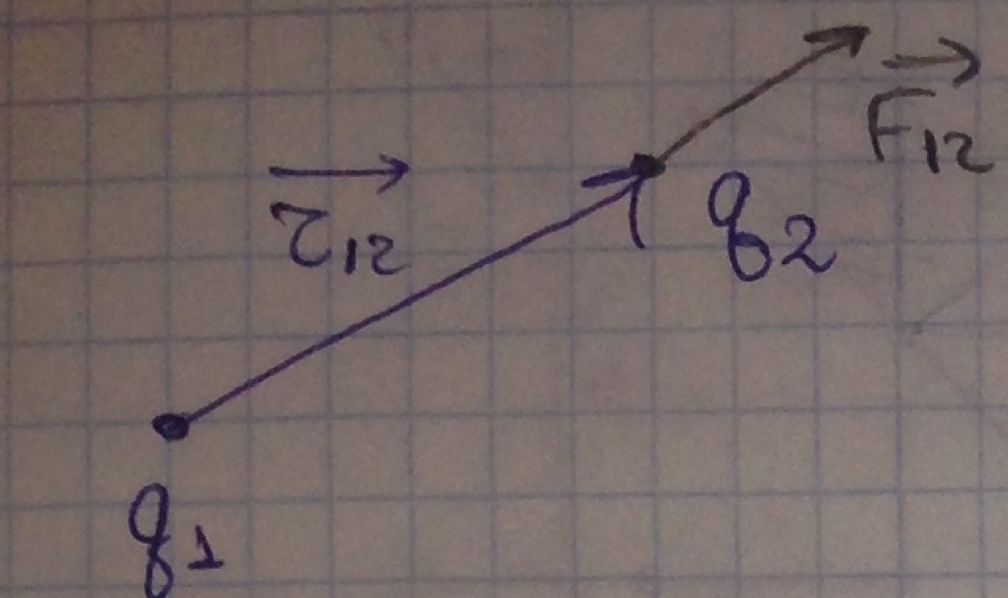
Семинар №1

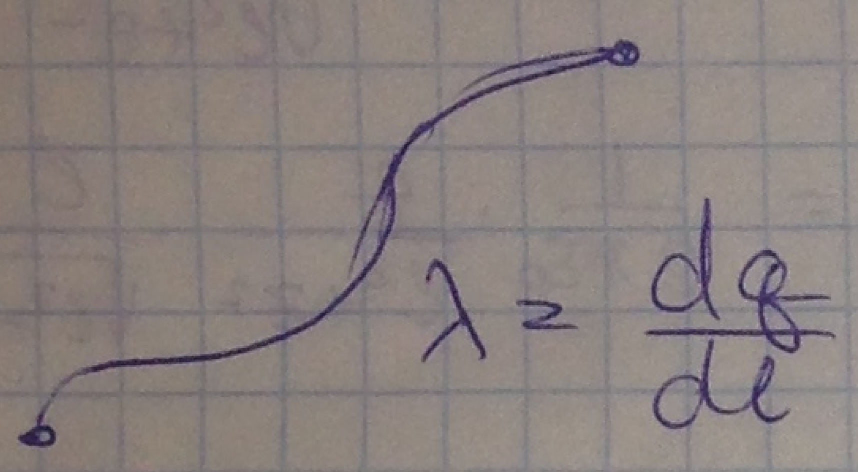
14.02.14



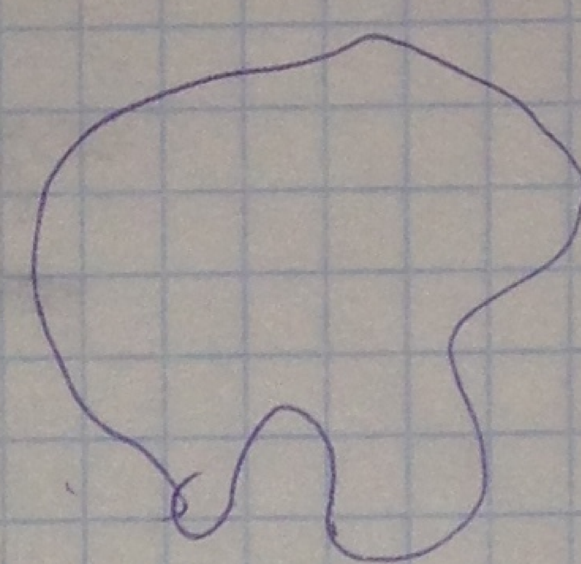
$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_{12} \; ; \; \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^3} \cdot \vec{r}$$

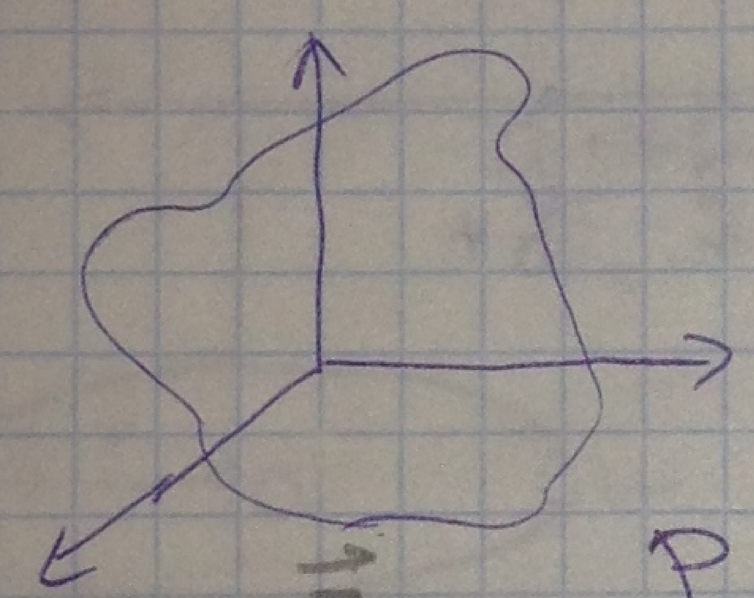
$$\vec{F} = \Sigma \vec{F}_i \; ; \; \vec{E} = \Sigma \vec{E}_i$$



$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

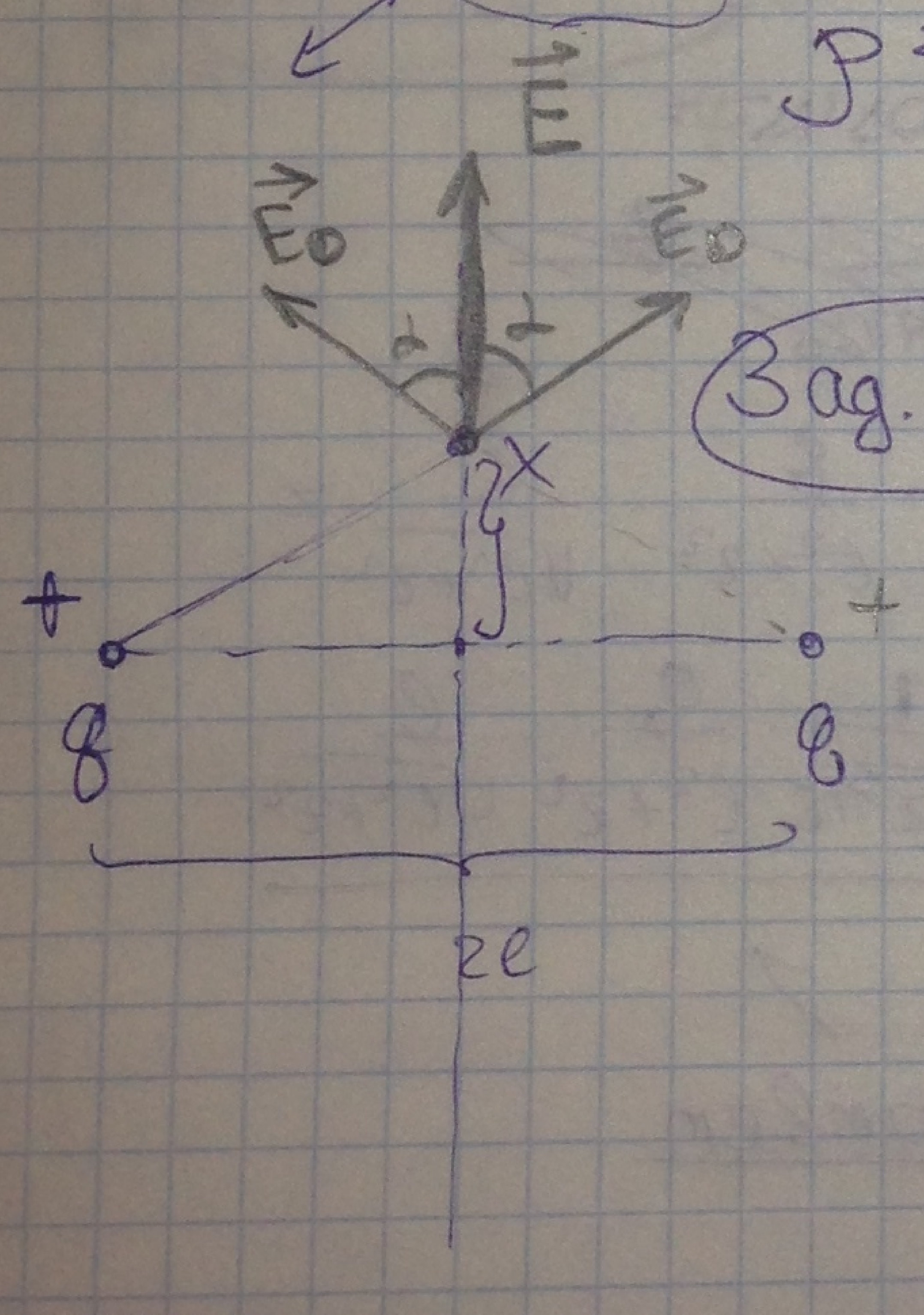


$$\sigma = \frac{dq}{ds}$$



$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

Зад. №1



найти точки q на срединном перпендикуляре, в котор. напряжен. максимальн.

$$E = 2E_0 \cos\alpha = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{x^2+l^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+l^2}}$$

берем производную..

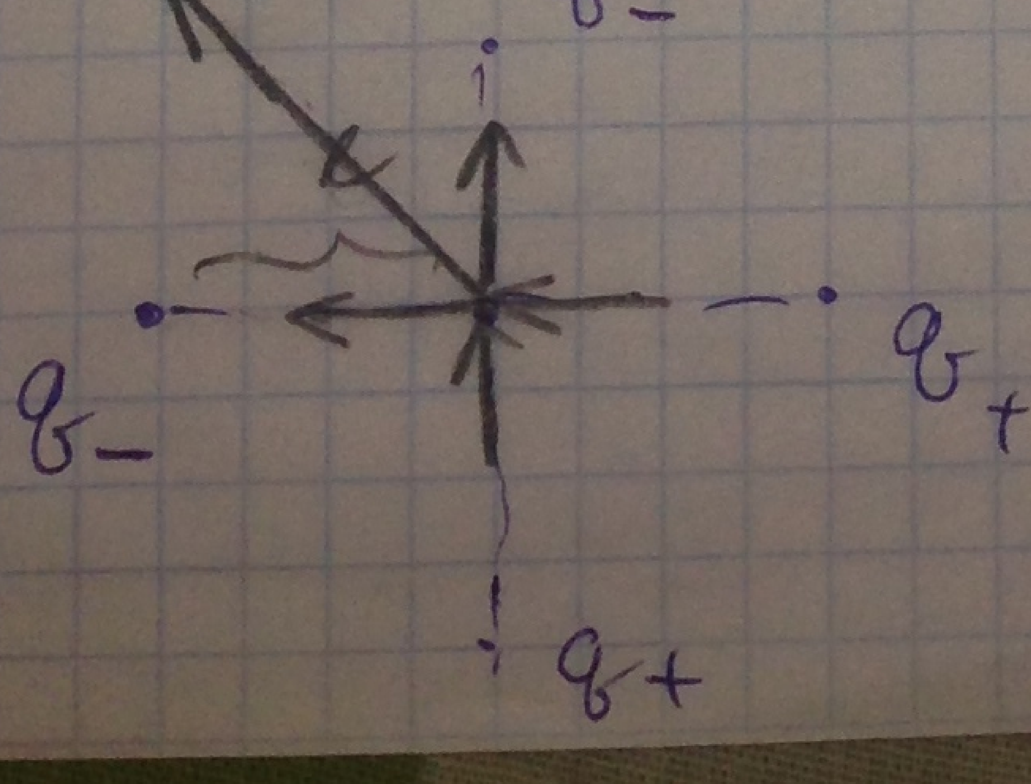
$$x^2 + l^2 - 3x^2 = 0$$

Ответ: $x = \pm \frac{l}{\sqrt{2}}$

Зад. №2

Усложняем:

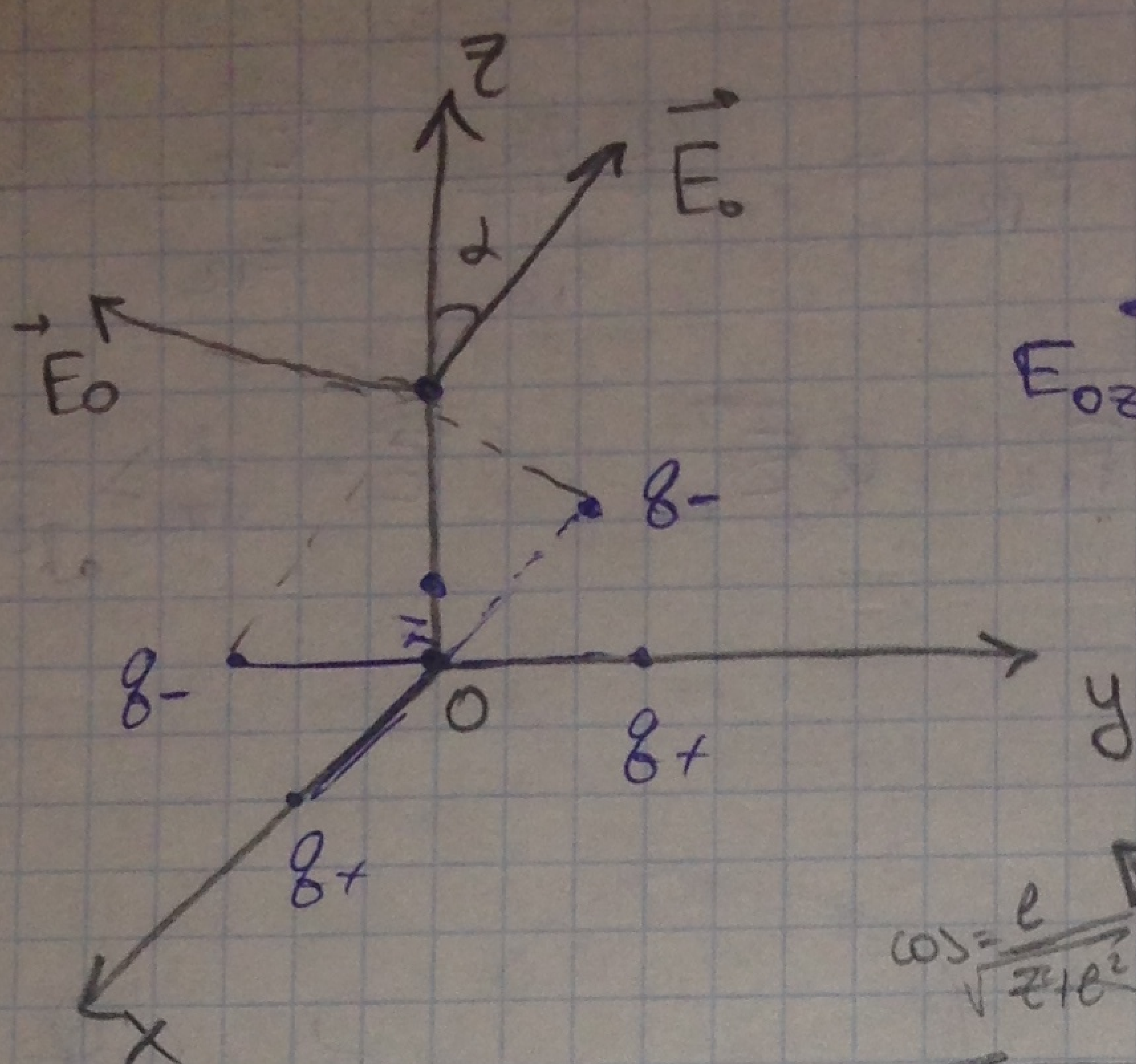
$E(z)$ - ?



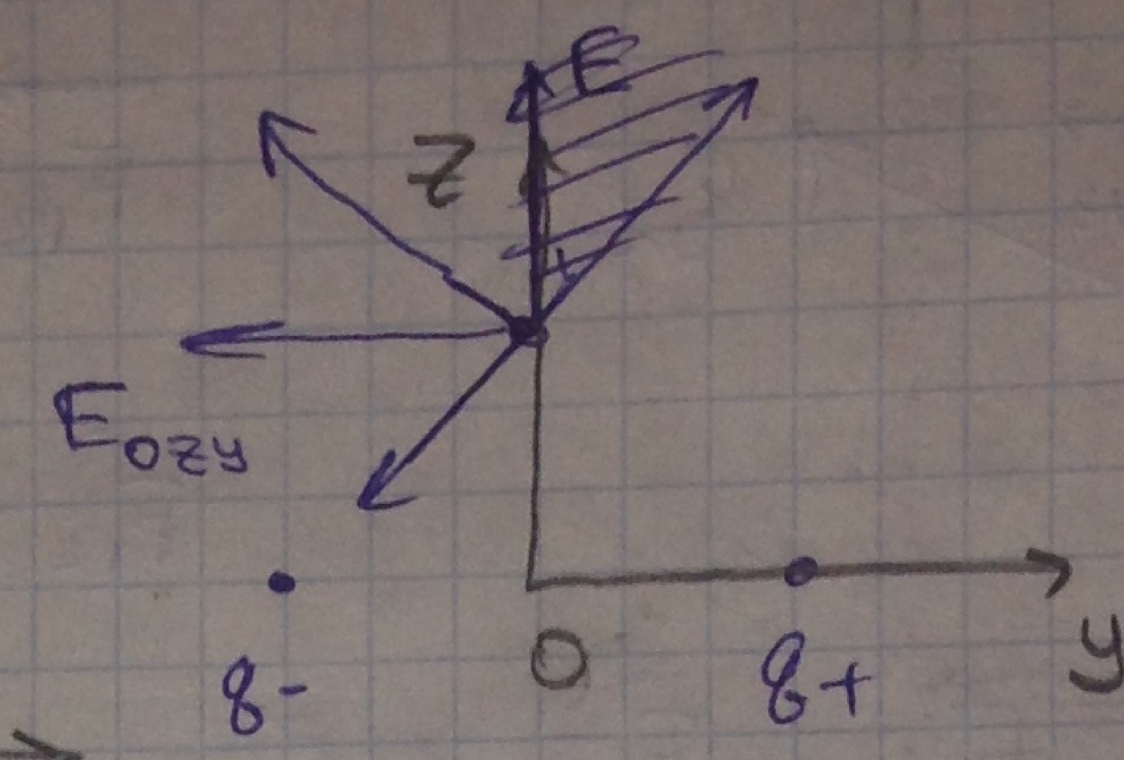
$$E = 4E\cos 45^\circ =$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{l^2} =$$

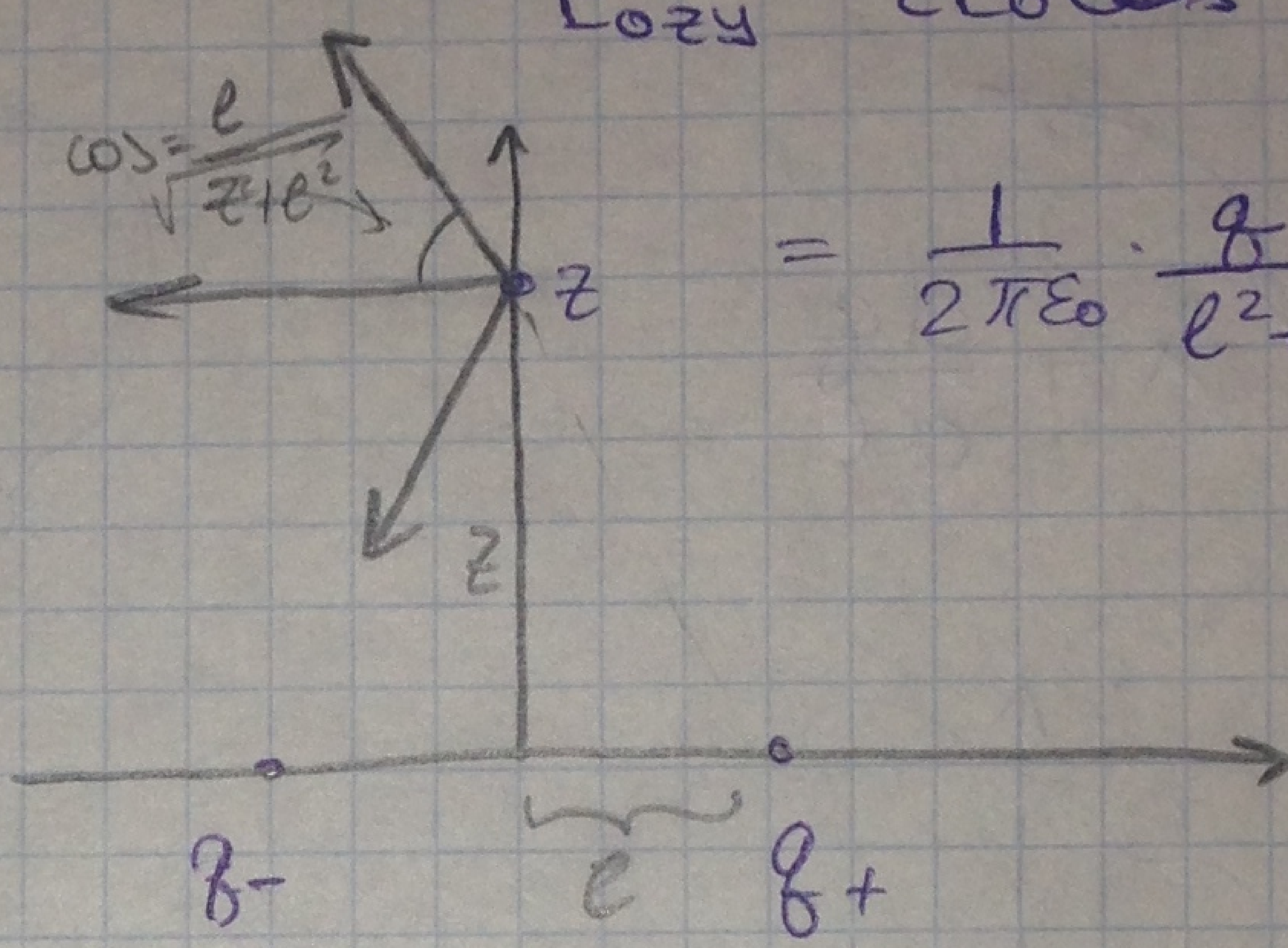
$$= \frac{1}{\sqrt{2}\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{l^2}$$



Ozy:

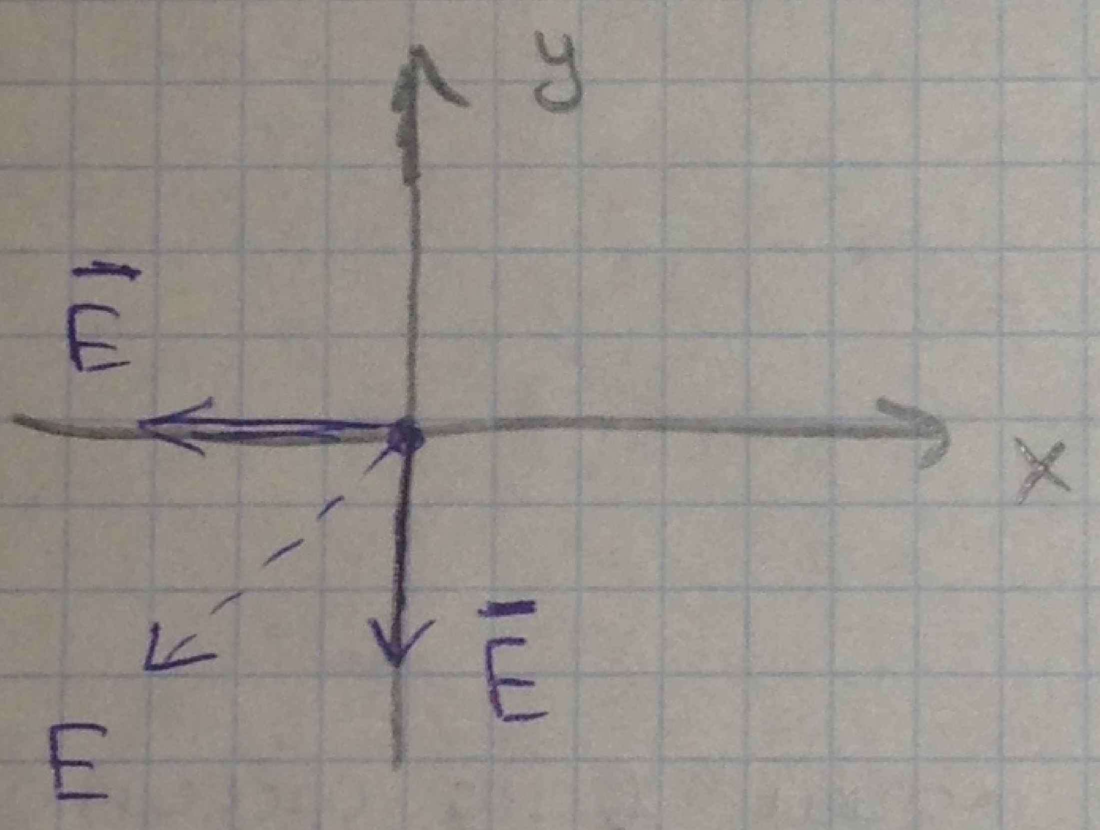


$$\bar{E} = E_{ozy} = 2E_0 \cancel{\cos} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2+z^2}} =$$



$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{l^2+z^2} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2+z^2}}$$

Oxy:



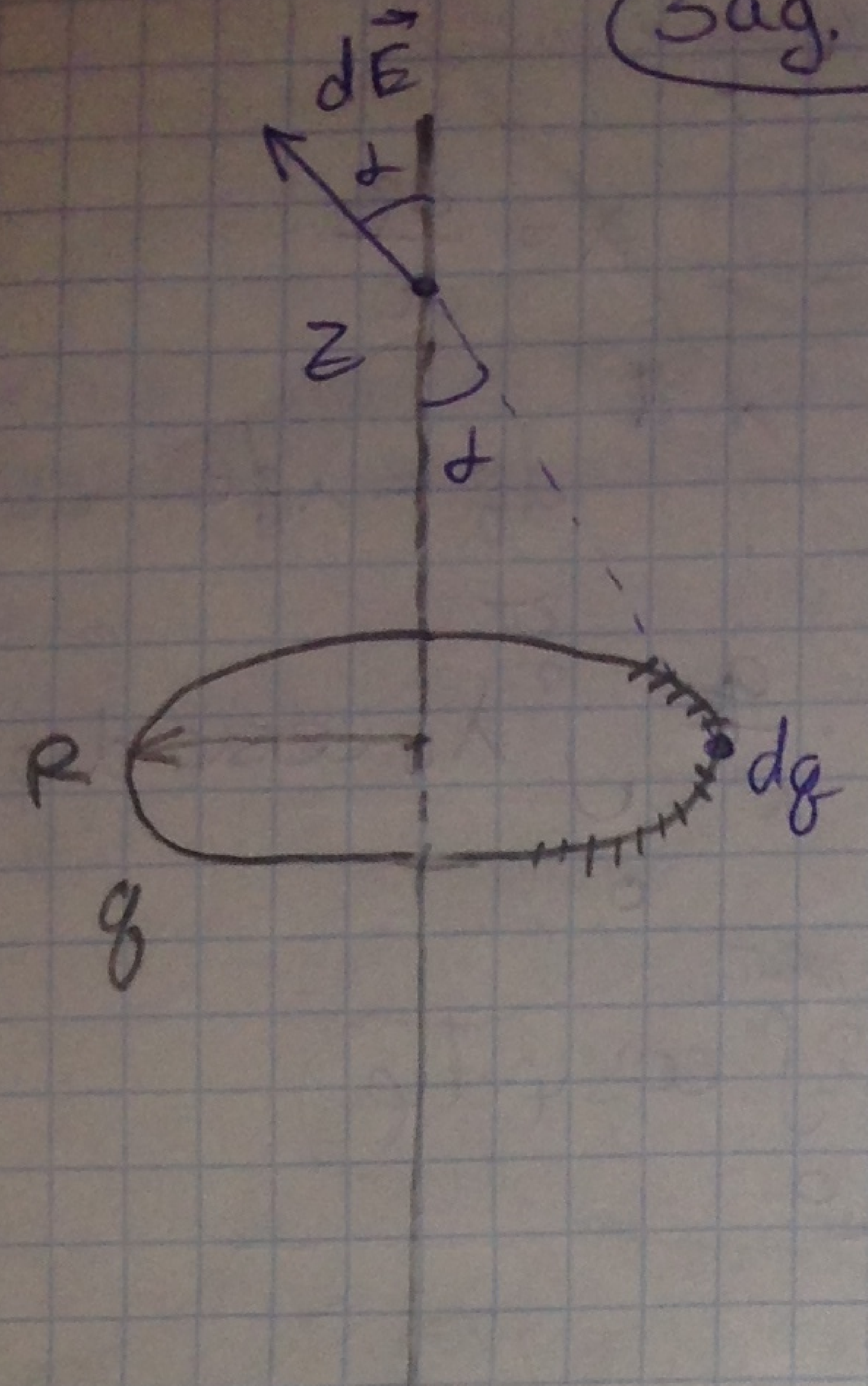
$$E = 2\bar{E} \cdot \cos 45 =$$

$$\sqrt{2}\,\frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{l^2+z^2} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2+z^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{l^2+z^2} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2+z^2}}$$

ответ

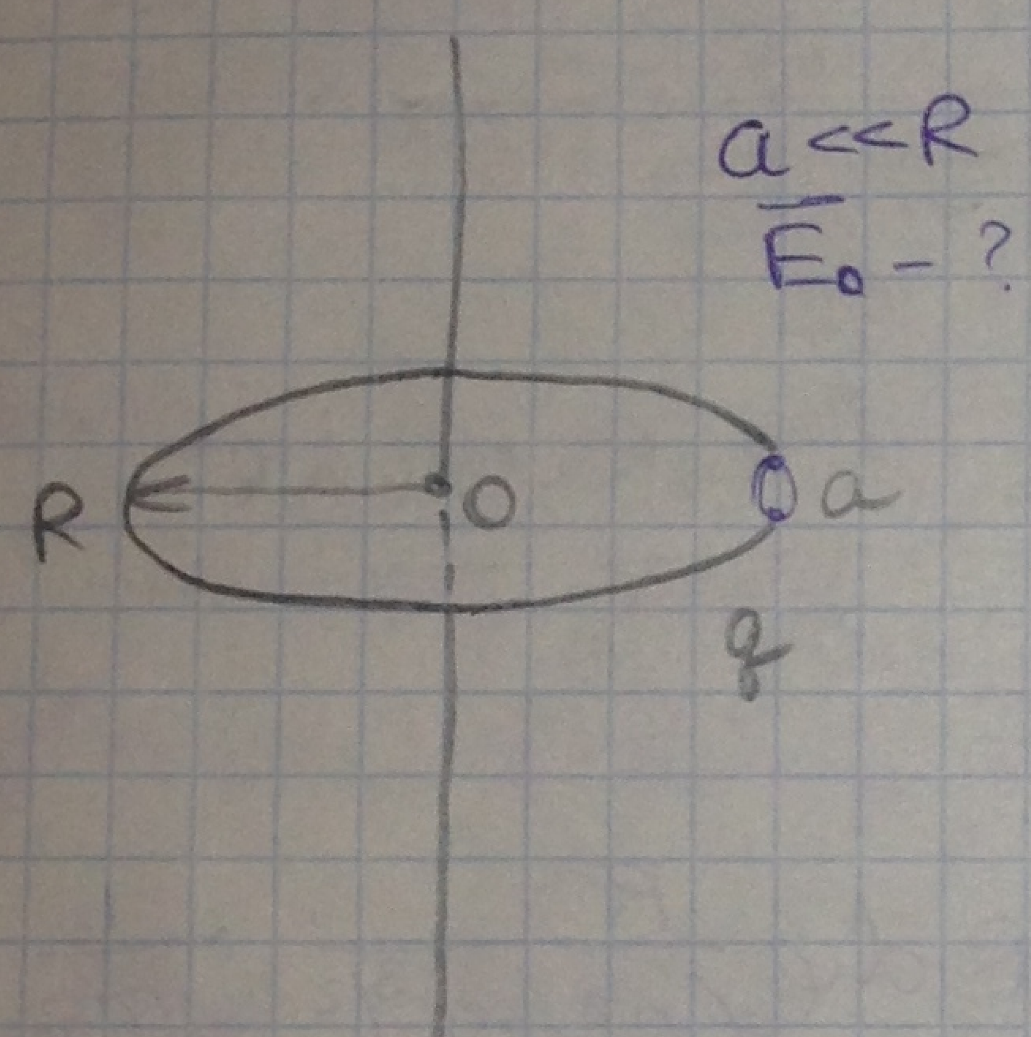
Зад. № 3



$$E = \int dE \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}} \underbrace{\int dq}_{=q}$$

