внутренности не нужно, потому что это обеспечивается односвязностью)

Пример. Вычислить $I = \int \frac{dz}{z-a}$ ⊖

$f(z) = \frac{1}{z-a}$; $|z-a| = \rho$

$z = a + \rho e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$dz = \rho e^{it} \cdot i dt$

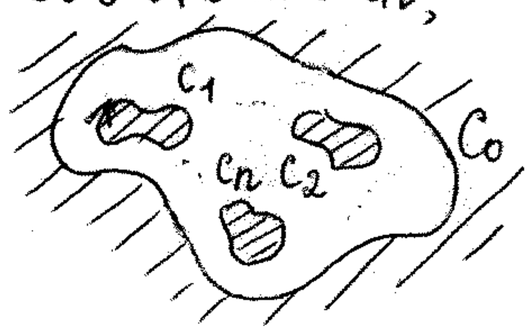
⊖ $\int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it} dt}{\rho e^{it}} = 2\pi i$

Обобщенная теорема Коши. ∃ G – односвязная область, ограниченная контуром C, $f(z) \in A(G) \cap C(\bar{G})$ (и аналит., и непрерывная). Тогда:

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

□ Док-во как и в интегральной теореме Коши, но двойные интегралы нужно понимать как несобственные. ■

Опр. **Составной контур** — объединение контуров $C = C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_n$, причем 1) $\forall\ C_i \subset \operatorname{int} C_0$ $(1 \leq i \leq n)$;
2) $C_i \subset \operatorname{ext} C_j$ $(i, j > 0;\ i \neq j)$
т.е. не пересекаются и не лежат один в другом



Опр. Область G, границей которой является составной контур $C = C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_n$, наз. **(n+1)-связной**

Опр. **Положительным направлением обхода составного контура** C, являющегося границей области G, считается тот, при котором наблюдатель, движущийся по C, видит G слева от себя

$$\Rightarrow \oint_{C^+} f\,dz = \oint_{C_0^+} f\,dz + \oint_{C_1^-} f\,dz + \dots + \oint_{C_n^-} f\,dz$$

Теорема о составном контуре. ∃ G – область, ограниченная составным контуром $C = C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_n$, $f(z) \in A(G) \cap C(\bar{G})$. Тогда:

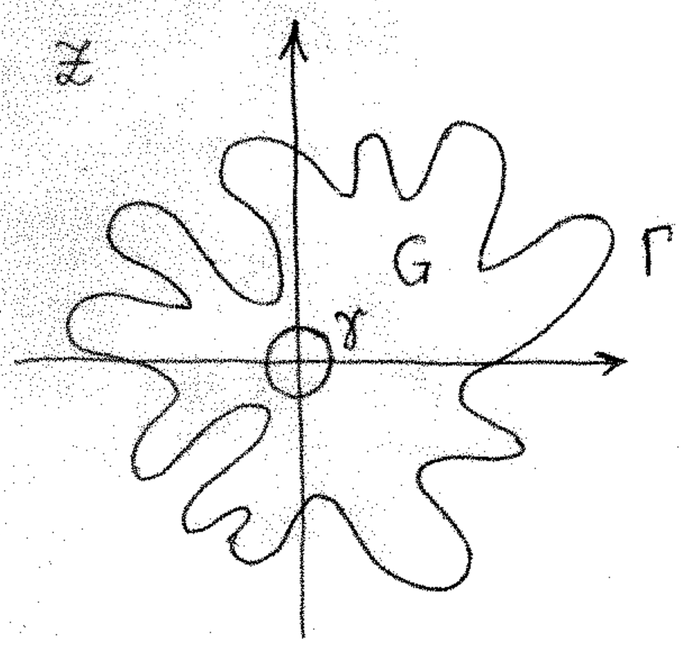
$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

□ Док-во остается прежним, т.к. основная теорема верна для областей с составной границей ■

$$\oint_{C^+} f\,dz = \oint_{C_0^+} f\,dz + \oint_{C_1^-} f\,dz + \dots + \oint_{C_n^-} f\,dz = 0 \Rightarrow \text{сгруппируем слагаемые}$$

$$\boxed{\oint_{C_0^+} f\,dz = \oint_{C_1^+} f\,dz + \dots + \oint_{C_n^+} f\,dz}$$

Пример. z



$$f(z) = \frac{1}{z}$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z} = ?$$

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{dz}{z} = \oint_{\gamma^+} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

3. Первообразная и неопределенный интеграл

Опр. $\exists\ f(z) \in C(G)$. Φ-ия $F(z) \in A(G)$ наз. первообразной для $f(z)$, если $F'(z) = f(z)\ \forall\ z \in G$. Совокупность всех первообразных ф-ий $f(z)$ в обл. G наз. неопределенным интегралом этой ф-ии.

Условия независимости криволинейного интеграла от пути

Пусть G — область на декартовой плоскости переменных x и y, в которой непрерывны функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Следующие три условия эквивалентны:

- **Для любой замкнутой кривой $L \subset G$ справедливо**

$$\oint_L P dx + Q dy = 0.$$

- **Для любых точек $A, B \in G$ значение интеграла**

$$\int_L P dx + Q dy$$

не зависит от (кусочно-гладкой) кривой $L \subset G$, соединяющей точки A и B.

- **Существует непрерывно дифференцируемая в G функция $U(x, y)$ такая, что**

$$dU = P dx + Q dy,$$

откуда следует, что

$$\int_{AB} P dx + Q dy = U(B) - U(A).$$

$\Phi(z) = F(z) + C$ — неопределенный интеграл

Докажем, что всякая первообразная может быть получена из фиксированной:

$\exists\ \Phi(z)$, $F(z)$ — две первообразных для $f(z)$ в G

$W(z) = \Phi(z) - F(z)$

$W'(z) = \Phi'(z) - F'(z) = f(z) - f(z) \equiv 0$ в G

$W(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$W'(z) \equiv 0 \Rightarrow u'_x = u'_y = v'_x = v'_y \equiv 0$ в G

$u(x,y) = C_1$, $v(x,y) = C_2$ $\quad W(z) = C = C_1 + iC_2 \Rightarrow \Phi(z) = F(z) + C$ ■

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L u\,dx - v\,dy + i\int_L v\,dx + u\,dy$$

Следующие три условия эквивалентны:

1) (C-свойство) для $\forall$ замкнутой кривой L $\oint_L f(z)\,dz = 0$ т.е. интеграл по замкнутой кривой равен 0

2) $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$ является функцией только от z

   $z_0, z \in G$

   ← потенциальные функции

3) $\exists\ U(x,y), V(x,y)$ – непр. дифф. в G и такие, что:

   $dU = u\,dx - v\,dy$

   $dV = v\,dx + u\,dy$

Теорема о первообразной. $\exists\ f(z) \in C(G)$ и обладает в G C-свойством.
Тогда:

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = F(z) \in A(G)$$

$$F'(z) = f(z)\ \ \forall z \in G$$

□ Представим f в алгебраической форме: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} u\,d\xi - v\,d\eta + i\int_{z_0}^{z} v\,d\xi + u\,d\eta$$

C-свойство позволяет утверждать, что для $\forall$ дифф. ур-ия найдется потенциал:

$U(x,y),\ V(x,y)$

$$\left.\begin{aligned} dU &= u\,dx - v\,dy \\ dV &= v\,dx + u\,dy \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_{z_0}^{z} u\,d\xi - v\,d\eta = U(x,y) - U(x_0,y_0)$$

Выберем для обоих интегралов потенциалы $U(x,y)$ и $V(x,y)$ так, чтобы

$$\int_{z_0}^{z} u\,d\xi - v\,d\eta = U(x,y),\quad \int_{z_0}^{z} v\,d\xi + u\,d\eta = V(x,y)$$

$z = x + iy$

$\Rightarrow F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$, причем $U_x' = u$, $U_y' = -v$

$V_x' = v$, $V_y' = u$

$\Rightarrow$ выполняются условия Коши-Римана: $U_x' = V_y'$, $U_y' = -V_x'$

$F(z)$ имеет непр. частные производные, подчиняющиеся условиям(CR)

$\Rightarrow F(z) \in A(G)$

$F'(z) = U_x' + iV_x' = u + iv = f(z)\ \ \forall z \in G$ ■

Замечание. Условие теоремы о первообразной выполнены, в частности, если G – односвязная область и $f(z) \in A(G)$.

Вернемся к неопределенному интегралу:

$$\Phi(z) = F(z) + C = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta + C \quad \text{(выражение из доказанной теоремы)}$$

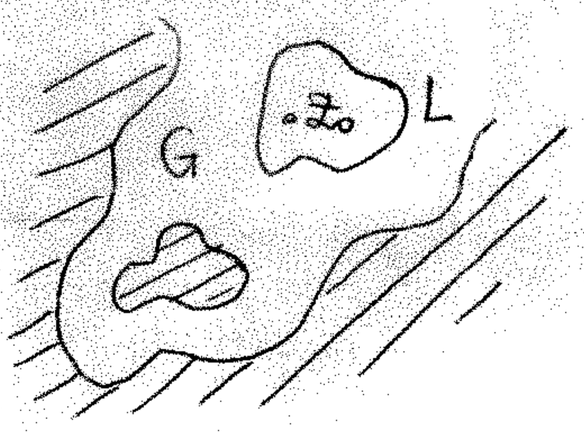
Выясним смысл константы.

Положим $z = z_0$:

$$\Phi(z_0) = \int\limits_{z_0}^{z_0} f(\zeta)\,d\zeta + C = C$$

$$\boxed{\Phi(z) - \Phi(z_0) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta}$$ — комплексная версия формулы Ньютона – Лейбница

4. Интегральная формула Коши



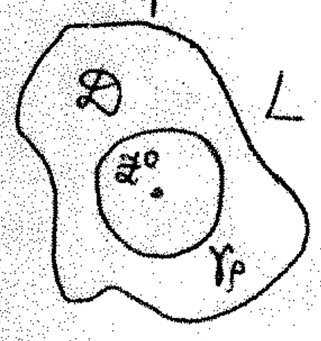
$f(z) \in A(G)$
G – незамкнутая область
$L \subset G$, $\operatorname{int} L \subset G$

$$f(z_0) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz}_{\text{интеграл Коши}}$$

Знание аналитической ф-ии на контуре однозначно определяет ф-ию внутри контура.

Докажем ф-лу Коши:

□ Построим окружность $\gamma_\rho : |z - z_0| = \rho$ так, чтобы $\gamma_\rho \subset \operatorname{int} L$



Рассм. 2-связную область D, ограниченную составным контуром $L \cup \gamma_\rho$. По теореме о составном контуре:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Как будет вести себя формула при $\rho \to 0$? Покажем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - f(z_0) \to 0 \text{ при } \rho \to 0$$

Преобразуем $\oint\limits_{\gamma_\rho^+} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz$ (поделим на $2\pi i$ и умн. на $f(z_0)$)

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint\limits_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz \right| \leqslant$$

Используем грубую оценку: $\left| \int\limits_L f(z)\, dz \right| \leqslant \max\limits_{z \in L} |f(z)| \cdot \text{длина } L$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{z \in \gamma_\rho} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{\underbrace{|z - z_0|}_{=\rho}} \cdot 2\pi\rho = \max_{z \in \gamma_\rho} |f(z) - f(z_0)| \to 0,\ \rho \to 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \xrightarrow[\rho \to 0]{} f(z_0) \quad \blacksquare$$

Замечание 1. $\exists\, G$ – односвязная обл., ограниченная простым контуром C, $f(z) \in A(G) \cap C(\overline{G})$.
Тогда для $\forall$ точки $z_0 \in G$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Замечание 2. $\exists\, G$ – $(n+1)$-связная обл., огр. составным контуром $C = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_n$, $f(z) \in A(G) \cap C(\overline{G})$. Тогда: $z_0 \in G$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Замечание 3. $\exists$ G есть круг $|z-z_0|<R$, $\gamma_R: |z-z_0|=R$

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_R^+}\frac{f(z)}{z-z_0}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(z_0+Re^{i\varphi})}{Re^{i\varphi}}Re^{i\varphi}i\,d\varphi \ominus$$

$z=z_0+Re^{i\varphi}$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$

$dz=Re^{i\varphi}i\cdot d\varphi$

$$\ominus\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\varphi})\,d\varphi$$ — формула среднего значения

5. Интегралы, зависящие от параметра

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $\Pi = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ и имеет на нем непрерывную производную $f'_y(x,y)$. Тогда интеграл*

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

является дифференцируемой функцией от y на $[c,d]$ и его производная может быть вычислена по правилу Лейбница

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx.$$

Обобщение теоремы 1

Теорема 2. *Пусть функция $f(x,y_1,\dots,y_m)$ непрерывна на параллелепипеде $\Pi_m = \{a \le x \le b,\ c_i \le y_i \le d_i\ (i = 1,2,\dots,m)\}$ и имеет на нем непрерывные производные $f'_{y_i}(x,y_1,\dots,y_m),\ i = 1,2,\dots,m$. Тогда интеграл*

$$I(y_1,\dots,y_m) = \int_a^b f(x,y_1,\dots,y_m)dx$$

имеет непрерывные частные производные по переменным $y_1,\dots,y_m$ в области $c_i \le y_i \le d_i\ (i = 1,2,\dots,m)$, которые могут быть вычислены по правилу Лейбница

$$I'_{y_i}(y_1,\dots,y_m) = \int_a^b f'_{y_i}(x,y_1,\dots,y_m)dx,\ i = 1,2,\dots,m.$$

Теорема 3. *Пусть функции $P(x,y,z_1,\dots,z_m)$ и $Q(x,y,z_1,\dots,z_m)$ непрерывны на множестве $\{(x,y) \in L,\ c_i < z_i < d_i\ (i = 1,2,\dots,m)\}$ и имеют на нем непрерывные производные $P'_{z_i}(x,y,z_1,\dots,z_m)$ и $Q'_{z_i}(x,y,z_1,\dots,z_m)$ $(i = 1,2,\dots,m)$. Тогда криволинейный интеграл*

$$I(z_1,\dots,z_m) = \int_L Pdx + Qdy$$

имеет непрерывные частные производные по переменным $z_1,\dots,z_m$ в области $c_i < z_i < d_i\ (i = 1,2,\dots,m)$, которые могут быть вычислены по правилу Лейбница

$$I'_{z_i}(z_1,\dots,z_m) = \int_L P'_{z_i}(x,y,z_1,\dots,z_m)dx + Q'_{z_i}(x,y,z_1,\dots,z_m)dy,$$

$$i = 1,2,\dots,m.$$

Свешников

$$F(z)=\int_L f(z,\zeta)\,d\zeta : (*)$$

1) $\zeta\in L$, $z\in$ обл. G на пл. z;
2) $\forall$ фикс. $\zeta\in L$ $f\in A(G)$;
3) $f(z,\zeta)$, $f'_z(z,\zeta)$ — непрерывны по совокупности переменных $\zeta\in L$, $z\in G$

В дальнейшем все интегралы подчиняются этим условиям.

Теорема об интеграле с параметром: $\exists$ интеграл (*) удовлетворяет условиям 1-3. Тогда:
1) $F(z)\in A(G)$
2) Производную $F'(z)$ можно вычислить по правилу Лейбница:
$$F'(z)=\int_L f'_z(z,\zeta)\,d\zeta \quad (**)$$

□ Все участвующие ф-ии запишем в алгебраической форме:

$z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$

$f(z,\zeta)=u(x,y,\xi,\eta)+iv(x,y,\xi,\eta)$

$F(z)=U(x,y)+iV(x,y)$

Комплексный интеграл есть сумма вещественных:

$$\int_L \underbrace{u\,d\xi-v\,d\eta}_{U(x,y)}+i\int \underbrace{v\,d\xi+u\,d\eta}_{V(x,y)}$$

$$U'_x=\int_L u'_x\,d\xi-v'_x\,d\eta \qquad V'_x=\int_L v'_x\,d\xi+u'_x\,d\eta=\int_L -u'_y\,d\xi+v'_y\,d\eta=-U'_y$$

$$U'_y=\int_L u'_y\,d\xi-v'_y\,d\eta \qquad V'_y=\int_L v'_y\,d\xi+u'_y\,d\eta=\int_L u'_x\,d\xi-v'_x\,d\eta=U'_x$$

Т.к. (z) — аналитична $\Rightarrow$ выполняются условия (CR)

$F(z)$ — непрерывна
$\exists$ производные, удовл. условиям (CR) } дифферен. } $\Rightarrow F(z)\in A(G)$
производные непрерывны, т.е. $F'(z)$ — непр. ф-ия от z }
$\Rightarrow$ первое утв. доказано

Докажем правило Лейбница:

$$F'(z)=U'_x+iV'_x=\int_L u'_x\,d\xi-v'_x\,d\eta+i\int_L v'_x\,d\xi+u'_x\,d\eta \;\Big|\; f'_z(z,\zeta)=u'_x+iv'_x$$

$$\int_L f'_z(z,\zeta)\,d\zeta=\int_L (u'_x+iv'_x)(d\xi+i\,d\eta)=\int_L u'_x\,d\xi-v'_x\,d\eta+$$

$$+i\int_L v'_x\,d\xi+u'_x\,d\eta \Rightarrow \text{равенство } (**)\ \blacksquare$$

6. Теорема о бесконечной дифференцируемости аналитической функции

] $f(z) \in A(\mathcal{D})$. Тогда в $\forall$ т. $z \in \mathcal{D}$ $f(z)$ имеет производные всех порядков

□ Фикс. $\forall$ т. $z \in \mathcal{D}$. Построим контур L так, чтобы L, $\operatorname{int} L \subset \mathcal{D}$ и $z \in \operatorname{int} L$. (его всегда можно построить).