ответ

усложняем



$$E_a = \cancel{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,dq} \; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} R \int_a dq$$

$$E_{общ} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} R \oint dq$$

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \oint dq - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \int_a dq =$$

$$= 0 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \int_a dq$$

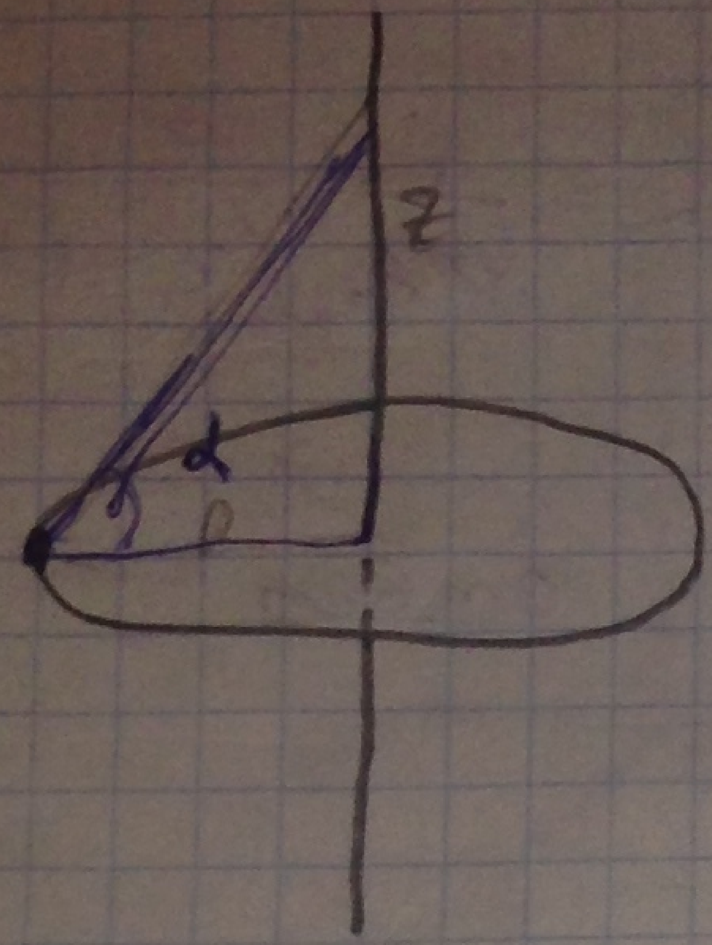
кусок маленький, поэтому $= \frac{a}{2\pi R} q$

$\Downarrow$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{aq}{2\pi R} \frac{1}{R^2}$$

ответ

Зад. № 4



$\lambda = \lambda_0 \cos\varphi$

$\vec{E}_0 - ?$

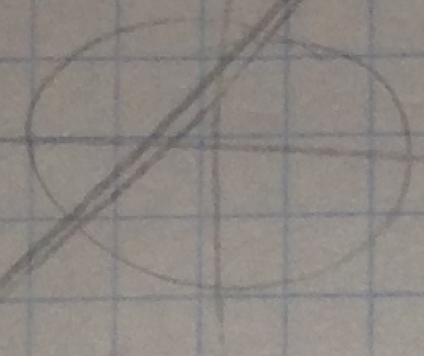
$\lambda = \frac{dq}{dl}$

$dq = \lambda dl = \lambda R d\varphi$

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R^2} \int_0^{2\pi} \lambda_0 \cos\varphi \, d\varphi =$

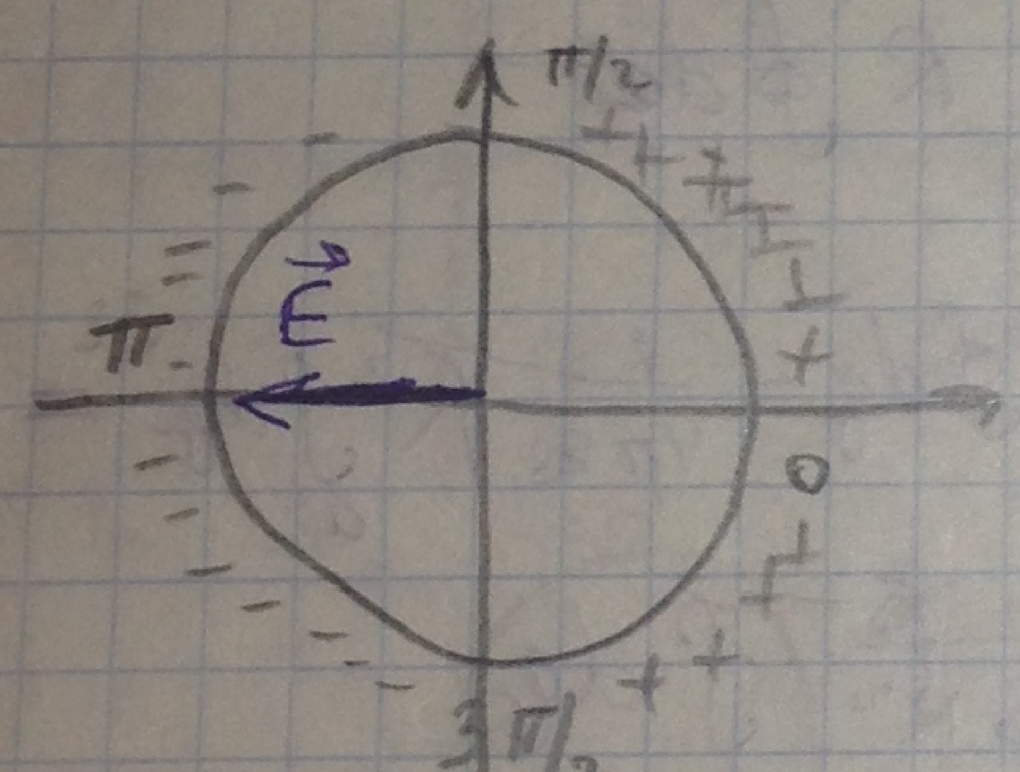
$= \frac{q \lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{R^2+z^2}} \cdot 2\int_0^{\pi} \cos\varphi \, d\varphi$

$-\sin\varphi \Big|_0^{\pi} =$



$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{2\pi}{2\pi R} = \frac{1}{R}$

$E = k \cdot \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} \lambda_0 R \cos\varphi \, d\varphi$



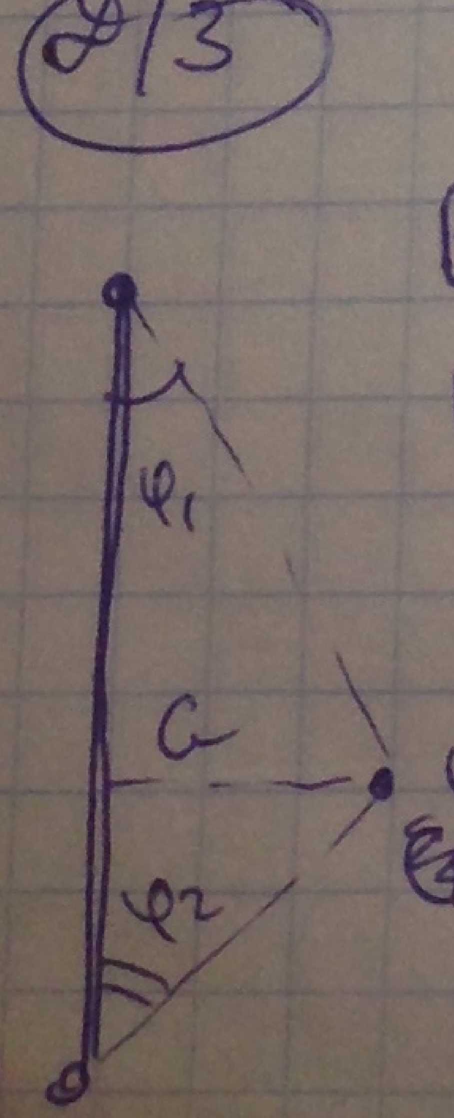
$2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \lambda_0 \cos\varphi \cdot R \, d\varphi \, \frac{R}{(R^2+z^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \cos\varphi$

$= 2\lambda_0 \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi \, d\varphi =$

$= \frac{1}{4\varepsilon_0} \lambda_0 \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}$

Д/З

1

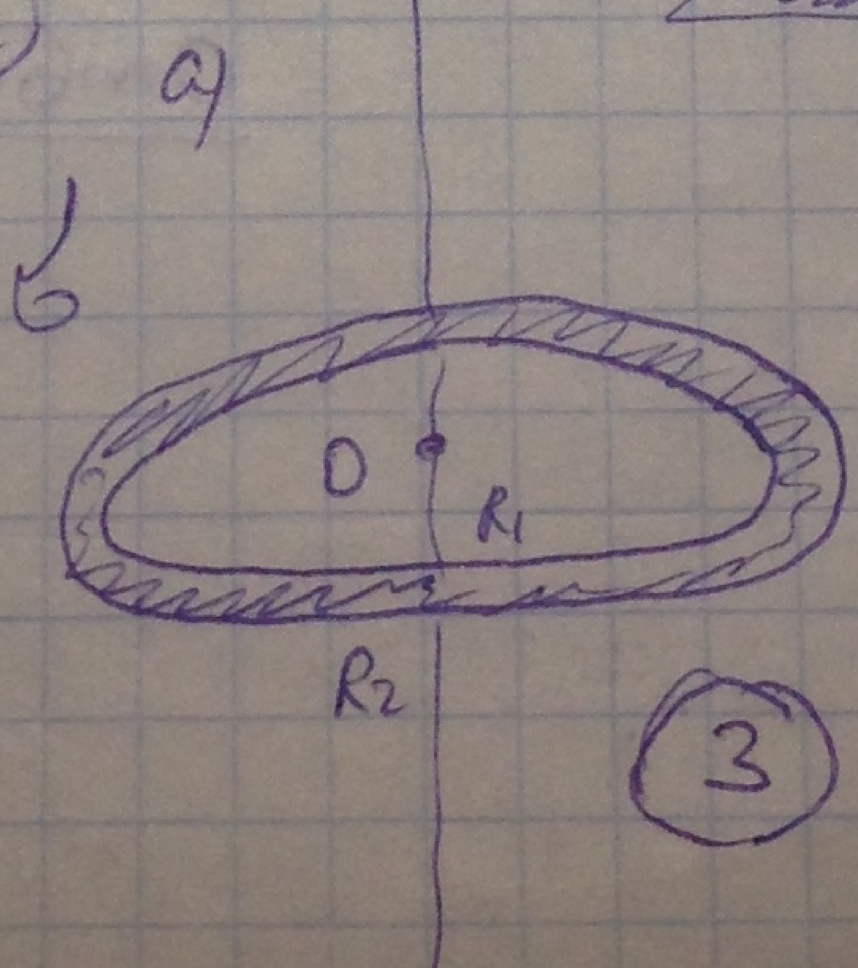


$E_0 - ?$

разложить на паралл и перп сост

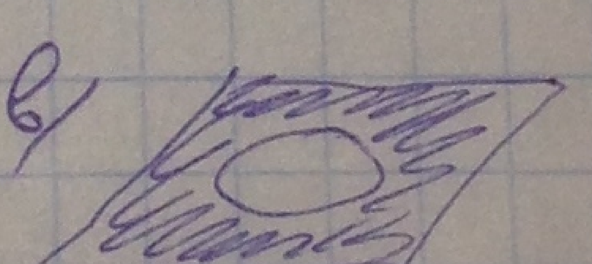
2

а)

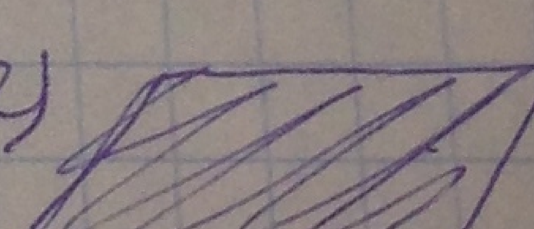


б)

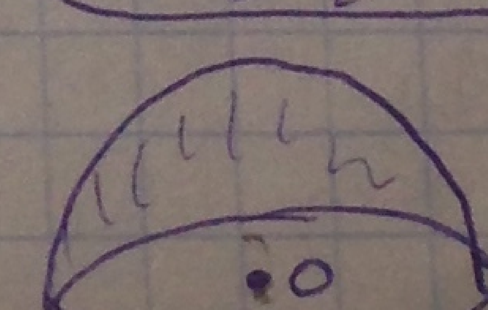
в)



г)



3



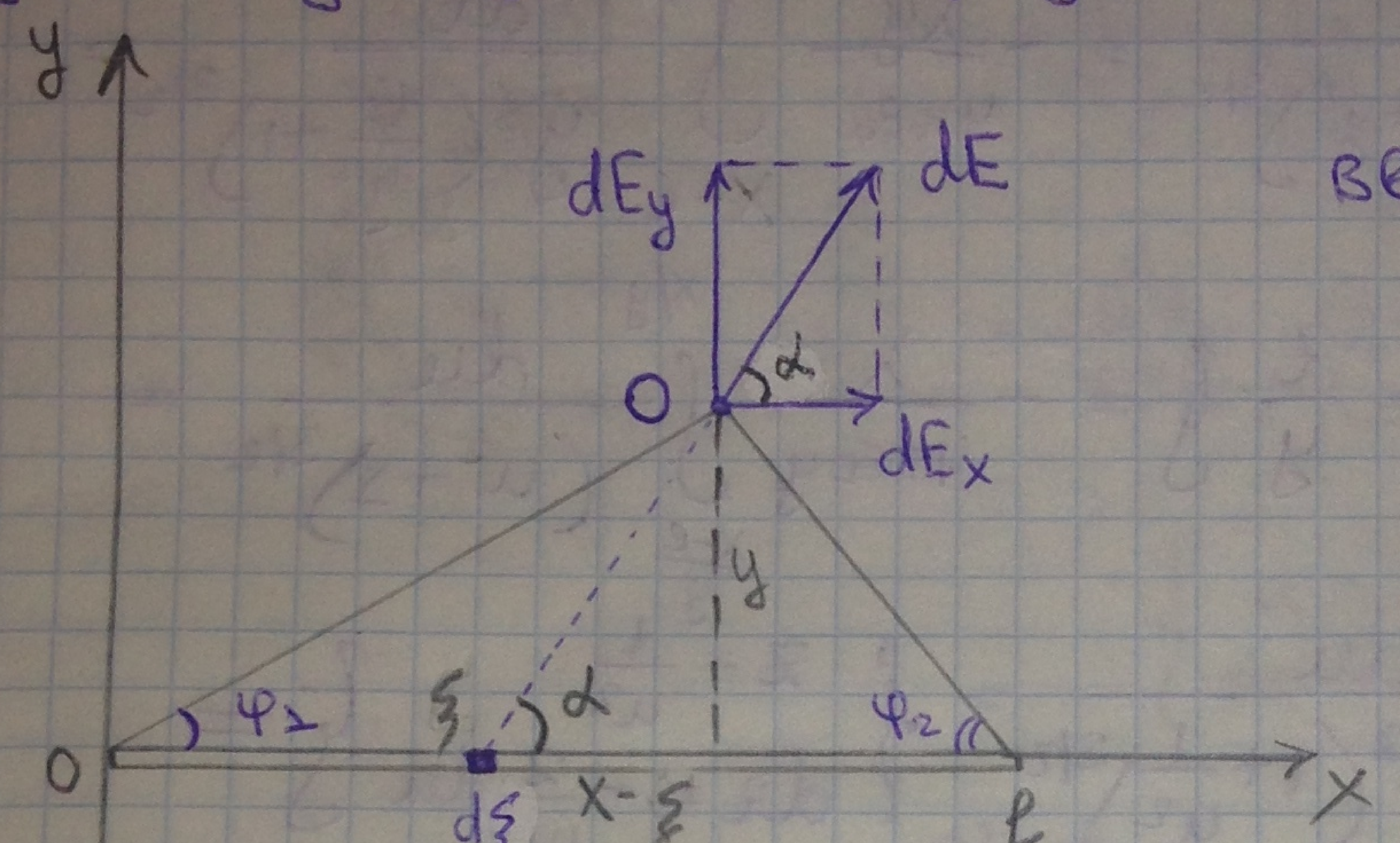
полусфере

Домашняя работа 20.02.14

№1 см. стр. 17 пример 1.7

Тонкая палка длины l заряжена равномерно с линейной плотностью λ.

Найти напряженность поля в произв. точке O, видимой из концов палки под углами φ_1 и φ_2, нах. на расст. а



вводим декартову с.к.

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Выделим на палке маленький кусочек длины $d\xi$

Он имеет заряд $dq = \lambda d\xi$

Разложим его вклад в эл. поле на две составляющие.

$$dE_x = dE\cos\alpha = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}}_{dE}\cdot\underbrace{\frac{(x-\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}}}_{\cos\alpha}$$

$$dE_y = dE\sin\alpha = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}}_{dE}\cdot\underbrace{\frac{y}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}}}_{\sin\alpha}$$

Проинтегрируем обе составляющие по ξ от 0 до l

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l \frac{(x-\xi)}{((x-\xi)^2+y^2)^{3/2}}d\xi = \left\{\begin{array}{l} t = x-\xi \\ dt = -d\xi \end{array}\right\} =$$

$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x-l}^{x}\frac{t}{(t^2+y^2)^{3/2}}dt = \left\{\begin{array}{l} u = t^2+y^2 \\ du = 2t\,dt \end{array}\right\} =$$

$$= -\frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\int_{(x-l)^2+y^2}^{x^2+y^2}\overbrace{\frac{1}{u^{3/2}}du}^{= -\frac{2}{\sqrt{u}}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}\Bigg|_{(x-l)^2+y^2}^{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{}{y} - \frac{1}{\sqrt{(x-\ell)^2+y^2}}\frac{}{y}\right) = E_x$$

$= \sin\varphi_1$ $\quad \sin\varphi_2$

$$E_y = \frac{\lambda y}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\ell}\frac{d\xi}{((x-\xi)^2+y^2)^{3/2}} = \left\{\begin{array}{l} t = x-\xi \\ d\xi = -dt\end{array}\right\} =$$

$$= \frac{-\lambda y}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x-\ell}^{x}\frac{dt}{(t^2+y^2)^{3/2}} = -\frac{\lambda y}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x-\ell}^{x}\frac{dt}{y^{\cancel{3}2}\left(\frac{t^2}{y^2}+1\right)^{3/2}} =$$

$$= \left\{du = \frac{dt}{y};\ u = \frac{t}{y}\right\} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\int_{\frac{x-\ell}{y}}^{x/y}\frac{du}{(u^2+1)^{3/2}} =$$

$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\int_{x-\ell/y}^{x/y}\frac{du}{u^3\left(1+\frac{1}{u^2}\right)^{3/2}} = \left\{\begin{array}{l} z = \frac{1}{u^2} \\ dz = -\frac{2}{u^3}du\end{array}\right\} =$$

$$= \cancel{-}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\int_{\frac{y^2}{(x-\ell)^2}}^{y^2/x^2}\frac{\cancel{u^3}dz}{\cancel{-}2\cancel{u^3}(1+z)^{3/2}} = \frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0 y}\int_{1+\frac{y^2}{(x-\ell)^2}}^{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{dv}{v^{3/2}} = \quad = -\frac{2}{\sqrt{v}}$$

$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\cdot\frac{1}{\sqrt{v}}\Bigg|_{\frac{(x-\ell)^2+y^2}{(x-\ell)^2}}^{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\left[-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x-\ell}{\sqrt{(x-\ell)^2+y^2}}\right] =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\left(\underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\cos\varphi_1} - \underbrace{\frac{x-\ell}{\sqrt{(x-\ell)^2+y^2}}}_{\cos\varphi_2}\right) = E_y$$

$y = a$

$\Downarrow$

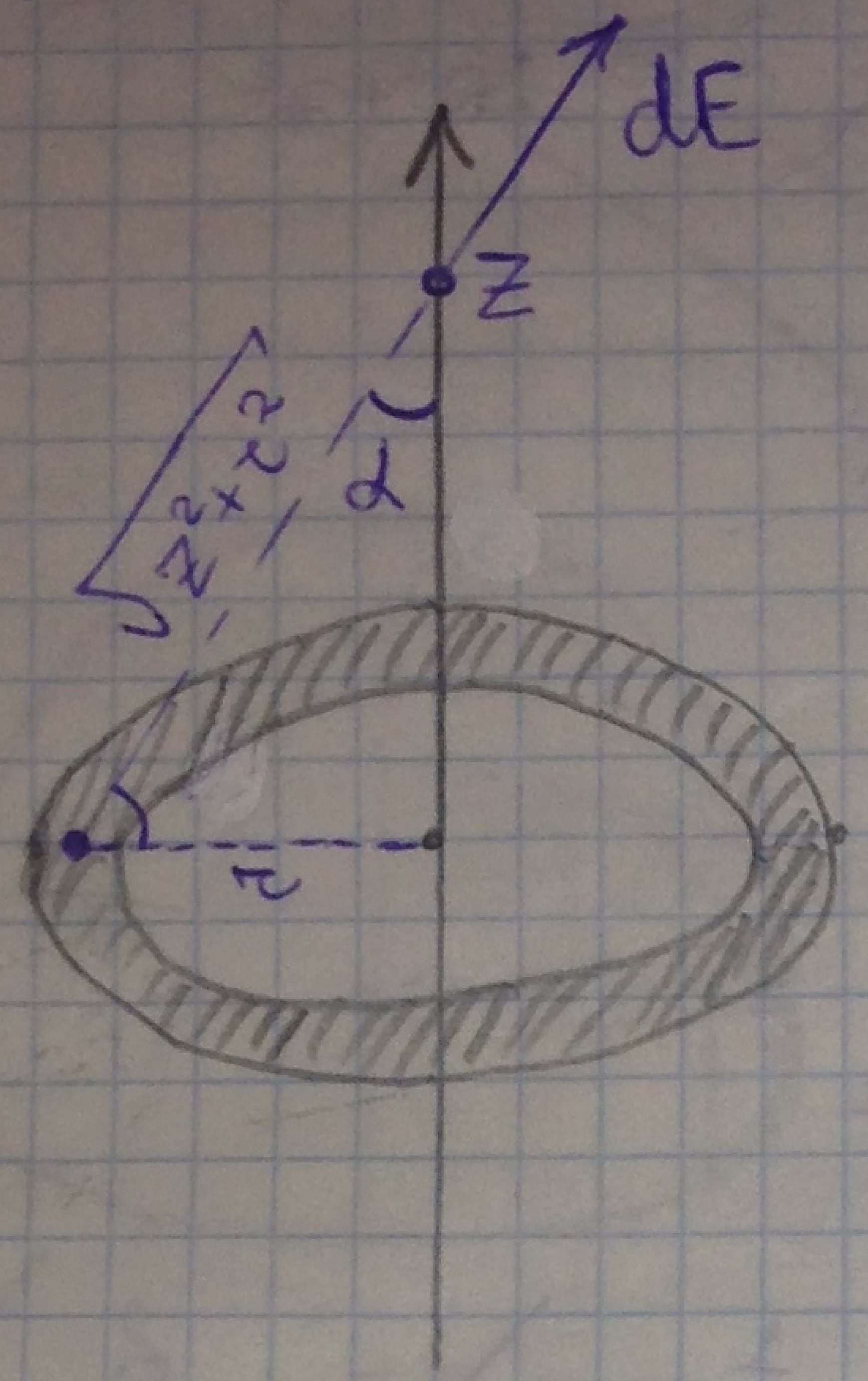
$$\left\{\begin{array}{l} E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) \\ E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2)\end{array}\right.$$

$$E = \sqrt{E_x^2+E_y^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sqrt{(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)^2 + (\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2)^2}$$

Ответ

№2

а) Напряж-ть на оси через центр плоского кольца



$$E = \int dE\cos\alpha =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\sigma z r\,dr\,d\varphi}{(z^2+r^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 2\pi\cdot\int_{R_1}^{R_2}\frac{r\,dr}{(z^2+r^2)^{3/2}} \ominus$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = z^2+r^2 \\ du = 2r\,dr\end{matrix}\right\} = \pi\int_{R_1^2+z^2}^{R_2^2+z^2}\frac{du}{u^{3/2}}$$

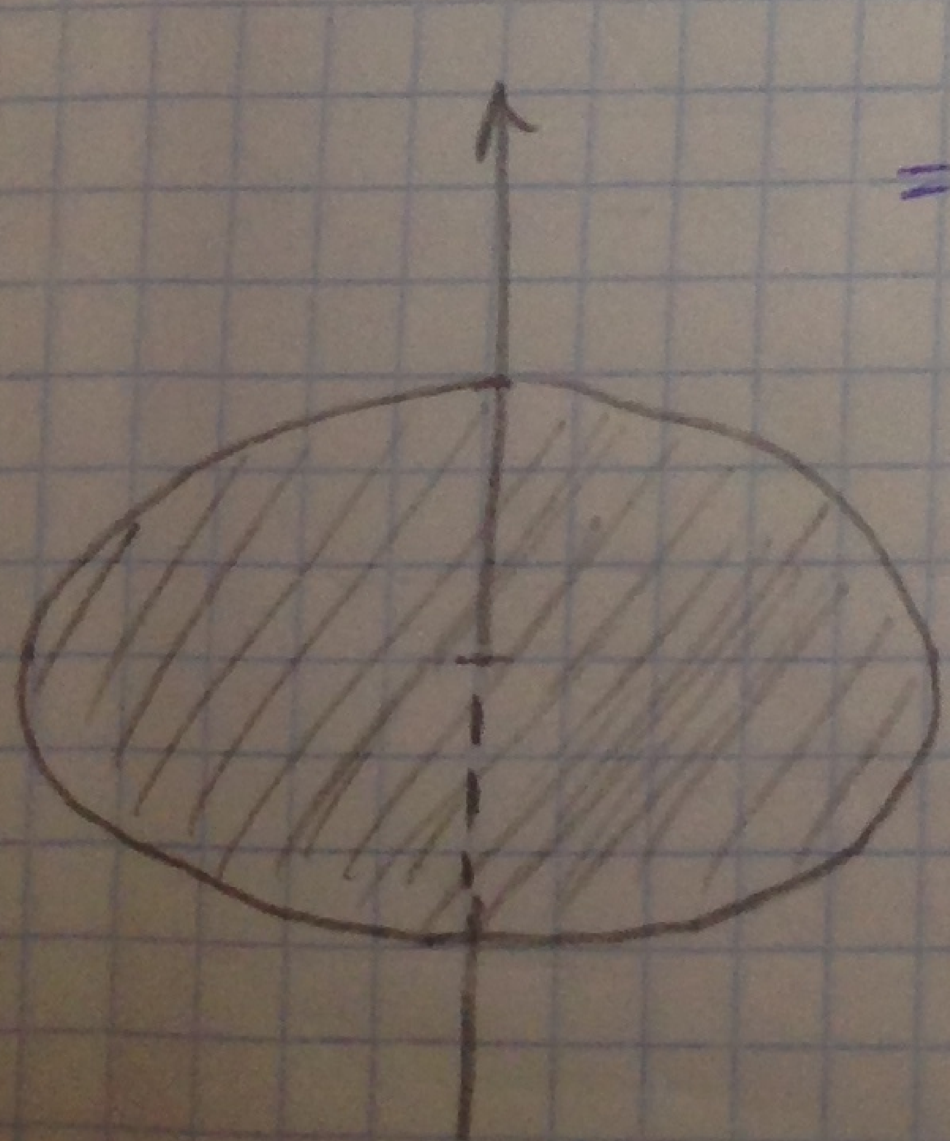
$$\ominus \frac{\sigma z}{\cancel{4}_2\cancel{\pi}\varepsilon_0}\cdot\cancel{\pi}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}\Bigg|_{R_2^2+z^2}^{R_1^2+z^2} =$$

$$= \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right)$$

Ответ:

б) на оси через диск

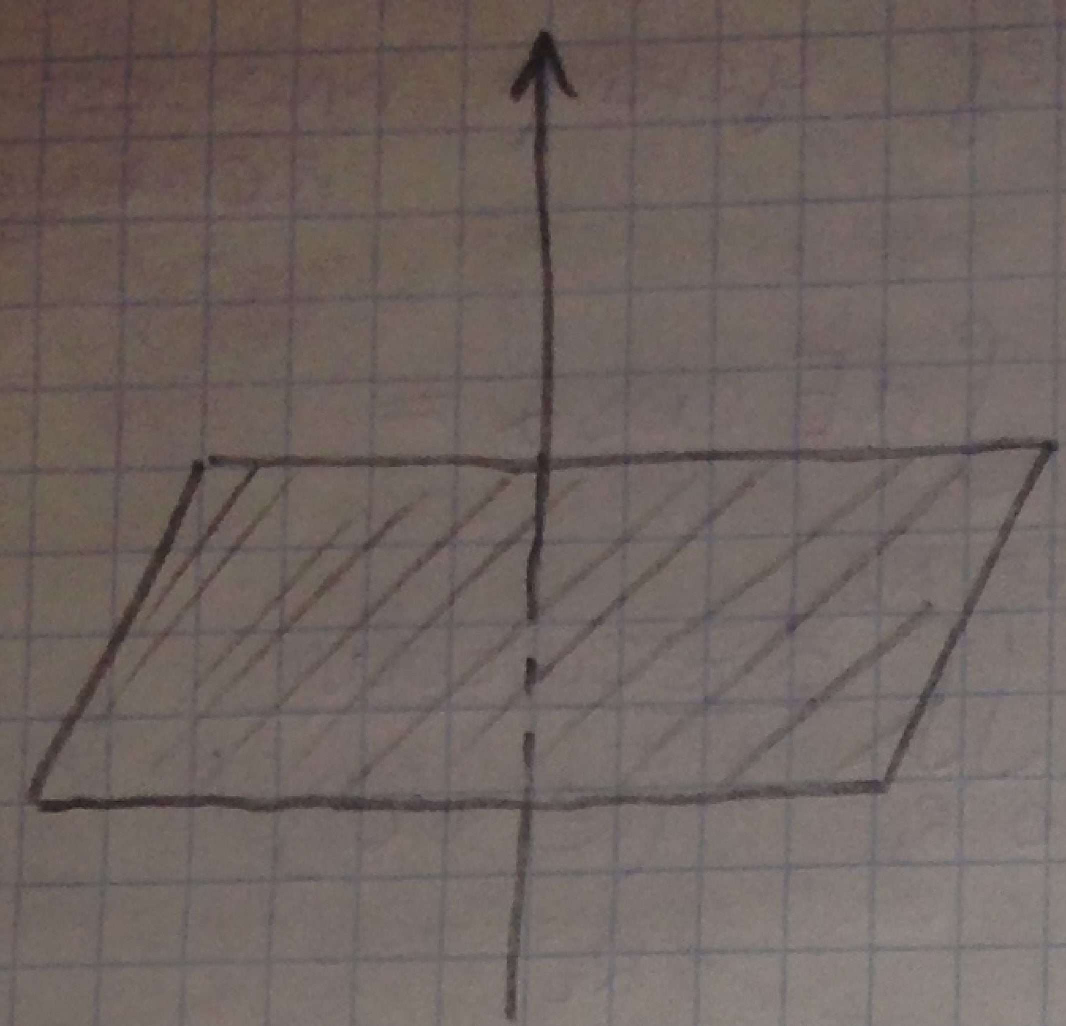
$$E = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{R}\frac{r\,dr}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}\Bigg|_{R^2+z^2}^{z^2} =$$



$$= \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

ответ

в) –//– вся плоскость Oxy



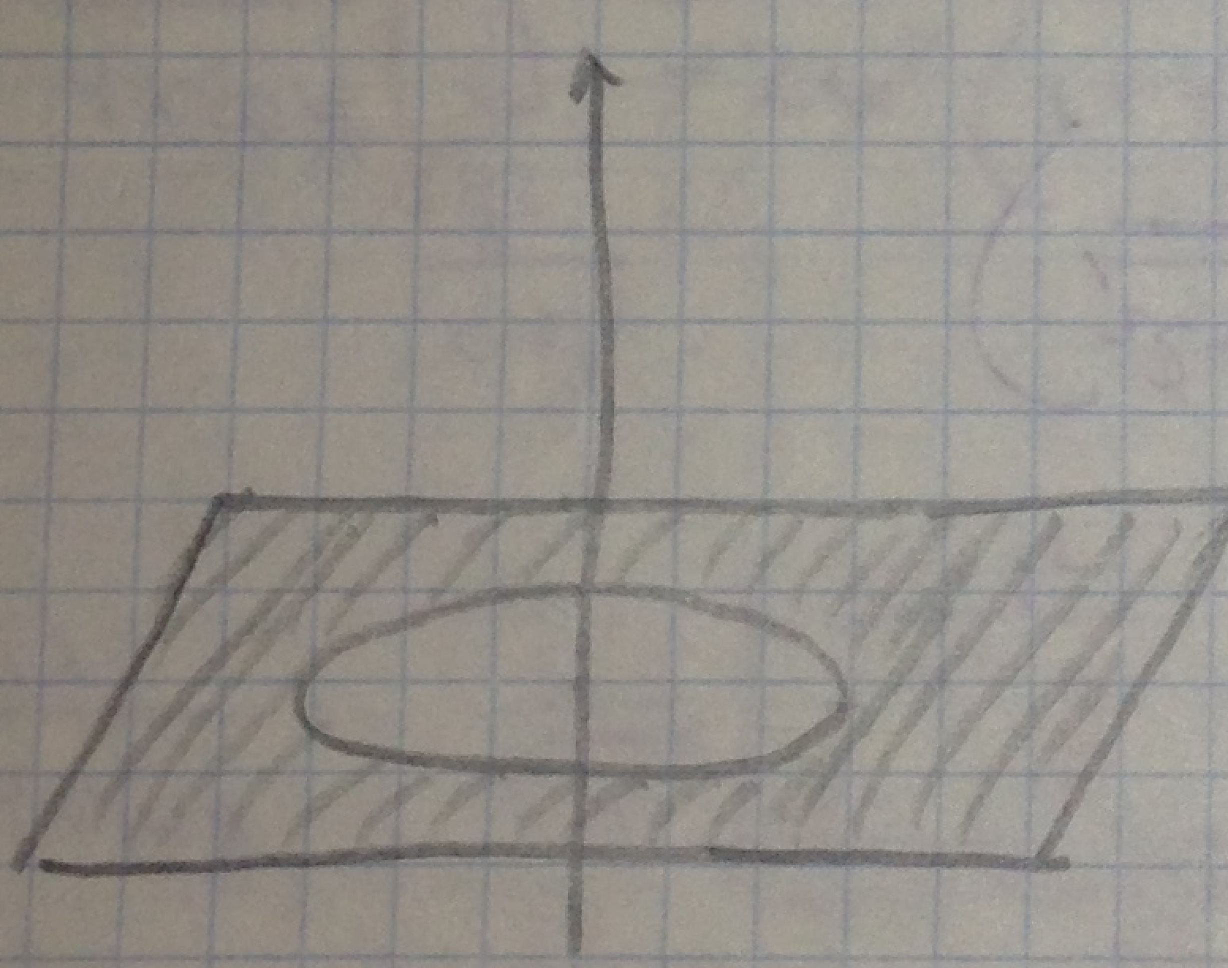
$$\cancel{E = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\Big|_{R^2+z^2}^{0} = \lim_{R\to\infty} = \sigma}$$

$$E = \lim_{R\to\infty} \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}}\Big|_{R^2+z^2}^{z^2} =$$

$$= \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{z} - \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

ответ

г)



$$E = \lim_{R_2\to\infty} \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}}\Big|_{R_2^2+z^2}^{R^2+z^2} =$$

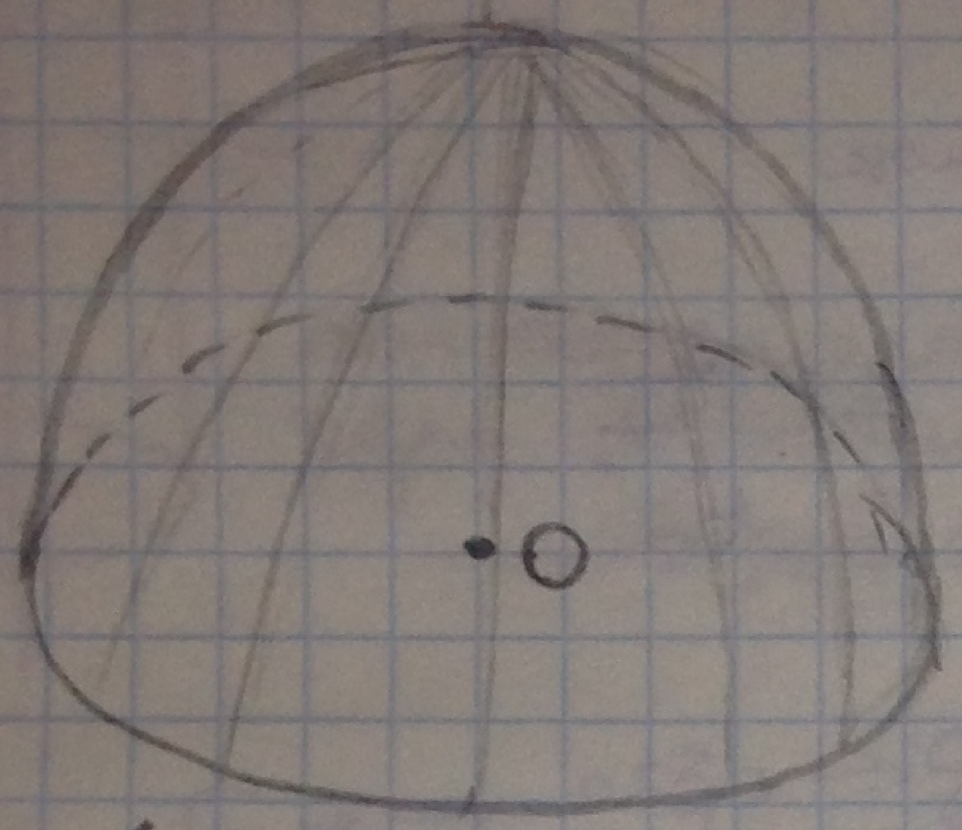
$$= \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} - \lim_{R_2\to\infty} \frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right) =$$

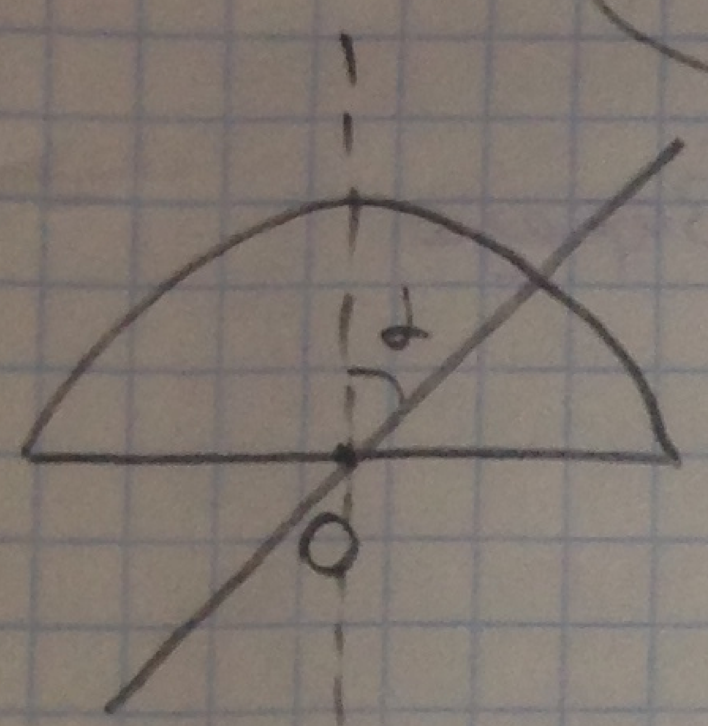
$$= \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

ответ

№3

Полусфера; найти E в точке O





Ур-е сферы:

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

Для полож. полусферы:

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\cdot 2x$$

$$=\sqrt{\frac{R^2-x^2-y^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy=$$

$$=\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy=\left\{\overset{\text{полярные к-ты}}{\rho^2=x^2+y^2}\right\}=\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\,\rho\,d\rho\,d\varphi$$

Интегрируем по полусфере:

$$\underbrace{\int_0^{2\pi}d\varphi}_{=2\pi}\int_0^R E\cos\alpha\cdot\cancel{\sigma\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\,\rho\,d\rho=$$

$$=\cancel{2\pi}\cdot\frac{\sigma}{{}_2\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\int_0^R\frac{1}{R^2}\cdot\cancel{\frac{\sqrt{R^2-\rho^2}}{R}}\cdot\cancel{\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}}\,\rho\,d\rho=$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0R^2}\cdot\frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^R=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

Ответ

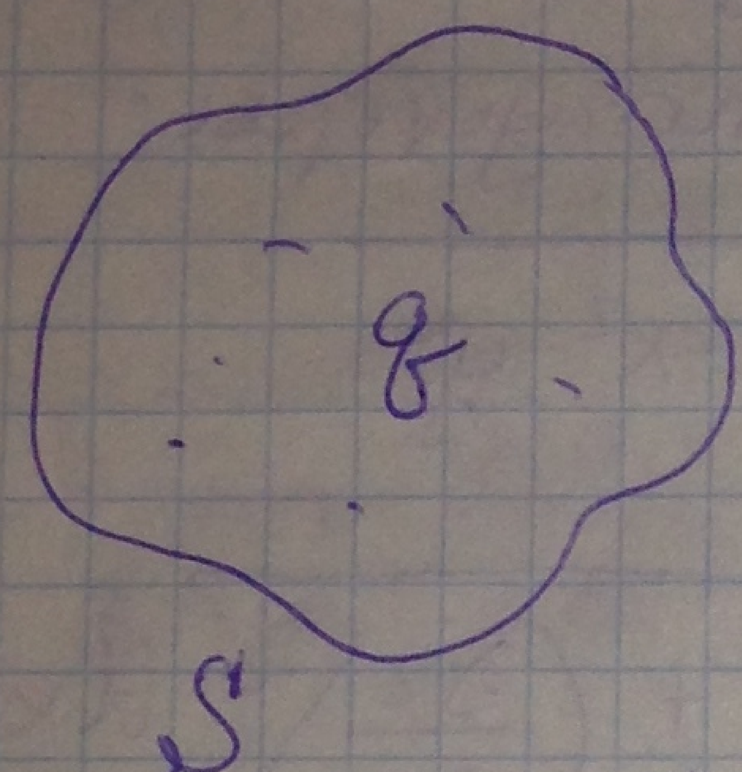
21.02.14

Семинар №2

$$E = -\nabla\varphi$$

потенциал

$$\varphi = \frac{kq}{r}$$ — точечный заряд



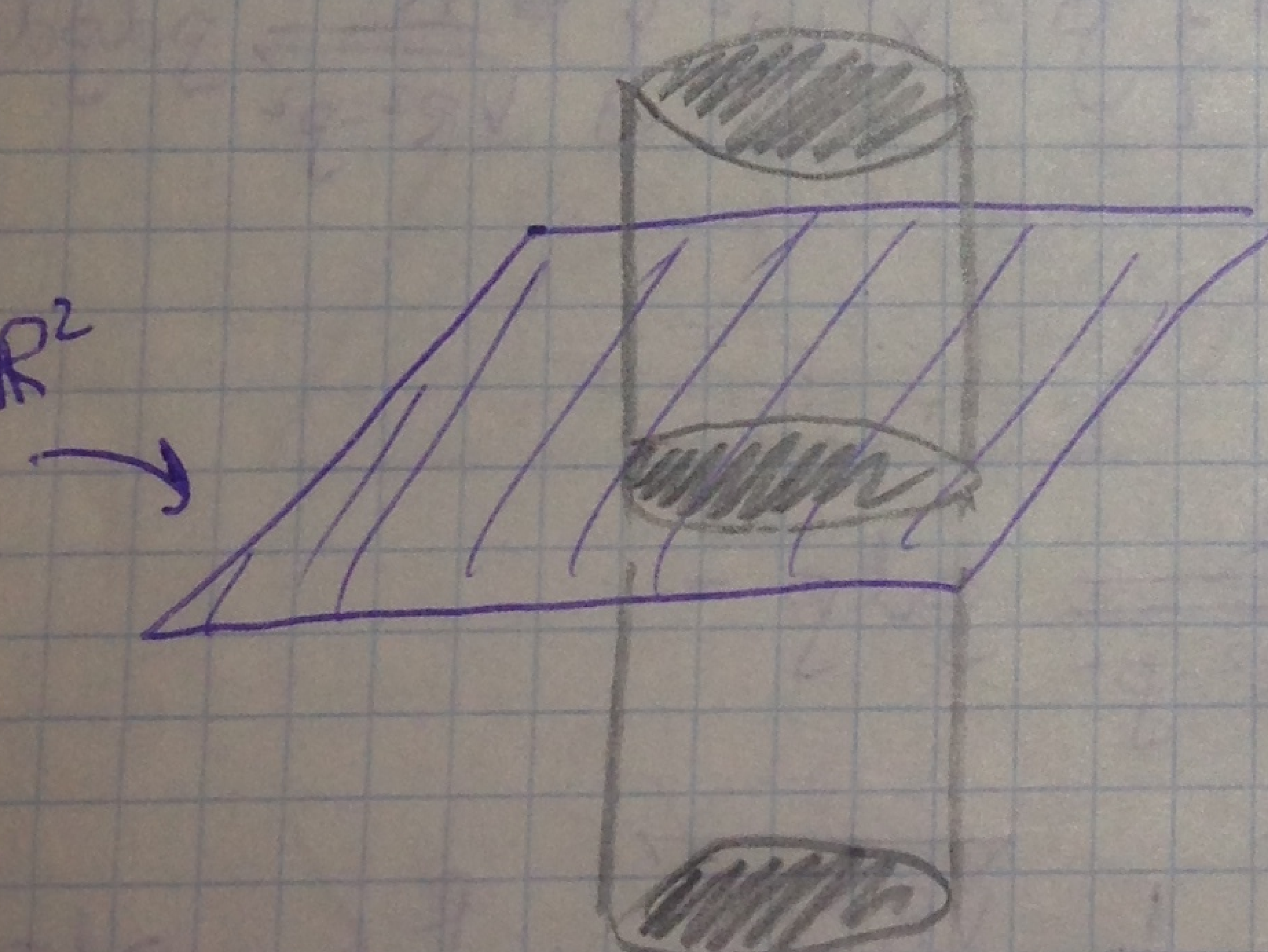
поток

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ ← объемная плотность заряда

теорема Гаусса

Пример 1



$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = 2SE = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

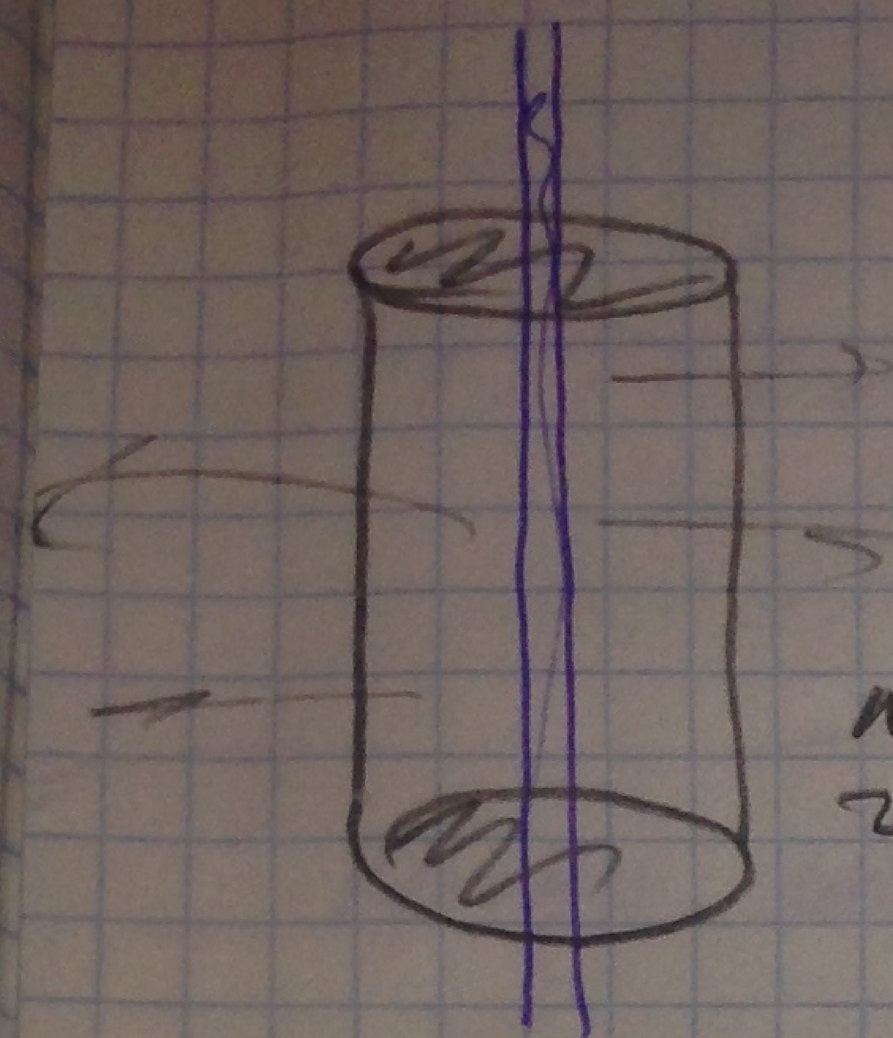
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Пример 2

Задача из Д3, только палка — бесконечная

По уже полученному должно быть

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

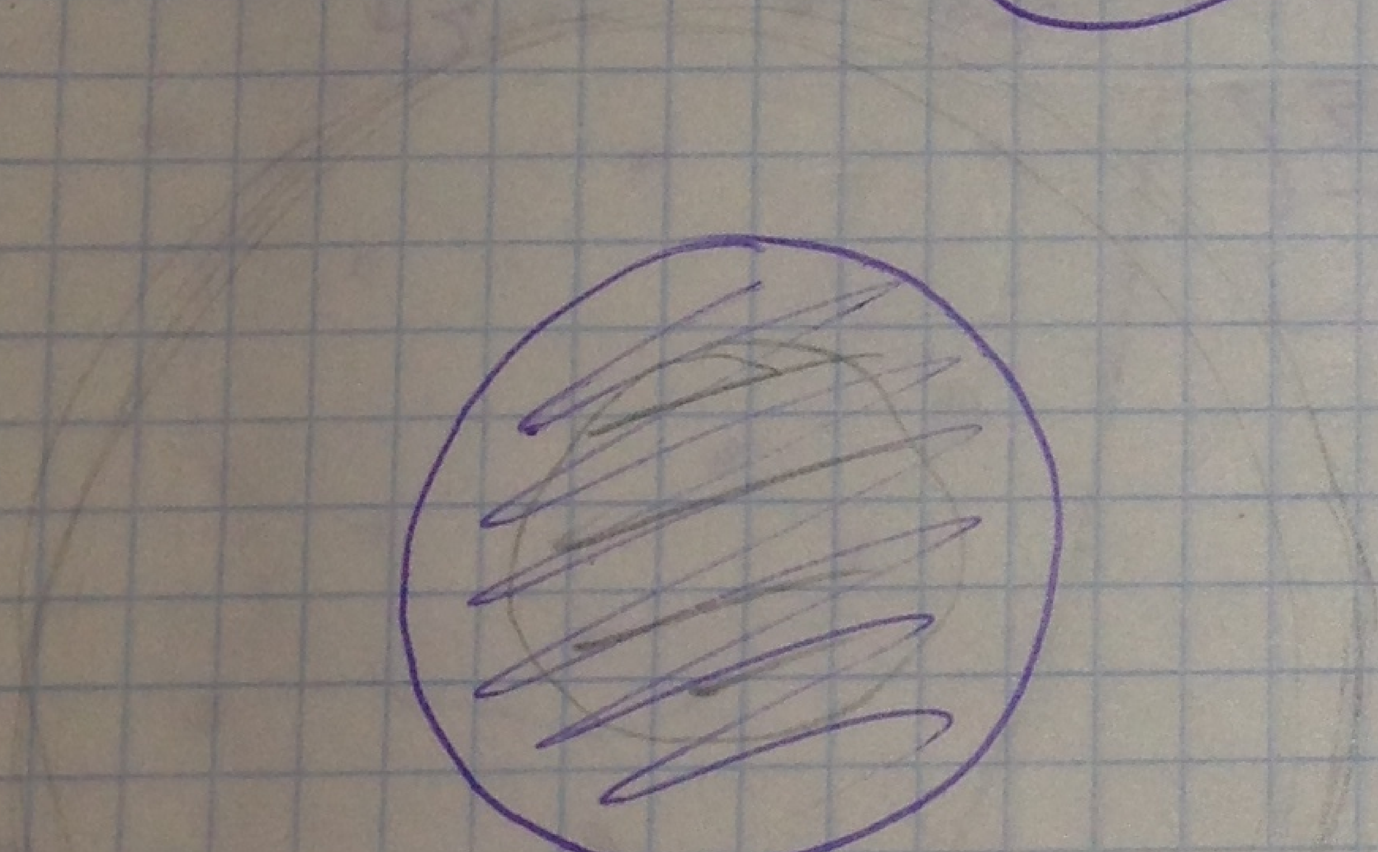


поток только через боковую поверхность

$$E \cdot 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

№1



ρ, R

E в любой т. — ?

$$S = 4\pi r^2$$

вне:

$$E \cdot \cancel{4\pi} r^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}}$$

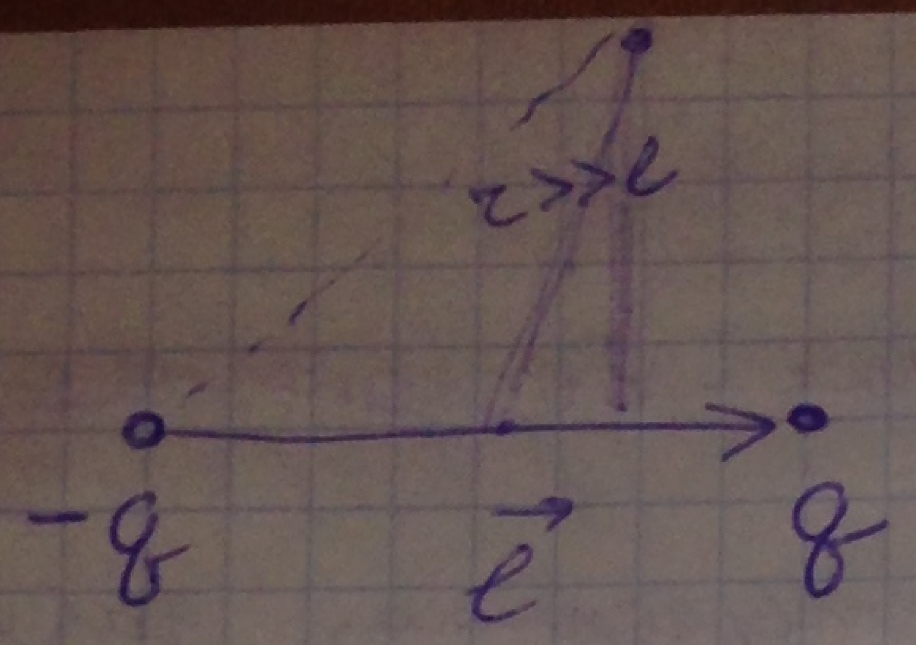
внутри:

$$4\pi r^2 E = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Downarrow$$

$$E = \frac{r\rho}{3\varepsilon_0}$$

$E(r) - ?$



Дипольный момент: $\vec{p} = q\vec{l}$

$-q$: $E = -k\frac{q}{r^2}$

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_0\left(\vec{r} - \frac{\vec{l}}{2}\right) - \varphi_0\left(\vec{l}/2 + \vec{r}\right) \overset{\text{Тейлор}}{\approx}$$

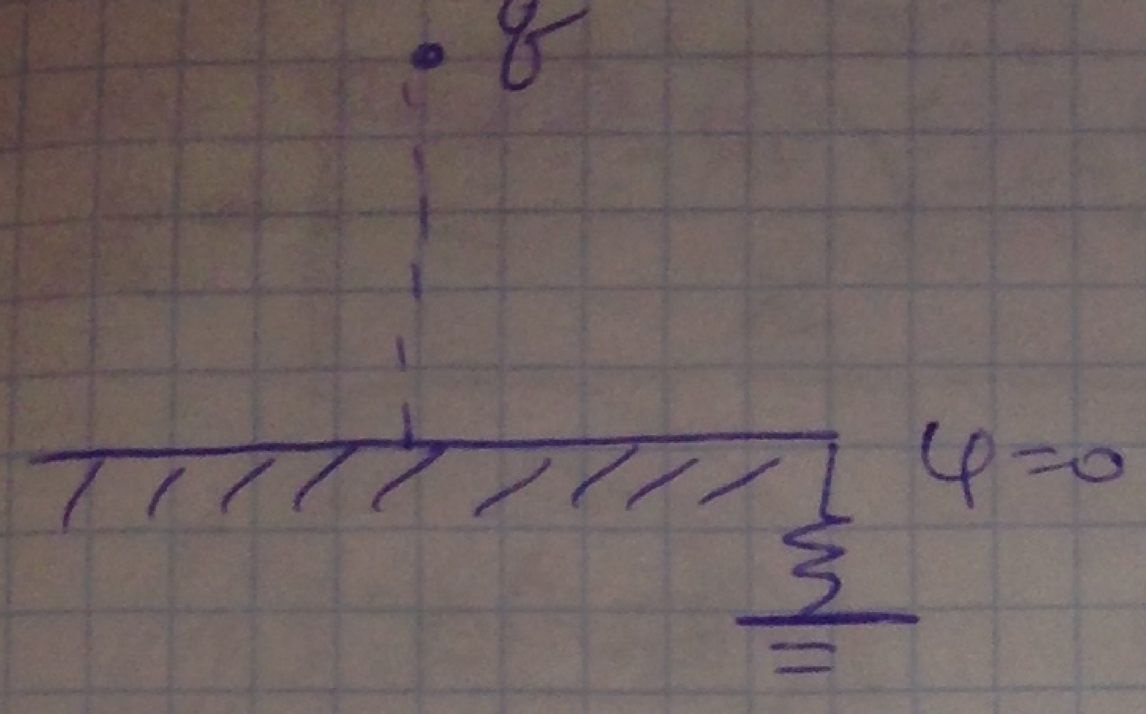
$$\varphi_0 = \frac{kq}{r} \qquad = \left(-\frac{\bar{l}}{2}\cdot\nabla\varphi_0\right) - \left(\frac{\bar{l}}{2}\cdot\nabla\varphi_0\right) =$$

$$= -(\vec{l}\cdot\nabla\varphi_0) =$$

$$= (\vec{l}\cdot -\nabla\varphi_0) = (\vec{l}\cdot\vec{E}) =$$

$$= k\frac{q(\vec{l}\cdot\vec{r})}{r^3} = k\frac{(\vec{p},\vec{r})}{r^3}$$

$$\bar{E}(\bar{r}) = -\nabla\varphi = k\left\{-\frac{\bar{p}}{r^2} + \frac{3(\bar{p},\bar{r})\bar{r}}{r^5}\right\}$$



$E =$

$\int dV = \int_0^R ($

$= 4\pi\rho_0 \int_0^R r^2 dr - \frac{4\pi\rho_0}{R}\int_0^R r^3 dr =$

$= \frac{4\pi\rho_0 R^3}{3} - \pi\rho_0 R^3 =$

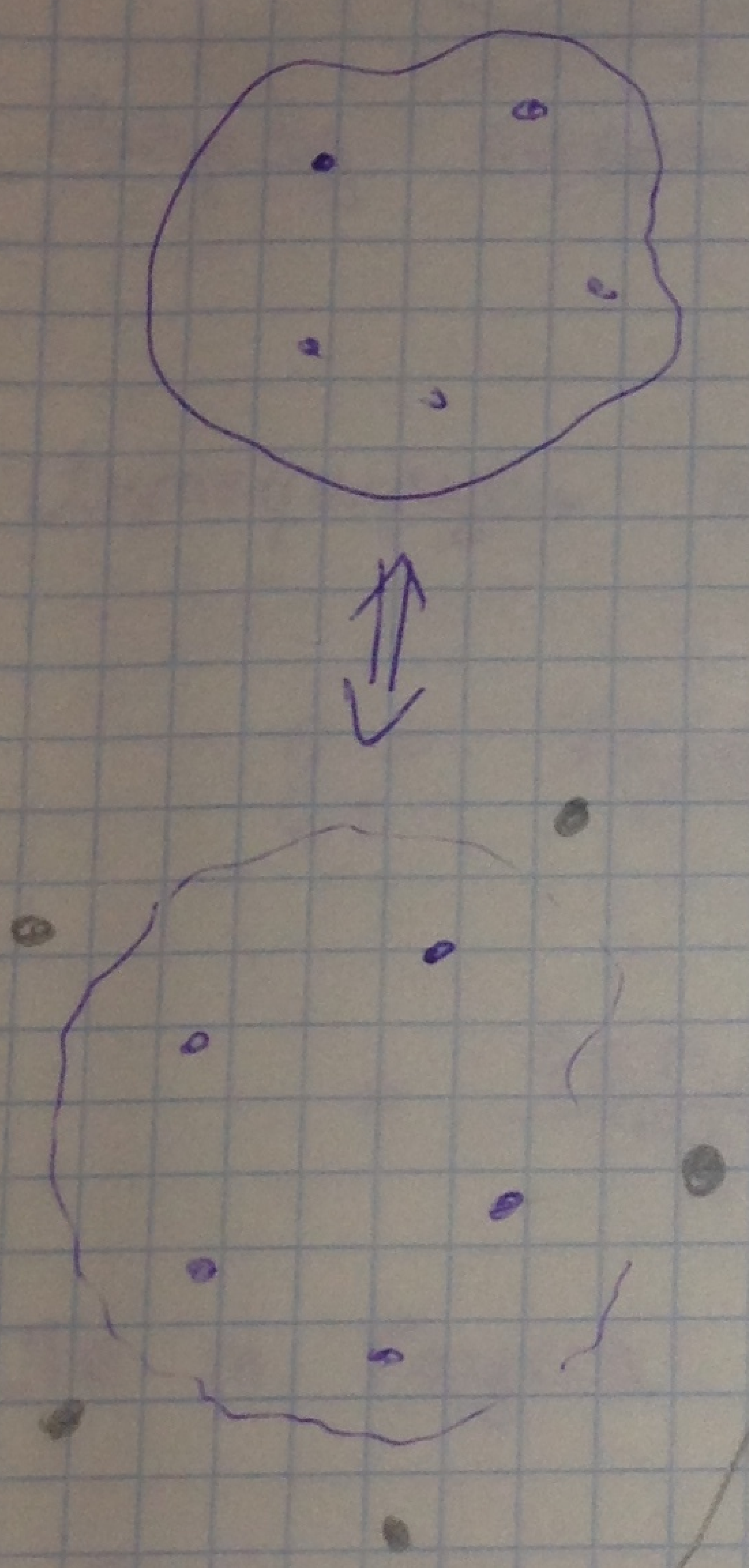
$= \boxed{\frac{\pi\rho_0 R^3}{3}}$ — заряд всего шара

заряд сферы радиуса r:

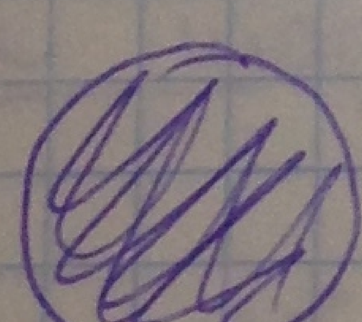
$q = 4\pi r^2 \cdot \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) =$

$= \boxed{4\pi\rho_0 r^2 - \frac{4\pi\rho_0}{R} r^3}$

Принцип отражения



Д/З

① 

R

$\rho = \rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)$

$E(r)$ — ?

② внешнее поле

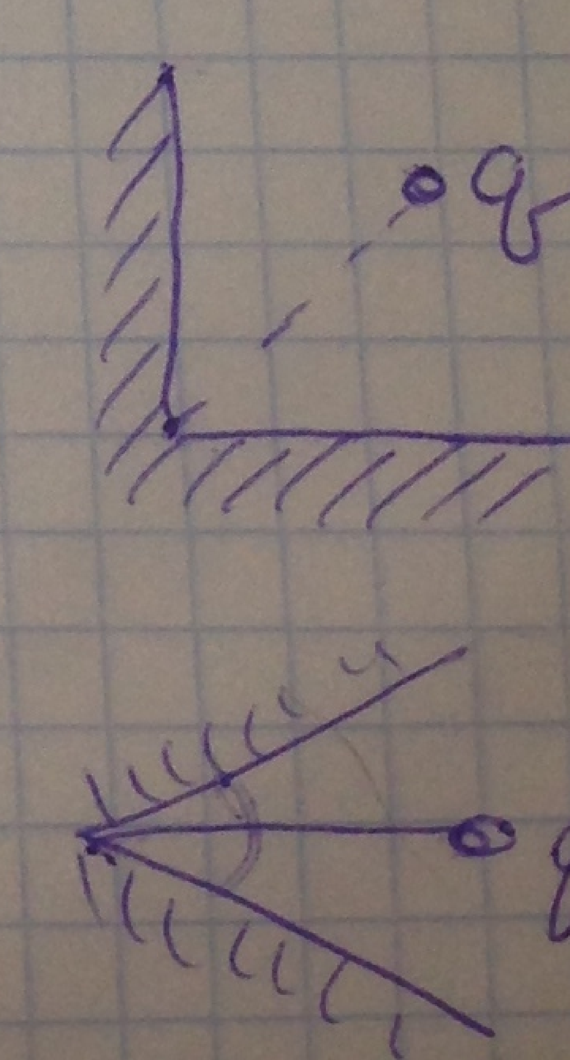
диполь

$\vec{p}$

$\vec{E}$

$\vec{M}$ — ?