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ — интегральная формула Коши

Выполняются условия (*):

1) $G = \operatorname{int} L$

2) $"f'(z)" = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$

$\Rightarrow$ к интегралу Коши применима теорема об интеграле с параметром, откуда выводим:

$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \quad (**)$

Применяя к (**) теорему об интеграле с параметром, получим

$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \oint\limits_{L^+} \frac{f(\xi)}{(\zeta - z)^3} d\zeta \quad (***)$

Применяя снова эту теорему, имеем

$f'''(z) = \frac{3!}{2\pi i} \oint\limits_{L^+} \frac{f(\xi)}{(\zeta - z)^4} d\zeta$

$\Rightarrow$ по индукции:

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{L^+} \frac{f(z)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi}$$ ■

7. Следствия теоремы о бесконечной дифференцируемости

① $f(z) \longrightarrow f'(z) \longrightarrow f''(z) \longrightarrow f'''(z)$
Производная ф-ии, аналитической в обл. G, сама является аналитической в G

② (**Теорема Морера**). $\exists\, f(z) \in C(G)$ и обладает в G С-свойством.
Тогда $f(z) \in A(G)$

□ По т.о первообразной (условия в точности совпадают), существует первообразная:
$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$ для $f(z)$: $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in G$.

По следствию 1, $f(z) \in A(G)$

③ (**Теорема Лиувилля**) Целая функция $f(z)$, ограниченная во всей $\mathbb{C}$, есть константа.

□ Фикс. произвольную т. $z_0 \in \mathbb{C}$. $\gamma_R : |z - z_0| = R$
Запишем интегралы типа Коши:
$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_R^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz$$
Используем оценку: $\exists M > 0 : |f(z)| \leqslant M \quad \forall z \in \mathbb{C}$
$$|f'(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \max_{z \in \gamma_R} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^2} \cdot 2\pi R \leqslant \frac{M}{R} \xrightarrow{R \to \infty} 0 \Rightarrow f'(z_0) = 0$$
($|z - z_0| = R$)
В виду произвольности т. z_0, $f'(z) \equiv 0$ в $\mathbb{C} \Rightarrow f(z) = \text{const}$ ■

④ (**Основная теорема алгебры**). Всякий многочлен $P_n(z)$ степени $n \geqslant 1$ имеет в $\mathbb{C}$ хотя бы один корень.

□ (От противного) Пусть $P_n(z)$ не имеет корней в $\mathbb{C}$. Тогда ф-ия $f(z) = \frac{1}{P_n(z)}$ определена и является аналитической во всей $\mathbb{C}$
$P_n(z) \to \infty$ при $z \to \infty \Rightarrow f(z) \to 0$ при $z \to \infty \Rightarrow f(z)$ огран. во всей $\mathbb{C}$ (важно, что ф-ия имеет конечный предел на бесконечности)
$\Rightarrow$ по т. Лиувилля (целостность + ограниченность) $f(z) = \text{const}$ – неверно, т.к. $P_n(z) \Rightarrow f(z)$.
Противоречие вызвано предположением об отсутствии корней у $P_n(z)$ ■

Глава V. Ряды аналитических функций

1. Общие утверждения относительно рядов

$\sum a_n = \sum b_n + i\sum c_n$

$a_n = b_n + ic_n$

Теоремы для рядов с постоянными членами справедливы и в нашем случае.

$\sum |a_n|$ — понятие абсолютной сходимости

Нас интересуют ряды с аналитическими ф-циями: $\sum u_n(z)$

Поточечная сходимость $\not\Rightarrow$ равномерная сходимость

Опр. Ряд из $u_n(z)$ **сходится равномерно** к ф-ии $f(z)$ на мн-ве $\{z\}$, т.е.

$\sum u_n(z) \underset{\{z\}}{\rightrightarrows} f(z)$,

если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon): \left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z) \right| < \varepsilon \ \forall n \geqslant N, \ \forall z \in \{z\}$

Критерий Коши:

$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(z) \right| < \varepsilon$

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости:

$\sum u_n(z)$, $\sum c_n$: $\forall n \ \ c_n \geqslant 0$

$|u_n(z)| \leqslant c_n, \ n = 1, 2, \ldots$

Если $\sum c_n$ - сход., то 1) $\sum u_n(z) \underset{\{z\}}{\rightrightarrows}$

2) $\sum |u_n(z)| \underset{\{z\}}{\rightrightarrows}$

Утв. $\exists \sum u_n(z) \underset{\{z\}}{\rightrightarrows}$, $\varphi(z)$ огр. на $\{z\}$. Тогда и ряд $\sum \varphi(z) u_n(z) \underset{\{z\}}{\rightrightarrows}$

Теорема 5.1 $\exists$ ф-ции $u_n(z) \in C(G)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\sum u_n(z) \overset{G}{\rightrightarrows} f(z)$. Тогда:

1) $f(z) \in C(G)$;

2) Если $L \subset G$, то возможно почленное интегрирование по L, т.е.

$\int_L f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_L u_n(z)\,dz$

□ Аналогично вещественному случаю ■

Опр. Говорят, что ряд $\sum u_n(z)$ **сходится к ф-ии $f(z)$ нормально** в области G, если $\sum u_n(z) \underset{K}{\rightrightarrows} f(z)$ на любом компакте $K \subset G$

1-ая т. Вейерштрасса (о рядах аналитических ф-ий). $\exists\ u_n(z) \in A(G)$ $(n = 1, 2, \dots)$ и $\sum u_n(z)$ сходится к $f(z)$ нормально в области G. Тогда:

1) $f(z) \in A(G)$;

2) ряд $\sum u_n(z)$ можно почленно дифф-ть в G любое число раз, т.е.
$f^{(k)}(z) = \sum u_n^{(k)}(z),\ \forall k \in \mathbb{N}$

3) все продифференцированные ряды сходятся в G нормально (не понадобится – без док-ва)

□ 1) Докажем, что $f(z)$ аналитична в окрестности всякой точки $z_0 \in G$. Построим круг так, чтобы $\overline{K} \subset G$, где $\overline{K}: |z - z_0| \leq R$
$\overline{K}$ – простейший компакт из области G. Имеем, что
$\sum u_n(z) \xrightarrow{\overline{K}} f(z)$
По т. 5.1, $f(z) \in C(\overline{K})$.
Расм. открытый круг, т.е. $\exists\ K: |z - z_0| < R$, и пусть L – произвольн. контур, принадлежащий G. По т. 5.1,
$\oint_L f(z)\,dz = \sum \oint_L u_n(z)\,dz = 0$
$\Rightarrow f(z) \in C(K)$ и имеет С-свойство $\oint f(z)\,dz = 0 \Rightarrow$
по т. Морера $f(z) \in A(K) \Rightarrow$ в силу произвольности области доказан первый пункт.

2) Фикс. произв. т. $z_0 \in G$ и строим окр-ть $\gamma_\rho: |z - z_0| = \rho$. В точках этой окр-ти расм. рав-во:
$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \rightrightarrows_{\gamma_\rho} (*)$
т.е. если z_0 не выходит из γ_ρ – простейшего компакта, то есть равномерная сходимость.
Фикс. $k \in \mathbb{N}$ и умножим обе части $(*)$ на $\varphi_k(z) = \dfrac{k!}{2\pi i (z - z_0)^{k+1}}$
$|\varphi_k(z)| = \dfrac{1}{2\pi \rho^{k+1}}$
Важно, что ф-ия ограничена (а не сколько сохранение знака) $\Rightarrow$ равн. сходимость сохраняется:
$\varphi_k(z) f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_k(z) u_n(z) \rightrightarrows_{\gamma_\rho}$
Тогда по т. 5.1 возможно почленное интегрирование по γ_ρ:
$$\frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho^+} \frac{u_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,dz$$
Интеграл в левой части есть значение к-ой производной ф-ии $f(z)$ в т. z_0:
$f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z_0)$

Равенство означает возможность почленного дифф-ия любое число раз. ■

2. Степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n \quad (*)$$

Какова область сходимости ряда?

Теорема 5.2 Пусть дан ряд (*). Положим

$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|}}$ – радиус сходимости – равенство Коши–Адамара (СН)

Если $R = 0$, то ряд (*) сходится только в т. z_0
Если $R > 0$ (возможен случай $R = \infty$), то ряд (*) сходится абсолютно для $|z-z_0| < R$ и расходится при $|z-z_0| > R$.
Обозн. $K_R: |z-z_0| < R$ – круг сходимости

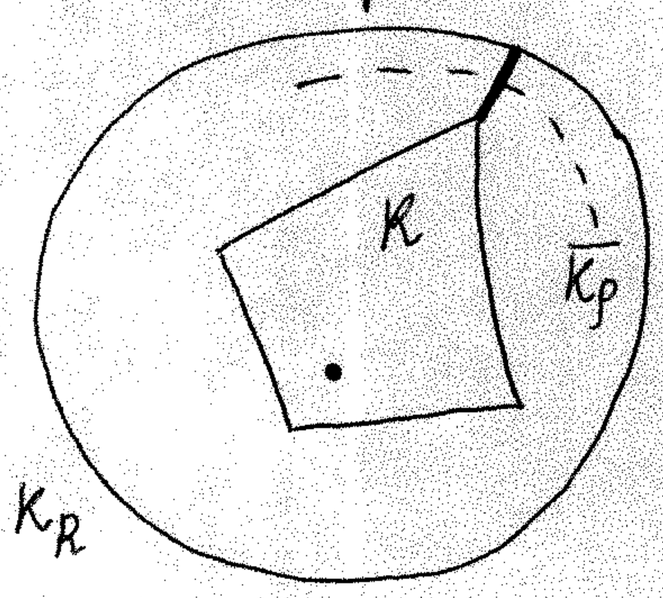
Пусть имеем ряд (*), известно $R > 0$. Тогда во $\forall$ точках круга ряд (*) определяет ф-ию:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n \quad (**)$$

Докажем лемму, вспомогательную к док-вам других свойств (**).

Лемма. $\exists$ для ряда (*) $R > 0$. Тогда в круге K_R ряд (*) сходится нормально.

□ $\exists K \subset K_R$ – произвольный компакт. Построим круг $\overline{K_\rho}: |z-z_0| \le \rho$ так, чтобы сам круг содержался в круге сходимости, а с другой – содержал компакт K, т.е. $K \subset \overline{K_\rho} \subset K_R$. Почему такой круг можно построить? Если $R = \infty$, то ввиду ограниченности компакта K найдется число $\rho > 0$ такое, что $\overline{K_\rho} \supset K$. Если $0 < R < \infty$, то $\rho(K, \gamma_R) = \delta > 0$, т.к. имеем два замкнутых непересекающихся мн-ва, и можно положить $\rho = R - \delta/2$.
Поясним картинкой:



В т. $z = z_0 + \rho$ ряд (*) сходится абсолютно, т.е. сходится неотрицательный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n| \rho^n$.
Этот ряд служит мажорантой вейерштрасса для ряда (*), когда $z \in \overline{K_\rho} \Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса ряд (*) $\rightrightarrows_{\overline{K_\rho}} \Rightarrow$ ряд (*) $\rightrightarrows_{K}$ (т.к. $K \subset \overline{K_\rho}$)
$\Rightarrow$ есть нормальная сходимость. ■

Следствие По 1-ой т. Вейерштрасса:

1) $f(z) = A(K_\rho)$
2) $\forall k \in \mathbb{N}$ $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} C_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)(z-z_0)^{n-k}$ (***)

Из ф-лы (СН) следует, что продифференцированные ряды имеют тот же радиус сходимости R, что и исходный ряд (*).

Замечание о единственности. Ряд (*) с $R>0$ однозначно определяется своей суммой $f(z)$.

□ Положим $z = z_0$ в равенствах (**) и (***):

$c_0 = f(z_0)$

$f^{(k)}(z_0) = c_k \cdot k!$

$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$, $k = 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow$ коэффициенты однозначно определяются по формулам. ■

Опр. Ряд с коэффициентами $c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ наз. **рядом Тейлора** для $f(z)$.

Пример. Подсчет суммы ряда

$\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n$

Рассм. как степенной ряд с $c_n = 1$ $\forall n$. $R = 1$

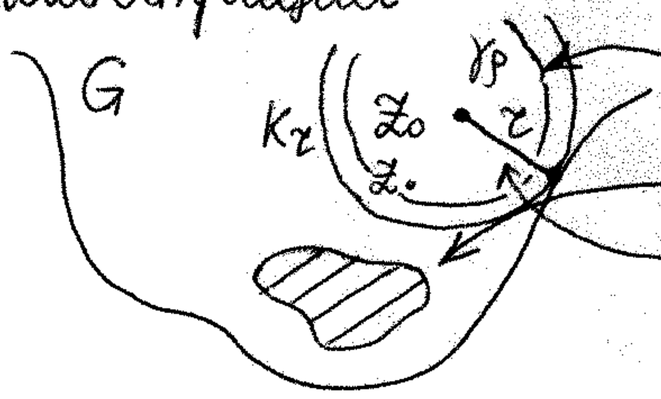
$\Rightarrow K_R : |z - z_0| < 1$

$$S_n(z) = 1 + (z - z_0) + \ldots + (z - z_0)^n = \frac{1 - (z - z_0)^{n+1}}{1 - (z - z_0)} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{1 - (z - z_0)}$$

3. Теорема Тейлора

Теорема Тейлора. $\exists\, f(z) \in A(G)$, z_0 – произв. т. из G, $r = \varphi(z_0, \partial G)$. Тогда в круге $K_r: |z - z_0| < r$ $f(z)$ может быть представлена как сумма ряда по степеням $z - z_0$, причем это представление единственно.

□ Иллюстрация:



неограниченная
не односвязная
расстояние до границы

1) Единственность. Если разложение $f(z)$ по степ. $z - z_0$ существует, то оно единственно согласно замечанию о единственности.

2) Существование. Покажем, что разложение $\exists$. Фикс. произвольную т. $z \in K_r$. Построим окружность:

$\gamma_\rho: |\zeta - z_0| = \rho$

так, чтобы $\gamma_\rho \subset K_r$ и $z \in \operatorname{int} \gamma_\rho$.

По инт. ф-ле Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \quad (\zeta \in \gamma_\rho)$$

Получим разложение дроби по степ.:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \left\{ \underbrace{\frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|}}_{\rho} < 1 \right\}$$

$$= \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \rightrightarrows_{\gamma_\rho}$$

Заметим, что ряд в правой части сходится равномерно на окр. γ_ρ, т.к. есть сходящийся мажорирующий ряд:

$$\max_{\zeta \in \gamma_\rho} |f(\zeta)| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z - z_0|^n}{\rho^{n+1}}$$

$\Rightarrow$ Почленно интегрируем по γ_ρ и умножаем обе части на $\frac{1}{2\pi i}$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}}_{C_n} (z - z_0)^n$$

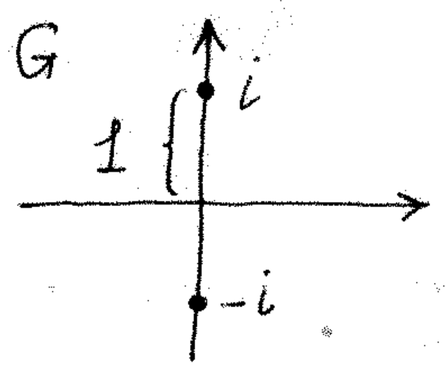
$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n}$$ – искомое степенное разложение

Доказывает возможность разложения ■

Пример. $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ разложить в ряд по степеням z и $z-1$

Где будет аналитична $f(z)$? Во всей комп. пл-ти, кроме $(0,i)$ и $(0,-i)$ — область аналитичности.



$|z|<1$ — сходится, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot z^{2n}$

По Коши-Адамару $R=1$.
Граница области аналитичности — 1.

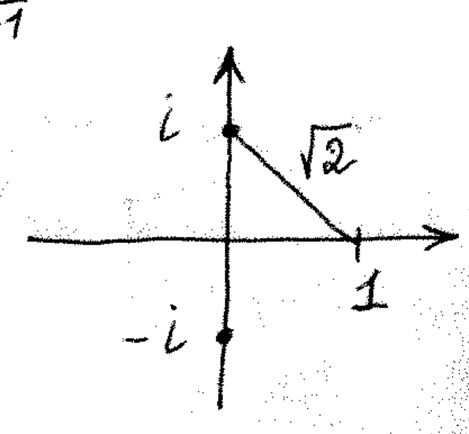
Расм. случай для $z-1$.
Разложим $f(z)$ на простые дроби:

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}\right\}\quad(*)$$

Разложим каждое из слагаемых по степеням:

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{z-1+1-i}=\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{1-i}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{(1-i)^{n+1}}$$

Необходимо потребовать $|z-1|<|1-i|=\sqrt{2}$



$$\frac{1}{z+i}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{(1+i)^{n+1}}$$

В данном случае требуем $|z-1|<|1+i|=\sqrt{2}$

Сходятся в одной области $|z-1|<\sqrt{2}\Rightarrow$ заменим в $(*)$ разложенные слагаемые:

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}}-\frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right](z-1)^n,\quad|z-1|<\sqrt{2}$$

Если применить формулы: $1+i=\sqrt{2}e$

4. Теорема о единственности

Область G, в которой выделено подмножество E, имеющее пред. конечн. точку $z_0 \in G$

1-ая формулировка. Может существовать лишь одна ф-ия $f(z) \in A(G)$, принимающая значени на под-тве E

2-ая формулировка. Если ф-ия $\varphi(z) \in A(G)$ обращается в нуль во всех точках из E, то $\varphi(z) \equiv 0$ в G

Задача. Док-ть эквивалентность двух формулировок теоремы о единственности.

При док-ве будем исп-ть 2-ую формулировку.