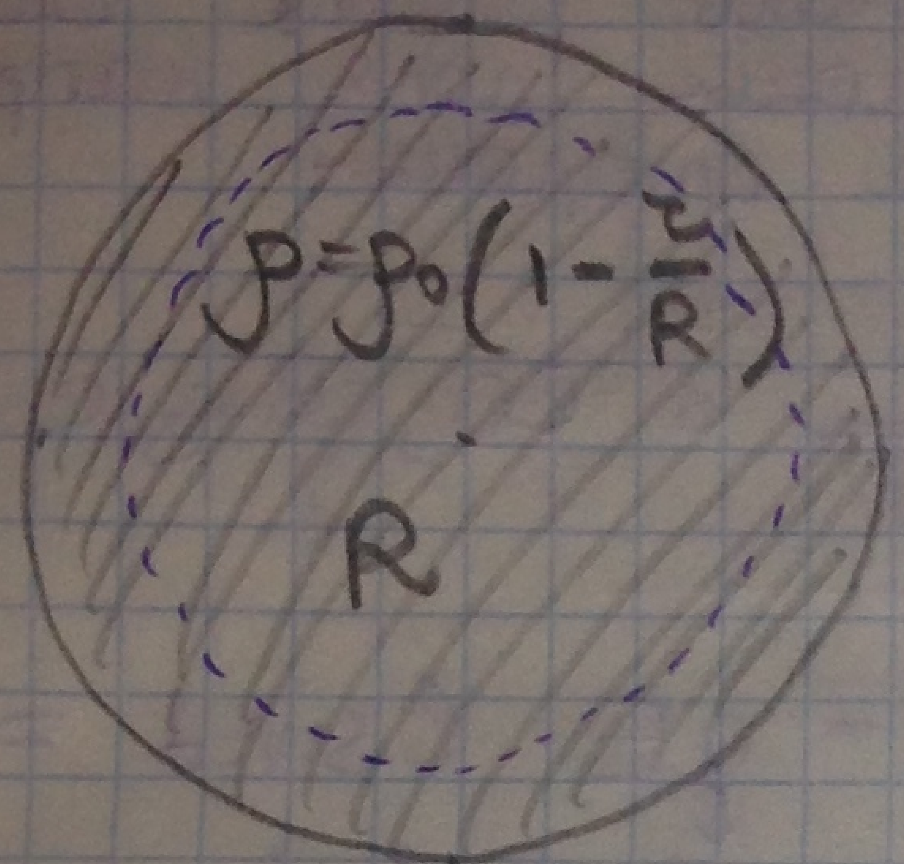
момент силы действия

③ 

Домашняя работа

№1

Найти напряж-ть эл. поля в $\forall$ точке пространства



Рассмотрим напр. внутри шара

Выделим сферическую пов-ть радиуса r

Найдем заряд, заключенный внутри нее

Заряд сферы радиуса r: $dq = dS \cdot \rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)dr =$

$$= 4\pi\rho_0 r^2 - \frac{4\pi\rho_0}{R} r^3$$

Интегрируем по радиусу от 0 до r:

$$q_r = 4\pi\rho_0 \int_0^r r^2 dr - \frac{4\pi\rho_0}{R}\int_0^r r^3 dr =$$

$$= \frac{4\pi\rho_0 r^3}{3} - \frac{4\pi\rho_0 r^4}{4R} = \frac{\pi\rho_0 r^3(4R-3r)}{3R} = q_r$$

По т. Гаусса: $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\pi\rho_0 r^3(4R-3r)}{3\varepsilon_0 R}$

$\Downarrow$

Внутри шара: $\boxed{E = \frac{\rho_0 r(4R-3r)}{12\varepsilon_0 R}}$

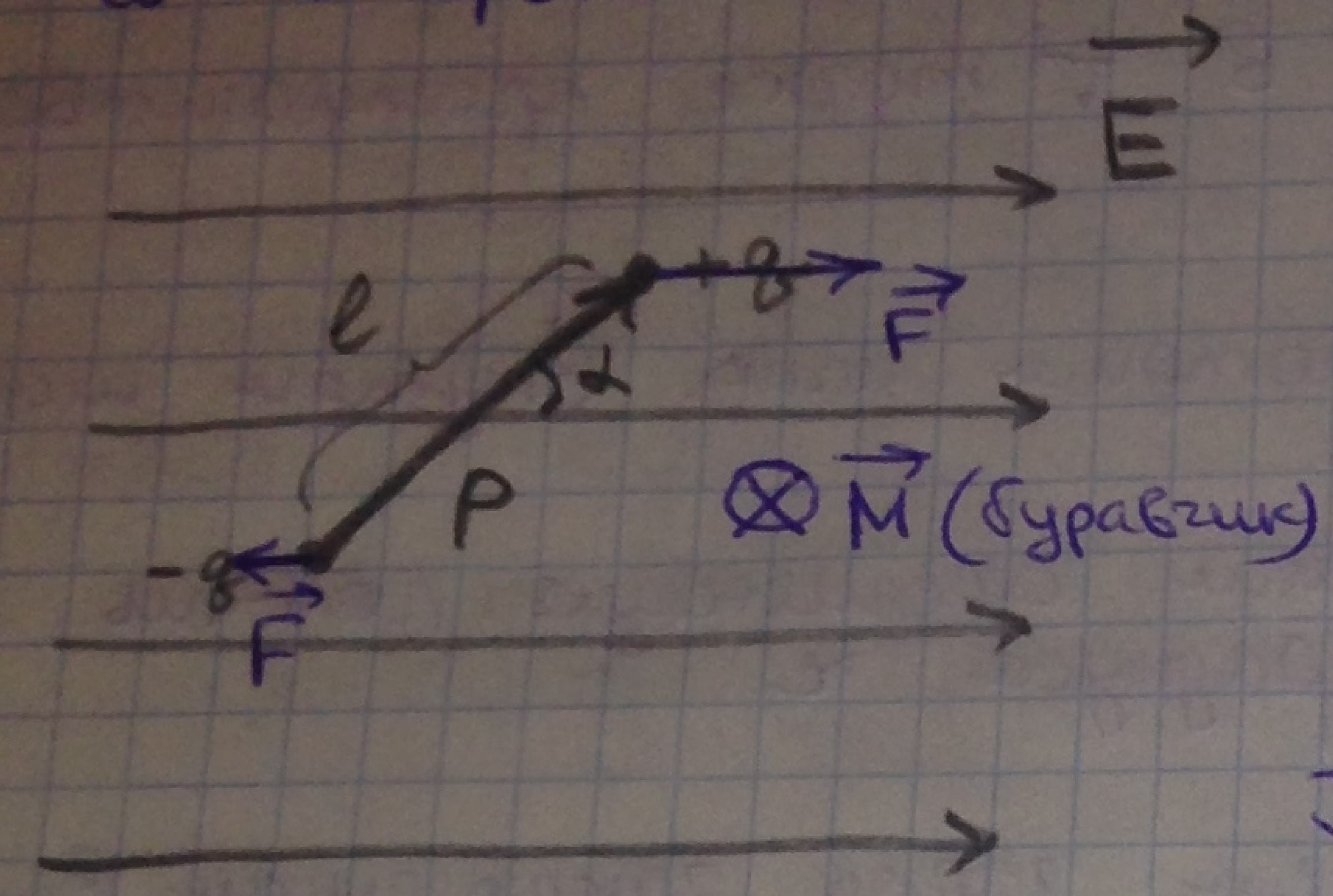
Снаружи шара: $q_r = q = q_r\big|_{r=R} = \frac{\pi\rho_0 r^3}{3}$

$$4\pi r^2 \cdot E = \frac{\pi\rho_0 r^3}{3\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\rho_0 r}{12\varepsilon_0}}$$

№2

Определить момент силы действия на диполь со стороны внешнего поля



На каждый заряд будет действовать равная сила со стороны поля, напр. в разные стороны

Переходим в СО, связ. с q^-

Тогда

$M = F \cdot d = qE \cdot l\sin\alpha =$

$= ql \cdot E\sin\alpha$

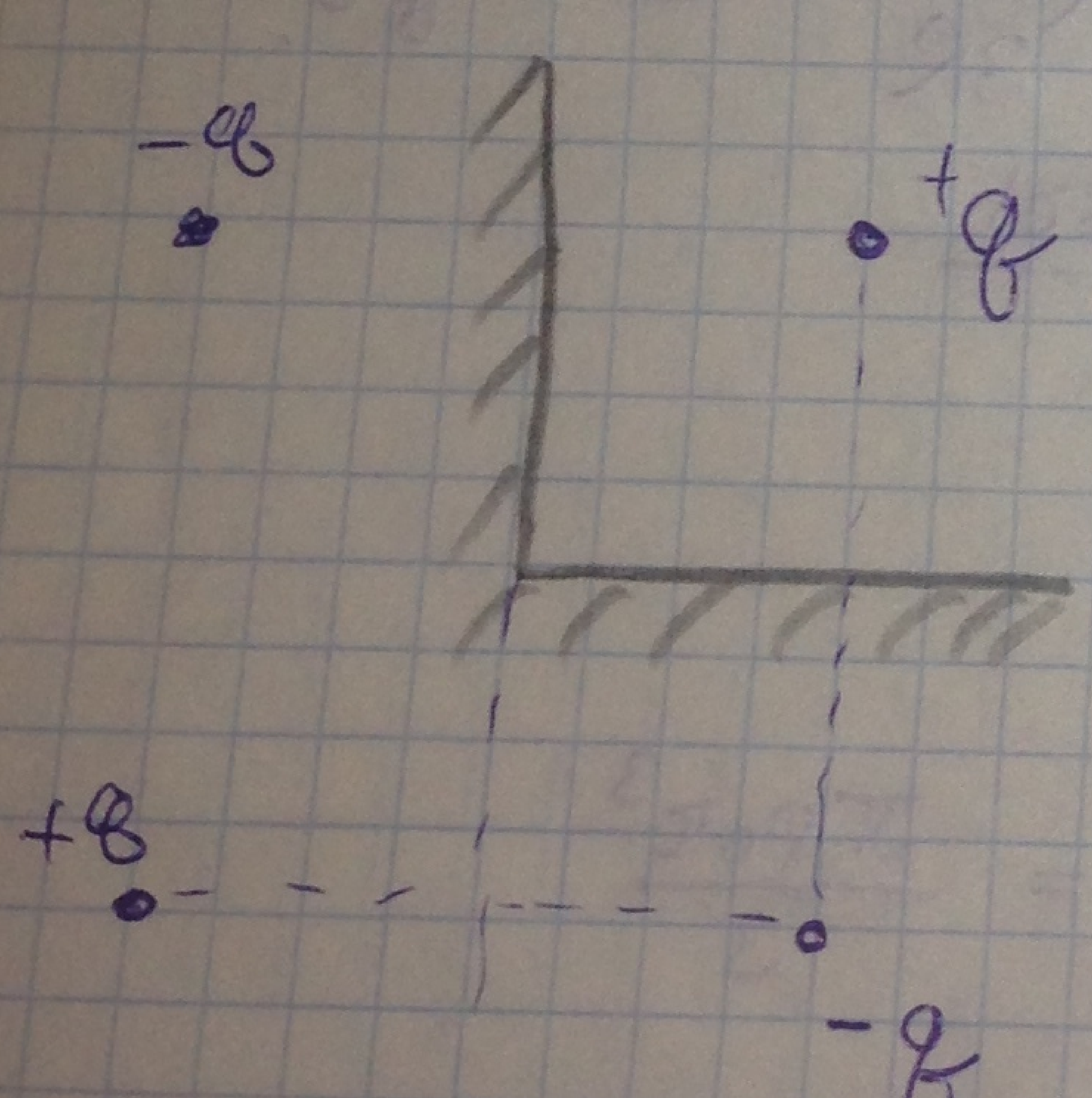
$q\vec{l} = \vec{p}$

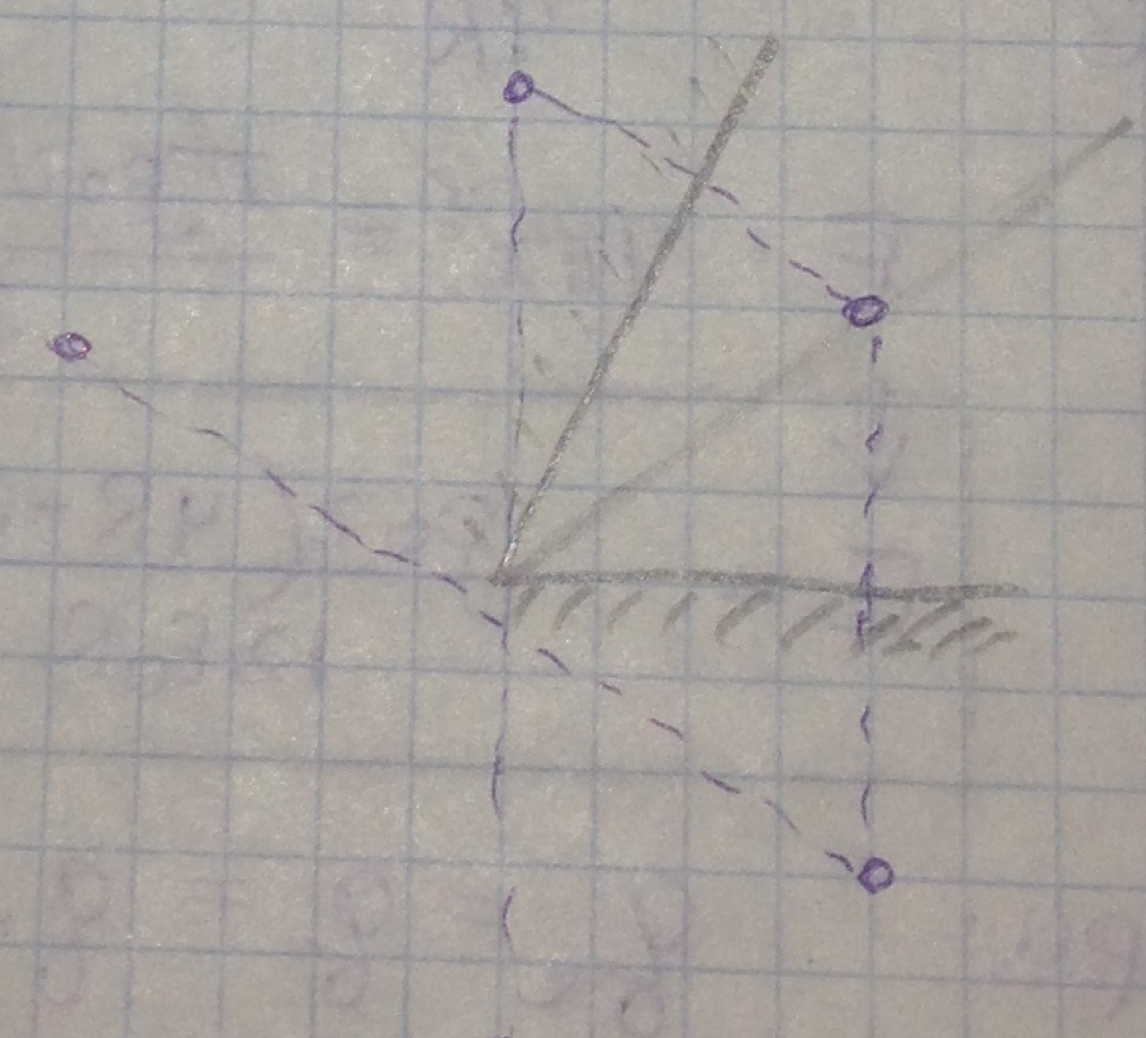
$\Downarrow$

$\boxed{M = pE\sin\alpha}$

В векторном виде: $\vec{M} = [\vec{p} \times \vec{E}]$

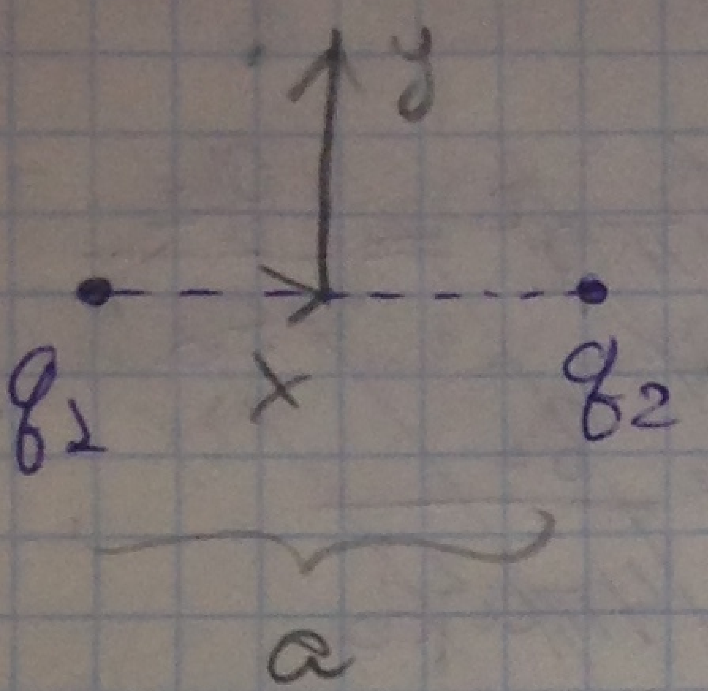
№3





Семинар №3

Задача



$$\frac{q_2}{q_1} - \alpha \qquad \varphi = k\frac{q}{r}$$

$$\varphi_1 = \frac{q_1 k}{r_1} = \frac{q_1 k}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2}$$

$$\varphi_2 = \frac{q_2 k}{r_2} = \frac{q_2 k}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}} \qquad \frac{r_1}{r_2} = \frac{q_1}{q_2}$$

$$\boxed{q_1 q_2 < 0}$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0$$

$$\varphi_1 = -\varphi_2$$

$$\frac{q_1 k}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-q_2 k}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}{q_2}\right)^2 = \left(-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{q_1}\right)^2$$

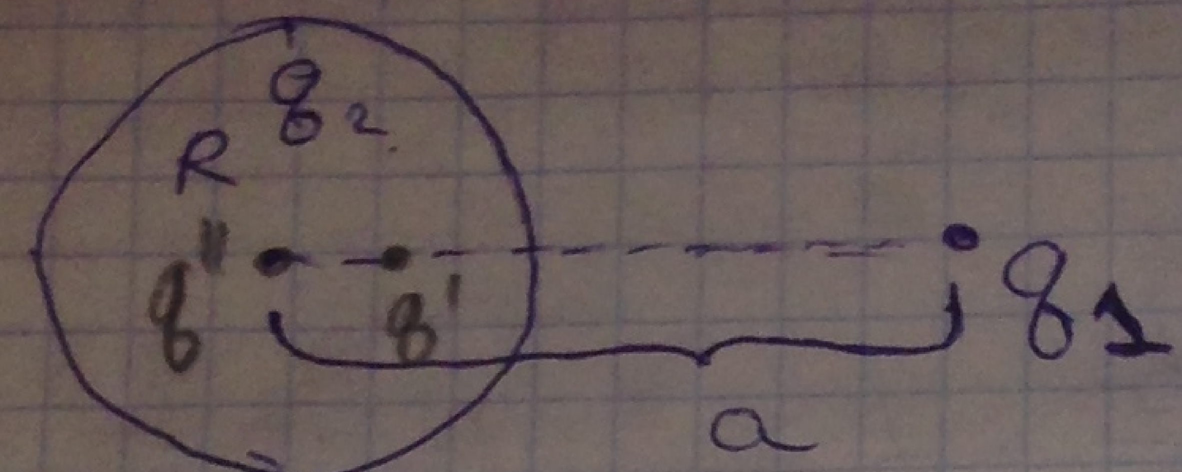
$$\left(x + \frac{a q_1^2}{q_2^2 - q_1^2}\right) + y^2 = \frac{a^2 q_1^2 q_2^2}{(q_2^2 - q_1^2)^2}$$

$\Downarrow$ Окружность

$|q_1| = |q_2|$

$\Downarrow$

прямая



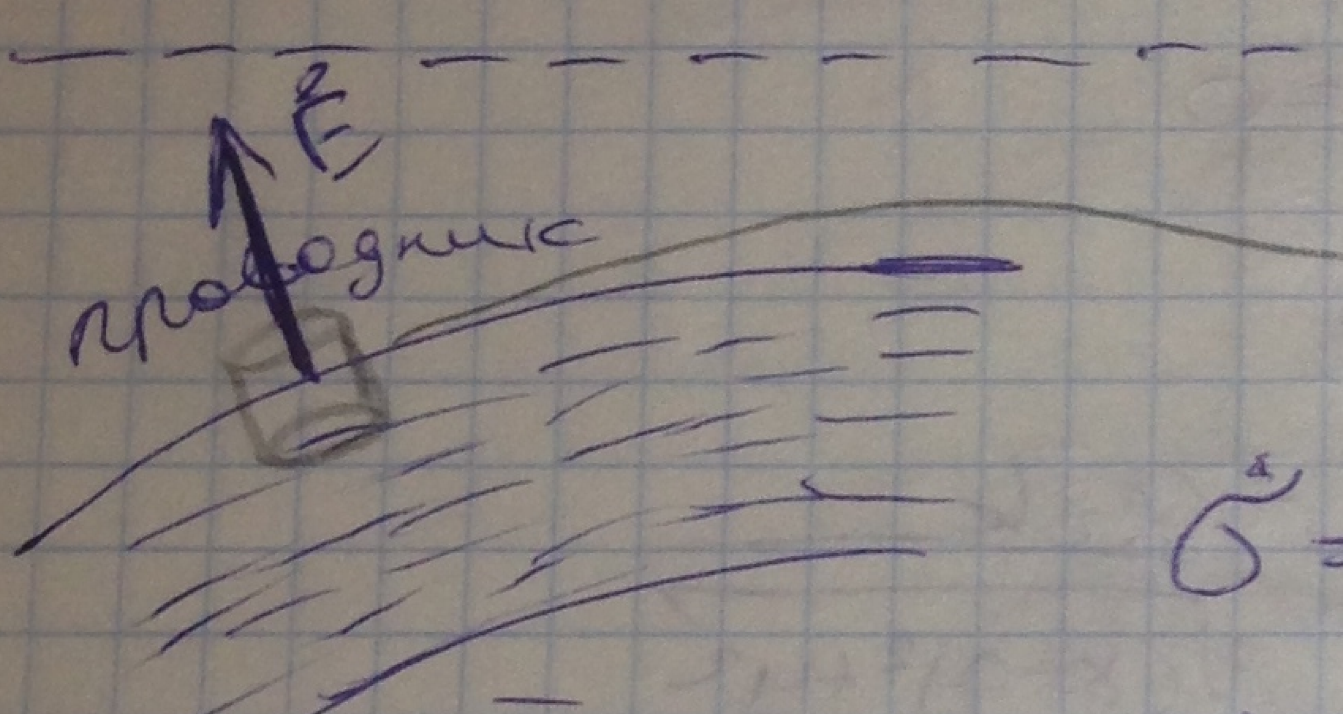
$\cancel{F=qE}$

$$\frac{kq''}{R} = \frac{kq_2}{R} + \frac{kq'}{a}$$

$$\cancel{E\cdot 4\pi a^2 = \frac{q_2}{\varepsilon_0}}$$

$$\cancel{E = \frac{q_2}{4\pi a^2 \varepsilon_0}}$$

$$\cancel{F = \frac{q_1 q_2}{4\pi a^2 \varepsilon_0}}$$

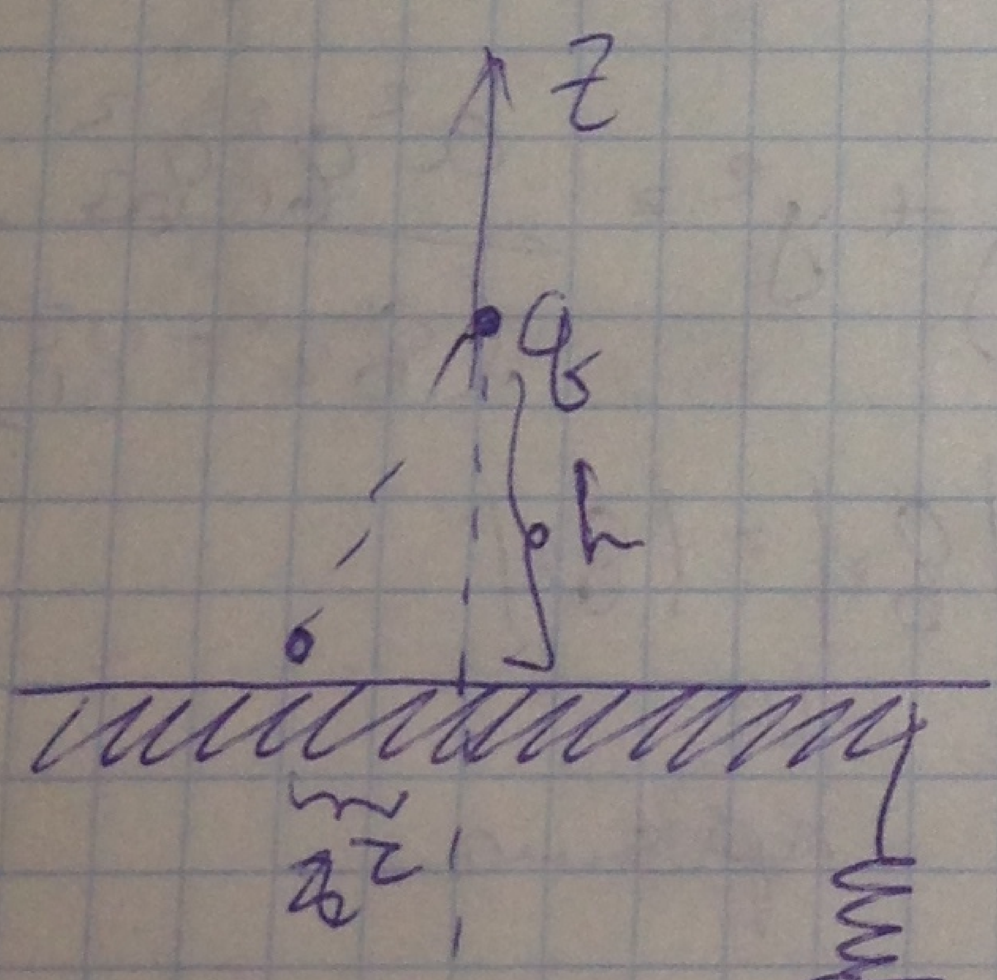


$$ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma = \varepsilon_0 E = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_S$$

$\bar{E} = 0$ (внутри)

$\rho = 0$



$$\varphi(z) = \frac{kq}{\sqrt{(h-z)^2 + r^2}} - \frac{kq}{\sqrt{(h+z)^2 + r^2}}$$

$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big|_{z=0} =$$

$$= \frac{-\varepsilon_0 kq\cdot(-1)}{(h^2+r^2)^{3/2}}\left(h(-1) - h\right) =$$

$$= -\frac{qh}{2\pi (h^2+r^2)^{3/2}}$$

$\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon_0$

$$\varphi(r) = \begin{cases} a\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) - b\left(R^2 - r^2\right), & r \le R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

т.к. зависит только от расс-тояния

$\Downarrow$

сферическая симметричность

$\Downarrow$

точка / сфера / шар

Смотрим на первое слагаемое $\Rightarrow$ точечный заряд

$q = 4\pi\varepsilon_0 a$

$\Downarrow$

выкидываем

$$\Leftarrow \begin{cases} a\left(-\frac{1}{R}\right) - b\left(R^2 - r^2\right), \ldots \\ -\frac{a}{r}, \ldots \end{cases}$$

Кусок Лапласиана

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\rho = -6\varepsilon_0 b$$

$$q + -6b\varepsilon_0 \frac{4\pi}{3}R^3 + \sigma \cdot 4\pi R^2 = 0$$

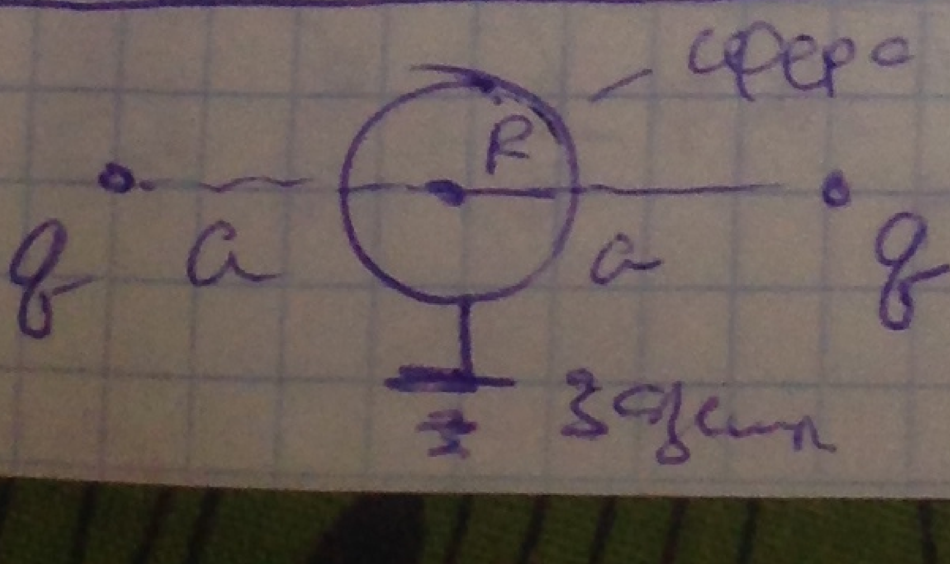
$\boxed{2/3}$

σ - ?