□ Выделим в E послед-ть $\{z_k\}$ такую, что $z_k \to z_0$, $z_k \neq z_0$ $\forall k$

Пусть $r = \underbrace{\rho(z_0, \partial G)}_{\text{расстояние от } z_0 \text{ до границы } \partial G}$. По т. Тейлора, в круге $|z - z_0| < r$ $\varphi(z)$ можно представить степенным рядом $\varphi(z) = \overbrace{c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots}^{g(z)}$ (*)

Покажем по индукции, что все коэффициенты $c_n = 0$, т.е. $\varphi(z) \equiv 0$ в круге $|z - z_0| < r$

Подставляя в (*) $z = z_k$, имеем $0 = \varphi(z_k) = c_0 + c_1(z_k - z_0) + \ldots + c_n(z_k - z_0)^n$

Перейдем к пределу $z_k \to z_0$, $k \to \infty \Rightarrow 0 = c_0$ – база индукции.

Пусть уже доказано, что $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$. Покажем, что $c_n = 0$

$$\varphi(z) = c_n(z - z_0)^n + c_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \ldots \quad (**)$$

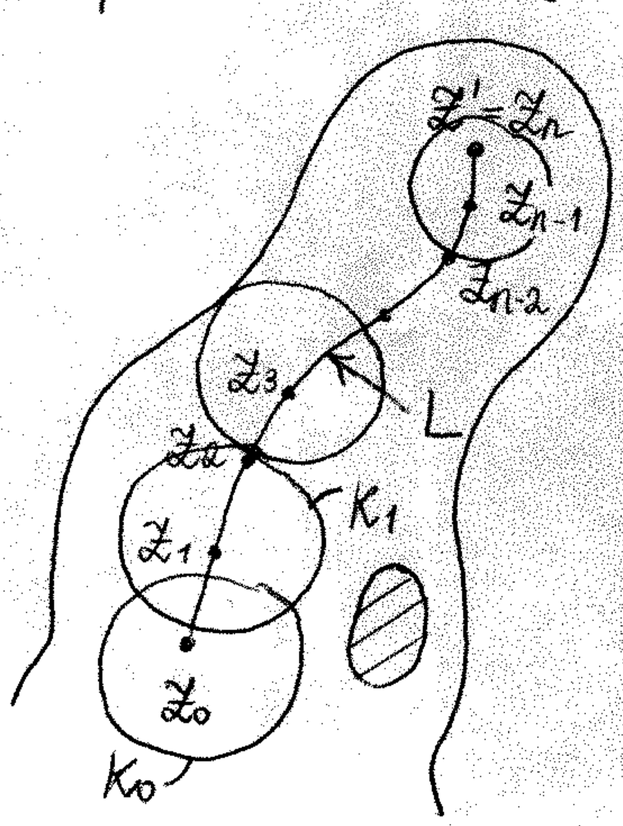
Подставим в (**) $z = z_k$:

$$0 = \varphi(z_k) = c_n(z_k - z_0) + c_{n+1}(z_k - z_0)^{n+1} + \ldots$$

$$0 = c_n + c_{n+1}(z_k - z_0) + c_{n+2}(z_k - z_0)^2 + \ldots$$

$z_k \to z_0$, $k \to \infty$ $\quad c_n = 0$

Первая часть док-ва проведена. Перейдем ко второй



Фикс. произвольную т. $z' \in G$. Покажем, что $\varphi(z') = 0$

Пользуясь связностью, проведем непрерывную кривую $L \subset G$, соединяющую z_0 и z', где z_0 – предельная точка.

Пусть $\delta = \rho(L, \partial G) > 0$ (по задаче из лекции 1)

Разобьем L точками $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n$ так, что $|z_{i+1} - z_i| < \delta$, $i = 0, 1, \dots, n-1$

$K_0 : |z - z_0| < \delta$. По первой части $\varphi(z) \equiv 0$ в K_0

Проведем многошаговый процесс:

Шаг 1. Построим круг $K_1 : |z - z_1| < \delta$, $E_1 = K_0 \cap K_1$
Обозн. $K_1 \to G_1$, $E_1 \to E$, z_1 – пред. т. для E_1

Рассуждая как в первой части док-ва, покажем, что из $\varphi(z) = 0 \ \forall z \in E_1$ следует, что $\varphi(z) \equiv 0$ в K_1

Шаг 2. Построим круг $K_2 : |z - z_2| < \delta$, $E_2 = K_1 \cap K_2$

Рассуждая как в первой части:
$\varphi(z) = 0 \ \forall z \in E_2 \Rightarrow \varphi(z) \equiv 0$ в K_2

После $n-1$ шагов процесса получим круг
$K_{n-1} : |z - z_{n-1}| < \delta$, в котором $\varphi(z) \equiv 0$. Т.к. $z' = z_k \in K_{n-1}$, то $\varphi(z') = 0$
$\Rightarrow$ доказано ■

Ситуации использования теоремы.

① $[a, b] \subset \mathbb{R}$ $\varphi(x)$ определена на $[a, b]$. $\exists$ область $G \supset [a, b]$. Применяя 1-ую формулировку: может существовать не более одной ф-ии $f(z) \in A(G)$, совпадающей всюду на $[a, b]$.



$y = \sin x$

$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ – никаким другим способом ф-ию нельзя распространить на комп. пл-ть

$f(z)$ – аналитическое продолжение ф-ии $\varphi(x)$ с $[a, b]$ на $\mathbb{C}$

② (несуществование аналит. ф-ий с заданными свойствами)
Существует ли ф-ия $f(z) \in A(K)$, $K : |z| < 1$, такая, что $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$, $n = 2, 3, \dots$? Не существует. Покажем
$f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$, $n = 2, 3, \dots$
$g(z) = z$ – аналитическая всюду (*)
$G = K$, $E = \{\frac{1}{n}\}$, $z_0 = 0$

Если решение $\exists$, то оно имеет вид (*). Однако она не удовл. второму условию $\Rightarrow$ противоречие.

③ (продолжение соотношений)

1) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

$F(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ целая

$F(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$G = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{R}$. Используем т. о единственности во второй формулировке:

$F(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

2) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$ (*)

Используем т. во второй формулировке и докажем в 2 этапа.

Фикс. произв. вещ. значение $z_2 = x_2$

$f(z_1) = \cos(z_1 + x_2)$, $g(z_1) = (\cos x_2)\cos z_1 - (\sin x_2)\sin z_2$ — целые

$f(z_1) = g(z_1) \quad \forall z_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(z_1) = g(z_1) \quad \forall z_1 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ промежуточный итог: формула (*) верна для $\forall z_2 \in \mathbb{R}$ и $\forall z_1 \in \mathbb{C}$.
Дальнейшая задача — снять комплексность.

Фикс. произв. $z_1 \in \mathbb{C}$ и рассм. обе части в (*) как ф-ии от z_2

$F(z_2) = \cos(z_2 + z_1)$, $G(z_2) = (\cos z_1)\cos z_2 - (\sin z_1)\sin z_2$ — целые ф-ии

$F(z_2) = G(z_2) \quad \forall z_2 \in \mathbb{R}$

$G = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{R}$

$F(z_2) \equiv G(z_2) \quad \forall z_2 \in \mathbb{C}$

Формула (*) верна для всех $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Глава VI. Ряды Лорана и изолированные особые точки

Опр. $f(z) \in A(\mathcal{D})$, $\mathcal{D}: 0 < |z - z_0| < R$ — проколотая R-окрестность т. z_0, z_0 — изолированная особая точка ф-ии $f(z)$. Т.е. в т. z_0 ф-ия $f(z)$ теряет аналитичность $\Rightarrow$ не может быть разложена в эту т. z в ряд Тейлора.

Рассм. ряд Лорана, который позволит произвести разложение:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} = \text{I} + \text{II}$$

Из-за нового вида ряда необходимо ввести понятие сходимости — ряд (*) сходится, если сходятся оба ряда I и II.

Изучим типичные области сходимости.

Ряд I сход. в круге $k_1: |z - z_0| < R_1$ абсолютно и нормально к некоторой аналитической ф-ии $f_1(z)$.

Ряд II не явл. степенным $\Rightarrow$ сведем заменой $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$ к степенному отн. т. 0

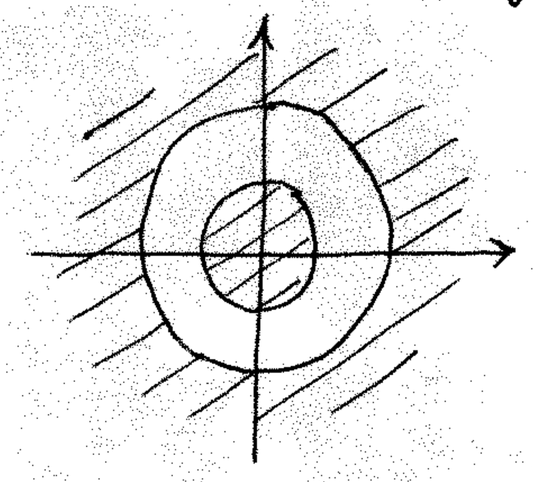
$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} \zeta^n$

Считаем, что ряд имеет положительный радиус сходимости:

$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} \zeta^n$ сход. в круге $k_2: |\zeta| < R_2^{-1}$ абсолютно и нормально к некоторой аналитической ф-ии $f_1(z)$.

Ряд II сход. в обл. $|z - z_0| > R_2$ абсолютно и нормально к некоторой аналит. ф-ии $f_2(z)$

① $R_1 < R_2 \Rightarrow$ Ряд Лорана (*) нигде не сходится



② $R_1 = R_2 = R$

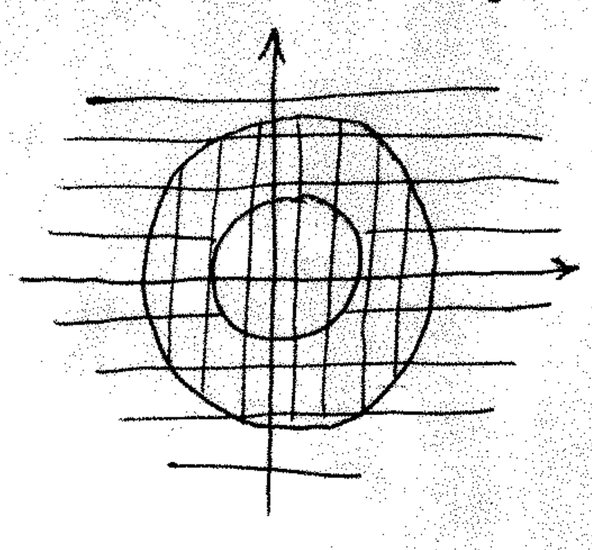
$\gamma_R: |z - z_0| = R$

$\Rightarrow$ может быть сходимость на границе, но точный вывод возможен после дополнительного исследования

③ $R_1 > R_2 \Rightarrow$ Ряд Лорана (*) сходится в кольце $\mathcal{D}: R_2 < |z - z_0| < R_1$ абсолютно и нормально к ф-ии:

$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$

Есть типичный случай.



Есть ф-ия аналитическая в кольце. Можно ли представить ее в виде ф-ии Лорана? Да.

Замечание о единственности. Ряд Лорана с нетривиальным кольцом сходимости однозначно определяется своей суммой $f(z)$, где кольцо сходимости $\mathcal{D}: R_2 < |z - z_0| < R_1$

□ Построим окружность $\gamma_\rho: |z - z_0| = \rho$, $R_2 < \rho < R_1$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \rightrightarrows_{\gamma_\rho}$$

$$\varphi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}}$$

При $\forall k$ ф-ия имеет постоянный модуль на ок-сти: $|\varphi_k(z)| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho^{k+1}}$, $z \leqslant \gamma_\rho$

Важнее тот факт, что он ограничен $\Rightarrow$ умножение не испортит сходимости:

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_n}{2\pi i} (z - z_0)^{n-k-1} \rightrightarrows_{\gamma_\rho}$$

Интегрируем почленно по γ_ρ:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_n}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} (z - z_0)^{n-k-1} dz$$

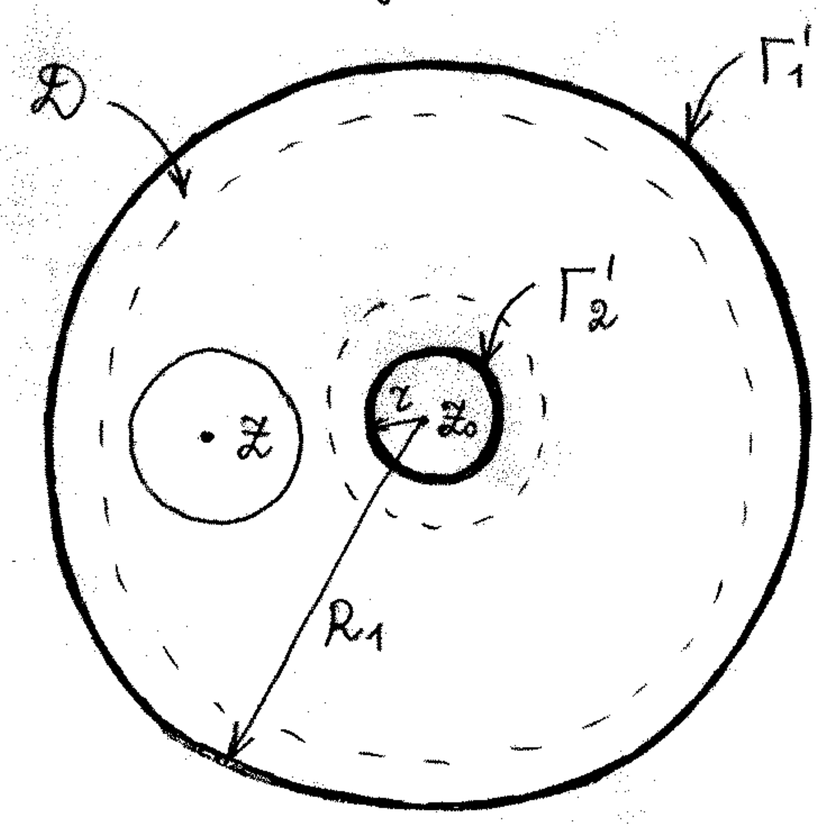
$$\oint_{\gamma_\rho^+} (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 0, & m \neq -1 \\ 2\pi i, & m = -1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} n - k - 1 = -1 \\ n = k \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)^\rho}{(z - z_0)^{k+1}} dz} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \blacksquare$$

Теорема Лорана. Ф-ия $f(z)$, аналитическая в кольце $\mathcal{D}: R_2 < |z - z_0| < R_1$, представляется в $\mathcal{D}$ как сумма ряда Лорана, причем это представление единственно.

□ Единственность представления вытекает из замечания о единственности.

Докажем возможность такого представления.



Фикс. произвольную т. $z \in \mathcal{D}$. Строим вспомогательное кольцо:

$\mathcal{D}': R_2' < |\zeta - z_0| < R_1'$ так, чтобы $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$, $z_0 \in \mathcal{D}'$ и окр-ть $\gamma_\rho: |\zeta - z| = \rho$ так, чтобы $\gamma_\rho \subset \mathcal{D}'$.

Рассм. составной контур $\Gamma_1' \cup \Gamma_2' \cup \gamma_\rho$, где $\Gamma_1': |\zeta - z_0| = R_1'$ и $\Gamma_2': |\zeta - z_0| = R_2'$

Применяя к ф-ии $\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ теорему о составном контуре, имеем:

$$\oint\limits_{\Gamma_1'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \oint\limits_{\Gamma_2'^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \oint\limits_{\gamma_\rho^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho^+} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1'^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_2'^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

$\boxed{\zeta \in \Gamma_1'}$: $\underbrace{\frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|}}_{R_1'} = \theta < 1$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}(z - z_0)^n \xrightarrow[\Gamma_1']{} \sum \underbrace{\frac{|z - z_0|^n}{|\zeta - z_0|^{n+1}}}_{R_1'}$$

Почленно интегрируем по Γ_1':

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1'^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1'^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$\boxed{\zeta \in \Gamma_2'}$: $\frac{|\zeta - z_0|}{|z - z_0|} = \frac{R_2'}{|z - z_0|} = \rho_1 < 1$

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{(z - z_0) - (\zeta - z_0)} = \frac{1}{z - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}$$

$$-\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=1}^{\infty} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1}\frac{1}{(z - z_0)^n} \xrightarrow[\Gamma_2']{}$$

Интегрируем почленно по Γ_2' и делим на $2\pi i$:

$$-\oint\limits_{\Gamma_2'^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}(z - z_0)^{-n}, \quad C_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_2'^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}, \quad n = -1, -2, \ldots$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}(z - z_0)^{-n} \blacksquare$$

Замечание. Пользуясь теоремой о составном контуре, интегрирование в формулах для C_n при $n \geqslant 0$ и $n < 0$ можно проводить по одной и той же окружности:

$\gamma_R: |z - z_0| = R$, $R_2 < R < R_1$

1. Классификация изолированных особых точек

$f(z) \in A(\mathcal{D})$, $\mathcal{D}: 0 < |z - z_0| < R$

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n}_{\text{правильная часть}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}}_{\text{главная часть}}$$

Классификация:

① В ряде (*) отсутствуют члены с отрицательными степенями $z - z_0$
$\Rightarrow z_0$ – устранимая особая точка (УОТ) ф-ии f

② В ряде (*) присутствует лишь конечное число членов с отриц. степенями $z - z_0$.
$\Rightarrow z_0$ – полюс ф-ии f

③ Ряд (*) содержит бесконечно много членов с отриц. степенями $z - z_0$
$\Rightarrow z_0$ – существенно особая точка (СОТ) ф-ии f

Теорема 6.1. Следующие три высказывания эквивалентны:
1) z_0 – УОТ ф-ии $f(z)$
2) $\exists$ конечный $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$
3) $f(z)$ ограничена в некоторой окр-ти т. z_0

□ 1) → 2) z_0 – УОТ ф-ии f
$\exists$ конечный предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$

$$f(z) = \underbrace{c_0 + c_1(z - z_0) + \dots}_{g(z)} \quad \forall z \in \mathcal{D}$$

$f(z) = g(z) \quad \forall z \in \mathcal{D}, z \neq z_0$

$\exists \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = g(z_0) = c_0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0$

2) → 3) $\exists$ конечный $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) \Rightarrow f(z)$ ограничена в некоторой окр. т. z_0

Очевидно

3) → 1) $\exists U_\delta: 0 < |z - z_0| < \delta$ и $M > 0$ такие, что $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in U_\delta$
Построим окружность $\gamma_\rho: |z - z_0| = \rho$ так, чтобы $\gamma_\rho \subset U_\delta$.

Во всем кольце $\mathcal{D} \Rightarrow$ и в U_δ действует лорановское разложение самого общего вида:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

В силу наших предположений точка устранимая $\Rightarrow$ Второе слагаемое отсутствует.

Найдем и оценим величину коэффициента C_n:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

Достаточно грубой оценки:

$$|C_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \max_{\zeta \in \gamma_\rho} \underbrace{\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{n+1}}}_{\rho^{n+1}} 2\pi\rho \leqslant \frac{M}{\rho^n}$$

Справедливо как для положительных, так и для отрицательных. Используем ее для отрицательных $n = -1, -2, \ldots$

$$|C_n| \leqslant M \cdot \rho^{-n} \to 0$$

Исследуем при $\rho \to 0$:

$C_n = 0, \quad n = -1, -2, \ldots$

$\Rightarrow z_0$ – УОТ ф-ии f ■

Вывод из теоремы. Если z_0 не является УОТ ф-ии f, то f не ограничена в любой окрестности т. z_0

Переходим к исследованию точек 2-го рода — полюс. В таком случае лорановское разложение должно выглядеть как:

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{C_{-m-1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{C_{-1}}{z - z_0} + C_0 + C_1(z - z_0) + \ldots \quad (**)$$

$C_{-m} \neq 0$, причем не обязательно $C_{-m-1} \neq 0$

$\Rightarrow z_0$ – полюс порядка (кратности) m. Если $m = 1$ – простой полюс, если $m > 1$ – кратный полюс

Теорема 6.2. Точка z_0 тогда и только тогда является полюсом ф-ии $f(z)$, когда $f(z) \to \infty$ при $z \to z_0$.

□ Необходимость. Перепишем разложение (**) в виде (вынесем из каждого слагаемого $(z - z_0)^m$ в знаменателе):

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \underbrace{\left[C_{-m} + C_{-m+1}(z - z_0) + \ldots + C_{-1}(z - z_0)^{m+1} + C_0(z - z_0)^m + \ldots \right]}_{\varphi(z) - \text{аналит. в } \mathcal{D}: 0 < |z - z_0| < R} = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}$$

$\varphi(z) \to C_{-m} \neq 0 \Rightarrow f(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} \infty$.

Промежуточное замечание.

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m} \quad \forall z \in \mathcal{D}$$

$\varphi(z_0) = C_{-m} \neq 0$

Определим $g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \neq z_0 \text{ – имеет конечный предел и опред-на} \\ 0, & z = z_0 \text{ – доопределим по непрерывности} \end{cases}$

$g(z) \in A(\mathcal{D})$. Если $g(z)$ допускает представление $g(z) = (z - z_0)^m \psi(z)$ $\psi(z_0) \neq 0$, то z_0 – нуль порядка (кратности) m для $g(z)$, если $g(z_0) = g'(z_0) = \ldots = g^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad g^{(m)}(z_0) \neq 0$

$$\Rightarrow g(z) = (z-z_0)^m \frac{1}{\varphi(z)} = (z-z_0)^m \psi(z)$$

$$\psi(z_0) = \frac{1}{c_{-m}} \neq 0$$

Мы специально ввели ф-ию $g(z)$, чтобы док-ть достаточность.

Достаточность. $f(z) \to \infty$ при $z \to z_0$.

Положим $g(z) = \begin{cases} 1/f(z), & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0 - \text{по непрерывности} \end{cases}$

Обозначим через m кратность т. z_0 как нуля ф-ии $g(z)$. Можем записать $g(z)$ через m:

$g(z) = (z-z_0)^m \psi(z)$, $\psi(z_0) \neq 0$

Из представления для $g(z)$ выведем представление для $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \cdot \underbrace{\frac{1}{\psi(z)}}_{\varphi(z)} = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m} = \frac{1}{(z-z_0)^m}\left[d_0 + d_1(z-z_0) + \dots + d_{m-1}(z-z_0)^{m-1} + \dots\right] \ominus$$

($d_m(z-z_0)^m$ — $\vee$)

$$d_0 = \varphi(z_0) = \frac{1}{\psi(z_0)} \neq 0$$

$$\ominus \frac{d_0}{(z-z_0)^m} + \frac{d_1}{(z-z_0)^{m+1}} + \dots + \frac{d_{m-1}}{z-z_0} + d_m + d_{m+1}(z-z_0)$$

(конечное — $\vee$ кол-во слагаемых)

Лорановское разложение для полюса имеет конечное кол-во слагаемых, причем их кол-во равно кратности т. z_0 как нуля ф-ии $g(z)$. Это и доказывает теорему. ■

Теорема 6.3. Точка z_0 тогда и только тогда является полюсом порядка m для ф-ии $f(z)$, когда z_0 есть нуль порядка m для ф-ии

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

Исследуем существенно особые точки. Если z_0 — СОТ ф-ии $f(z)$, то $\nexists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ (ни конечный, ни бесконечный)

Теорема (Сохоцкого – Казорати – Вейерштрасса). $\exists$ z_0 – СОТ ф-ии $f(z)$. Тогда для любого числа A, конечного или бесконечного, $\exists \{z_n\}$ такая, что $z_n \to z_0$, $f(z_n) \to A$

($\forall$ числу A может быть конечным или бесконечным пределом ф-ии $f(z)$ в т. z_0)

$\{z_n\}$ — A-последовательность Сохоцкого

□ $f(z)$ – неограничена в $\forall$ окр. т. z_0 (иначе точка была бы устранимой) $\Rightarrow \forall n$ найдется т. z_n' такая, что $|z_n' - z_0| < 1/n$, $|f(z_n')| > n$

Пос-ть $\{z_n'\}$ — есть послед. Сохоцкого для $A = \infty$.

Пусть A — произвольное конечное число. Докажем для такого A от противного.

] A – конечное число. Предположим, что A – последовательности Сохоцкого не существует. Тогда найдутся:

1) окрестность $U_\delta : 0 < |z - z_0| < \delta$

2) число $\alpha > 0$

такие, что $|f(z) - A| \geq \alpha$.

в этой окрестности корректно (т.е. не обращается в нуль) определена ф-ия $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)-A} \in A(U_\delta)$

$|\varphi(z)| \leq \frac{1}{\alpha} \quad \forall z \in U_\delta \Rightarrow z_0$ – УОТ для $\varphi(z) \Rightarrow \exists$ кон. $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z)$

Вычислим этот предел, приближаясь к т. z_0 вдаль ∞ – последовательн. Сохоцкого:

$\varphi(z_n') = \frac{1}{f(z_n')-A} \to 0 \quad (т.к.\ f(z_n') \to \infty)$

Показано, что $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)-A} = 0$

$\Rightarrow$ необходимо $f(z) \to \infty$ при $z \to z_0 \Rightarrow z_0$ – полюс ф-ии $f(z)$.

Получили противоречие, доказывающее A – послед. Сохоцкого, т.к. z_0 – СОТ, а не полюс ■

Пример. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$ – особая точка

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$

$R = \infty$

$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n}$

Если $A = \infty \quad z_n' = \frac{1}{n}, \quad f(z_n') = e^n \to \infty$

Если $A = 0 \quad z_n'' = -\frac{1}{n}, \quad f(z_n'') = e^{-n} \to 0$

Рассм. произвольное $0 < |A| < \infty$.
Построим последовательность Сохоцкого так, чтобы $f(z_n) = A$
$\Rightarrow$ нужно решить ур-ие $e^{\frac{1}{z_n}} = A$

$\frac{1}{z_n} = \operatorname{Ln} A$

$\operatorname{Ln} A = \ln|A| + i \operatorname{Arg} A$

Выделим одно значение:

$\ln A = \ln|A| + i \arg A$ – главное значение логарифма

Тогда $\operatorname{Ln} A = \ln A + 2\pi n i$.

$\Rightarrow z_n = \frac{1}{\ln A + 2\pi n i}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

Почему удалось сделать в данном примере так, чтобы $f(z_n) = A$?
Это объясняет следующая теорема – (большая) теорема Пикара

$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$

$A = \infty$, $z_n' = \frac{1}{n}$

$A = 0$, $z_n'' = -\frac{1}{n}$

$0 \neq A$, $|A| < \infty$, $e^{\frac{1}{z_n}} = A$

Теорема Пикара (большая) $\exists\, z_0$ – СОТ ф-ии $f(z)$. Тогда для любого конечного числа A (с единственным возможным исключением) найдется последовательность A-точек ф-ии f, сходящаяся к т. z_0

$f(z) = \sin\frac{1}{z}$, $z_0 = 0$

Иск значений нет.

2. Особенность в бесконечно удаленной точке

(Маркушевич, гл. VII, раздел 6)

Пусть функция $f(z)$ — аналитическая в окрестности D бесконечно удаленной точки:

$$D : |z| > R.$$

Сопоставим $f(z)$ вспомогательную функцию

$$g(\zeta) = f(\frac{1}{\zeta}),$$

делаем замену переменного на плоскости z

определенную в окрестности

$$0 < |\zeta| < \frac{1}{R}$$

точки $\zeta_0 = 0$.

Определение. Точка $z_0 = \infty$ является для $f(z)$ устранимой особенностью, полюсом или существенно особой точкой, если $\zeta_0 = 0$ есть соответственно устранимая особенность, полюс или существенно особая точка для функции $g(\zeta)$.

вспомогательная функция

лорановские разложения

$$\begin{cases} \textbf{УОТ} & g(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \cdots + a_n\zeta^n + \cdots \\ \textbf{Полюс} & a_{-m}\zeta^{-m} + \cdots + a_{-1}\zeta^{-1} + a_0 + a_1\zeta + \cdots, \quad a_{-m} \neq 0 \\ \textbf{СОТ} & \cdots + a_{-n}\zeta^{-n} + \cdots + a_{-1}\zeta^{-1} + a_0 + a_1\zeta + \cdots + a_n\zeta^n + \cdots \end{cases}$$

делаем обратную замену

$$\begin{cases} \textbf{УОТ} & f(z) = a_0 + a_1\frac{1}{z} + \cdots + a_n\frac{1}{z^n} + \cdots \\ \textbf{Полюс} & a_{-m}z^m + \cdots + a_{-1}z + a_0 + a_1\frac{1}{z} + \cdots, \quad a_{-m} \neq 0 \\ \textbf{СОТ} & \cdots + a_{-n}z^n + \cdots + a_{-1}z + a_0 + a_1\frac{1}{z} + \cdots + a_n\frac{1}{z^n} + \cdots \end{cases}$$

Вывод: Тип особенности в бесконечно удаленной точке определяется совокупностью членов с **положительными** степенями z в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = \infty$. Эта часть ряда Лорана считается на бесконечности **главной**, тогда как члены с неположительными степенями z составляют **правильную** часть ряда Лорана.

эквивалент теоремы 6.1.

- $z_0 = \infty$ тогда и только тогда является устранимой особой точкой функции $f(z)$, когда существует конечный предел $\lim_{z\to\infty} f(z)$, или, что равносильно, когда $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки.

аналог теоремы 6.2

- $z_0 = \infty$ тогда и только тогда является полюсом функции $f(z)$, когда $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

- $z_0 = \infty$ тогда и только тогда является существенно особой точкой функции $f(z)$, когда не существует ни конечного, ни бесконечного предела $\lim_{z\to\infty} f(z)$.

Примеры

- $f(z) = \sin^2 \frac{1}{z}$

Иллюстрация для 1-го типа

Поскольку $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$, то $z_0 = \infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$.

Так как для вспомогательной функции $g(\zeta) = \sin^2 \zeta$ точка $\zeta_0 = 0$ есть нуль кратности два, то $z_0 = \infty$ можно считать двойным нулем функции $f(z)$.

- $f(z)$ есть многочлен степени n $(n \geq 1)$.

Запись этого многочлена по степеням z

$$f(z) = a_0 z^n + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

есть его лорановское разложение, сходящееся во всей комплексной плоскости и, в частности, в любой окрестности нуля. Из него видно, что $z_0 = \infty$ есть полюс порядка n для $f(z)$.

- $f(z) = e^z$

  Всюду в $\mathbf{C}$ сходится ряд

$$e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!},$$

который можно считать лорановским разложением функции $f(z)$. Так как все члены этого ряда содержат неотрицательные степени z, то $z_0 = \infty$ есть существенно особая точка для $f(z)$.

Глава 7. Вычеты и их приложения

$\exists$ $f(z)$ – аналит. в обл. G за исключением некот. кол-ва ИОТ. Задача – научиться эффективно вычислять инт-лы:

$\oint_\Gamma f(z)\,dz$, где $\Gamma \in G$

Далее придерживаемся соглашения о контурах: все рассм. контуры не проходят через особые точки ф-ии $f(z)$.

$\exists$ z_0 – ИОТ ф-ии $f(z)$. Тогда в некот. ок-ти $\mathcal{D}: D < |z - z_0| < R$ $f(z)$ представима рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (*)$$

Опр. Вычетом ф-ии $f(z)$ отн. т. z_0 наз. коэффициент c_{-1} в ряде $(*)$:

$$\ldots + c_{-1} \frac{1}{z - z_0} + \ldots$$

В окр-ти $\mathcal{D}$ построим окружность γ_ρ: $|z - z_0| = \rho$, $0 < \rho < R$. Тогда для вычета получим выражение:

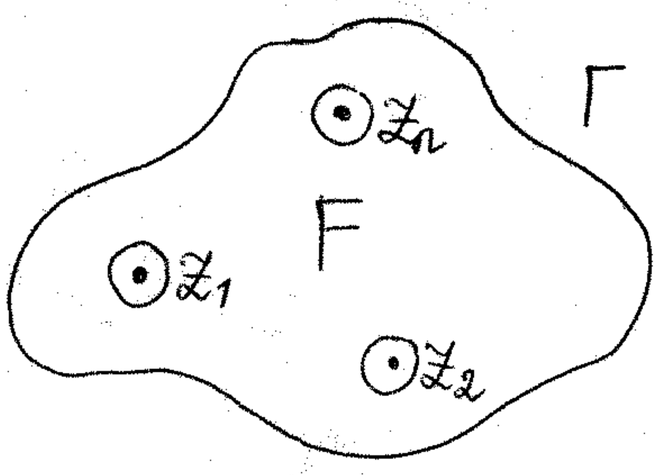
$$\boxed{c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho^+} f(z)\,dz} \quad (**)$$

Обозн. $c_{-1} = res\,[f(z), z_0] = \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)$ (от. франц. residu – вычет)

Теорема о вычетах. $\exists$ $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – все особые точки ф-ии $f(z)$ внутри контура Γ. Тогда:

$$\oint_{\Gamma^+} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res[f(z), z_k]$$

□ Почему внутри Γ конечное число ОТ? По предположению $\exists$ только ИОТ (изолированные). Если допустить бесконечное число точек, то у них образуется предел – не ИОТ $\Rightarrow$ противоречие.



Построим окружности γ_i: $|z - z_i| = \rho_i$ так, чтобы $\gamma_i \subset int\,\Gamma$, $i = 1, 2, \ldots, n$ – лежат внутри контура Γ
$\gamma_i \subset ext\,\gamma_j$, $i \neq j$ – не пересекаются

$\exists$ F – обл., ограниченная составным контуром $\Gamma \cup \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n$. По т. о составном контуре:

$$\oint_{\Gamma+} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1^+} f(z)\,dz + \ldots + \oint_{\gamma_n^+} f(z)\,dz = \{\text{по ф-ле } (**)\} =$$

$$= 2\pi i \,[\,res\,[f(z), z_1] + \ldots + res\,[f(z), z_n]\,] \;\blacksquare$$

Какие точки нужно учитывать, т.е. какие точки дают вклад в сумму?

1) $\exists\ z_0$ – УОТ. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad c_{-1} = 0$

$\Rightarrow$ УОТ не дают вклад.

Остальные виды точек вклад дают и приходится считать лоранов-ское разложение по-честному. Но бывают отдельные хорошие вар-ты:

2) $\exists\ z_0$ – простой полюс ф-ии $f(z)$

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$$

$$f(z)(z-z_0) = c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1(z-z_0)^2 + \dots$$

$$\exists \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0) = c_{-1} = res\,[f(z),\ z_0]$$

Выведем еще одну ф-лу для вычета простого полюса.