распр. заряда на сфере (функция от угла)

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{a}{r}, & r \ge R \\ -\frac{ar^2}{2R^3} + \frac{3a}{2R}, & r < R \end{cases}$$

по потенц. найти распр. заряда



найти силу взаимодействия

Домашняя работа

№2 №4.18

Найти распр. заряда по потенциалу:

$$\varphi(r) = \begin{cases} a/r, & r \geq R \quad (1) \\ -\frac{ar^2}{2R^3} + \frac{3a}{2R}, & r < R \quad (2) \end{cases}$$

В $r \to 0$ особенности нет $\Rightarrow$ нет точечного заряда в центре

$$D_1 = (-\varepsilon_0) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \begin{cases} \frac{a}{r^2}\varepsilon_0, & r \geq R \\ \frac{ar}{R^3}\varepsilon_0, & r < R \end{cases}$$

$$\sigma = \lim_{r \to R^+} D_1(r) - \lim_{r \to R^-} D_1(r) = \frac{a\varepsilon_0}{R^2} - \frac{a\varepsilon_0}{R^2} = \boxed{0 = \sigma}$$

Считаем часть Лапласиана: $\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} \cdot r^2 \frac{\partial}{\partial r}$

$$\frac{\partial}{\partial r}\varphi_1 = -\frac{a}{r^2} \Big| \cdot r^2 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial r}\varphi_2 = -\frac{ar}{R^3} \Big| \cdot r^2$$

$$\cancel{\frac{\partial^2}{\partial r^2}\varphi_1 = \frac{2a}{r^3}} \quad ; \quad \cancel{\frac{\partial^2}{\partial r^2}\varphi_2 = -\frac{a}{R^3}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\varphi_1 \cdot r^2) = 0 \qquad \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\varphi_2 \cdot r^2) = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{ar^3}{R^3}\right) =$$

$$= -\frac{3ar^2}{R^3} \Big| \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\varphi = -\frac{3a}{R^3}$$

Формула: $\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$

$$\Downarrow$$

$$\rho = -\Delta\varphi\,\varepsilon_0 = \frac{3a\varepsilon_0}{R^3}$$

Ответ: 1) точ. заряда нет
2) для сферы: $\sigma = 0$
3) для шара: $\rho = 3a\varepsilon_0/R^3$

№ 4.19

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0 & , r \geq R \\ \frac{a}{r} + \frac{ar^2}{2R^3} - \frac{3}{2R} & , r < R \end{cases}$$

~~1) Около $r \to 0$ особенности нет $\Rightarrow$ нет точечного заряда в центре~~

~~2) для сферы:~~

~~$D(r) = \{$~~

1) Около $r \to 0$ особенность: $\varphi = \frac{a}{r} = k\frac{q}{r}$

$\Downarrow$

имеем точечный заряд $\boxed{q = 4\pi\varepsilon_0 a}$

$a = kq$

$q = \frac{a}{k}$

2) для сферы:

$$\varphi(r) = \begin{cases} -\frac{a}{r} & , r \geq R \quad (1) \\ \frac{ar^2}{2R^3} - \frac{3}{2R} & , r < R \quad (2) \end{cases}$$

$$D(r) = (-\varepsilon_0)\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{a}{r^2}\varepsilon & , r \geq R \\ -\frac{ar}{R^3}\varepsilon_0 & , r < R \end{cases}$$

$$\sigma = \lim_{r \to R^+} D(r) - \lim_{r \to R^-} D(r) = -\frac{a\varepsilon}{R^2} + \frac{a\varepsilon_0}{R^2} = \boxed{0 = \sigma}$$

3) для шара:

$$\frac{\partial}{\partial r}\varphi_1 = \frac{a}{r^2} \Big| \cdot r^2$$

$$\cancel{\frac{\partial^2}{\partial r^2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\varphi_1 \cdot r^2\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\varphi_2 = \frac{ar}{R^3} \Big| \cdot r^2$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\varphi_2 \cdot r^2\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{ar^3}{R^3}\right) = \frac{3ar^2}{R^3} \Big| \cdot \frac{1}{r^2}$$

$\Downarrow$

$$\Delta\varphi = \frac{3a}{R^3} \Rightarrow \rho = -\Delta\varphi\,\varepsilon_0 = \boxed{-\frac{3a\varepsilon_0}{R^3} = \rho}$$

№ 4.20

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0, & r \geq R \quad (1) \\ a(R^3 - r^3), & r < R \quad = aR^3 - ar^3 \quad (2) \end{cases}$$

1) в окр-ти $r \to 0$ особенности нет $\Rightarrow$ нет точечного заряда в центре

2) для сферы:

$$D(r) = \frac{\partial \varphi}{(-\varepsilon_0) \cdot \partial r} = \begin{cases} 0, & r \geq R \\ 3ar^2, & r < R \end{cases}$$

$$\lim_{r \to R^+} D(r) - \lim_{r \to R^-} D(r) = 0 \mp 3aR^2 = \boxed{3aR^2 \varepsilon_0 = \sigma}$$

3) для шара:

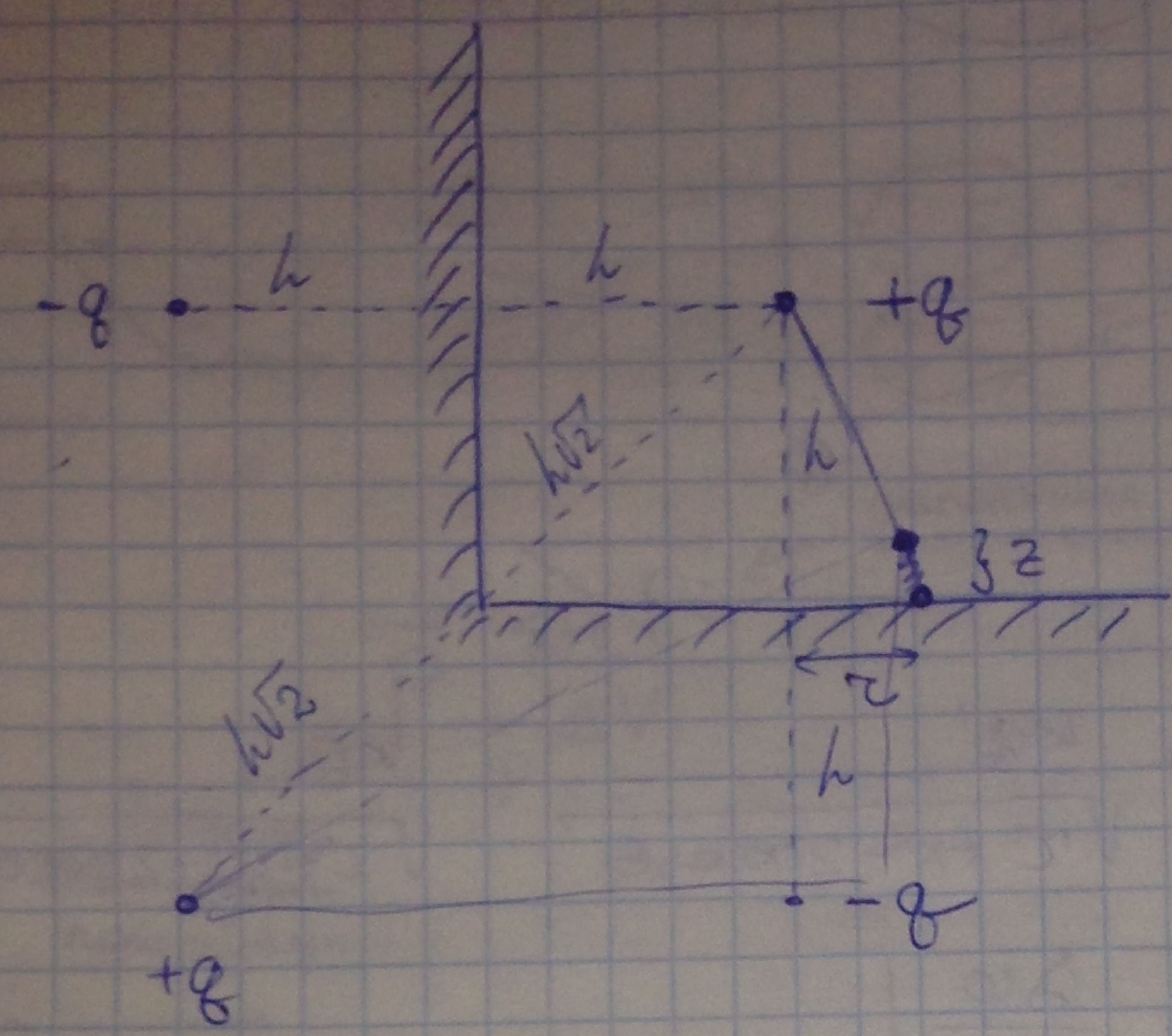
$$\frac{\partial}{\partial r} \varphi_2 = -3ar^2 \quad \Big| \cdot r^2$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\varphi_2 \cdot r^2\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(-3ar^4\right) = -12ar^3 \quad \Big| \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\varphi = -12ar$$

$$\rho = \Delta\varphi \cdot (-\varepsilon_0) = \boxed{12ar\varepsilon_0 = \rho}$$



$$\varphi(z) = \frac{kq}{\sqrt{(h-z)^2+z^2}} - \frac{kq}{\sqrt{(h+z)^2+z^2}} + \frac{kq}{\sqrt{(h+z)^2+(2h+z)^2}} - \frac{kq}{\sqrt{(h-z)^2+(2h+z)^2}}$$

$$\sigma = (-\varepsilon_0)\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0}$$

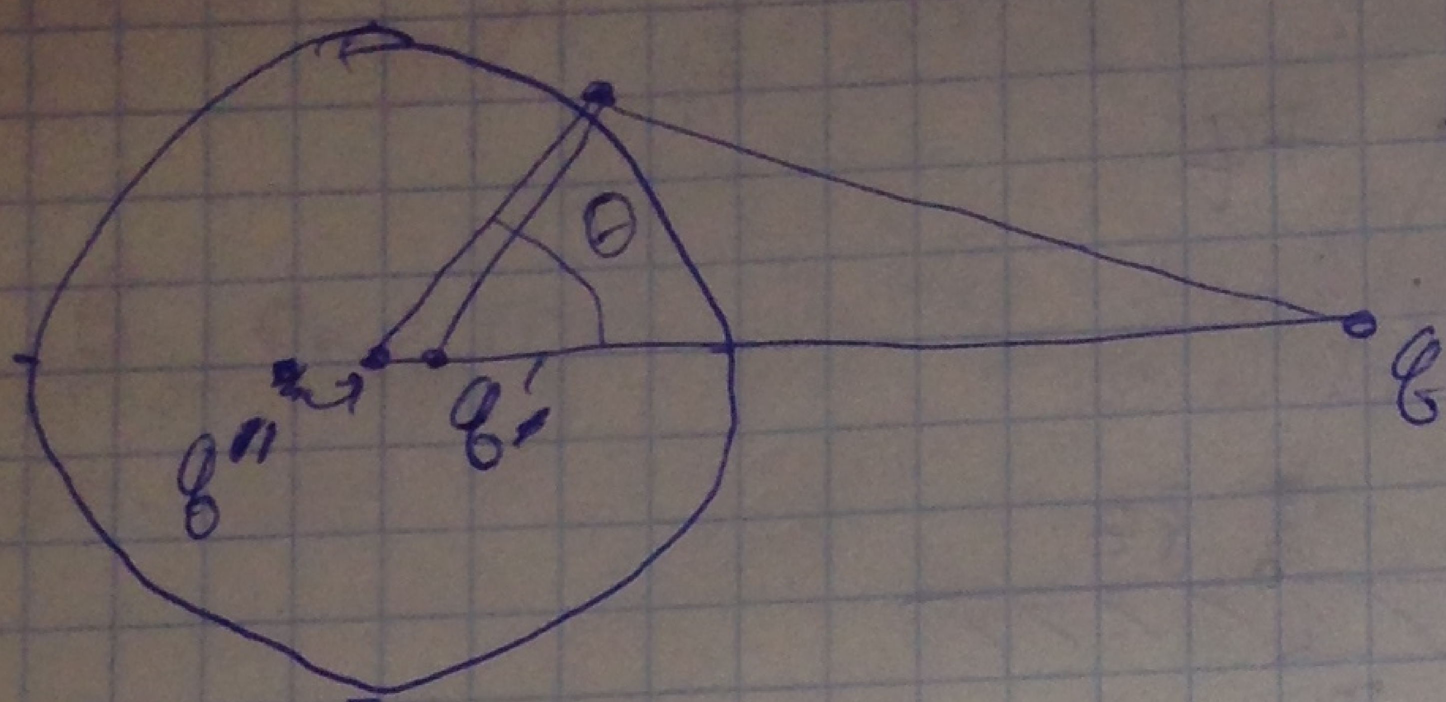
$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0} = kq\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\sqrt{(h-z)^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(h+z)^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(h+z)^2+(2h+z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(h-z)^2+(2h+z)^2}}\right] =$$

$$= kq\cdot\left[-\frac{1}{\cancel{2}((h-z)^2+z^2)^{3/2}}\cancel{2}(h-z) + \frac{1}{\cancel{2}((h+z)^2+z^2)^{3/2}}\cdot\cancel{2}(h+z) - \frac{1}{2((h+z)^2+(2h+z)^2)^{3/2}}\cdot 2(h+z) + \frac{1}{2((h-z)^2+(2h+z)^2)^{3/2}}\cdot(-2)(h-z)\right]$$

$$= kq\left[\frac{h}{(h^2+z^2)^{3/2}} + \frac{h}{(h^2+z^2)^{3/2}} - \frac{h}{(h^2+(2h+z)^2)^{3/2}} - \frac{h}{\quad}\right] =$$

$$= 2kq\left[\frac{h}{(h^2+z^2)^{3/2}} - \frac{h}{(h^2+(2h+z)^2)^{3/2}}\right]\cdot(-\varepsilon_0)$$

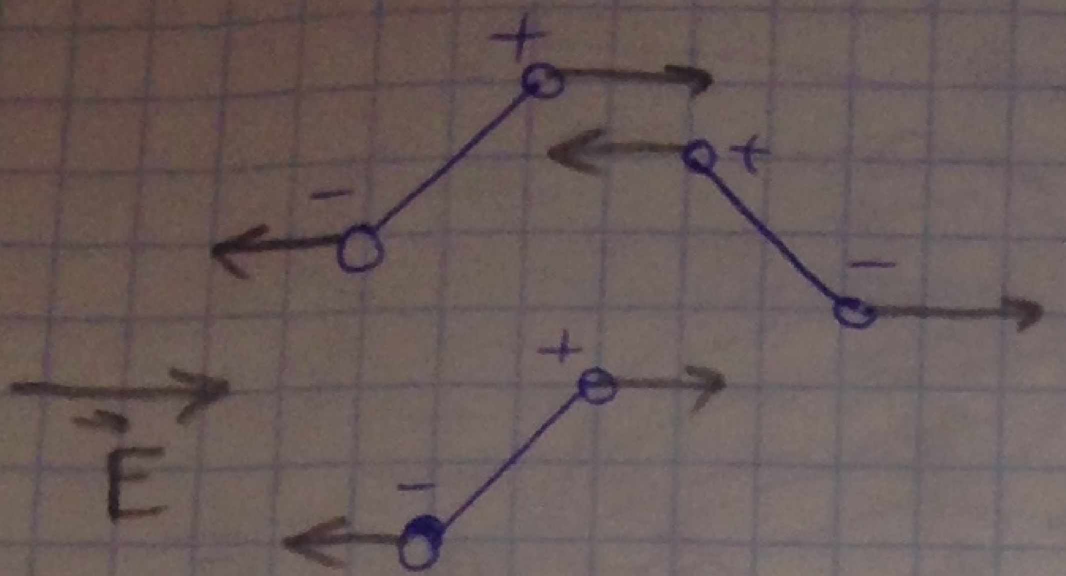
№ 1

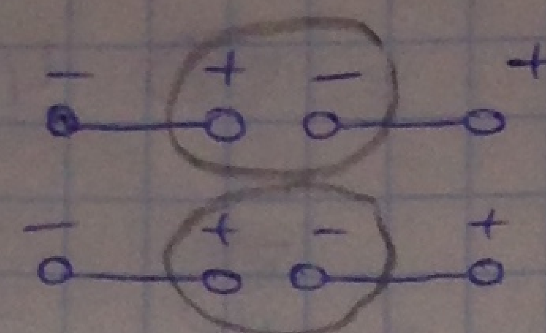


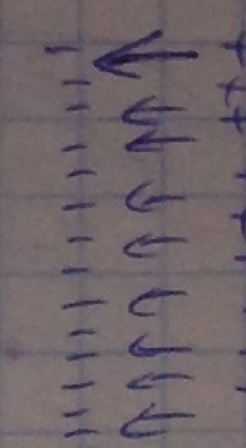
$$\varphi = \frac{kq''}{r} + \frac{kq'}{\sqrt{r^2+x^2-2rx\cos\theta}} + \frac{kq}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\theta}}$$

$$\sigma = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R}$$

Семинар 07.03.14







$$\vec{P} = \frac{\sum_{\Delta V} \vec{p_i}}{\Delta V}$$

дипольные моменты

вектор ~~ко...~~ поляризации

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$$

"хи"

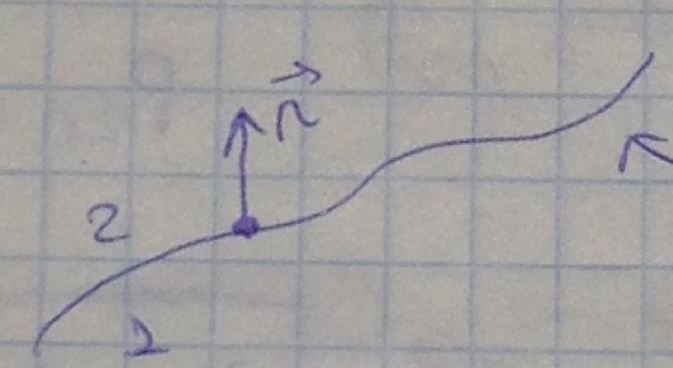
$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = -q'$$

связано с зарядом

если свободный заряд - то без '

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho'$$

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$$



вектор индукции

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \quad ; \quad \varepsilon = 1 + \chi$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$$

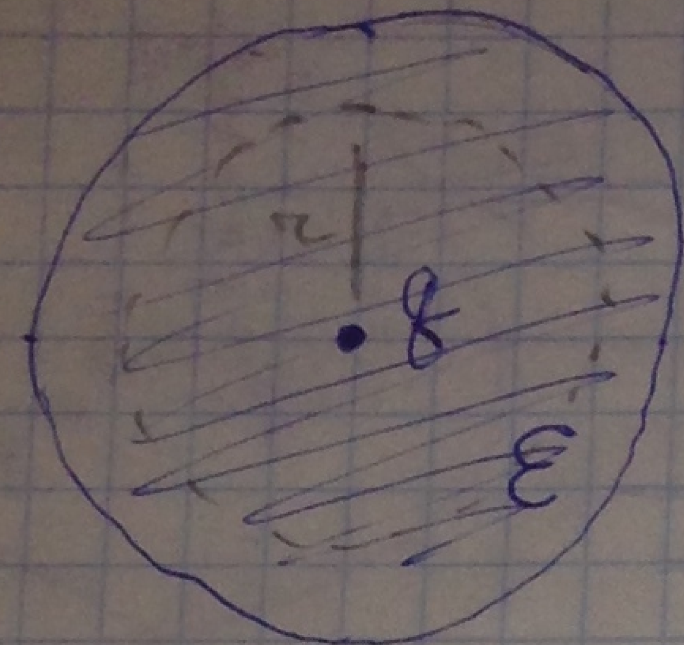
$$\operatorname{div} \vec{D} = q$$

$$D_{2n} - D_{n} = \sigma$$

Зад. №1

$\bar{P}$ - ?

q' - ?



$D \cdot 4\pi r^2 = q$

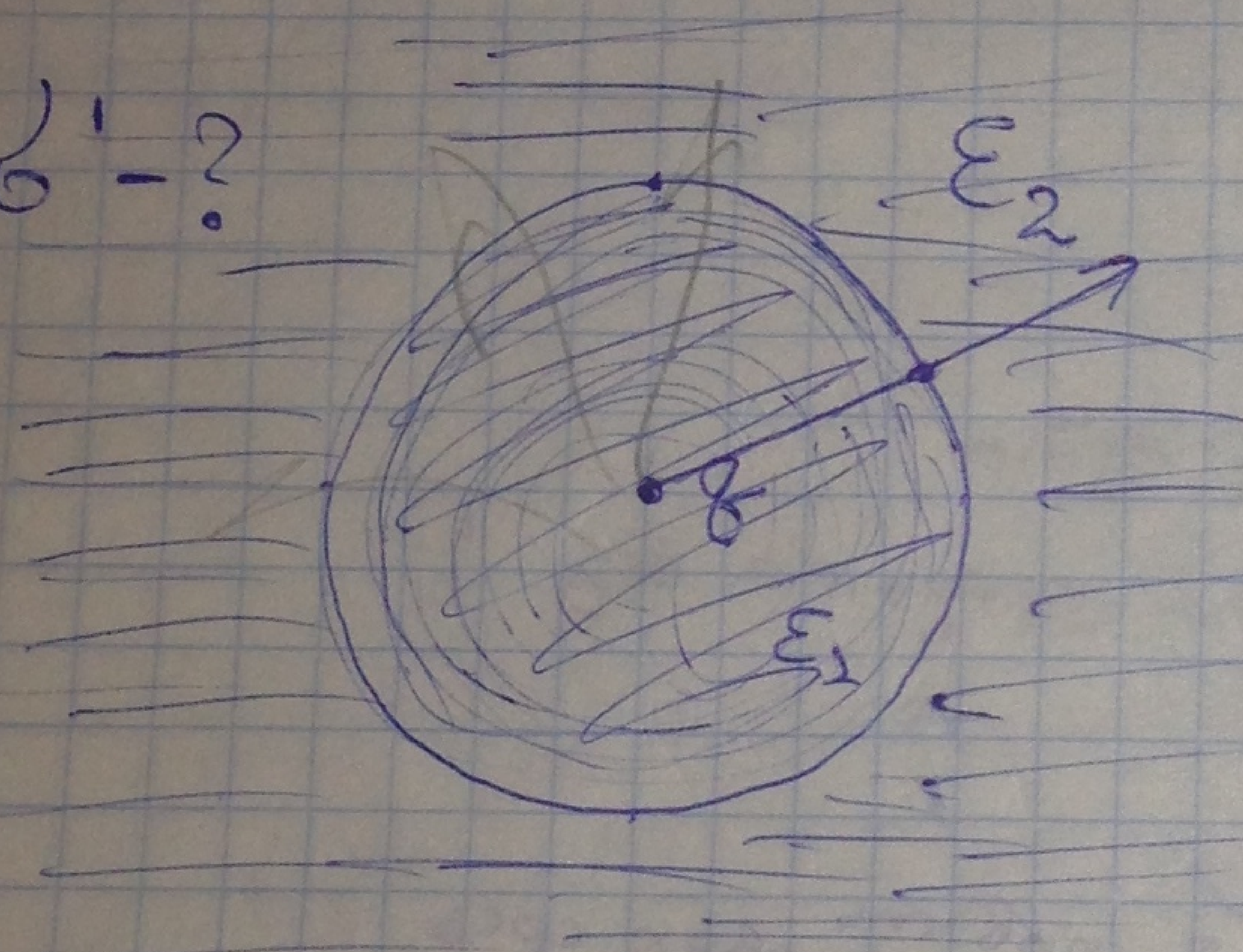
$\bar{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

$\vec{P} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \vec{E} \;\; \left(\frac{\bar{D}}{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{q}{4\pi r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

$P = \chi \varepsilon_0 E \; ; \; \varepsilon = 1 + \chi$

$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{q}{4\pi r^2} \cdot 4\pi r^2 = q'$ (т. Гаусса)

σ' - ?



~~$D_1 = \frac{q}{4\pi R^2}$~~

~~$D_2 =$~~

$P_{1n} = \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1} \frac{q}{4\pi R^2}$

$P_{2n} = \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{q}{4\pi R^2}$

$\boxed{P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'}$

Зад. №2

$$q' = -\oint \bar{P}\,dS$$

внешняя:

$$\cancel{q' = -\oint \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$\oint P\,dS = -q'$$

$$P = (\varepsilon-1)\,\varepsilon_0 \bar{E} \qquad \frac{D}{\varepsilon}$$

$$\oint D\,dS = q$$

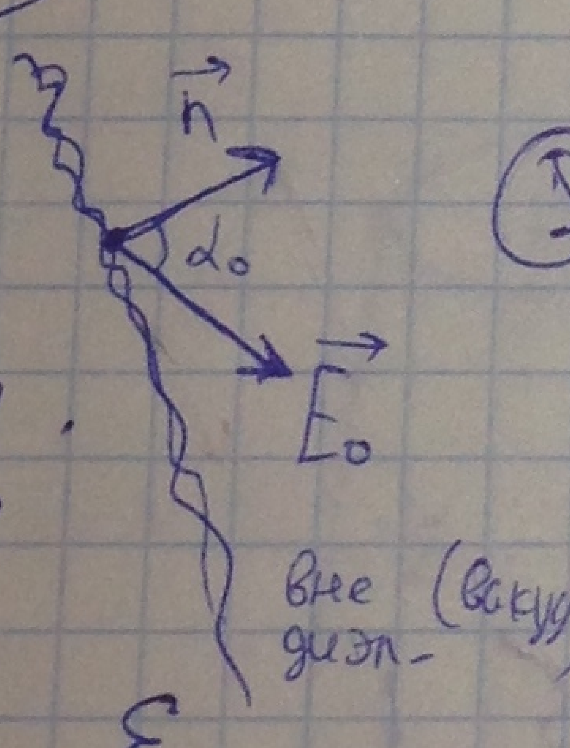
$$\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right)\oint D\,dS = -q'$$

$$\Downarrow$$

$$q' = -q\,\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$$

Д/З

1

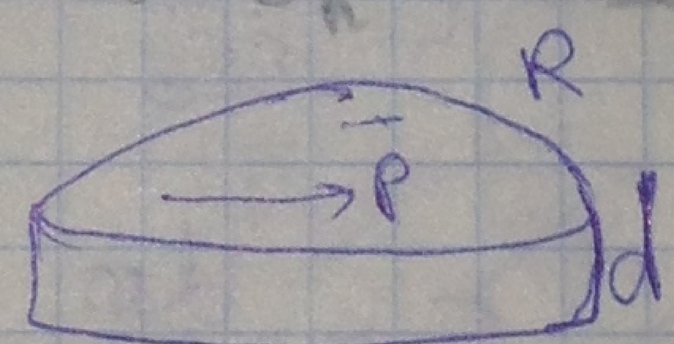


E, –?

α, –?

σ –?

2

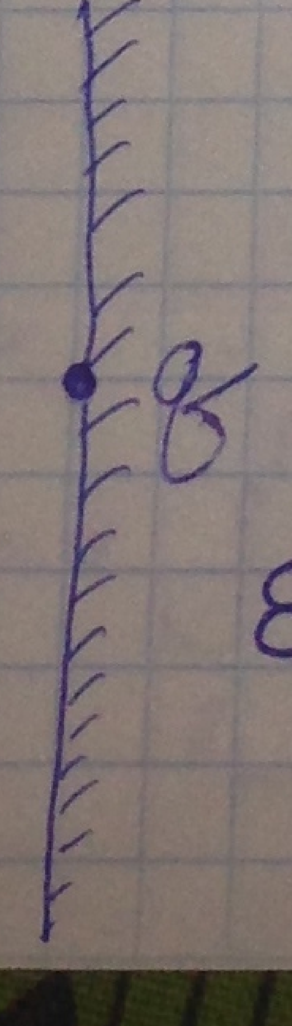


$d \ll R$

$\vec{P} = \mathrm{const}$

$\bar{E}_0$ –? в центре диска

3



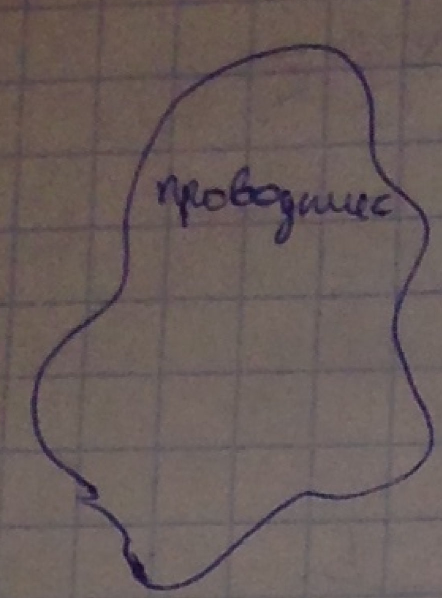
E –?

D –?

φ –?

№7

Семинар

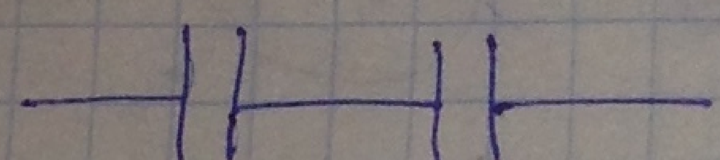


Ёмкость: $C = \frac{q}{\varphi}$ – для проводника

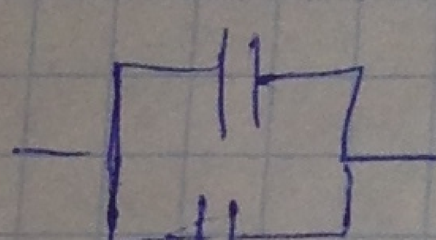
Конденсатор ≈ два изолир. проводника

Для конденсатора:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi}$$

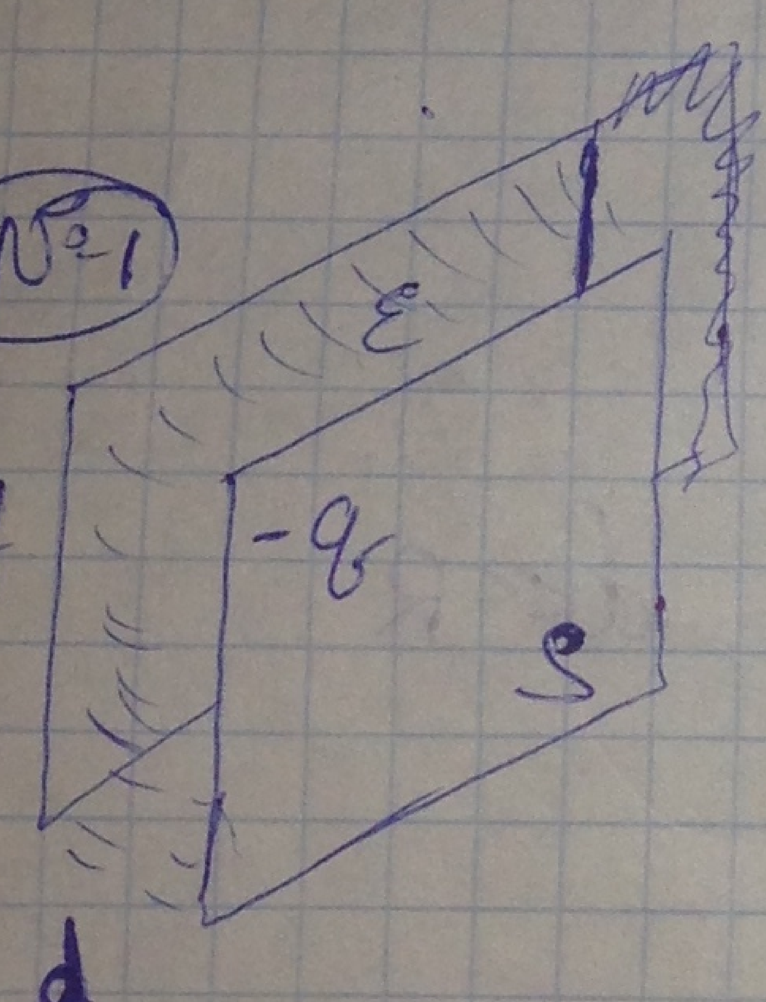
Заряды одинаковые  $\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$

потенциал разный

потенциал одинаковый  $C = \sum_i C_i$

заряды разные

№1



C – ?