$\exists\ f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z), \psi(z)$ – аналит. в ок-ти т. z_0

$\varphi(z_0) \neq 0$,

$\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$ – чтобы полюс был простым, а не кратным

Подставим $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ в имеющуюся ф-лу для вычета:

$$c_{-1} = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)(z-z_0)}{\psi'(z_0)(z-z_0) + \psi''(z_0)/2\,(z-z_0)^2 + \dots} = \left\{ \begin{array}{l} \text{сократим} \\ \text{на } (z-z_0) \end{array} \right\} =$$

↘ подставим степенное разложение ↗

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi'(z_0) + \psi''(z_0)/2\,(z-z_0) + \dots} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)}$$

– вторая ф-ла для вычета (если представление для $f(z)$ дано)

) $\exists\ z_0$ – полюс кратности m ф-ии $f(z)$

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots\ ,\quad c_m \neq 0$$

Умножим на $(z-z_0)^m$, чтобы избавиться от знаменателей:

$$f(z)(z-z_0)^m = c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m + \dots$$

Дифференцируем:

$$\frac{d^{m-1}[f(z)(z-z_0)^m]}{dz^{m-1}} = (m-1)!\,c_{-1} + m(m-1)\dots 2c_0(z-z_0) + \dots$$

Перейдем к пределу $z \to z_0$:

$$(m-1)!\,c_{-1} = \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}[f(z)(z-z_0)^m]}{dz^{m-1}}$$

$$c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}[f(z)(z-z_0)^m]}{dz^{m-1}}$$; $m = 1$ — для простого полюса, если следовать соглашению:

$$\begin{cases} f^{(0)}(z) = f(z) \\ 0! = 1 \end{cases}$$

1. Вычет отн. бесконечно удаленной точки

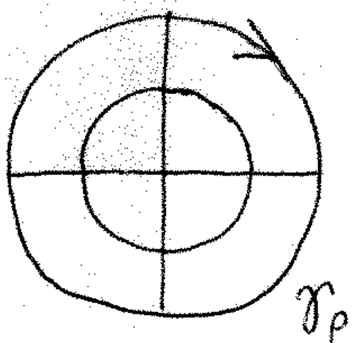
Ранее расам. вычеты только в конечных точках.

$\mathcal{D}: |z| > R \quad f(z) \in A(\mathcal{D})$

$z_0 = \infty$ ИОТ для $f(z)$

$f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$

Опр. Вычетом ф-ии $f(z)$ отн. т. $z_0 = \infty$ наз. число $-c_{-1}$



γ_ρ

$\gamma_\rho: |z| = \rho$
$\rho > R$

Чтобы в обоих случаях видеть особую т. слева от себя добавляется "$-$" в формуле.

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho^+} f(z)\,dz$$

$$-c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho^-} f(z)\,dz \quad (*)$$

z_0 – УОТ для $f(z) \Rightarrow c_{-1} = 0$

$z_0 = \infty$ – УОТ для $f(z)$; $c_{-1} = 0$ не обязательно

$f(z) = \frac{1}{z}$, $z_0 = \infty$, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$

$c_{-1} = 1 \quad \operatorname{res}[f(z), \infty] = -1$

Теорема о полной сумме вычетов. $\exists$ ф-ия $f(z)$ имеет во всей $\mathbb{C}$ только конечное число особых точек $z_1, \dots, z_n$. Положим $z_0 = \infty$. Тогда:

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{res}[f(z), z_k] = 0$$

□ $\exists$ число ρ такое, что $|z_i| < \rho$, $i = 1, 2, \dots, n$

$\gamma_\rho: |z| = \rho$

По теореме о вычетах, $\oint\limits_{\gamma_\rho^+} f(z)\,dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{res}[f(z), z_k]$

Перепишем (*): $\oint\limits_{\gamma_\rho^-} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}[f(z), z_0]$

Складывая, получим:

$2\pi i \sum\limits_{k=0}^{n} \operatorname{res}[f(z), z_k] = 0$ ■

Замечание. Условие теоремы выполнено для $\forall$ рац. ф-ии:
$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Пример. Вычислить интеграл:
$$I = \oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z^5-1)}$$

Особые точки:
$z_1, z_2, \dots, z_5$ — корни 5-ой степени из 1
$z_6 = 3$
$z_0 = \infty$

По т. о вычетах, $I = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{5} \operatorname{res}[f(z), z_k] \ominus$

$5z^4 = (z^5-1)' \neq 0, \quad z = z_k$

Возле т. z_k $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z_k) \neq 0$, $\psi(z_k)$, $\psi'(z_k) \neq 0$,

где $\varphi(z) = \frac{1}{z-3}$, $\psi(z) = z^5-1$ $\psi'(z) = 5z^4$

$$\operatorname{res}[f(z), z_k] = \frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)} = \frac{1}{z_k-3} \cdot \frac{1}{5z_k^4} = \frac{z_k}{(z_k-3)\,5\underbrace{z_k^5}_{1}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{z_k}{z_k-3}$$

$$\ominus 2\pi i \overbrace{\sum_{k=1}^{5} \frac{z_k}{z_k-3} \cdot \frac{1}{5}}^{-\frac{1}{242}} = \boxed{-\frac{\pi i}{121}}$$

По т. о полной сумме вычетов,
$$\sum_{k=1}^{5} \operatorname{res}[f(z), z_k] = -\underbrace{\operatorname{res}[f(z), 3]}_{\frac{1}{242}} - \underbrace{\operatorname{res}[f(z), \infty]}_{0} = -\frac{1}{242}$$

$$\operatorname{res}[f(z), 3] = \frac{\varphi(3)}{\psi'(3)} = \frac{1}{3^5-1} = \frac{1}{242}$$

$f(z)$ $\varphi(z) = \frac{1}{z^5-1}$; $\psi(z) = z-3$

$\varphi(3) \neq 0$, $\psi(3) = 0$, $\psi' \equiv 1 \neq 0$

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} = \frac{1}{z^6} \cdot \frac{1}{1-3/z} \cdot \frac{1}{1-1/z^5} = \frac{1}{z^6}\left(1 + \frac{3}{z} + \frac{9}{z^2} + \frac{27}{z^3} + \dots\right) \cdot$$

$$\cdot\left(1 + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^{10}} + \dots\right) = \frac{1}{z^6} + \frac{3}{z^7} + \frac{9}{z^8} + \dots$$

$\Rightarrow$ отсутствует член с $\frac{1}{z}$ $\Rightarrow$ $C_1 = 0 \Rightarrow \operatorname{res}[f(z), z_0] = 0$

2. Применение вычетов к вычислению интегралов от вещественной переменной

① Интегралы вида $I = \int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi$ ⊖

где $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$

Перейдем от вещ. инт-ла по пер. φ к комплексному интегралу заменой:

$z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Подготовимся к замене:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

$$dz = e^{iz}\,i\,d\varphi \Rightarrow d\varphi = \frac{dz}{ie^{i\varphi}} = \frac{dz}{iz}$$

Перепишем исходный интеграл:

$$\ominus\ \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{z} = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\tilde{R}(z)\,dz$$

Пример. Вычислить $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5+3\cos\varphi}$

Переделаем в комплексный интеграл:

$$I = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z\left(5+\frac{3}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)} = \frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{3z^2+10z+3}$$

Имеем дело с:

$$f(z) = \frac{1}{3z^2+10z+3}$$

f-ия имеет 2 конечные особые точки: $z_1 = -\frac{1}{3}$, $z_2 = -3$

По т. о вычетах учитываем только те точки, что в контуре, т.е. z_1

$$\Rightarrow I = \frac{2}{i}\,2\pi i\cdot \operatorname{res}[f(z), z_1] = 4\pi\cdot\frac{\varphi(z_1)}{\psi'(z_1)} =$$

$$= 4\pi\left.\frac{1}{6z+10}\right|_{z=-\frac{1}{3}} = 4\pi\,\frac{1}{8} = \frac{\pi}{2}$$

Важно, что получили вещественный ответ, т.к. изначально вычисляли вещественный интеграл. В противном случае — ошибка в вычислениях.

② Интегралы вида $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

Обозн. $P_+ : \operatorname{Im} z > 0$; $\overline{P_+} : \operatorname{Im} z \geqslant 0$

Сформулируем требования к ф-ии $f(x)$.

Теорема 7.1. $\exists$ $f(z)$ удовл. условиям:

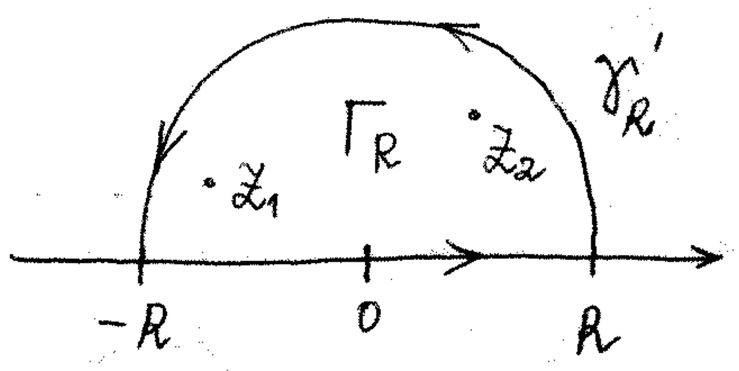
1) $f(z)$ – аналит. в P^+ за исключением ИОТ $z_1, \dots, z_n$ и непрерывная в т. вещественной оси

2) для всех достаточно больших z из $\overline{P_+}$ выполняется неравенство ($M(z)$ – вещ. ф-ия):
$|f(z)| \leqslant \frac{M(z)}{|z|}$, где $M(z) \to 0$ при $z \to \infty$, $z \in \overline{P_+}$
(т.е. $f(z)$ убывала с хоть немного большей скоростью, чем $1/z$)

Тогда интеграл I $\exists$ хотя бы в смысле главного значения и:

$$(\text{V.p.}) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}[f(z), z_k]$$

□ Построим вспомогательный контур:



Выберем R настолько большим, чтобы все точки особые попали в контур γ_R':
$|z_i| < R$, $i = 1, \dots, n$

По т. о вычетах:

$$\underbrace{\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx}_{\text{вещественный интеграл по оси}} + \int\limits_{\gamma_R'} f(z)\,dz = \oint\limits_{\Gamma_R^+} f(z)\,dz = \underbrace{2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}[f(z), z_k]}_{\text{не зависит от } R}$$

Перейдем к пределу при $R \to \infty$. Достаточно грубой оценки:

$$\left|\int\limits_{\gamma_R'} f(z)\,dz\right| \leqslant \max_{z \in \gamma_R'} |f(z)| \cdot \pi R \leqslant \frac{\max\limits_{z \in \gamma_R'} M(z)}{R} \cdot \pi R = \pi \max_{z \in \gamma_R'} M(z) \xrightarrow{z \to \infty} 0$$

$$\exists \lim_{R \to \infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx = (\text{V.p.}) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}[f(z), z_k] \quad \blacksquare$$

Замечание. Можно вместо положительной полуплоскости рассм. отрицательную полуплоскость — она была выбрана для определенности.

Пример. Вычислить $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

Имеем дело с ф-ией $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$, у нее 2 особые точки $z_1 = -i$, $z_0 = i$. Нас интересует только z_0, т.к. она находится в верхней полуплоскости:

$I = 2\pi i \cdot res[f(z), i]$ ⊜

z_0 – полюс кратности 3.

ф-ла для вычета полюса кратности m:

$$\frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}[f(z)(z-z_0)^m]}{dm^{m-1}}$$

Применим формулу: $\overbrace{g(z)}$

⊜ $2\pi i \cdot \frac{1}{2} \lim\limits_{z \to i} \frac{d^2[f(z)(z-i)^3]}{dz^2}$ ⊜

$g(z) = \frac{1}{(z+1)^3}$; $g''(z) = \frac{12}{(z+i)^5}$

⊜ $\pi i \frac{12}{(2i)^5} = \pi \frac{12}{32} = \frac{3}{8}\pi$ – вещественный!

③ Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)\,dx$

Лемма Жордана.] $f(z)$ определена и непрерывна для всех достаточно больших $z \in \overline{P_+}$ и $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$, $z \in \overline{P_+}$. Тогда для всех $a > 0$ справедливо $\int\limits_{\gamma_R'} e^{iaz} f(z)\,dz \to 0$ при $R \to \infty$, обозн. J

□ $|J| \leqslant \int\limits_{\gamma_R'} |e^{iaz}||f(z)| \underbrace{\frac{d\sigma}{dl}}$ (по св-ву 4 из первоначального списка) ⊜

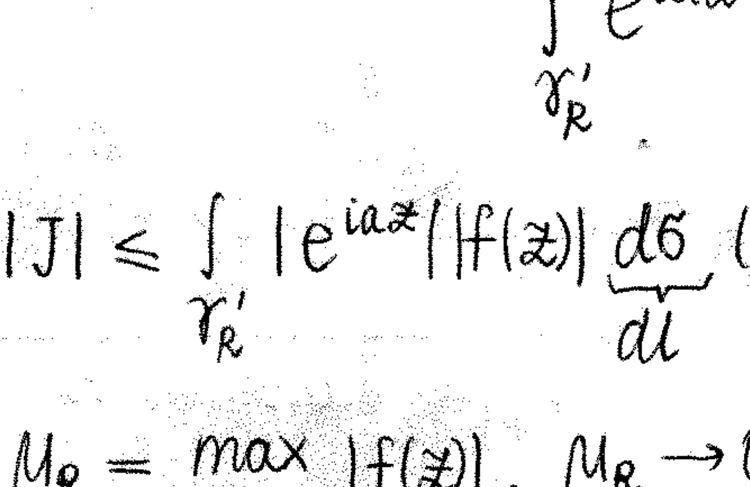
$M_R = \max\limits_{z \in \gamma_R'} |f(z)|$, $M_R \to 0$ при $R \to \infty$

γ_R': $z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$

$iaz = -aR\sin\varphi + iaR\cos\varphi$

⊜ $\{d\sigma = R\,d\varphi\} = M_R R \int\limits_0^{\pi} |e^{iaz}|\,d\varphi = M_R R \int\limits_0^{\pi} e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi =$

$= 2 M_R R \int\limits_0^{\pi} e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi$ ⊜



в силу симметр.

На отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$ действует оценка:

$\frac{2}{\pi}\varphi \leqslant \sin\varphi \leqslant \varphi$ (в конечных точках превращается в равенство)

Преобразуем нер-во: $-\frac{2}{\pi}aR\varphi \geqslant -aR\sin\varphi$

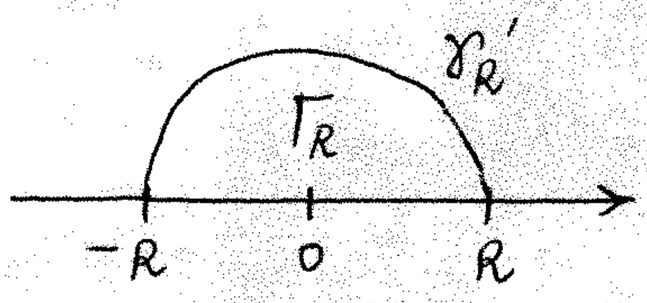
$$\ominus\ 2M_R R\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{\pi}{2}aR\varphi}d\varphi = \cancel{2}M_R\cancel{R}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{a\cancel{R}}e^{-\frac{2}{\pi}aR\varphi}\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{a}M_R(1-e^{-aR}) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \ \blacksquare$$

Теорема 7.2. $\exists$ $f(z)$ удовл. условию 1 т. 7.1 и $f(z)\to 0$ при $z\to\infty$, $z\in\overline{P_+}$ для всех $a>0$.
Тогда $\vee$ интеграл I $\exists$ (хотя бы в смысле главного значения) и

$$(v.p.)\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}[e^{iaz}f(z), z_k] \quad (*)$$

□ Построим такой же контур Γ_R, что и в т. 7.1.



Тогда по т. о вычетах: $\int_{\gamma_R'} \to 0$ при $R\to\infty$ по лемме Жордана

$$\int_{-R}^{R} e^{iax}f(x)dx + \int_{\gamma_R'} e^{iaz}f(z)dz = \oint_{\Gamma_R^+} e^{iaz}f(z)dz = \underbrace{2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}[e^{iaz}f(z), z_k]}_{\text{не зависит от } R}$$

Переходя к пределу при $R\to\infty$ получим р-во (*). ■

Пример. Вычислить $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{x^2+a^2}dx$ – интеграл Лапласа

Сведем к интегралу третьего типа:

$\cos ax = \operatorname{Re}(e^{iax})$

$I=\operatorname{Re}J$, $J=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x^2+a^2}dx$ $\ominus$

Считаем $a>0$, $\alpha>0$.

$f(z)=\frac{1}{z^2+a^2}$, $z_0=ia$ – единственная т. в контуре

$$\ominus\ 2\pi i\cdot\operatorname{res}[e^{i\alpha z}f(z), ia] = \left\{\begin{array}{l}\text{по ф-ле вычета}\\ \text{отн. простого полюса}\end{array}\right\} =$$

$$= 2\pi i\left.\frac{e^{i\alpha z}}{2z}\right|_{z=ia} = \cancel{2\pi i}\frac{e^{-\alpha a}}{\cancel{2i}a} = \frac{\pi}{a}e^{-\alpha a}$$ – вещественный

$$\Rightarrow I = J = \frac{\pi}{a}e^{-\alpha a}$$

3. Логарифмический вычет и принцип аргумента

Уточнение соглашения о контурах:

① все ИОТ ф-ии $f(z)$ являются полюсами

② все рассм. контуры не проходят через полюсы и <u>через нули</u> ф-ии $f(z)$

Пусть контур $\Gamma \subset G$: на самом контуре полюсов и нулей нет, а внутри конечное число нулей — иначе ф-ия тождественный ноль по т. о единственности, а также полюсов. Перенумеруем их:

$z_1, \dots, z_p$ — все полюсы $f(z)$ внутри Γ
$\alpha_1, \dots, \alpha_p$ — их кратности
$\zeta_1, \dots, \zeta_n$ — все нули $f(z)$ внутри Γ
$\beta_1, \dots, \beta_n$ — их кратности

$$N_f(\Gamma) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \quad \text{— полное число нулей ф-ии } f \text{ внутри } \Gamma$$

$$P_f(\Gamma) = \sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell \quad \text{— полное число полюсов ф-ии } f \text{ внутри } \Gamma$$

} целые числа

Теорема (о логарифмическом вычете)

$$N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma+} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz}_{\text{логарифмический вычет}}$$

[Назван вычетом за внешнее сходство с $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\,dz$]

□ Положим $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$.