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}$$

$$= \Delta\varphi = \int_0^d E\,dx = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} d$$

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$$

№2 Найти ёмкость сферического конденсатора

Вводим сферическую с.к. с центром в центре

во все стороны все одинаково

$\Downarrow$

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}$$

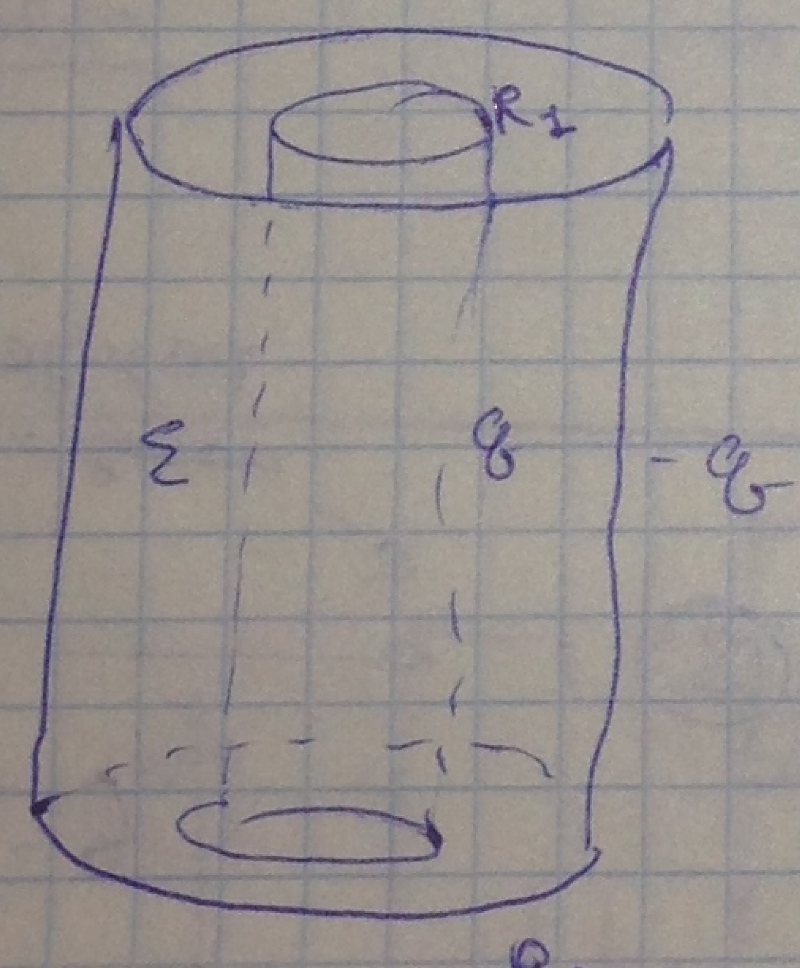
$$E = \frac{kq}{\varepsilon r^2}$$

$$\Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} E\,dr = -\frac{kq}{\varepsilon r}\Big|_{R_1}^{R_2} =$$

$$= \frac{kq\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}{\varepsilon}$$

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon}{k\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

№3 —//— для цилиндрич.



$$\cancel{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

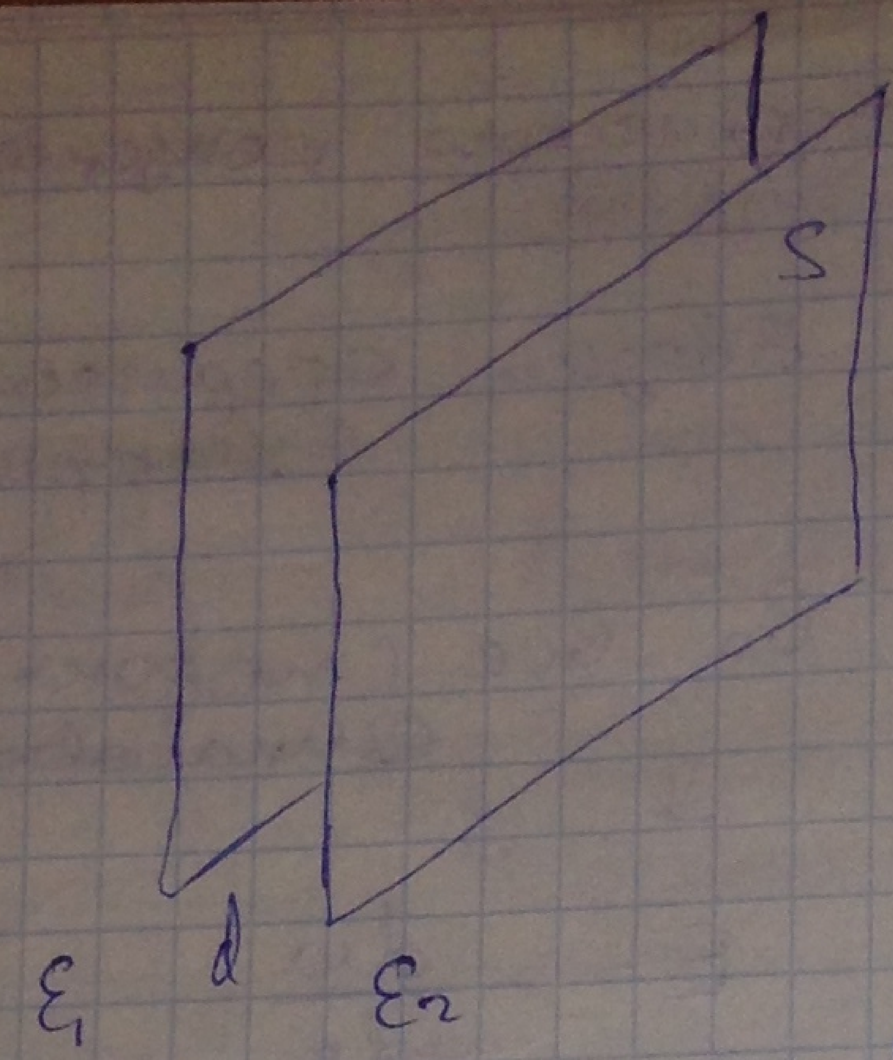
$$\cancel{E = -\frac{d\varphi}{dr}}$$

$$\cancel{\Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} E\,dr = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(R_1 - R_2)}$$

$$E\,2\pi r h = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0} \qquad E = \frac{2kq}{\varepsilon h r}$$

$$\Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} E\,dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2kq}{\varepsilon h r}\,dr = \frac{2kq}{\varepsilon h}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

№ 4



ε меняется от ε_1 до ε_2

$$E(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon(r)}$$

$$\varepsilon(r) = \varepsilon_1 + \frac{r}{d}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = \frac{\varepsilon_1 (d) + r(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{d} =$$

$$\cancel{= \varepsilon_1 d - \varepsilon_1 r + \varepsilon_2 r - \varepsilon_1 r}$$

$$\cancel{= \varepsilon_1 d + r(\varepsilon_2 - 2\varepsilon_1)}$$

$$\int_0^d E dx =$$

$$= \cancel{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \int_0^d \frac{d}{\varepsilon_1(d-r) + r(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)} dr}$$

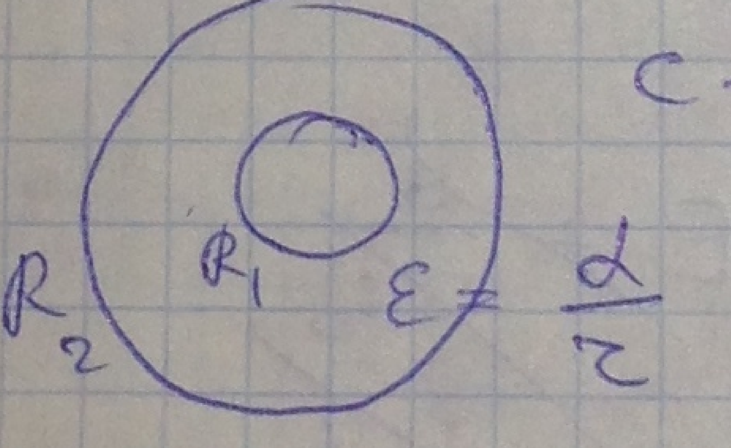
$$\Delta\varphi = \int_0^d \frac{\sigma d}{\varepsilon_0(\varepsilon_1 d + \varepsilon_2 x - \varepsilon_1 x)} = \ln(\ldots$$

$$\Downarrow$$

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi}$$

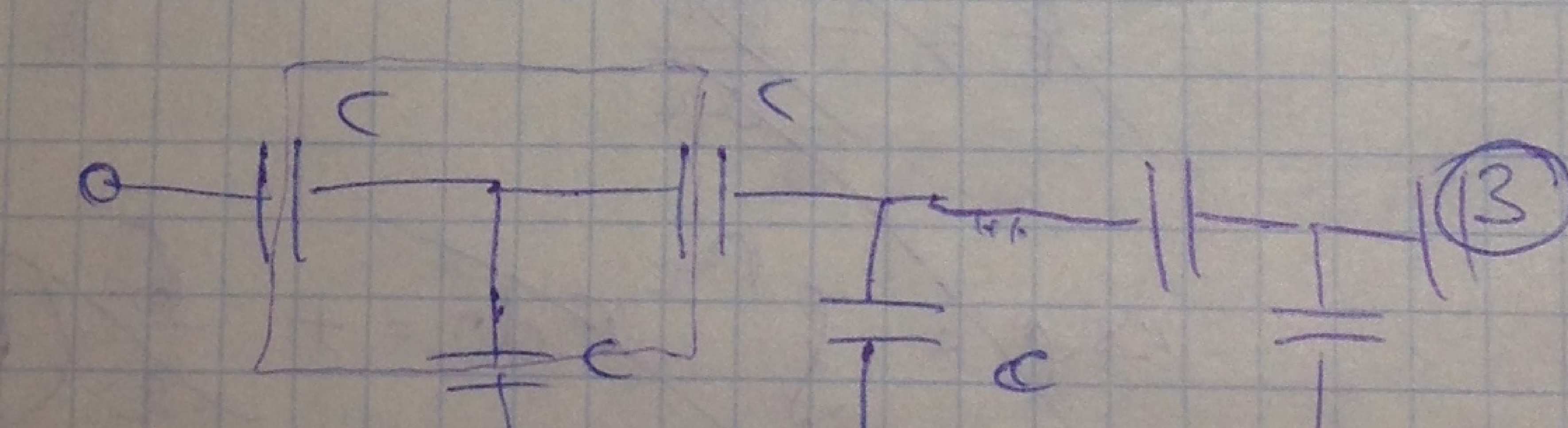
Д/З

1) сф. конденсатор



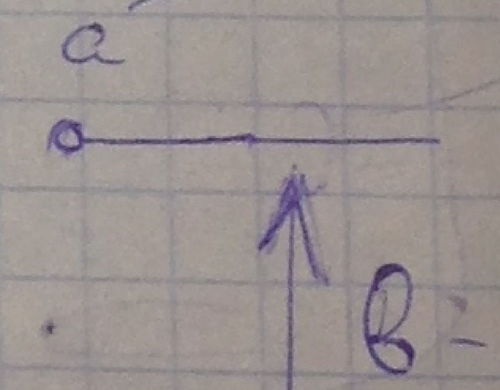
C – ?

2)



$C_{общ}$ – ?

3)



a – радиус ~~толщина~~ провода

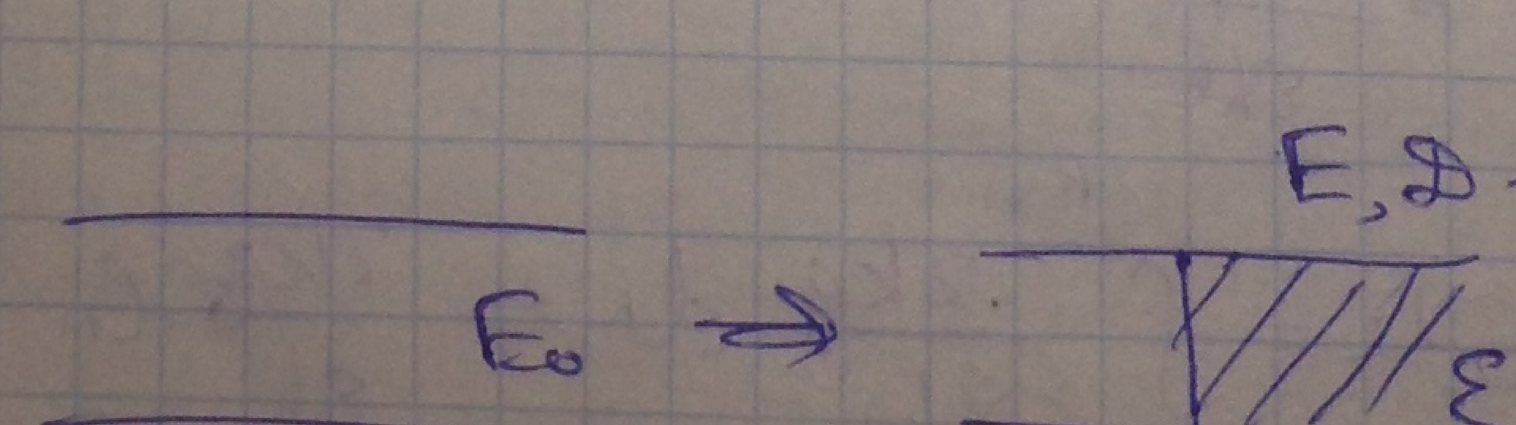
$b \gg a$

b – расст. между осями

C_1 – ?

емкость на единицу длины

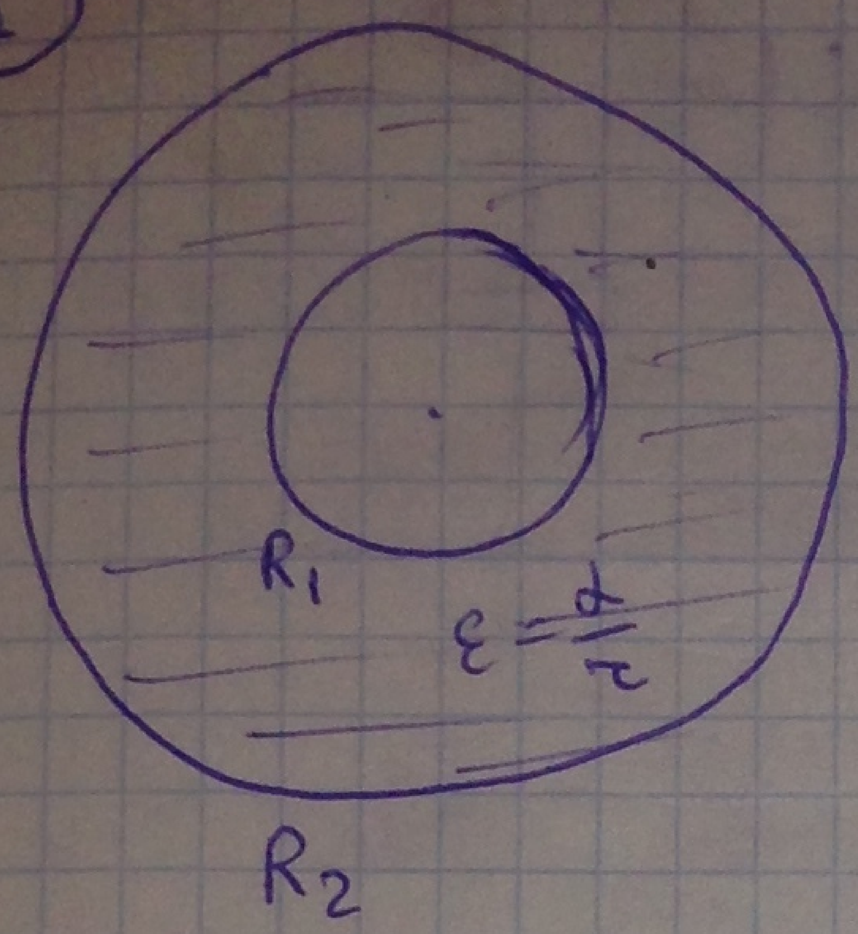
4)



E, D – ?

1) $q = const$ при заполнении
2) $\Delta\varphi = const$ я

①



$C - ?$

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}$$

$$E(r) = \cancel{\frac{kq}{\varepsilon r^2}}\ \frac{kq}{\varepsilon(r)\, r^2}$$

$$\Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} E(r)\,dr =$$

$$= \frac{kq}{\alpha}\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2\cdot\frac{1}{r}}\,dr =$$

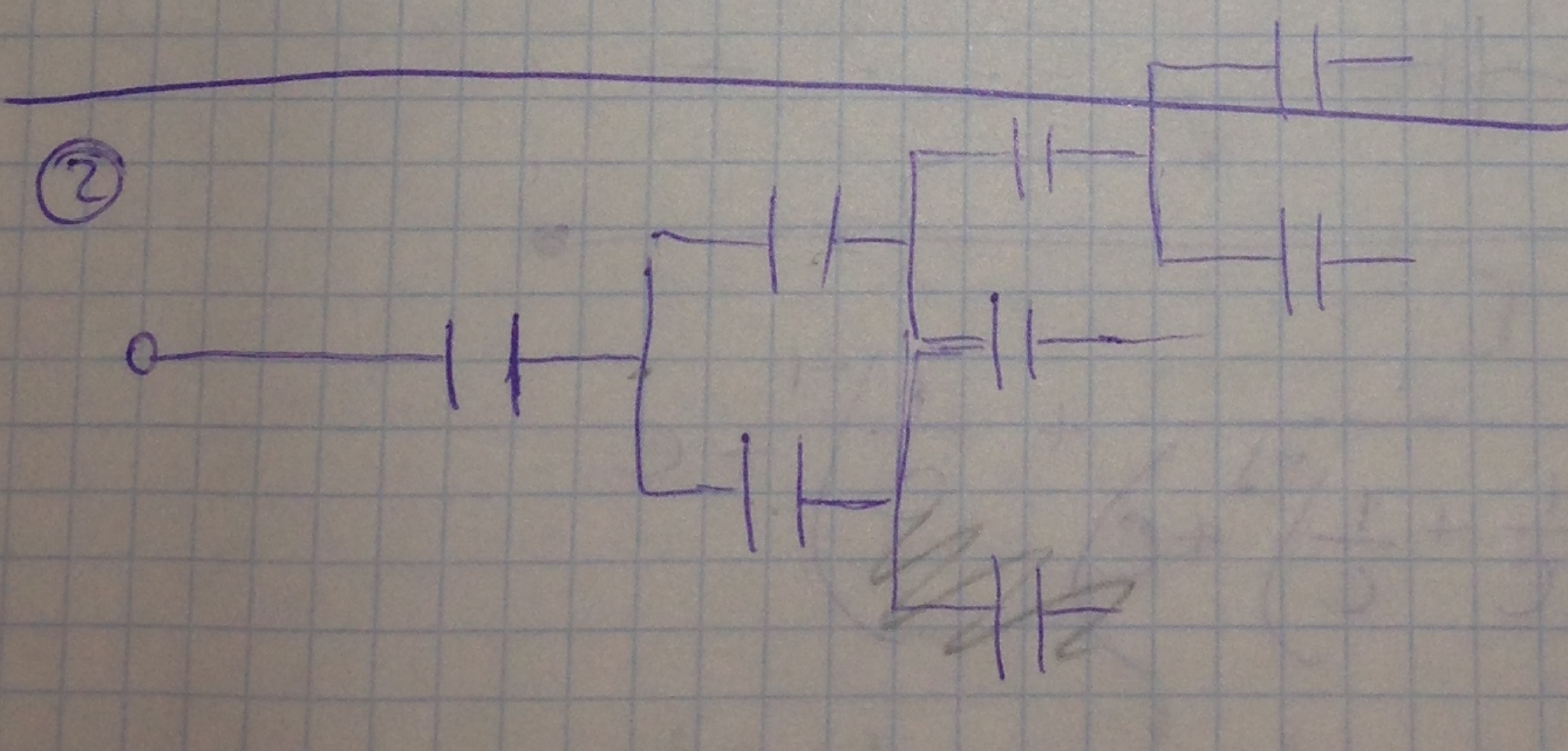
$$= \frac{kq}{\alpha}\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r}\,dr =$$

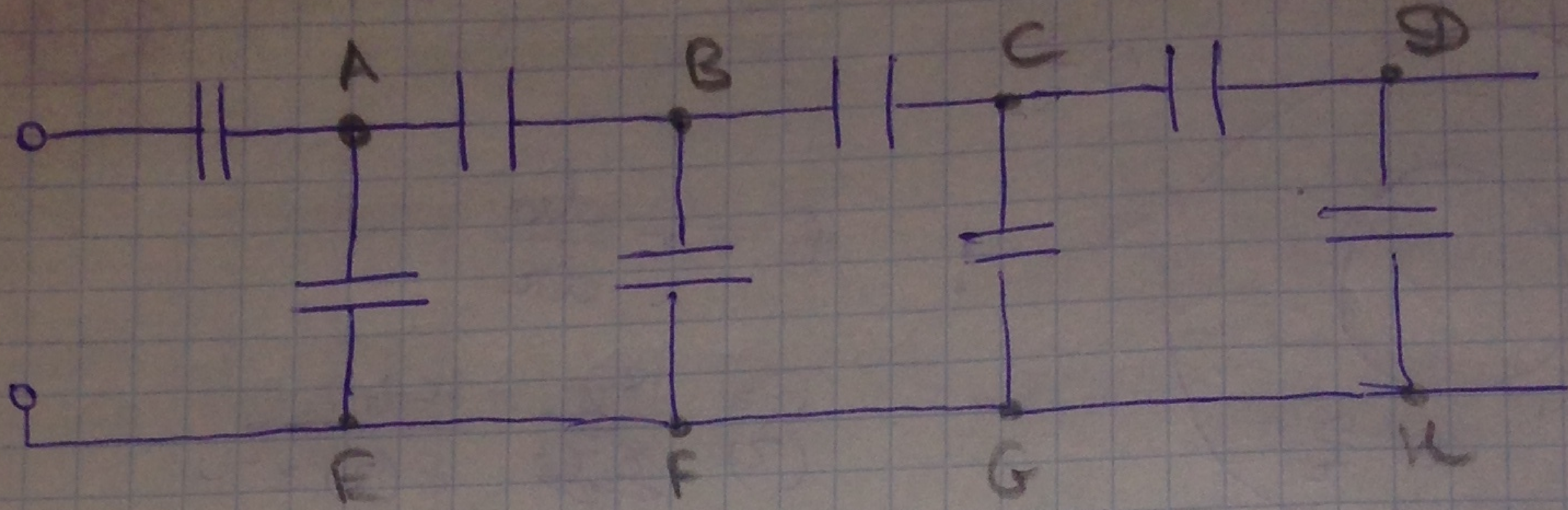
$$= \frac{kq}{\alpha}\cdot \ln r\Big|_{R_1}^{R_2} =$$

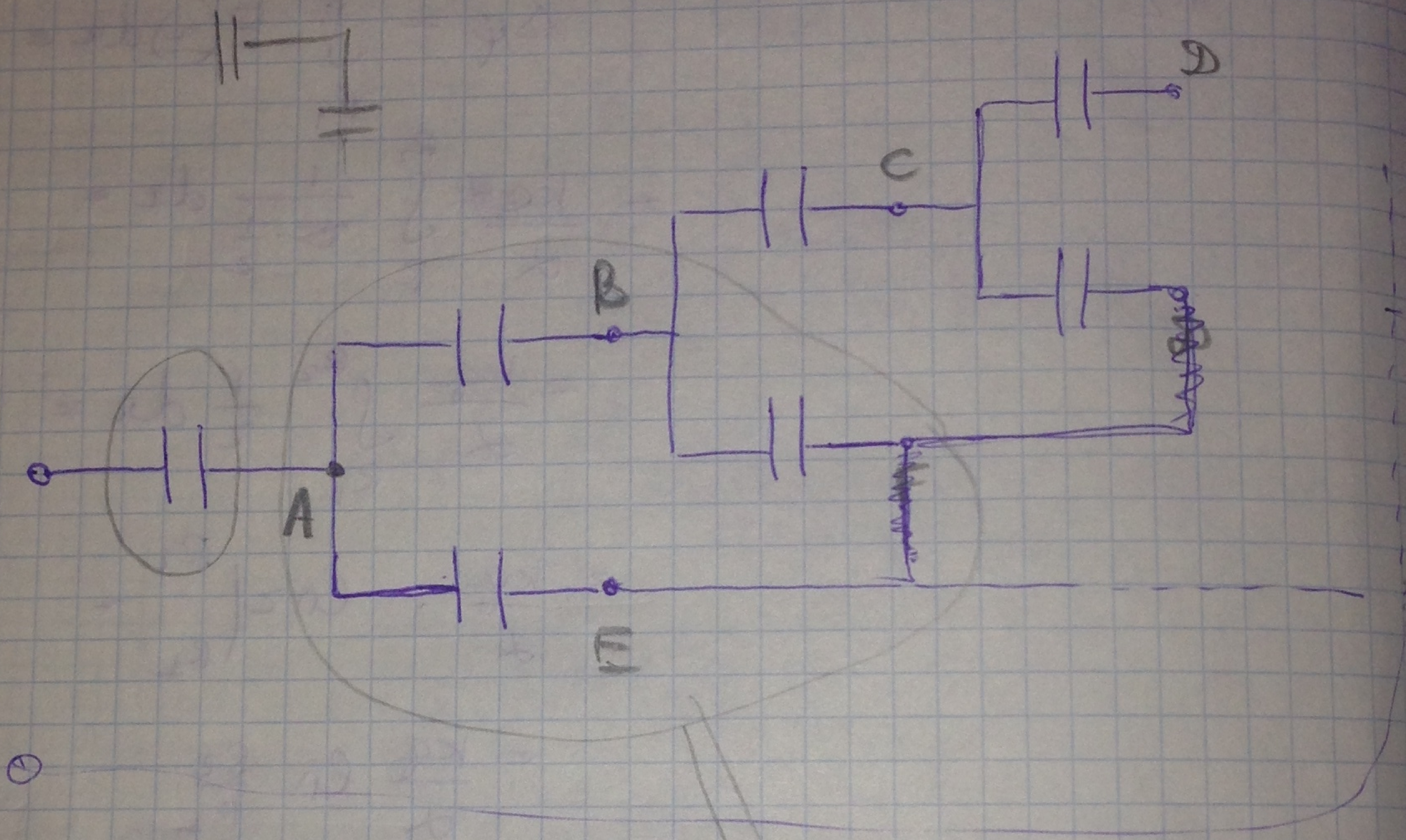
$$= \frac{kq}{\alpha}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

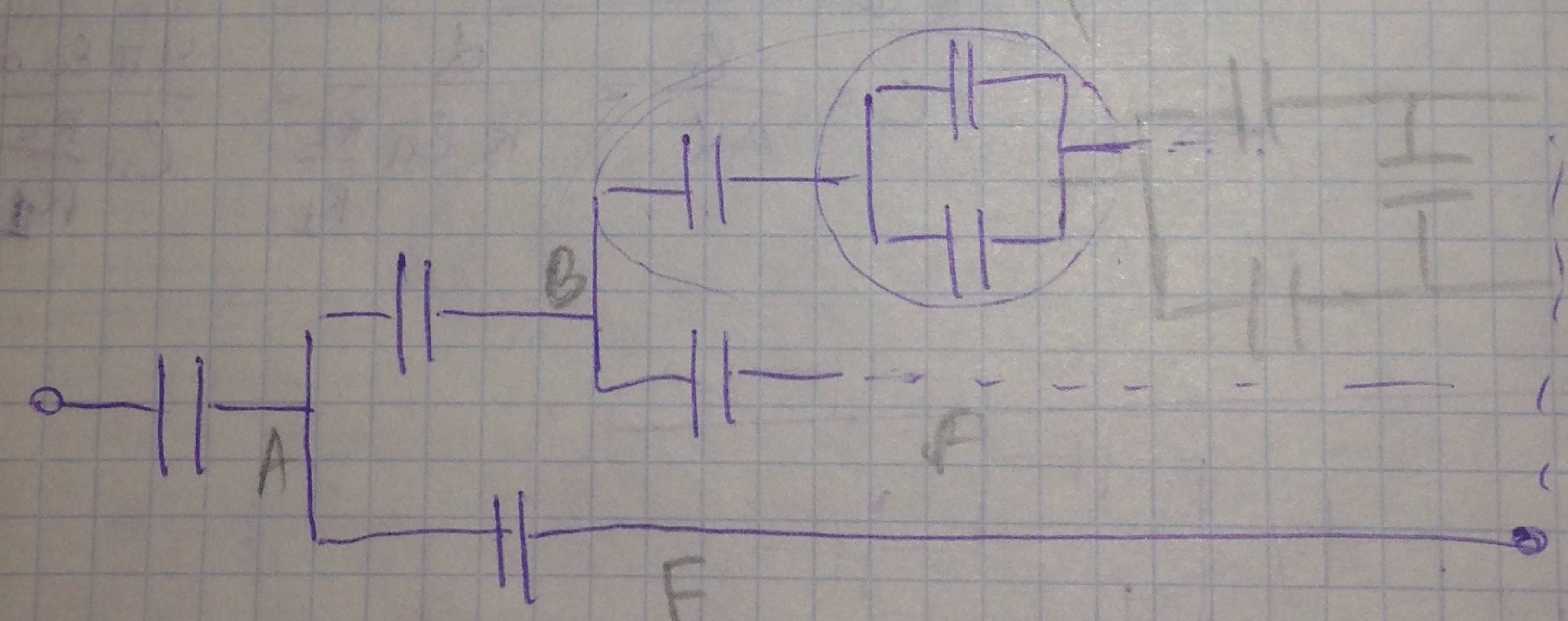
ответ $\rightarrow$ $$\boxed{C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\alpha}{k\ln\frac{R_2}{R_1}} = \frac{4\pi\varepsilon_0\alpha}{\ln\frac{R_2}{R_1}}}$$

②





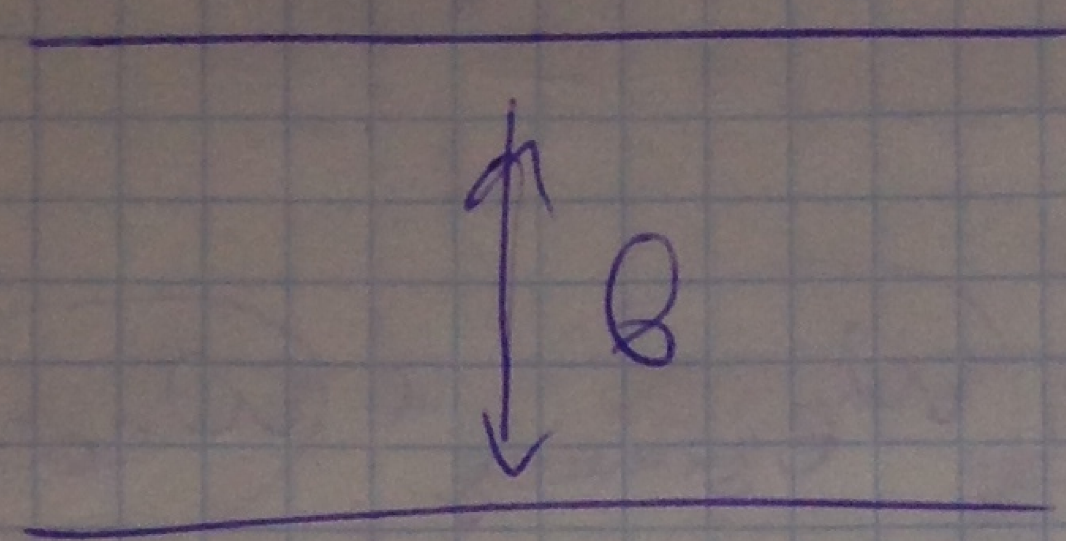




$$\left(\frac{1}{\left(\left(\frac{1}{2C}+\frac{1}{C}\right)^{-1}+C\right)}+\frac{1}{C}\right)^{-1}+C$$

$$x=\left(\frac{1}{(x+C)}+\frac{1}{C}\right)^{-1}$$

③



$$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(2b-r)}$$

$$E = \boxed{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

$$\int_a^{b-a} 2E\,dr = \cancel{2}\int_a^{b-a} \frac{\lambda}{\cancel{2}\pi\varepsilon_0 r}\,dr = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\int_a^{b-a} \frac{1}{r}\,dr =$$

$$= \frac{\overset{\lambda = q/l}{\lambda}}{\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{b-a}{a}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \cancel{\frac{q l}{\pi\varepsilon_0}}$$

$$= \frac{\cancel{q}}{\frac{\cancel{q}/l}{\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\frac{b-a}{a}} = \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{b-a}{a}}$$

$$\boxed{C/l = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b-a}{a}\right)}}$$

Семинар

Энергия

$$W = \frac{1}{2}\sum q_i \varphi_i = W_{\text{взаимод.}} + W_{\text{собств}}$$

φ_i = тот, что создают все кроме i

$\neq i$

$$W = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV$$ ← объемн.

$$W = \frac{1}{2}\int \sigma\varphi\, dS$$ ← поверхн.

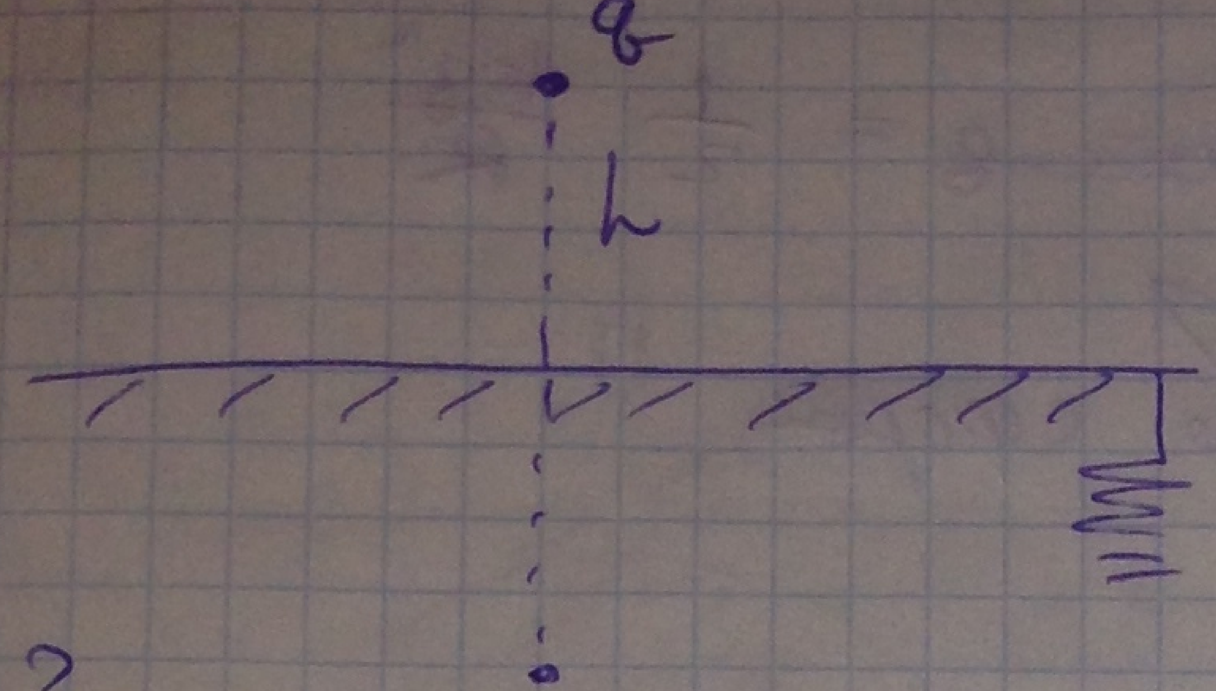
Для конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2}$$

$$\cancel{W}\ w = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$$

↖ объемная плотность энергии

№1



$W_{вз.}$ – ?