Особые точки ф-ии $\varphi(z)$ — это нули и полюсы ф-ии $f(z)$.

Вокруг т. ζ_k ф-цию $f(z)$ можно записать в виде:
$f(z) = \underbrace{(z-\zeta_k)^{\beta_k} g(z)}$, $g(z)$ — аналит. в окр-ти т. ζ_k, $g(\zeta_k) \neq 0$ (1)
Продифференцируем (2):
$f'(z) = \beta_k (z-\zeta_k)^{\beta_k - 1} g(z) + (z-\zeta_k)^{\beta_k} g'(z) = \underbrace{\beta_k (z-\zeta_k)^{\beta_k - 1} h(z)}$, (2)
где $h(z) = g(z) + \frac{1}{\beta_k}(z-\zeta_k) g'(z)$. Заметим, что:
$h(\zeta_k) = g(\zeta_k)$

Разделим (2) на (1):
$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\beta_k}{z-\zeta_k} + \psi(z)$, где $\psi(z)$ — аналит. в окр-ти т. ζ_k
$\|$
$\varphi(z)$ по обозн.

Покажем справедливость представления:

$$\varphi(z) = \frac{\beta_k h(z)}{(z-\xi_k)g(z)} = \frac{\beta_k}{z-\xi_k} \cdot \frac{h(z)}{g(z)} \ominus$$

Представим $\frac{h(z)}{g(z)}$ в виде степенного ряда:

$$\frac{h(z)}{g(z)} = a_0 + a_1(z-\xi_k) + \dots = 1 + a_1(z-\xi_k) + \dots$$

$$a_0 = \frac{h(\xi_k)}{g(\xi_k)} = 1$$

Подставим обратно:

$$\ominus \frac{\beta_k}{z-\xi_k}\left[1 + a_1(z-\xi_k) + a_2(z-\xi_k)^2 + \dots\right] = \frac{\beta_k}{z-\xi_{1k}} + \underbrace{\beta_k(a_1 + a_2(z-\xi_k) + \dots)}_{\psi(z)}$$

Вывод: т. ξ_k является полюсом, причем простым, ф-ии $\varphi(z)$;

новая интерпретация — $\beta_k = res[\varphi(z), \xi_k]$

Проведем аналогичный анализ: в окр-ти т. z_m справедливо представление:

$$f(z) = \frac{r(z)}{(z-z_m)^{\alpha_m}}, \text{ где } r(z) - \text{аналит. в ок-ти т. } z_m \text{ и } r(z_m) \neq 0 \quad (3)$$

↖ кратность полюса z_m

Продифференцируем (3):

$$f'(z) = -\frac{\alpha_m}{(z-z_m)^{\alpha_m+1}} r(z) + \frac{r'(z)}{(z-z_m)^{\alpha_m}} = -\frac{\alpha_m}{(z-z_m)^{\alpha_m+1}} \cdot s(z), \quad (4)$$

где $s(z) = r(z) - \frac{r'(z)}{\alpha_m}(z-z_m)$

$s(z)$ — аналит. в окр-ти т. z_m и $s(z_m) = r(z_m)$.

Делим (4) на (3):

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-\alpha_m}{z-z_m} + \xi(z), \quad \xi(z) - \text{аналит. в окр-ти } z_m$$

$\Rightarrow$ аналогичные выводы: z_m — простой полюс ф-ии $\varphi(z)$

$-\alpha_m = res[\varphi(z), z_m]$

По т. о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+} \varphi(z)dz = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} res[\varphi(z), c_k]}_{\text{нули}} + \underbrace{\sum_{l=1}^{p} res[\varphi(z), z_l]}_{\text{полюсы}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \beta_k - \sum_{l=1}^{p} \alpha_l = N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) \blacksquare$$

Почему логарифмический?

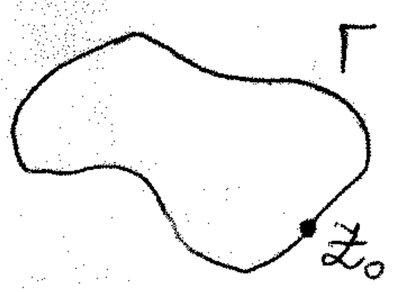
Т.к. $\frac{f'(z)}{f(z)}$ наз. логарифмической производной

Расск. логарифм как ф-цию обратную экспоненте. Формально продифференцируем:

$$(Ln\ f(z))' = \frac{1}{f(z)}\ f'(z) = \varphi(z)$$

Принцип аргумента? Общая формулировка т. о логарифмическом вычете за счет знания о первообразных. Рассуждения будут сложны, но мы сможем упростить формулу вычисления лог. вычета.

Применить формулу Ньютона - Лейбница нельзя из-за отсутствия С-свойства. Также неприменимость видна на примере:



$$\oint_\Gamma f(z)dz = F(z_0) - F(z_0) = 0$$

А интегралы по замкнутому контуру могут быть не равны нулю! Как-то влияет многозначность ф-ии на это.

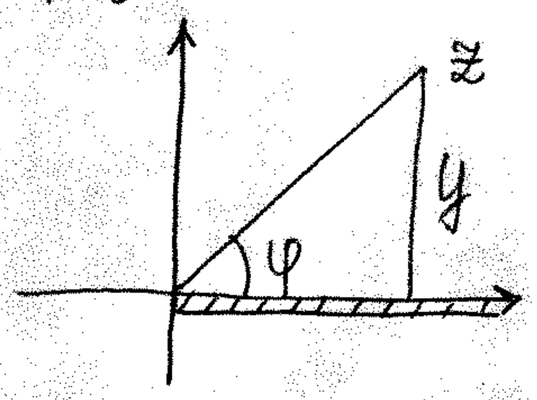
Что есть производная многозначной ф-ии? Расск. $Ln\,z = \ln|z| + i\,Arg\,z$, определена всюду, кроме нуля, и принимает счетное число значений. Также введена:

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z,\ z \neq 0$$

Главный логарифм аналитичен в $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$, причем там $(\ln z)' = \frac{1}{z}$
Можно это проверить через $\ln z = u(x,y) + iv(x,y)$:

$$u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

Представить $v(x,y)$ сложнее:



В правой полуплоскости можно как:

$$tg\,\varphi = \frac{y}{x}$$

$$\varphi = arctg\,\frac{y}{x}$$

(В левой нужно действовать по другому)

Далее все подставляем: $(\ln z)'_z = u'_x + iv'_x$

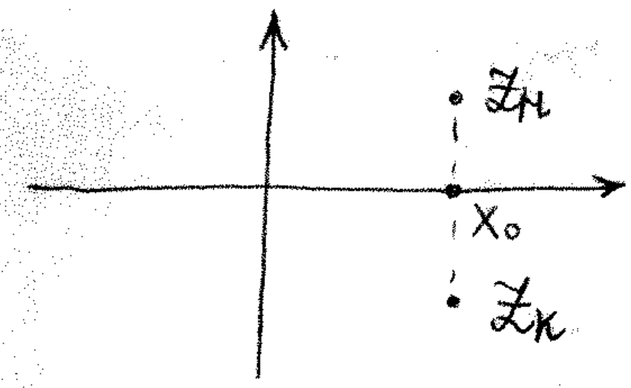
$\ln z$ не единственная однозначная ф-ия, выводимая из $Ln\,z$.
Определим семейство однозначных ф-ий:

$$Ln_k\,z = \ln|z| + i[\arg z + 2\pi k],\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$ и определена на $z \neq 0$

Причем при $k=0$ $\ln z = Ln_0\,z$; $(Ln_k\,z)' = (\ln z)' = \frac{1}{z}$

Те ф-ии, которые выделяются из многозначной, наз. однозначными ветвями многозначной ф-ии $Ln\,z$

Они обладают тем недостатком, что теряют аналитичность на своей области определения. Например:



$$\ln z_н = \ln|z_н| + i\varphi_н$$
$$\ln z_к = \ln|z_к| + i\varphi_к$$

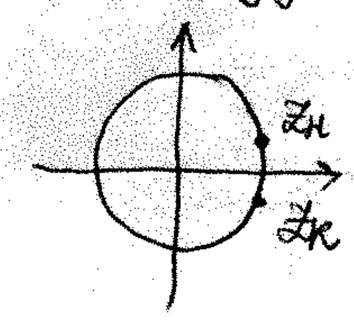
С вещ. частями будет все хорошо.
Устремим $z_н, z_к \to z_0$

$$\Rightarrow \ln z_н \to \ln x_0 + 0$$
$$\ln z_к \to \ln x_0 + \underbrace{i\,2\pi}_{\text{при стремлении в } [0,\,2\pi)}$$

$\Rightarrow \forall$ т. x_0 является т. разрыва $\Rightarrow$ есть неприятности

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

Если будем интегрировать не по всей окружности, а чуть отступим:



$$\int\limits_{z_н}^{z_к} \frac{dz}{z} = \ln z\Big|_{z_н}^{z_к} \ominus$$
$$\| \quad i(\varphi_к - \varphi_н)$$

$\Rightarrow$ ф-ла Ньютона Лейбница работает, пока мы не замкнем окружность. Что нужно поправить?

$$\ominus \ln z_к - \ln z_н$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$2\pi i \qquad \ln 1 = 0$$

$\Rightarrow$ $z_к$ стремится принять не то значение, которое приписано ей, а то, которое приписано:

$\operatorname{Ln}_1 z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi)$, $\operatorname{Ln}_1 1 = 2\pi i$

то есть та ветвь, которая принадлежит 1, а не 0

Свойство: одна ветвь старается непрерывно перейти в ветвь с следующим индексом при обходе по контуру. Действует при повторных обходах и при обходах в другом направлении

$\Rightarrow$ чтобы восстановить правильность ф-ла Ньютона-Лейбница необходимо приписать т. не то значение, которое ей приписано, а то, которое она стремится принять

4. Обобщение формулы Ньютона - Лейбница

Пусть нужно вычислить интеграл $\oint_L f(z)\,dz$, если известна многозначная первообразная ф-ия $F(z)$.

Фикс. т $z_н \in L$ и выбираем какое-либо значение $F(z_н)$ в этой точке. Совершаем обход L, выбирая в каждой точке единственное значение первообразной исходя из требования ее (т.е. первообразной) непрерывности вдоль контура. Пусть $F(z_к)$ – значение F, с которым мы вернемся в начальную точку $z_н$ по завершении обхода.

Тогда $\boxed{\oint_L f(z)\,dz = F(z_к) - F(z_н)}$ – обобщения правила Ньютона-Лейбница для многозн. первообр.

Применим к нашей ситуации с вычетами:

$F(z) = \operatorname{Ln} f(z)$

$F(z_н) = \operatorname{Ln} f(z_н) = |\ln f(z_н)| + i\varphi_н$

$\varphi_н$ – значение, приписываемое аргументу $f(z)$ в начале обхода

$F(z_к) = \ln|f(z_н)| + i\varphi_к$

$\Rightarrow$ Применим формулу:

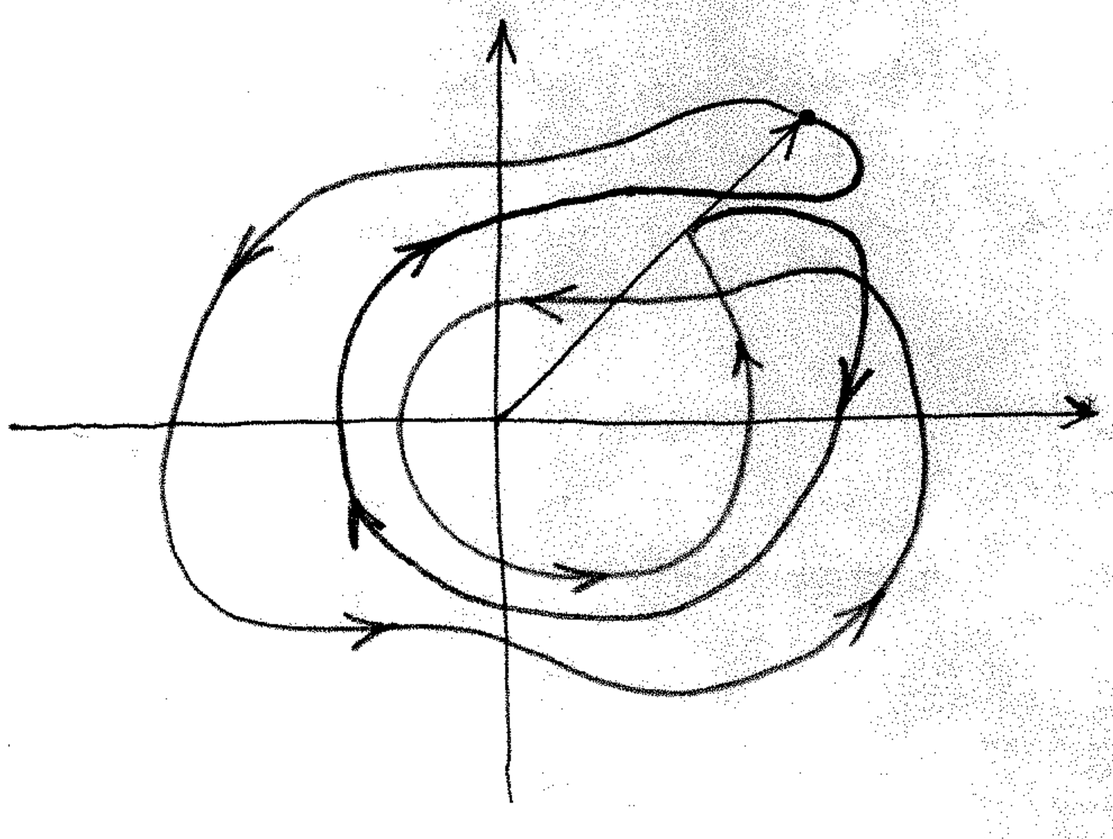
$$\oint_L \varphi(z)\,dz = i(\varphi_к - \varphi_н)$$

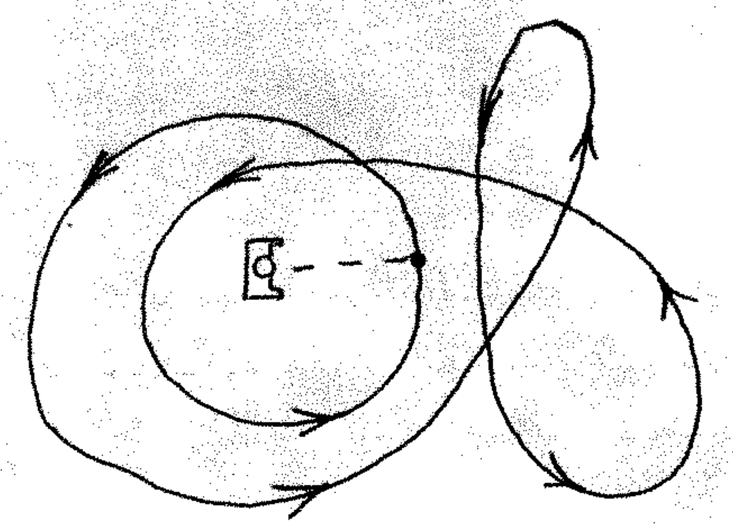
$\Rightarrow$ сама формула из т. о лог. вычете приобретает вид:

$$N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) = \frac{1}{2\pi}\underbrace{(\varphi_к - \varphi_н)}_{\text{обозн. } \operatorname{Var}_\Gamma \operatorname{Arg} f(z)} = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}_\Gamma \operatorname{Arg} f(z)$$ – принцип аргумента

Можно дать теореме еще одну формулировку:

Порядок точки отн. кривой





То, что назвали приращением аргумента, через индекс точки:

$$2\pi \operatorname{ind}_0 L = \operatorname*{Var}_{\Gamma} \operatorname{Arg} f(z)$$



Тогда третья формулировка:

$$N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) = \operatorname{ind}_{w=0} L, \text{ где } L = f(\Gamma)$$

Следствие $\exists f(z) \in A(G)$, контур $\Gamma \subset G$, $\operatorname{int}\Gamma \subset G$. Тогда

$$N_f(\Gamma) = \operatorname{ind}_0 L, \; L = f(\Gamma)$$

Сформулируем следствие из трех формулировок.

Теорема Руше $\exists f(z), \varphi(z) \in A(G)$, контур $\Gamma \subset G$, $\operatorname{int}\Gamma \subset G$.
Пусть $|f(z)| > |\varphi(z)|, \; \forall z \in \Gamma$ (*)

Положим $F(z) = f(z) + \varphi(z)$.

Тогда $N_F(\Gamma) = N_f(\Gamma)$.