$W_{собс.}$ – ?

$$W_{вз.} = \frac{1}{2}\left[q\cdot\left(-\frac{kq}{2h}\right) + \int \sigma \varphi_q \, ds\right]$$

$ds = 2\pi r\,dr$

// из пред. сем.

$$\sigma = -\frac{qh}{2\pi(r^2+h^2)^{3/2}}$$

$$-\frac{kq^2}{2\pi} h \int_0^\infty \frac{2\pi r\,dr}{(r^2+h^2)^{2}} = -\frac{kq^2}{2h}$$

$\Downarrow$

$$W_{вз.} = -\frac{kq^2}{2h}$$

$$W = \underbrace{W_q}_{\frac{kq^2}{2}} + W_{собс.} + W_{вз.} = \frac{1}{2}\left[q\left(\frac{kq}{2} - \frac{kq}{h}\right)\right]$$

$\Downarrow$

$$W_{собс.} = \frac{kq^2}{4h}$$

№2

R

$$w_{собств} = \frac{1}{2}\frac{kq^2}{R}$$

↑

для сферы

Для шара — ?

$$W = \frac{1}{2}\int \frac{q}{V}\varphi\, dV = \frac{1}{2}\int \frac{q}{V}\frac{kq}{r}\, dV$$

$$W = W_q + 2w_{собс}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{kq^2}{r}$$

$$E_{внутр} = \frac{kqr}{R^3}$$

$$E_{внеш} = \frac{kq}{r^2}$$

$$W = \int \frac{(\bar{E}, \bar{D})}{2}\, dV$$

$$(\bar{E}, \bar{D}) = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$$

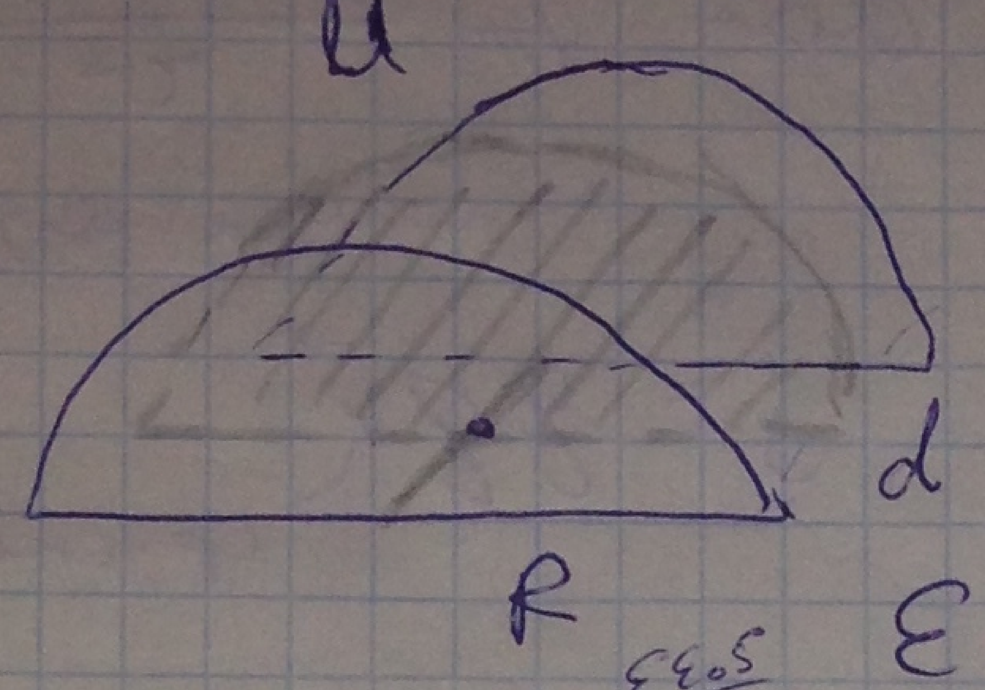
$$W = \int \frac{(\bar{E}, \bar{D})}{2}\, dV = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_0}{2} E^2\, dV =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 k^2 q^2}{2}\left(\int_0^R \frac{r^2}{R^6}\cdot 4\pi r^2\, dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{r^4}\cdot 4\pi r^2\, dr\right) = \frac{3}{5}\frac{kq^2}{R}$$

№3

$M - ?$

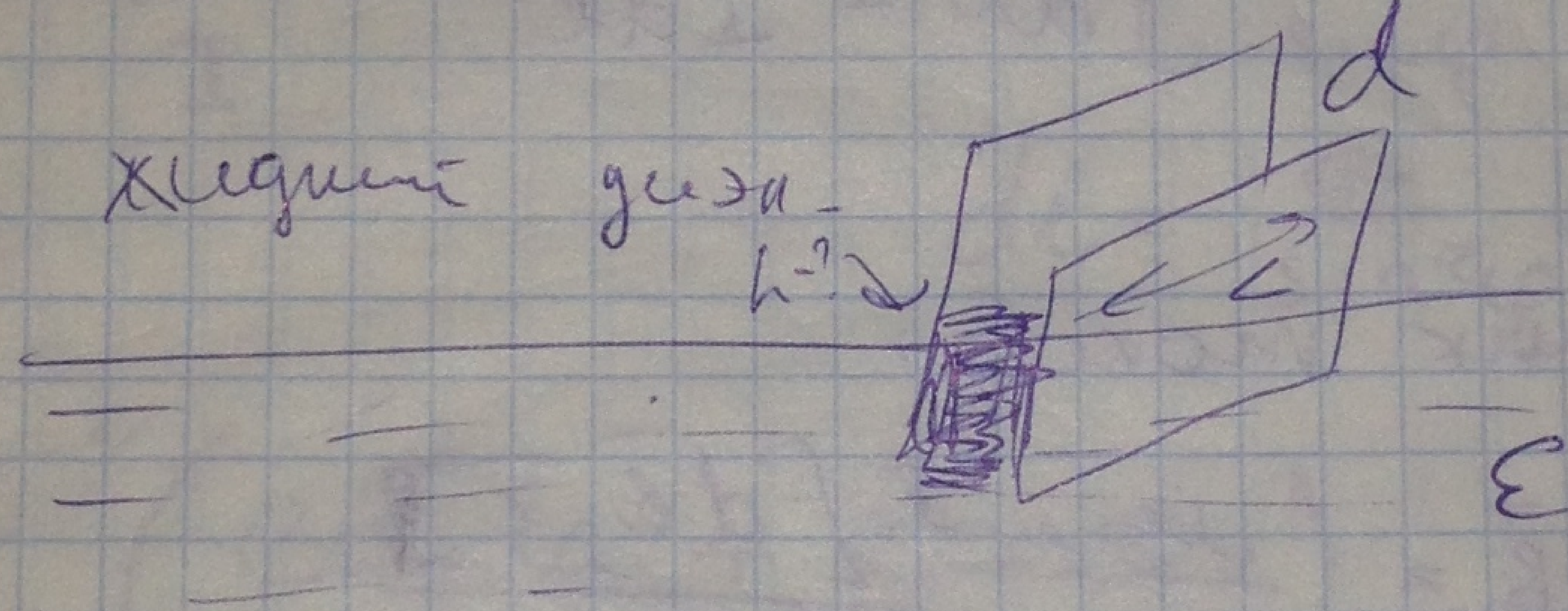
момент сил отн. оси



$W = \frac{CU^2}{2}$

$\frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}$

$E =$

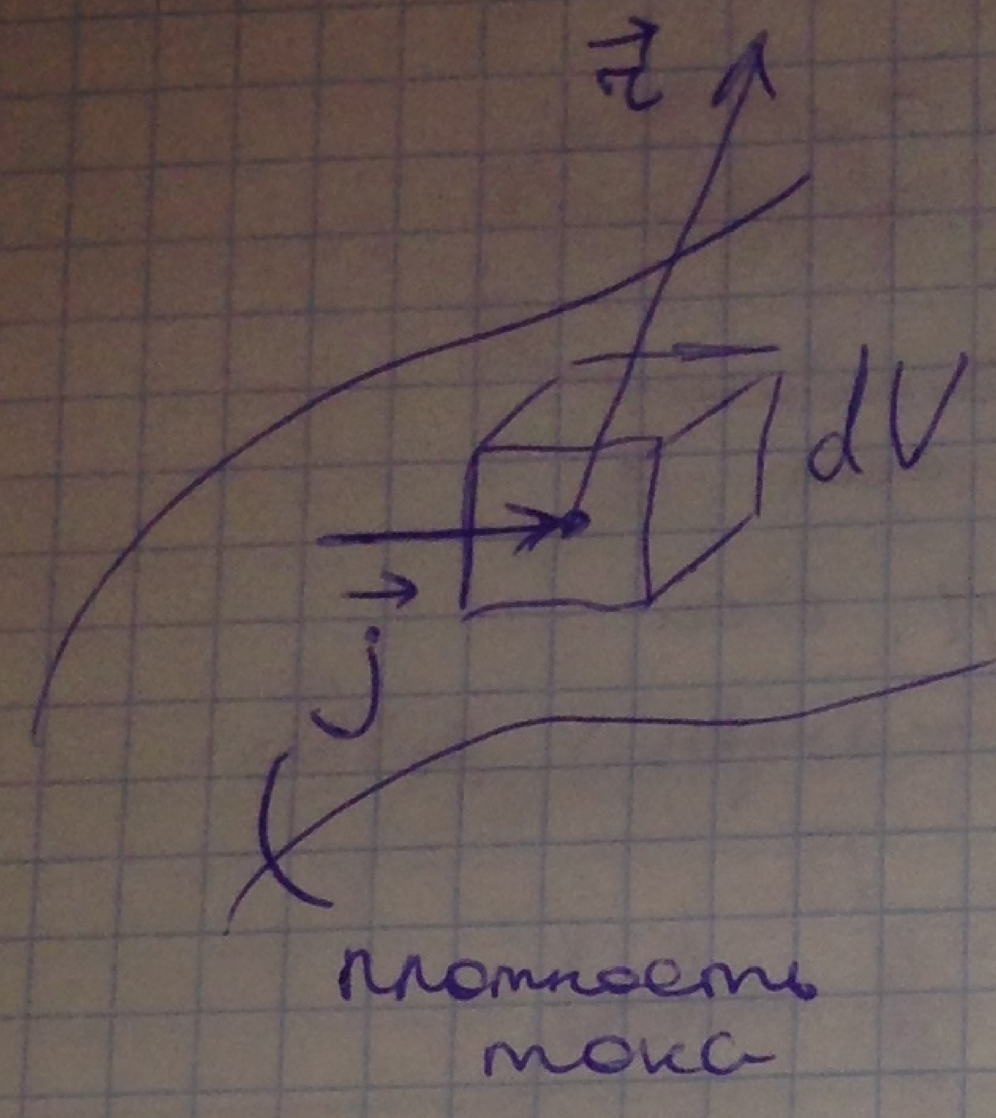


$h - ?$

ρ ← массовая плотность диэл

28.03.14

Семинар



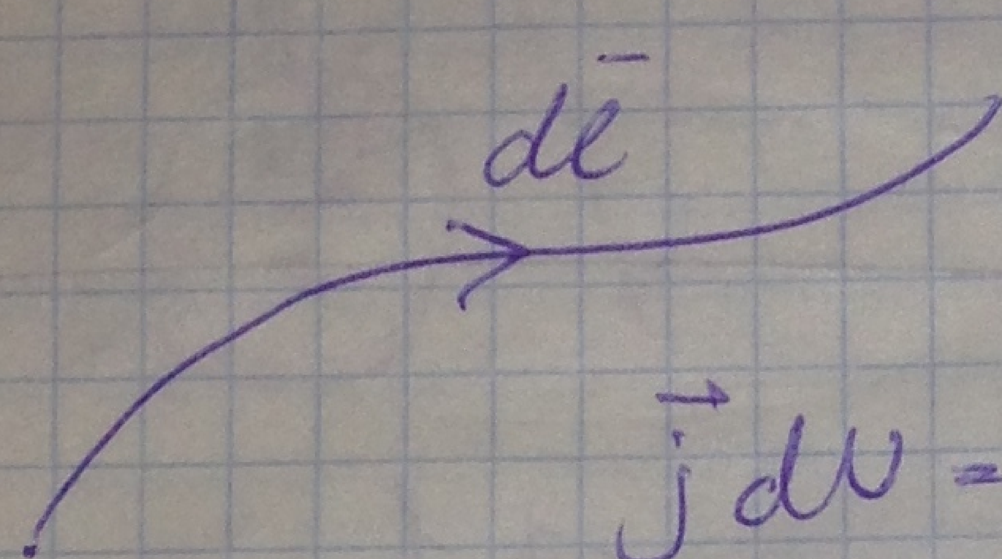
$$d\bar B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\vec j, \vec r]}{r^3}\, dV$$

концентрация

$$j = q n \vec v$$

ср. скор.

$$I = \int \vec j\, d\bar S$$



$$\vec j\, dV = I\, d\bar l$$

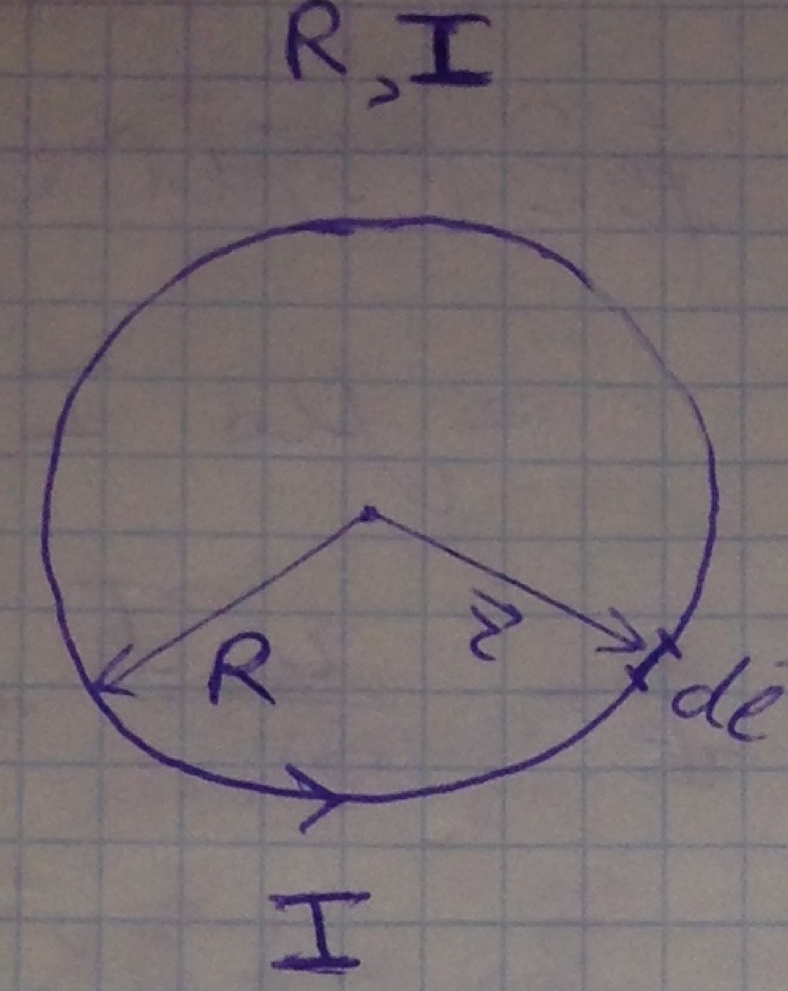
для линейных токов:

$$d\bar B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\bar l, \bar r]}{r^3}$$

$$\oint_S = \bar B\, d\bar S = 0$$

$$\oint_L \bar B\, d\bar l = \cancel{\mu_0 I} \quad \mu_0 I$$

№1

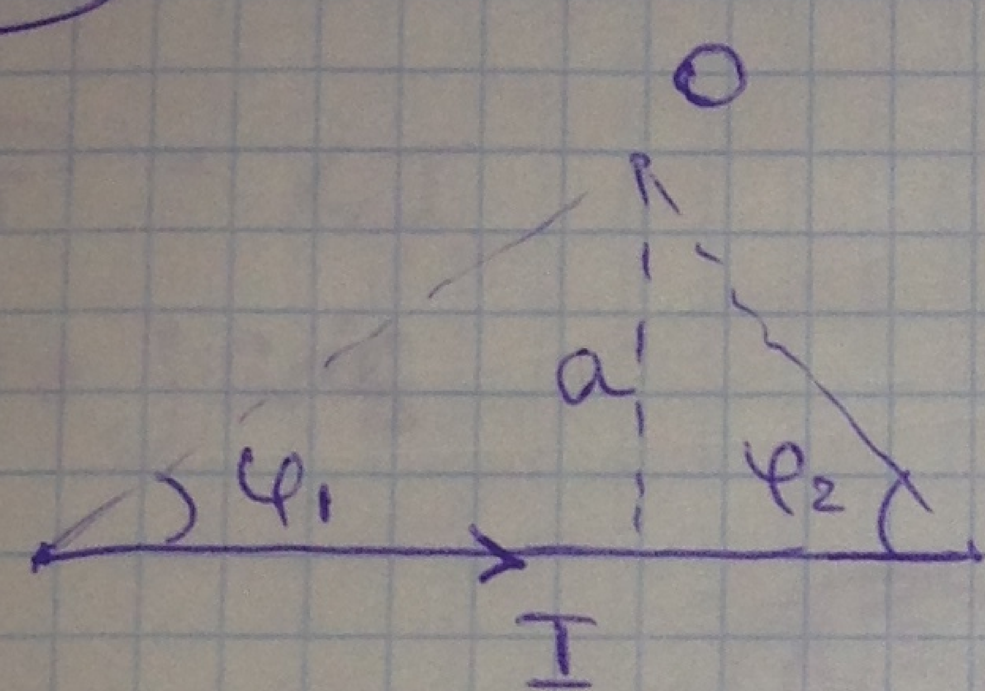


$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \cdot \cancel{R}}{R^{\cancel{3}2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2R}$$

в центре окружности

№2



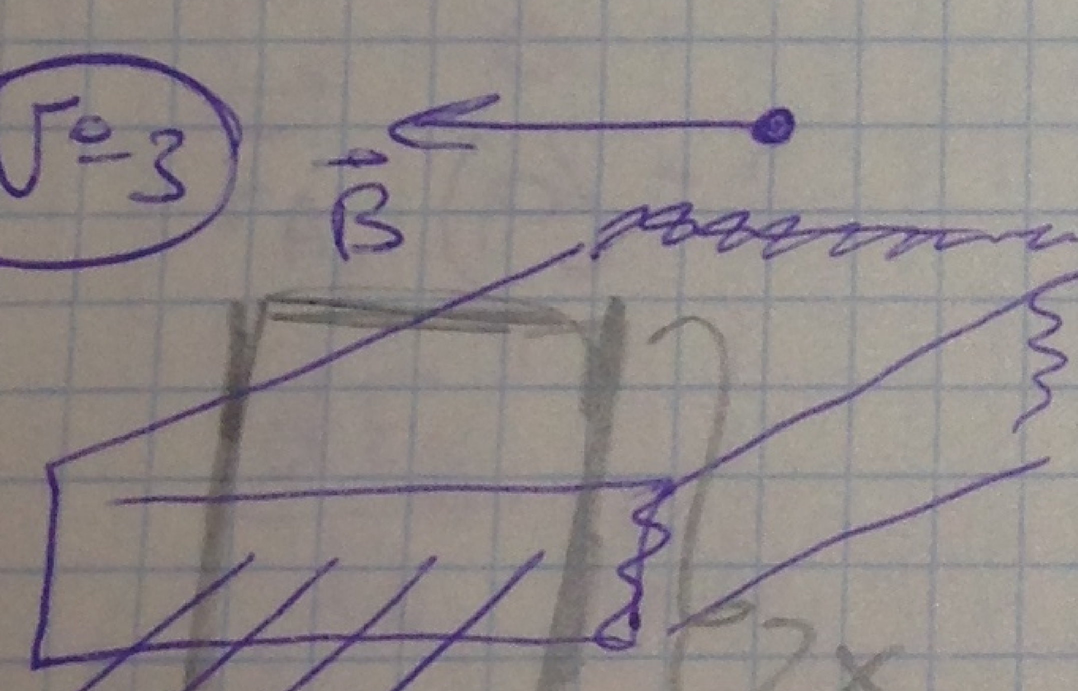
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \cdot r \cdot \sin\varphi}{r^{\cancel{3}2}} =$$

$$r = \frac{a}{\sin\varphi}$$

$$dl = \frac{a}{\sin^2\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) \qquad \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

№3



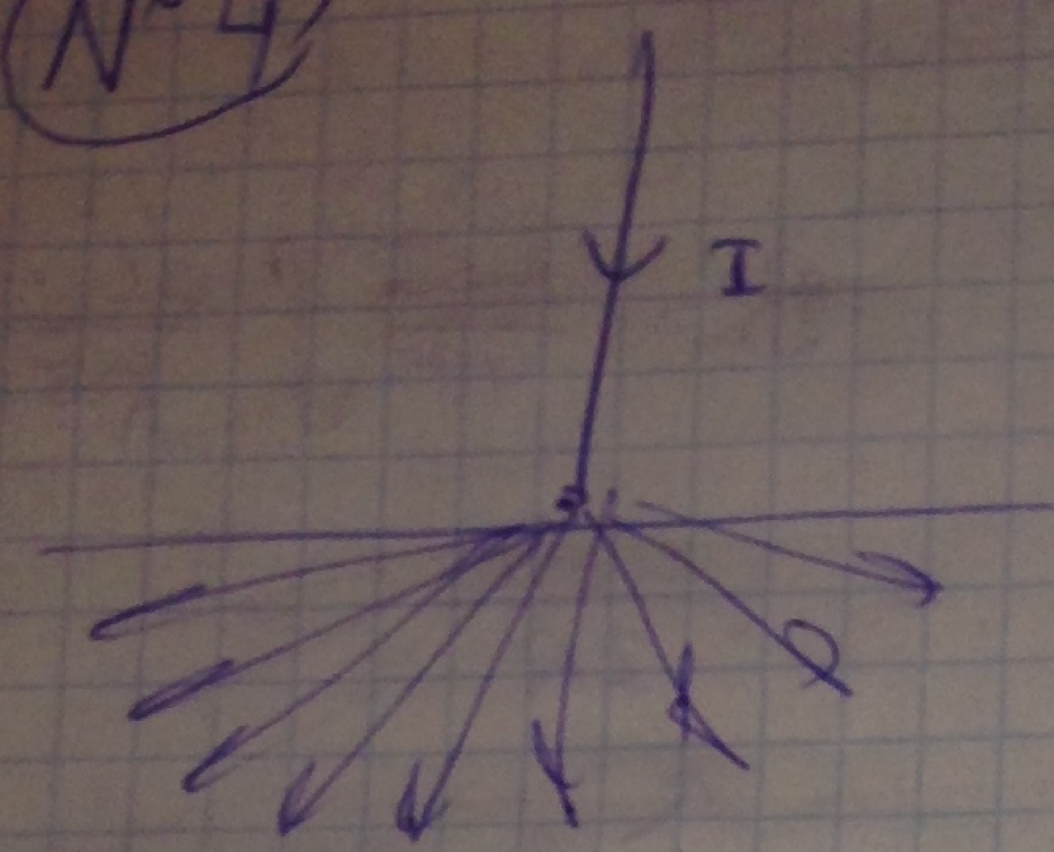
B_0 - ?

$$2B\bar{l} = \mu_0 j \cdot 2d \cdot l$$

$$B = \begin{cases} \mu_0 j d \\ \mu_0 j x, \; x \le d \end{cases}$$

введем прямоуг

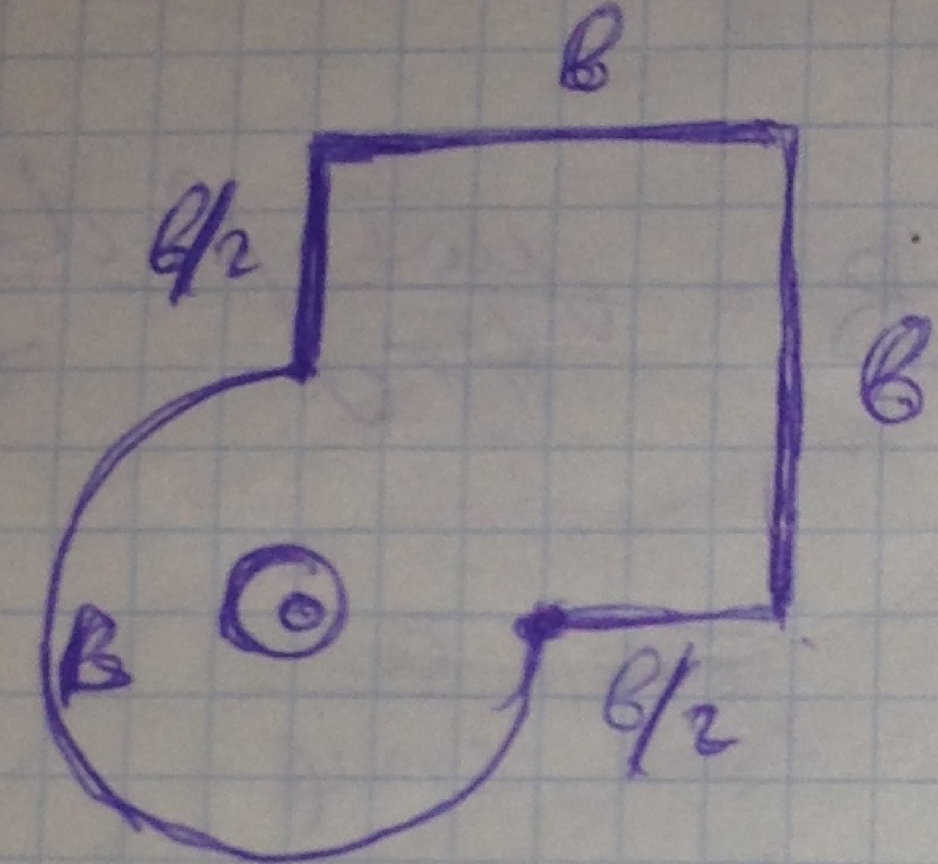
№4



$$B\,2\pi r \sin\theta =$$

$$= \mu_0 \cdot I \,\frac{2\pi r^2}{2\pi r^2}\,(1-\cos\theta)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}$$



$$\int_{b/2}^{b} dl + \int_{b}^{b\sqrt{2}} dl + \int_{b\sqrt{2}}^{b} dl + \int_{b}^{b/2} dl$$

$$2\int_{b/2}^{b\sqrt{2}} dl$$

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\int_C \frac{dl\cdot R}{R^3} + 2\int_{b/2}^{b\sqrt{2}} dl\right.$$

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} \frac{dl \cdot R}{R^3}$$

$$\frac{\mu_0 I N}{R_1 + R_2}$$

Семинар 11.04.14

$$\bar{F}_Л = q\left[\vec{v} \times \vec{B}\right] + q\vec{E}$$

$$d\bar{F}_A = \left[\vec{j} \times \vec{B}\right] dV$$ // линейный случай

$$d\bar{F}_A = I\left[d\bar{l}_2 \times \bar{B}\right]$$

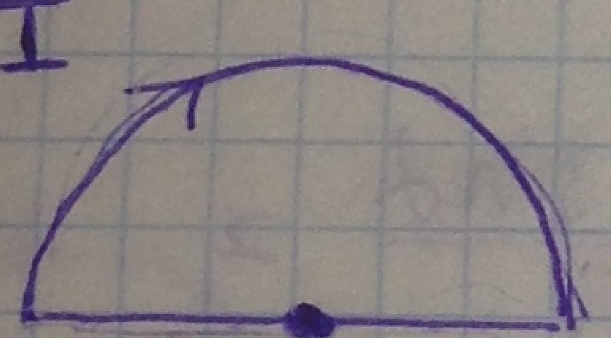
$$\Phi = LI$$

$$\Phi = \int B\,dS$$

$$F_A = IBl$$

№ 1

I



O

$\vec{F}_{A_l}(O)$ – ?

$$\frac{dF_A}{dl}(O)$$ ''

$$B_1 = \cancel{\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int} \boxed{\frac{\mu_0 I}{4R}}$$ – от полукольца

$$\cancel{B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}}$$

$$dF_A = IB\,dl$$

$\Downarrow$

Ответ:

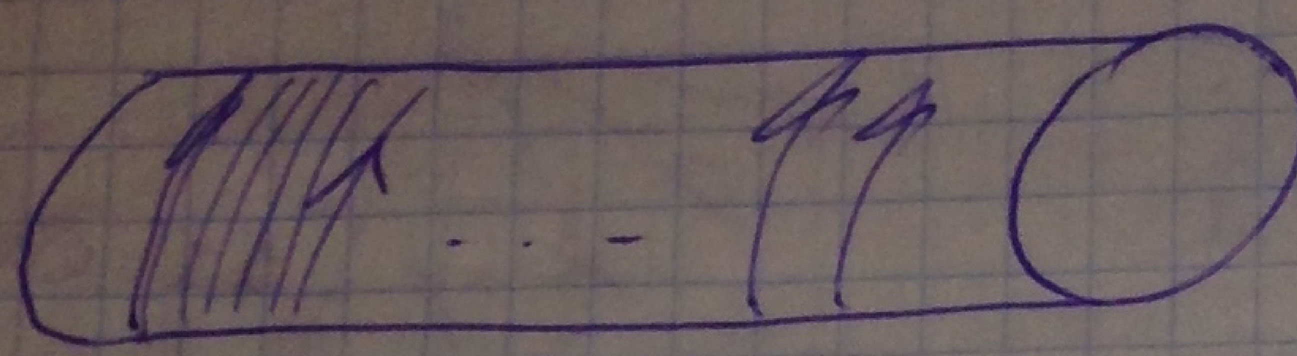
$$\frac{\mu_0 I^2}{4R}$$

витков на единицу длин

№2

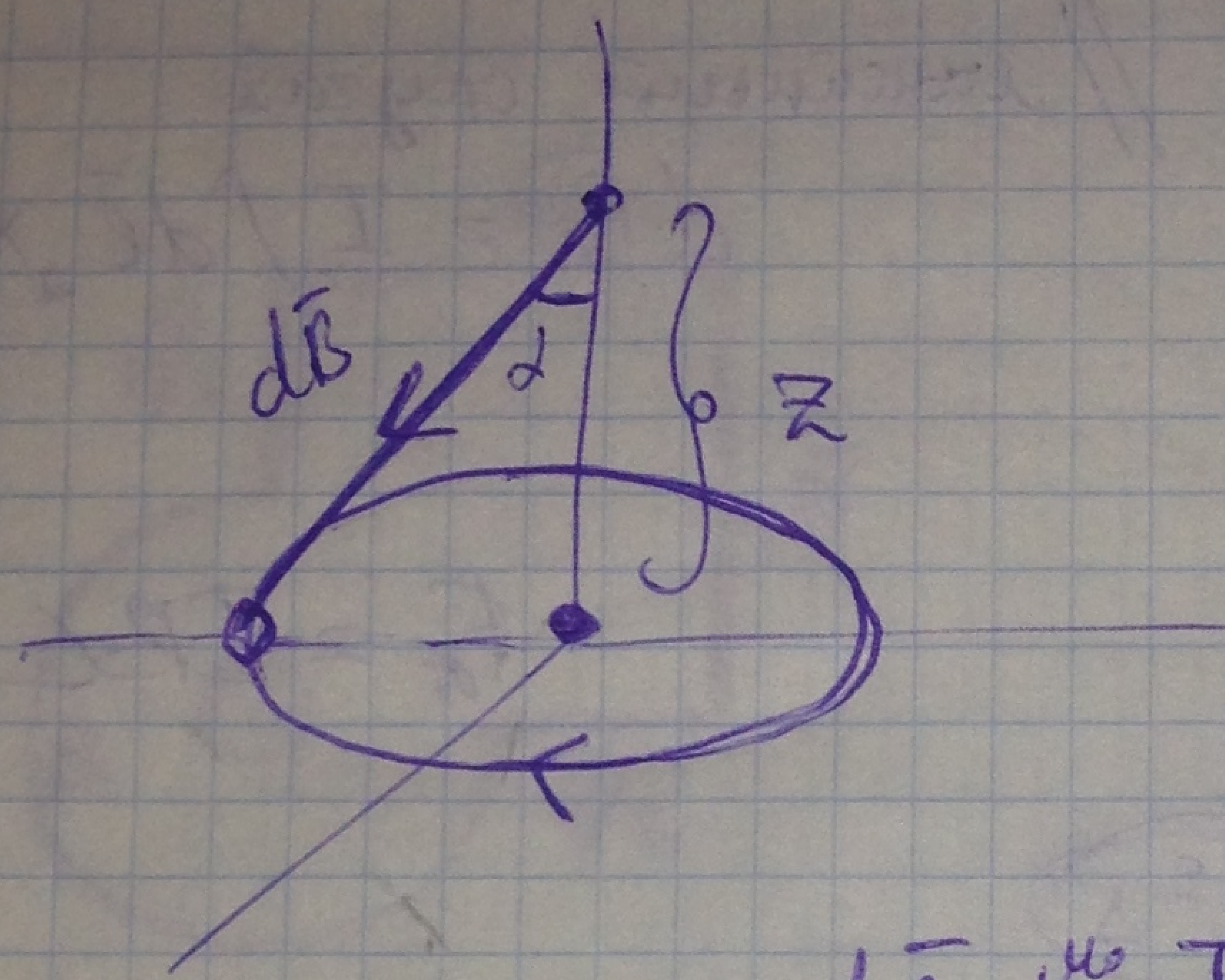
Дано: I, R, n, L

$\bar{B}_0$ - ?