(хорошо работает для сложных F и простых f)

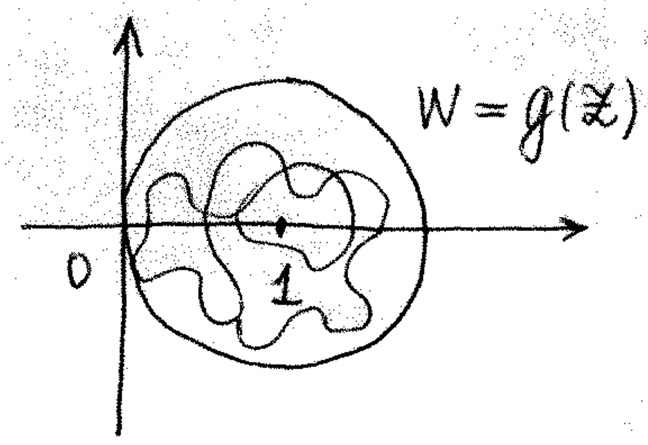
□ Из (*) $\Rightarrow$ $f(z) \neq 0 \;\; \forall z \in \Gamma$

$$F(z) = f(z)\underbrace{\left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]}_{g(z)} = f(z)g(z)$$

$$\operatorname{Arg} F(z) = \operatorname{Arg} f(z) + \operatorname{Arg} g(z)$$

$$\operatorname*{Var}_{\Gamma} \operatorname{Arg} F(z) = \operatorname*{Var}_{\Gamma} \operatorname{Arg} f(z) + \overbrace{\operatorname*{Var}_{\Gamma} \operatorname{Arg} g(z)}^{0}$$

$$|g(z) - 1| = \frac{|\varphi(z)|}{|f(z)|} < 1, \; \forall z \in \Gamma$$



Содержится в круге и не выходит за него $\Rightarrow$ не может сделать полный оборот вокруг 0 ■

Пример. Найти число корней уравнения $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ внутри единичного круга $\Gamma: |z| = 1$

$f(z) = -4z^5 \qquad \varphi(z) = z^8 + z^2 - 1$

$z \in \Gamma \sim |z| = 1$

$|f(z)| = 4$

$|\varphi(z)| \leq |z|^8 + |z|^2 + 1 \leq 3$

$N_F(\Gamma) = N_f(\Gamma) = 5$

$-4z^5$ имеет 5 корней

Теорема (Руше)

Пусть $f(z), \varphi(z) \in A(G)$, $\Gamma \subset G$, $\operatorname{int}\Gamma \subset G$

Пусть $|f(z)| > |\varphi(z)|$, $\forall z \in \Gamma$ (*)

Тогда для функции $F(z) = f(z) + \varphi(z)$

$$N_F(\Gamma) = N_f(\Gamma)$$

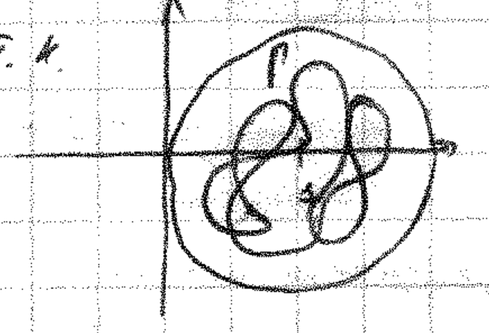
Д-во: (*) $\Rightarrow$ $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \Gamma$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow F(z) = f(z)\left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right] = f(z)g(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arg} F(z) = \operatorname{Arg} f(z) + \operatorname{Arg} g(z)$$

$$\operatorname{Var}_\Gamma \operatorname{Arg} F(z) = \operatorname{Var}_\Gamma \operatorname{Arg} f(z) + \underbrace{\operatorname{Var}_\Gamma \operatorname{Arg} g(z)}_{=0},$$

Г. 4.



$|g(z)| \ldots$

$|g(z) - 1| < 1$

Теорема (Основная т. алгебры)

Многочлен $P(z)$ степени $n \geq 1$ имеет в $\mathbb{C}$ ровно n корней с учётом кратности

Д-во: $P(z) = \underbrace{a_0 z^n}_{f(z)} + \underbrace{a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}_{\varphi(z)}$

$\frac{\varphi(z)}{f(z)} \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$ Рассмотрим контур $\Gamma: |z|=R$, где R: $|\varphi(z)|/|f(z)| < 1$, $\forall z$

По т. Руше $N_0(\Gamma) = N_\infty(\Gamma) = n$

Теорема (об образе области)

$\exists f(z) \in A(G)$, $f(z) \neq \text{const}$. Тогда $D = f(G)$ - тоже есть область

Д-во: ① связность

Пусть w_1, w_2 - $\forall$ точки из D, а z_1, z_2 - их прообразы (какие-то из, вообще говоря, нескольких)

Соединим z_1 и z_2 некот. кривой $L: z = \varphi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, $L \subset G$. Тогда кривая $\Delta: w = f[\varphi(t)] = \mu(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, является непрерывной, $\in D$, соединяет w_1, w_2 $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ в силу произвольности w_1, w_2 D - связно

② открытость

Пусть w_0 - $\forall$ т. из D, z_0 - её прообраз в G, т.е. $w_0 = f(z_0)$. Покажем, что $\exists K_\mu: |w - w_0| < \mu: K_\mu \in D$ (т.е. $\forall$ точка входит в D с некот. окрестностью)

Построим замкн. круг $\overline{C_\rho}: |z - z_0| \le \rho$ так, чтобы $C_\rho \subset G$, z_0 - единств. w_0-точка в круге $\overline{C_\rho}$ ($w_0 = f(z_0)$) построим $\forall$ круг и будем его уменьшать, пока условие не будут выполнены. Процесс остановится, т.к. ест. нер. единственности, а $f(z) \neq \text{const}$

Обозн. $\partial_\rho: |z - z_0| = \rho$; $\mu = \inf\limits_{\partial_\rho} |f(z) - w_0| = \min\limits_{\partial_\rho} |f(z) - w_0| > 0$ (вещ. $\Rightarrow$ достигает inf, z_0 - единств. прообр $w_0 \Rightarrow f(z) \neq w_0$, $z \in \partial_\rho$

Покажем, что $K_\mu \subset D$. Пусть w' - $\forall$ т. из K_μ, т.е. $|w' - w_0| < \mu$

Обозн. $g(z) = f(z) - w_0$, $h(z) = f(z) - w'$

Сколько нулей имеют g и h внутри ∂_ρ?

$N_g(\partial_\rho) > 0$, т.к. $g(z_0) = 0$, $z_0 \in \text{int}\,\partial_\rho$

$h(z) = f(z) - w_0 - (w' - w_0)$, $|f(z) - w_0| \ge \mu$, $\forall z \in \partial_\rho$; $|w' - w_0| < \mu$

Тогда по т. Руше $N_h(\partial_\rho) = N_g(\partial_\rho) > 0 \Rightarrow$

$\exists$ т. $z' \in \text{int}\,\partial_\rho$: $f(z') = w'$

Получили, что $\forall$ т. w' из K_μ $\exists$ прообраз $z' \in G \Rightarrow$

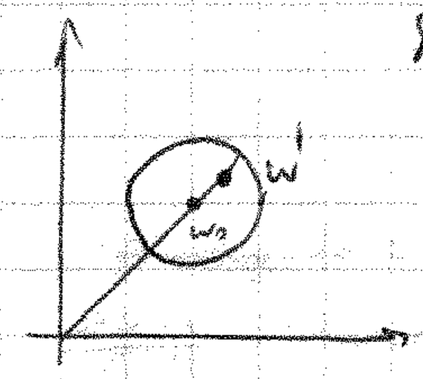
$\Rightarrow K_\mu \subset D$, ч.т.д.

⑤

Принцип максимума модуля аналитической функции.

$\exists f(z) \in A(G)$, $f(z) \neq const$. Тогда ни в одной точке ч-ва G $|f(z)|$ не может достигать максимума. Если G - ограничена область и $f(z) \in C(\bar{G})$, то $|f(z)|$ достигает своего максимума на ∂G (и только)

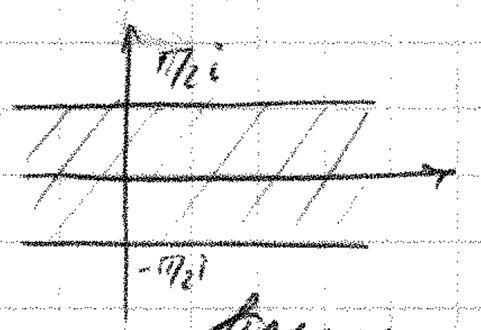
Д-во: Предположим противное: пусть $|f(z)|$ достигает свой max в т. $z_0 \in G$, т.е. $|w_0| = |f(z_0)| \geq |f(z)|$ $\forall z \in G$. По т. об образе области т. w_0 входит в $D = f(G)$ вместе с некоторой окрестностью $|w - w_0| < \varepsilon$.



Тогда найдётся z': $|f(z')| = |w'| > |w_0| \Rightarrow$ $\Rightarrow$ противоречие.

Второе ч-во следует из первого и второй т. Вейерштрасса для непр. на компакте функции.

Пример: $f(z) = e^{e^z}$



$z = x \pm \frac{\pi}{2} i \Rightarrow e^z = e^{x \pm \frac{\pi}{2} i} = e^x (\cos \frac{\pi}{2} \pm i \sin \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow |e^{e^z}| = |e^{\pm i e^x}| = 1$, $e^{e^x} \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$

Принцип минимума модуля

$\exists f(z) \in A(G)$, $f(z) \neq const$, $f(z) \neq 0$ $\forall z \in G$. Тогда ни в одной точке ч-ва G $|f(z)|$ не достигает минимума. Если G - ограниченная область и $f(z) \in C(\bar{G})$, то $|f(z)|$ достигает своего минимума на ∂G.

Д-во: $g(z) = \frac{1}{f(z)} \in A(G)$, $\min f(z) = \max g(z) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ очевидно.

Теорема (2-ая т. Вейерштрасса о рядах аналит. функций)

Пусть G – огран. область, $u_n(t) \in A(G) \cap C(\bar{G})$
Если $\sum u_n(t) \rightrightarrows$ на ∂G, то $\sum u_n \rightrightarrows$ на $\bar{G}$.

Д-во: критерий Коши: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N: \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}$
$|\varphi_{n,p}(t)| = |u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon \quad \forall z \in \partial G$
$\varphi_{n,p}(z) \in A(G) \cap C(\bar{G})$, по принципу max модуля $|\varphi_{n,p}(t)| < \varepsilon \quad \forall z \in \bar{G} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ по т. Коши $\sum u_n \rightrightarrows$ на $\bar{G}$

VIII Основные понятия операционного исчисления

Опр. Пусть $f(t)$ – функция действительной переменной. Её преобразованием Лапласа называется функция:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt, \quad p \in \mathbb{C} \qquad (8.1)$$

Класс L функций $f(t)$:

1. $f(t) \equiv 0, \quad t < 0$
2. На $\forall$ огран. промеж-ке числовой оси $f(t)$ имеет лишь конечное число точек разрыва, причём только 1-го рода.
3. При $t \to +\infty$ $f(t)$ имеет огран. степень роста, т.е. $\exists M, a > 0: \quad |f(t)| < Me^{at}, \; \forall t > 0 \qquad (8.2)$

Опр. Показатель степени роста ф-ции $f(t)$ – точная нижняя грань тех a, для которых справедливо (8.2)

Обозн. $f(t) \in L(a_0)$

Обозн. $f(t) \doteq F(p)$

Теорема 8.1 $f(t) \in L(a)$. Тогда $F(p)$ сх-ся в открытой полуплоскости $\Pi_a = \{p \mid \operatorname{Re} p > a\}$, во всякой замкнутой полуплоскости $\overline{\Pi}_\varepsilon = \{p \mid \operatorname{Re} p \geq \varepsilon\}$, где $\varepsilon > a$, $F(p) \rightrightarrows$ (сх-ся равномерно).

Д-во: $p = x + iy \in \Pi_a$ найдутся $a_1, M > 0$:

$a < a_1 < \varepsilon \quad |f(t)| \leq M e^{a_1 t}$

$g(t) = e^{-xt} M e^{a_1 t} = M e^{(a_1 - x)t}$

$|e^{-pt} f(t)| \leq e^{-xt} M e^{a_1 t} = g(t)$.

$\int_0^\infty g(t)\,dt = \int_0^\infty M e^{(a_1 - x)t}\,dt = \frac{M}{a_1 - x}(0 - 1) = \frac{M}{\operatorname{Re} p - a_1}$

$\exists b > a: \quad a_1 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a_1 - x \leq a_1 - b = \frac{a-b}{2}$

$|e^{-pt} f(t)| = e^{-xt} |f(t)| \leq \{x \geq b\} \leq M e^{\frac{a-b}{2} t}$

Пример: $\int_0^\infty e^{-pt} t^\nu\,dt = F(p), \quad \nu \geq 0, \quad -1 < \nu < 0$

$F(p)$ – изображение (образ) оригинала функции $f(t)$

$f(t)$ – оригинал функции $F(p)$

(8.1)

Теорема 8.2

Пусть для ф-ции $f(t)$ интеграл $F(p_0)$ сх-ся для некот. числа $p_0 \in \mathbb{C}$. Тогда $F(p)$ сх-ся во всей полуплоскости Π_{p_0}.

Теорема 8.3 $f(t) \in L(a)$. Тогда $F(p) \in A(\Pi_a)$

Д-во: Построим посл-ть $0 = t_0 < \dots < t_n < \dots$ так, что $t_n \to \infty$ и в нее включены все точки разрыва ф-ции $f(t)$ (если таких бесконечно) ①

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-pt} f(t)\,dt}_{u_n(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(p)$$

По теореме об интеграле с параметром ② все функции $u_n(p)$ - целые.

По 1-ой т. Вейерштрасса о рядах аналит. функций $F(p) \in A(\Pi_a)$ ③

Из того, что $F(p) \rightrightarrows$ в Π_β, где $\beta > a$, следует, что $\sum u_n(p)$ сх-ся в Π_a нормально

$$F'(p) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-pt}(-t) f(t)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-pt}(-t) f(t)\,dt$$

Примеры: ④ $\theta_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$

$\theta_0(t)$ - единичная функция Хевисайда

$\theta_0(t) \in L(0)$, $F(p) \in A(\Pi_0)$

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\,dt = 1/p \Rightarrow \theta_0(t) \doteq \frac{1}{p}$$

② $f(t) = \begin{cases} e^{\alpha t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \Rightarrow F(t) = \int_0^\infty e^{(\alpha - p)t}\,dt = \frac{1}{p-\alpha}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha$.

③ $f_n(t) = \begin{cases} t^n, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ $\quad f_n(t) \doteq F_n(p)$

$F_0(p) = 1/p$; $F_n(p) = \int_0^\infty e^{-pt} t^n\,dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} t^n \Big|_0^{+\infty} +$

⑨ $+ \frac{n}{p} \int_0^\infty e^{-pt} t^{n-1}\,dt = \frac{n}{p} F_{n-1}(p) \Rightarrow F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$

$\in A(\Pi_a)$

... так,
бе
ажи

$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(p)$

ажи

ще $b>a$,
ібно

=

2

$\frac{1}{p-\alpha}$,

∞
+
$\frac{n!}{p^{n+1}}$

Свойства преобразования Лапласа

① <u>Линейность</u>

$f_i \doteq F_i(p)$, $\operatorname{Re} p > a_i$, $i=\overline{1,n}$

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t) \doteq F(p) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i(p)$, $\operatorname{Re} p > a = \max_i a_i$.

② $f(t) \doteq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$

$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$, $\operatorname{Re} p > \alpha a$

③ <u>Теорема запаздывания</u>

$f(t) \doteq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$

При $\tau > 0$ и сколь угодно малом τ допустимо:

$f_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ f(t-\tau), & t \geq \tau \end{cases}$

$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt = \int_\tau^{+\infty} = \left| \begin{matrix} t-\tau = u \\ t = u+\tau \end{matrix} \right| = e^{-p\tau} \int_\tau^{+\infty} e^{-pu} f_\tau(u)\,du$?

④ <u>Теорема смещения</u>

$f(t) \doteq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{C}$

$F(p+\lambda) \doteq e^{-\lambda t} f(t)$, $\operatorname{Re} p > a - \operatorname{Re}\lambda$

<u>Пример</u>: $\operatorname{Re} p > 0$ $t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}$; $\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha$ $t^n e^{\alpha t} \doteq \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$

$\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\omega| - \operatorname{Re}\alpha$ $e^{-\alpha t} \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$

⑤ Изображение производной

Пусть $f(t)$ – кусочно-гладкая функция из класса $L(a)$

$$f(t) \doteq F(p), \quad \operatorname{Re} p > a$$

Тогда $f'(t) \doteq pF(p) - f(+0), \quad \operatorname{Re} p > a$

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)\,dt = e^{-pt} f(t)\Big|_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$$

Следствие: Пусть $f(t)$ и её производные до порядка n из класса $L(a)$. Тогда

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n \left\{ F(p) - \frac{f(+0)}{p} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(+0)}{p^n} \right\}, \text{ где } \dots$$

⑥ Дифференцирование изображения

$$F(p) \doteq f(t), \quad \operatorname{Re} p > a. \text{ Тогда}$$

$$F'(p) \doteq -tf(t), \quad \operatorname{Re} p > a$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt, \quad F'(p) = \int_0^{+\infty} (-t) e^{-pt} f(t)\,dt$$

⑦ Изображение интеграла

Пусть $f(t) \doteq F(p), \quad \operatorname{Re} p > a, \quad f(t) \in L(a)$

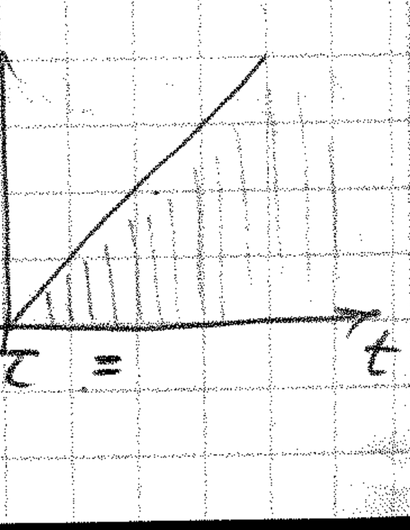
Тогда $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau \doteq \frac{1}{p} F(p), \quad \operatorname{Re} p > a$

$|f(t)| \le Me^{at} \Rightarrow |\varphi(t)| \le Me^{at} \int_0^t d\tau = Mte^{at} \le$
$\le M_1 e^{a_1 t}, \quad a_1 > a = \inf a_1 \Rightarrow \varphi(t) \in L(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \Phi(p). \quad \varphi(t) \doteq \Phi(p)$

$$\Phi(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \int_0^t f(\tau)\,d\tau\,dt = (=)$$

(=) $\int_0^{+\infty} f(\tau)\,d\tau \int_\tau^{+\infty} e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty} f(\tau) \cdot \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_\tau^{+\infty} \right] d\tau =$



переход к двойному интегралу

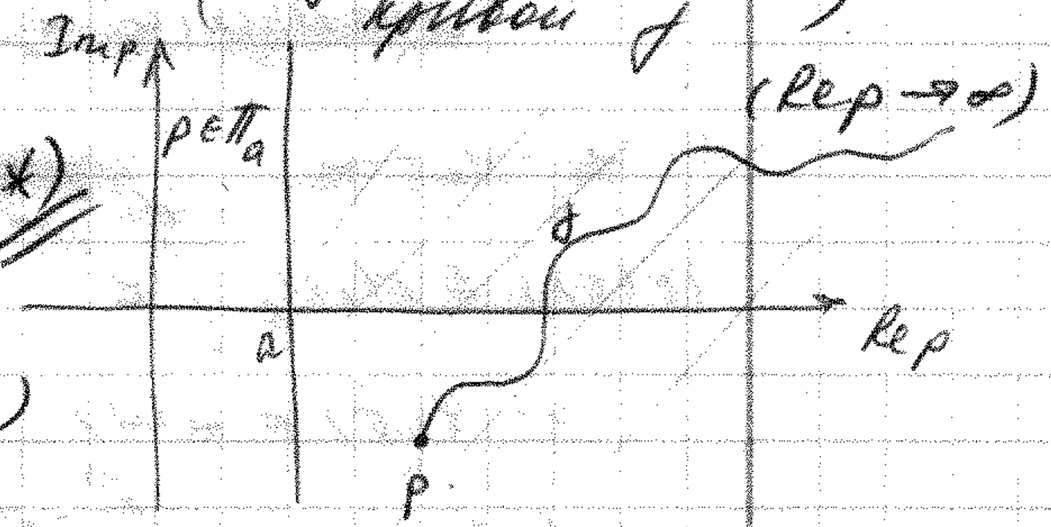
$$= \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-p\tau} f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{p}\cdot F(p)$$

⑧ <u>Интегрирование оригинала</u>

Пусть $f(t) \doteq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$.

$f(t) \in L(a)$, $\frac{f(t)}{t} \in L(a)$.

Тогда $\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^{+\infty} F(q)\,dq$ (вдоль некоторой кривой γ)



$|f(t)| \le Me^{a_1 t}$

$p = x + iy$, $|f(t)| \le Me^{a_1 t}$

$|F(p)| \le \frac{M}{x - a_1} = \frac{M}{\operatorname{Re} p - a_1}$ => (*)

=> $|F(p)| \xrightarrow[p \in \gamma]{p \to \infty} 0$ (т.к. $\operatorname{Re} p \to \infty$)

$\frac{f(t)}{t} \doteq I(p)$, $p \in \Pi_a$

$I(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{f(t)}{t}\,dt$

$I'(p) = \int_0^{+\infty} (-t) e^{-pt} \frac{f(t)}{t} = -F(p)$ =>

=> $I(p) = \int_p^{+\infty} F(q)\,dq$

{ (*) => $I(p) \xrightarrow[\text{т.к. } \frac{f(t)}{t} \in L(a)]{\operatorname{Re} p \to \infty} 0$ }

<u>Опр</u> Пусть ф-ции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ - интегрируемы. <u>Сверткой</u> ф-ций f_1 и f_2 наз-ся функция

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\,d\tau$$

⑨ Пусть $f_1(t) \doteq F_1(p)$, $p \in \Pi_{a_1}$

$f_2(t) \doteq F_2(p)$, $p \in \Pi_{a_2}$

Тогда { $\varphi(t)$ - свёртка функций f_1 и f_2 }

$\varphi(t) \doteq F_1(p) F_2(p)$, $p \in \Pi_a$, $a = \max(a_1, a_2)$

Проверим, что $\varphi(t) \in L(a)$. (I, II - очев.)

1) $a_1 \neq a_2$, $|f_1(t)| \le M_1 e^{a_1' t}$, $|f_2(t)| \le M_2 e^{a_2' t}$

$$|\varphi(t)| \le M_1 M_2 \int_0^t e^{a_1' \tau} e^{a_2'(t-\tau)} d\tau =$$

$$= M_1 M_2 e^{a_2' t} \int_0^t e^{(a_1' - a_2')\tau} d\tau =$$

$$= M_1 M_2 \cdot \frac{1}{a_1' - a_2'} \cdot (e^{a_1' t} - e^{a_2' t}) \le M e^{a' t}$$

$a' = \max(a_1', a_2') \Rightarrow a = \inf a' = \max(a_1, a_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi \in L(a)$

2) $a_1 = a_2 = a$ (упрощенно $|f(t)| \le M e^{at}$)

$$|\varphi(t)| \le M_1 M_2 \int_0^t e^{a\tau + at - a\tau} dt = M_1 M_2 e^{at} \cdot t \Rightarrow$$

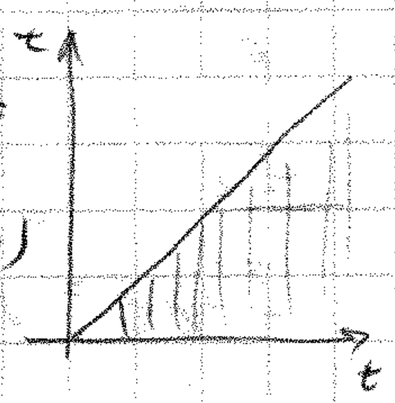
$\Rightarrow \varphi(t) \in L(a)$

$$\varphi(t) \doteq \Phi(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau =$$

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) d\tau \int_\tau^{+\infty} e^{-pt} f_2(t-\tau) dt = \{t = \tau + u\} =$$

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) d\tau \, e^{-p\tau} \int_0^{+\infty} f_2(u) e^{-pu} du = F_1(p) F_2(p)$$

$p \in \Pi_a$



Определение оригинала по изображению

Пусть $F(p)$ определена в Π_a

Теорема 8.4 Пусть $F(p) \in A(\Pi_a)$, причем является образом Лапласа некоторой кусочно-гладкой функции $f(t) \in L(a)$. Тогда в каждой своей точке непрерывности $f(t)$ может быть восстановлена по формуле:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \text{V.p.} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad \forall x > a \quad \text{(фикс)} \qquad (8.7)$$

формула Меллина (обращения)

$M_2 e^{a_2 t}$

$Me^{a't}$

$(a_1, a_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi \in L(a)$
$)$
$\Rightarrow$

Т-ло: Пусть $\varphi(t) = e^{-xt} f(t) \in L(-\infty, +\infty)$
$(\exists \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt)$
в точках непр-ти ф-ции $f(t)$ ф-ция $\varphi(t)$ имеет производную.

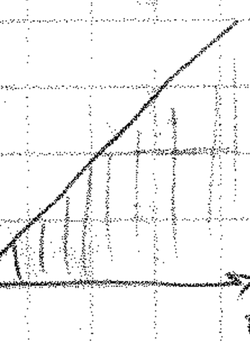
$$\varphi(t) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t} d\xi}_{\text{обратное преобр. Фурье}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi\eta} \varphi(\eta) d\eta}_{\text{прямое преобр. Фурье}}$$

$$\underbrace{e^{-xt}}_{\rho} f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+i\xi)\eta} f(\eta) d\eta \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{\rho = x + i\xi\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi i} v.p. \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{(x+i\xi)t} F(\rho)\, d(i\xi) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} v.p. \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{\rho t} F(\rho)\, d\rho$$



Замечание: в точках разрыва ф-ции $f(t)$ ф-ция оригинала даёт значение $\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$

Теорема 8.5 Пусть $f_1(t) \doteq F_1(\rho)$, $\rho \in \Pi_{a_1}$, $f_2(t) \doteq F_2(\rho)$, $\rho \in \Pi_{a_2}$, тогда $f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) \doteq$

$$\doteq F(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q) F_2(\rho - q)\, dq = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(\rho - q) F_2(q)\, dq$$

$(a_1 < x < \mathrm{Re}\,\rho - a_2)$ $(a_2 < x < \mathrm{Re}\,\rho - a_1)$

Причём $F(\rho) \in A(\Pi_{a_1 + a_2})$

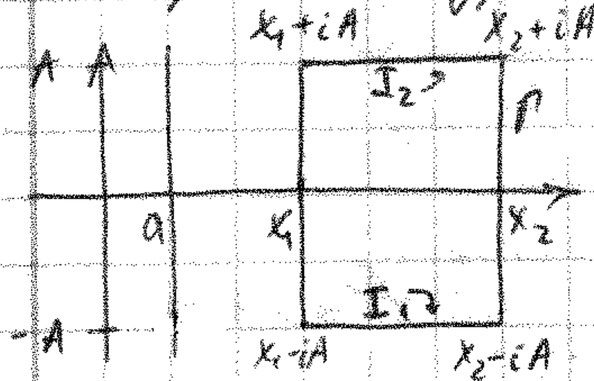
Теорема 8.6 Пусть для функции $F(\rho)$ выполнено:
1. $F(\rho) \in A(\Pi_a)$
2. $F(\rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$, $\rho \in \Pi_a$
3. $\forall x > a$ $\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(\rho)|\,d\rho$ сходится

Тогда $F(\rho)$ есть образ Лапласа некоторой функции $f(t) \in L(a)$. Эта функция может быть восстановлена по формуле Меллина

(8.7)

Д-во: 1. Рег-т, задаваемый ф-лей обращения не зависит от выбора $x > a$.
2. $f(t)$ – " – принадлежит классу $L(a)$
3. образ Лапласа ф-ции $f(t)$ есть $F(p)$

1. Реже. $\forall x_1, x_2: x_1, x_2 > a$, $x_1 \neq x_2$, реже $\forall A > 0$.
Выберем контур Γ:



$$0 = \oint_{\Gamma^+} e^{pt} F(p)\,dp = \int_{x_2+iA}^{x_1+iA} - \int_{x_1-iA}^{x_2-iA} + \int_{x_1-iA}^{x_2+iA} - \int_{x_2+iA}^{x_2+iA}$$

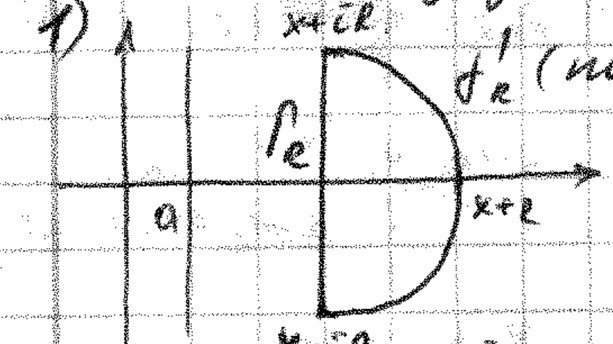
$$\left| \int_{I_1} \right| \le (x_2 - x_1)\, e^{x_2 t} \max_{p \in I_1} |F(p)| \Bigg\} \Rightarrow$$
$$\left| \int_{I_2} \right| \le (x_2 - x_1)\, e^{x_2 t} \max_{p \in I_2} |F(p)| \Bigg\}$$

$$\Rightarrow \{ F(p) \underset{p \to \infty}{\to} 0 \} \Rightarrow \int_{I_1}, \int_{I_2} \xrightarrow[A \to \infty]{} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp = \int_{x_2-i\infty}^{x_2+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp$$

2. Выберем другой контур Γ_R: (ранее $\forall x > a$)

1) $t < 0$.



$$0 = \oint_{\Gamma_R} e^{pt} F(p)\,dp = \int_{x-iR}^{x+iR} - \int_{\Gamma_R'} \Rightarrow$$

$\Gamma_R' \xleftarrow{R \to \infty}$ 0 (по лемме Жордана)

$$\Rightarrow \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp = 0.$$

2) кусочная непр-ть следует из теоремы о непр-ти несобств. инт.

3) $$|f(t)| \le \frac{1}{2\pi} e^{xt} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)|\,dp \le \{t \in [0,T]\} \le \frac{e^{xT}}{2\pi} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)|\,dp$$

$\Rightarrow$ интеграл сх-ся равномерно на $\forall$ отрезке

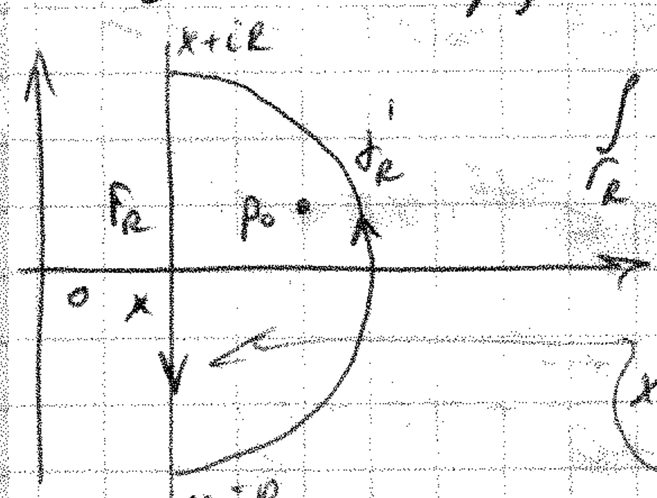
3.

$\Rightarrow |f(t)| \le \frac{1}{2\pi} e^{xt} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)|dp \le M e^{xt} \Rightarrow f(t) \in L(a)$

3. Пусть p_0 – в т. ч у Π_a. $G(p)$ – образ оригинала $f(t)$.

$$G(p_0) = \int_0^{+\infty} e^{-p_0 t} f(t)dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} e^{-p_0 t} dt \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)dp =$$

$$= \{a < x < \mathrm{Re}\, p_0\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p)dp \int_0^{+\infty} e^{-(p-p_0)t} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p) \frac{dp}{p_0 - p}$$



$$\int_{\Gamma_R} \frac{F(p)}{p_0 - p} dp = 2\pi i \, \mathrm{res}\left[\frac{F(p)}{p_0 - p}, p_0\right]; \quad \int_{d_R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{F(p)}{p_0 - p} dp = \ominus 2\pi i \, \mathrm{res}\left[\frac{F(p)}{p_0 - p}, p_0\right] =$$

$$= -2\pi i \cdot \frac{F(p_0)}{-1} = 2\pi i F(p_0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall p_0 \in \Pi_a \; G(p_0) = F(p_0) \Rightarrow \quad G(p) \equiv F(p), \; p \in \Pi_a$

Пример: Решить задачу Коши:

$$y'' + 4y' + 4y = t^3 e^{-2t}, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 2$$

$$t^3 \doteq \frac{3!}{p^4} = \frac{6}{p^4}, \quad \mathrm{Re}\, p > 0$$

$$t^3 e^{-2t} \doteq \frac{6}{(p+2)^4}, \quad \mathrm{Re}\, p > -2$$

$$y(t) \doteq Y(p), \quad \mathrm{Re}\, p > -2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) - 1$$

$$y''(t) \doteq p^2\left(Y(p) - \frac{1}{p} - \frac{2}{p^2}\right) = p^2 Y(p) - p - 2$$

$$Y(p)(p^2 + 4p + 4) - p - 2 - 4 = \frac{6}{(p+2)^4}, \quad \mathrm{Re}\, p > -2.$$

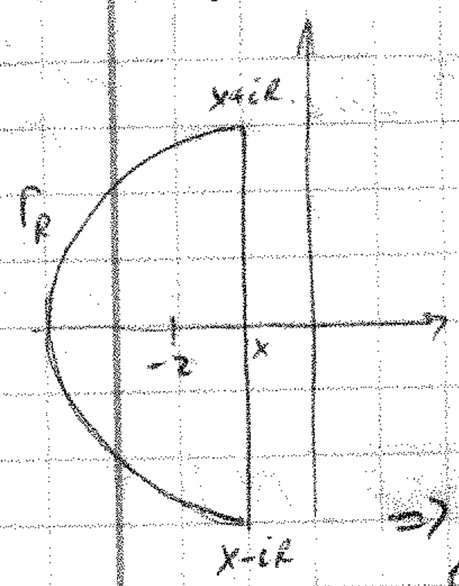
$$Y(p) = \frac{p+6}{(p+2)^2} + \frac{6}{(p+2)^6} = Y_2(p) + Y_1(p)$$

$$y_1(t) \doteq Y_1(p); \quad y_2(t) \doteq Y_2(p)$$

1) т.к. $t^n \doteq n!/p^{n+1} \Rightarrow \frac{6}{p^6} = \frac{1}{20} \cdot \frac{120}{p^6} \doteq \frac{1}{20} t^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1(t) = \frac{1}{20} t^5 \cdot e^{-2t}$

2) $y_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} y_2(p)\,dp, \quad x > -2$



$\oint_{\Gamma_R^+} \frac{(p+6)e^{pt}}{(p+2)^2}\,dp = 2\pi i \cdot \operatorname{res}[e^{pt} y_2(p), -2] \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{лемма} \\ \text{Жордана}\end{matrix}\right\} \Rightarrow y_2(t) = e^{-2t}(4t+1)$

$\Rightarrow y(t) = y_1(t) + y_2(t) = e^{-2t}\left[\frac{t^5}{20} + 4t + 1\right]$