$dL = \frac{L}{n}$

$n = d\frac{L}{N}$



$r^2 = \sqrt{R^2 + z^2}$

$\sin\alpha = \frac{R}{r}$

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\bar{l}, \bar{r}]}{r^3} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{dl \cdot r \cdot \sin\alpha}{r^{\cancel{3}2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{dl \sin\alpha}{r^2} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{dl \cdot R}{r^3} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} dl$$

$(\cdot 2\pi R)$

$$\frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_0^{2\pi R}$$

$$= \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

B от кольца на высоте z

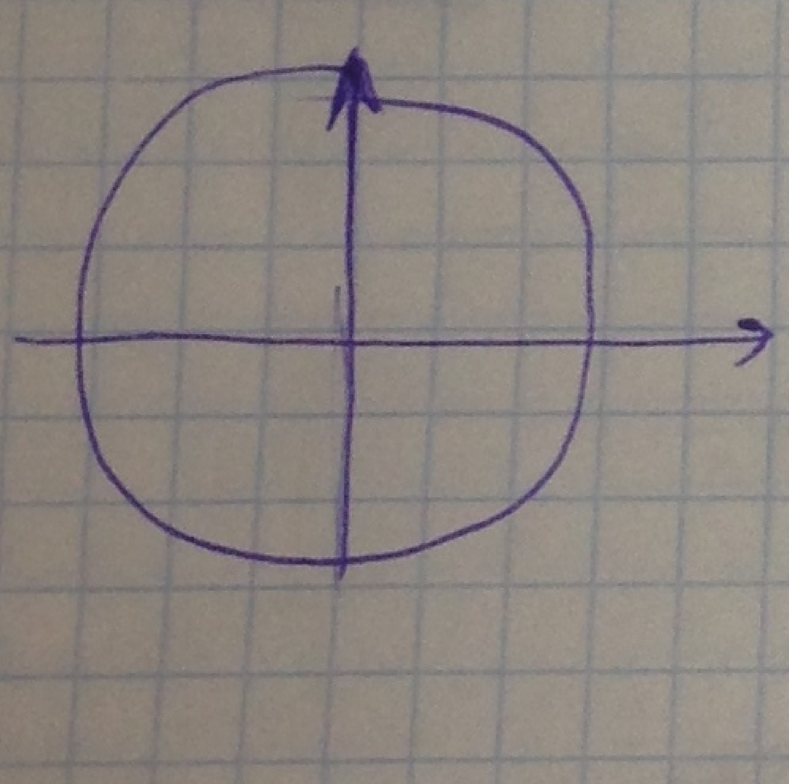
$$\frac{\mu_0 I R^2}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dz}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \left\{\begin{array}{l}\cancel{u = R^2+z^2}\\ \cancel{du = 2z\,dz}\end{array}\right. \cancel{\Rightarrow dz = \frac{du}{2z}}$$

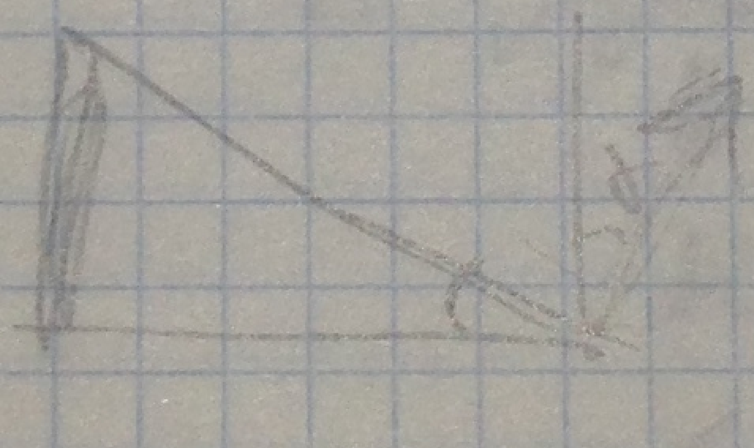
$$L = dl\cdot N;\quad N = \frac{L}{r}$$

$$\cancel{L = \frac{dl\cdot L}{r}}$$

$$= \frac{\mu_0 I R^2}{2}\cdot\frac{z}{R^2\sqrt{R^2+z^2}}\Bigg|_{-L/2}^{L/2} =$$

$$= \frac{\mu_0 I R^2}{2}\,\frac{L}{R^2\sqrt{R^2+L^2}} = \cancel{\boxed{\frac{\mu_0 I L}{2\sqrt{R^2+L^2}}}}$$





№3

$L - ?$ B по сечению не изм (в любой т-ке $B = \frac{\mu_0 I\cdot n\cdot L}{\sqrt{4R^2+L^2}}$)

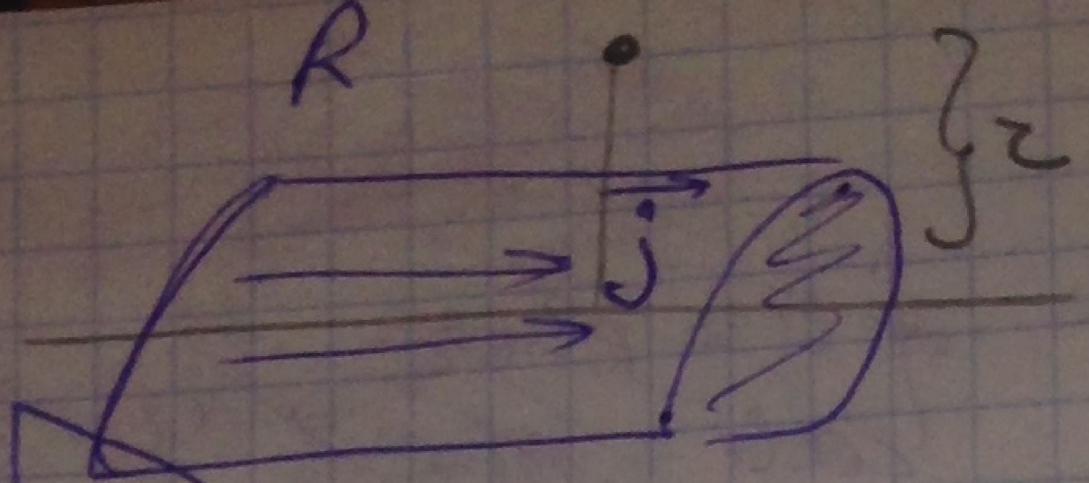
$$\Phi = LI = \oint B\,dS$$

$$\cancel{\frac{\mu_0 I n L}{\sqrt{4R^2+L^2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r\,dr\,d\varphi} \qquad \cancel{\mu_0 I n\cdot\int_0^{R}\pi R^2}$$

$$\cancel{\boxed{L = \mu_0 n \pi R^2}}$$

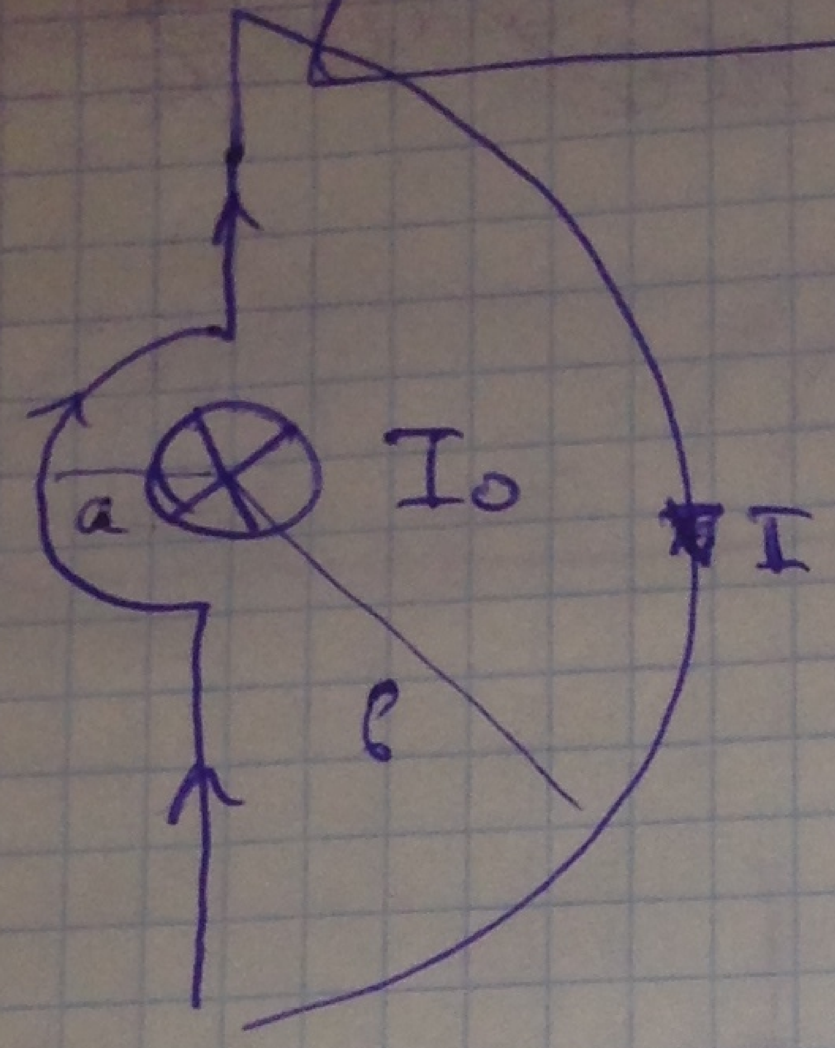
Д/З

1



$B(r)$ – ?

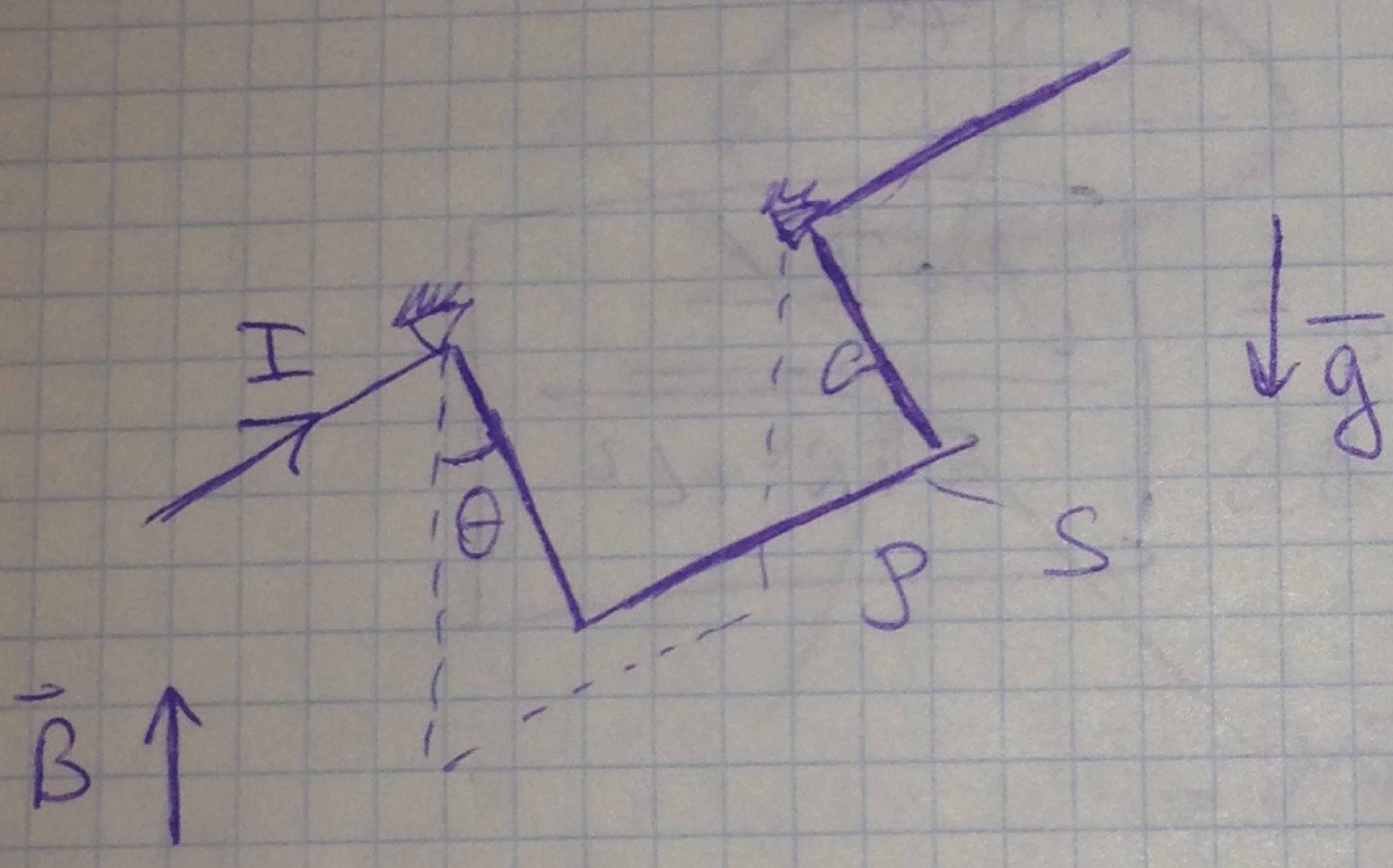
2



M_A – ?

момент сил ампера

3



B – ?

Магнитное поле в веществе

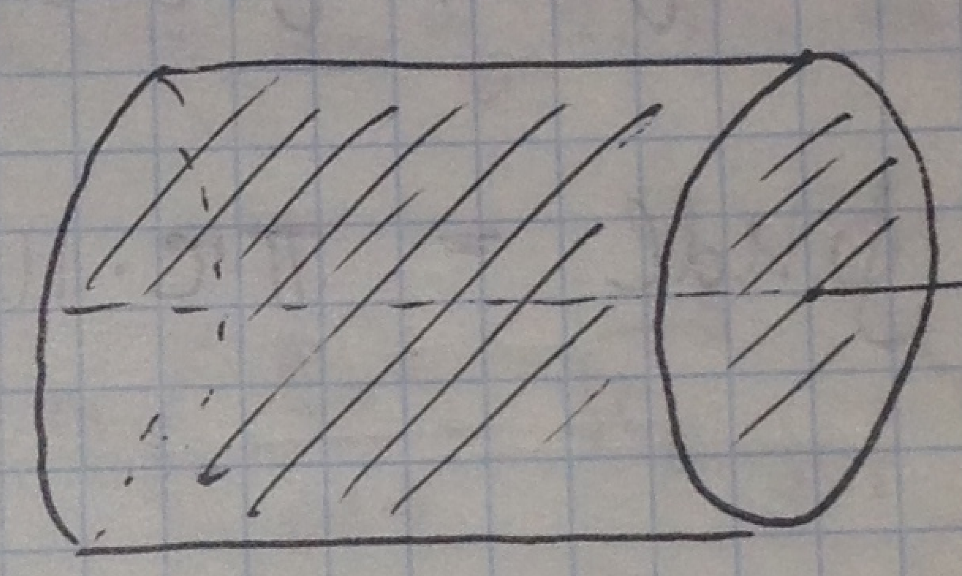
№1

Дано: $\chi = \alpha r^2$; B_0

Найти: а) $J(r)$

б) $j'(r)$

в) $B(r)$



Решение: На оси: $\chi(0)=0$; $\mu=1=\chi+1$

$$\vec{B}=\mu\mu_0\vec{H}$$

$$\Downarrow$$

$$H=\frac{B_0}{\mu_0} \text{ - на оси}$$

(и, почему-то, везде)

сила молекулярного тока

а) $\vec{J}=\chi\vec{H} \Rightarrow J(r)=\boxed{\dfrac{\alpha r^2\cdot B_0}{\mu_0}}$

б) $I'=\oint J dl = \int\limits_0^{2\pi r} \frac{\alpha r^2 B_0}{\mu_0} \cancel{dl} = \frac{2\alpha r^3 B_0 \pi}{\mu_0}$

$j'=\frac{I'}{S}=\boxed{\dfrac{2\alpha r B_0}{\mu_0}}$

$S = \pi r^2$

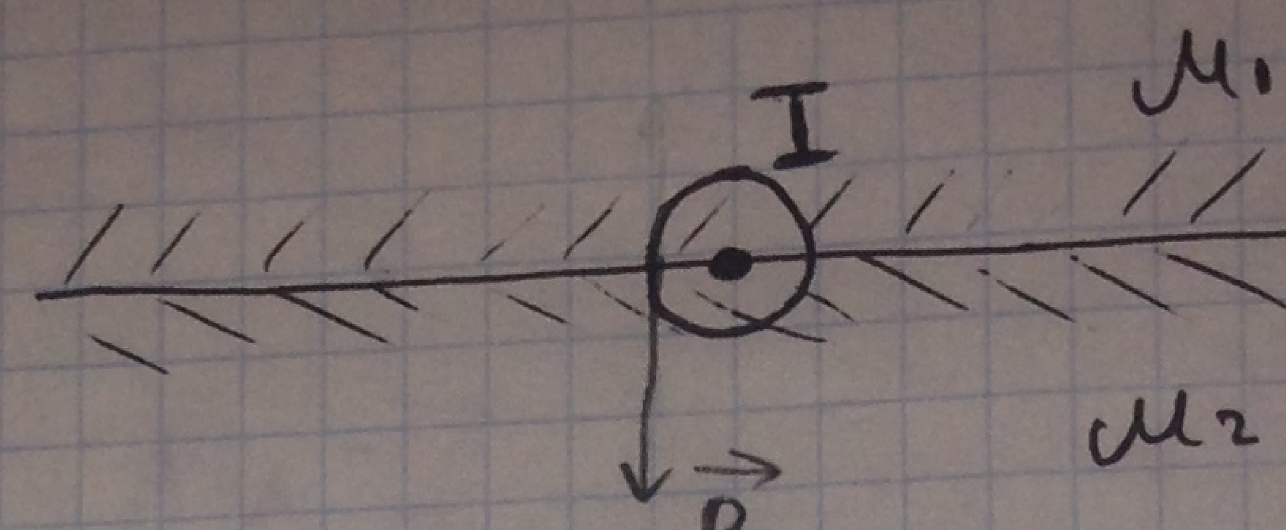
в) $B^{(r)}=\mu\mu_0 H=(\chi+1)\mu_0 H=$

$=(\alpha r^2+1)\frac{B_0}{\mu_0}\cdot\mu_0=\boxed{B_0(1+\alpha r^2)}$

№2

Дано: I, μ_1, μ_2

Найти: $|\vec{B}|$ -?



Решение:

$$B_{1n} = B_{2n} = B \text{ (на границе)}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu_1 \mu_0 H_1 = \mu_2 \mu_0 H_2 = B$$

$$\Downarrow$$

$$\mu_1 H_1 = \mu_2 H_2 \text{ (на границе)} \Rightarrow H_1 = \frac{\mu_2 H_2}{\mu_1}$$

$$I = \oint H dl = \pi r \cdot H_1 + \pi r \cdot H_2 = \pi r (H_1 + H_2)$$

$$\Downarrow$$

$$I = \pi r \left(\frac{\mu_2 H_2}{\mu_1} + \frac{\mu_1 H_2}{\mu_1} \right)$$

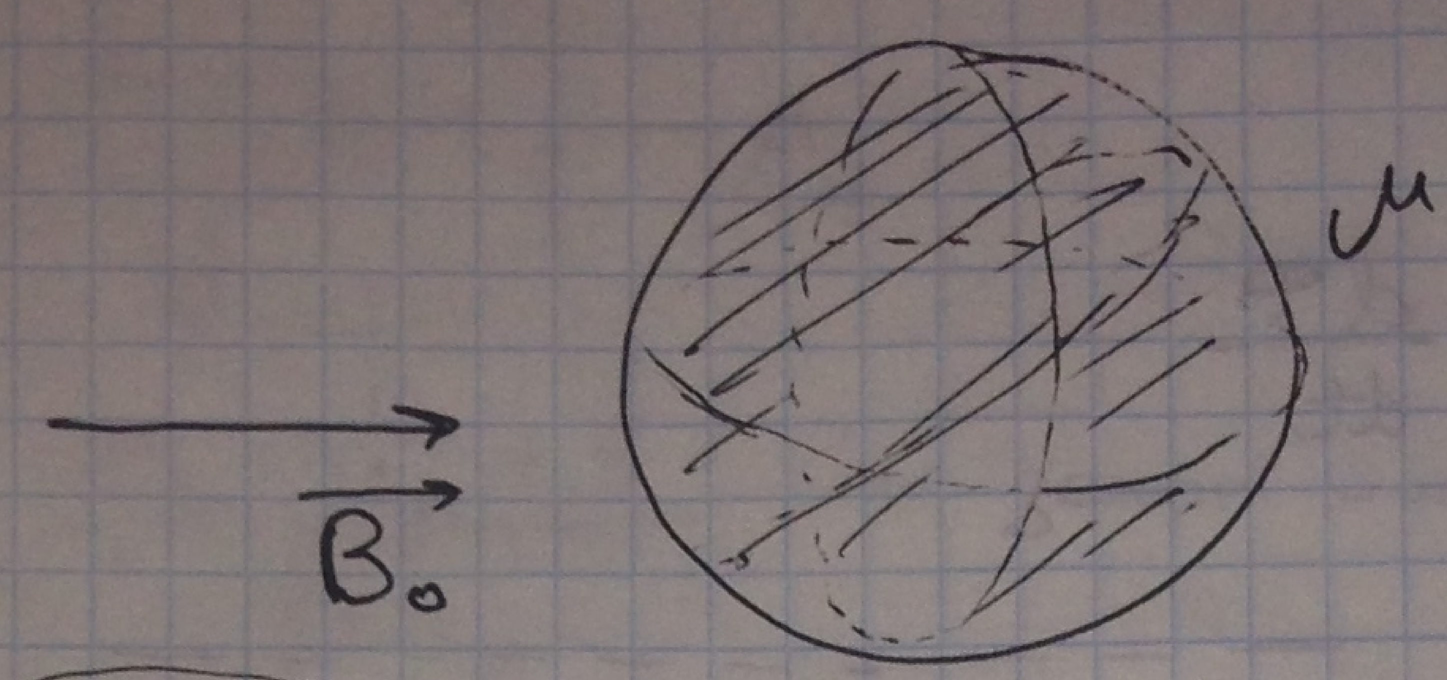
$$H_2 = \frac{I \mu_1}{\pi r (\mu_1 + \mu_2)} \Leftarrow I = \frac{\pi r}{\mu_1} (\mu_1 + \mu_2) H_2$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_0 I}{\pi r (\mu_1 + \mu_2)}}$$

Ответ

№3

// 3.288 // 2-е ур.
3.279 // 1-е ур.



$\vec B_{внутри} = \vec B_0 + \vec B'$ — создает сам шар

$\vec H_{внутри} = \vec H_0 + \vec H'$

$\vec H' = -\frac{J}{3}$ (по условию)

$B = \mu\mu_0 H$; вне шара $\mu = 1 \Rightarrow B_0 = \mu_0 H_0 \Rightarrow H_0 = \frac{B_0}{\mu_0}$

$\Downarrow$

$$\vec H_{внутр} = \frac{\vec B_0}{\mu_0} - \frac{\vec J}{3} \Rightarrow J = 3\left(\frac{\vec B_0}{\mu_0} - \vec H_{внутр}\right)$$

Формула: $\vec H = \frac{\vec B}{\mu_0} - \vec J \Rightarrow \vec H' = \frac{\vec B'}{\mu_0} - \vec J$

$\Downarrow$

$$-\frac{\vec J}{3} = \frac{\vec B'}{\mu_0} - \vec J$$

$\Downarrow$

$$\vec B' = \mu_0 \cdot \frac{2}{3}\vec J$$

$$\vec B_{внутри} = \mu\mu_0 \vec H_{внутр} = \vec B_0 + \vec B' = \vec B_0 + \mu_0 \cdot \frac{2}{3}\vec J$$

$$\boxed{\vec B_{вн.} = \frac{3\mu}{\mu+2}\vec B_0}$$

ответ

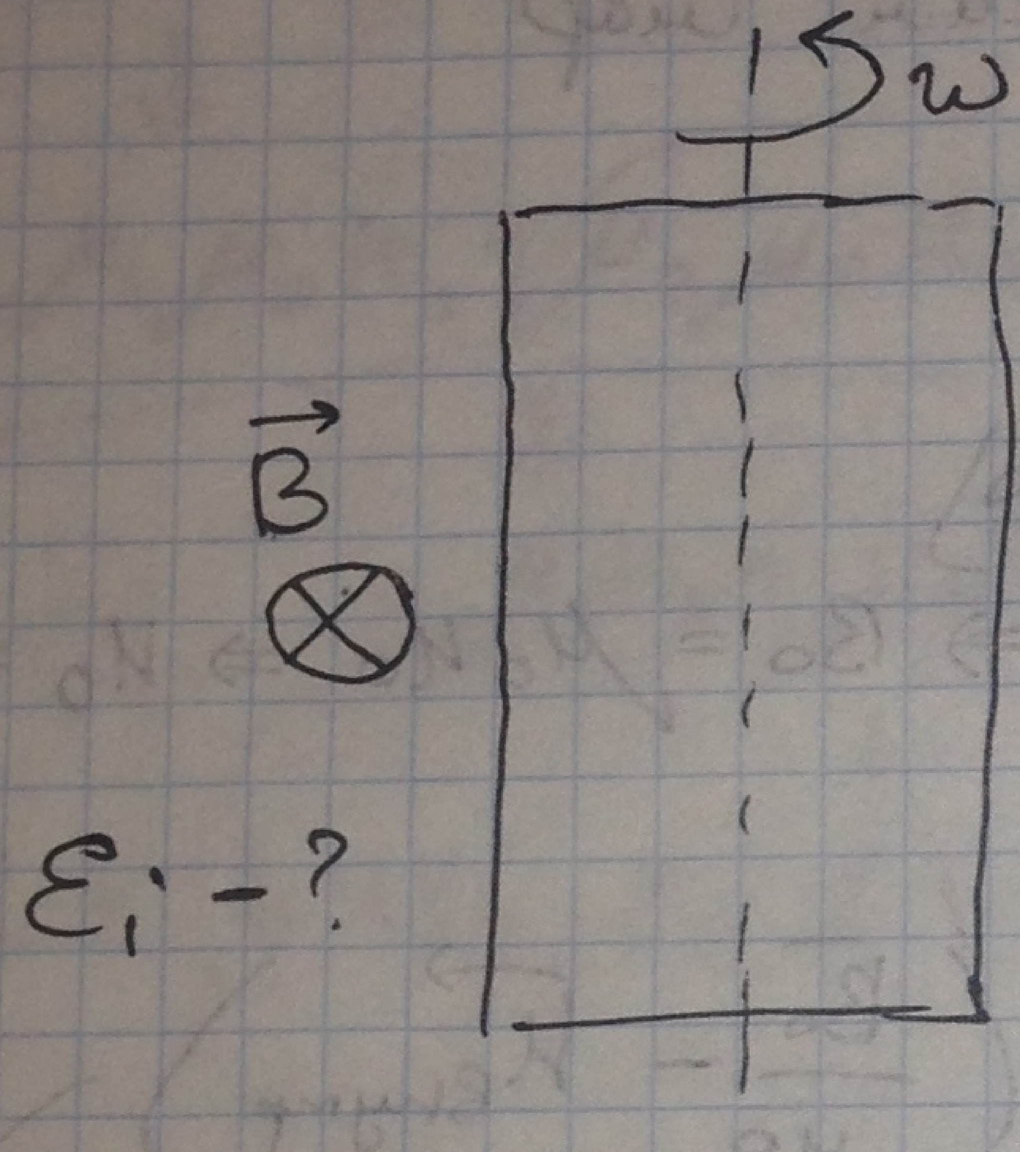
$$\mu\mu_0 \vec H_{внутр} = \vec B_0 + \frac{2}{3}\mu_0 \vec J$$

$$\mu\mu_0 \vec H_{внутр} = \vec B_0 + 2\mu_0\left(\frac{\vec B_0}{\mu_0} - \vec H_{внутр}\right)$$

$$\mu\mu_0 \vec H_в = 3\vec B_0 - 2\mu_0 \vec H_в \Rightarrow \vec H_в = \frac{3\vec B_0}{\mu\mu_0 + 2\mu_0}$$

25.04 Закон электромагнитной индукции

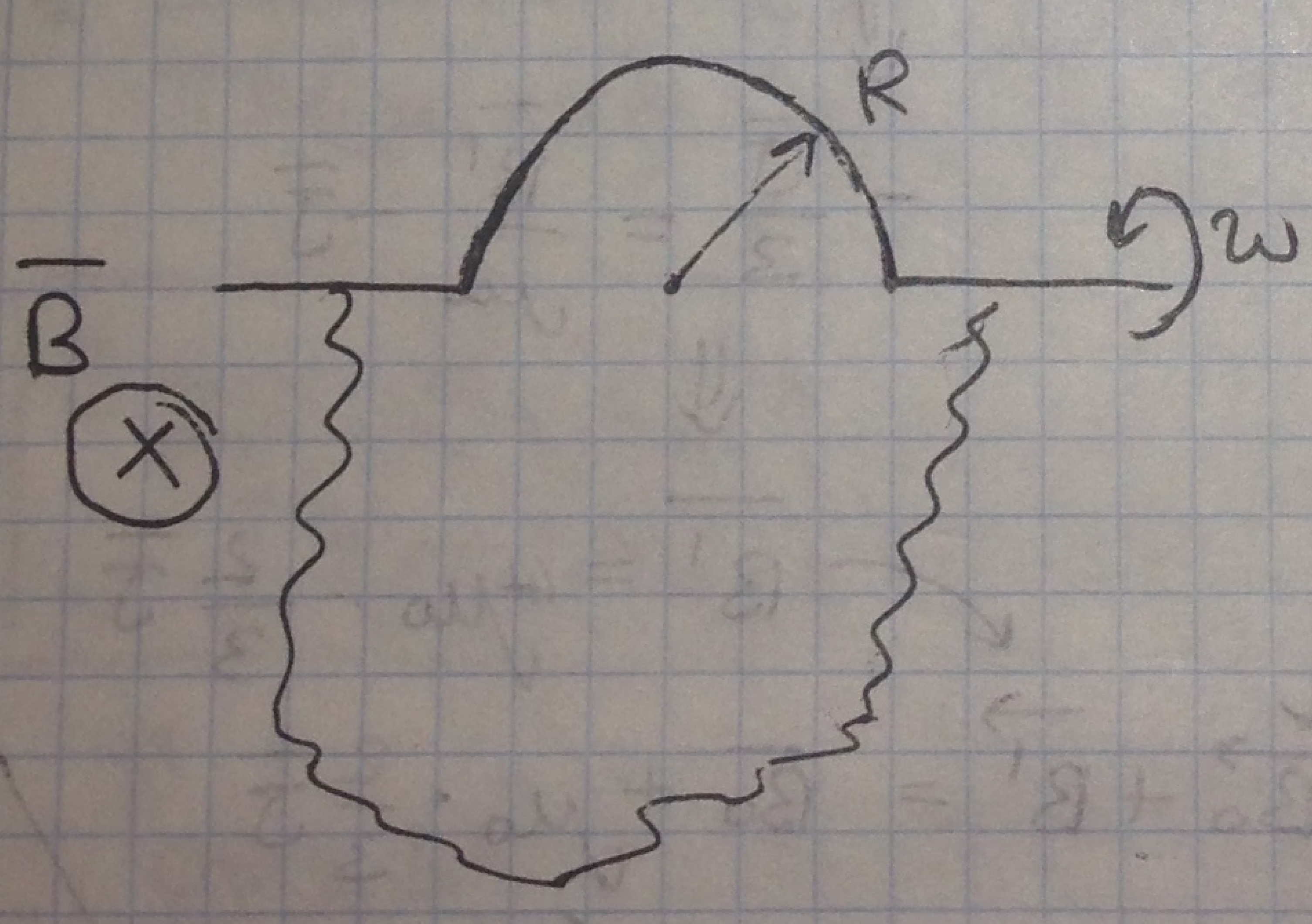
$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$



$$\Phi = \int \bar{B}\, d\bar{S} = BS\cos\omega t$$

$$\Downarrow$$

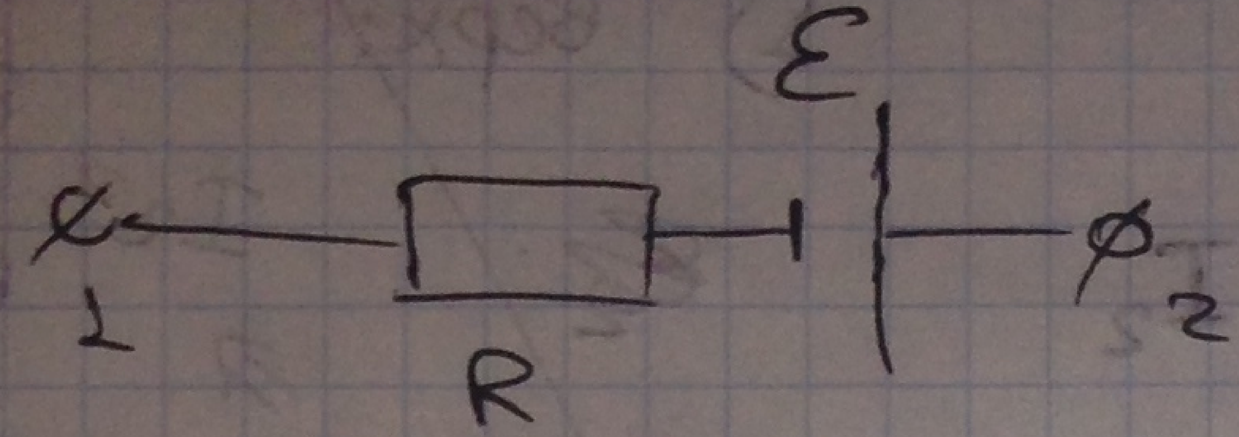
$$\mathcal{E}_i = \omega BS \cdot \sin\omega t$$



$$d\Phi = \frac{1}{2}\pi R^2 \cdot B\cos\omega t$$

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2}\omega\pi R^2 B\sin\omega t$$

Цепи электрического тока



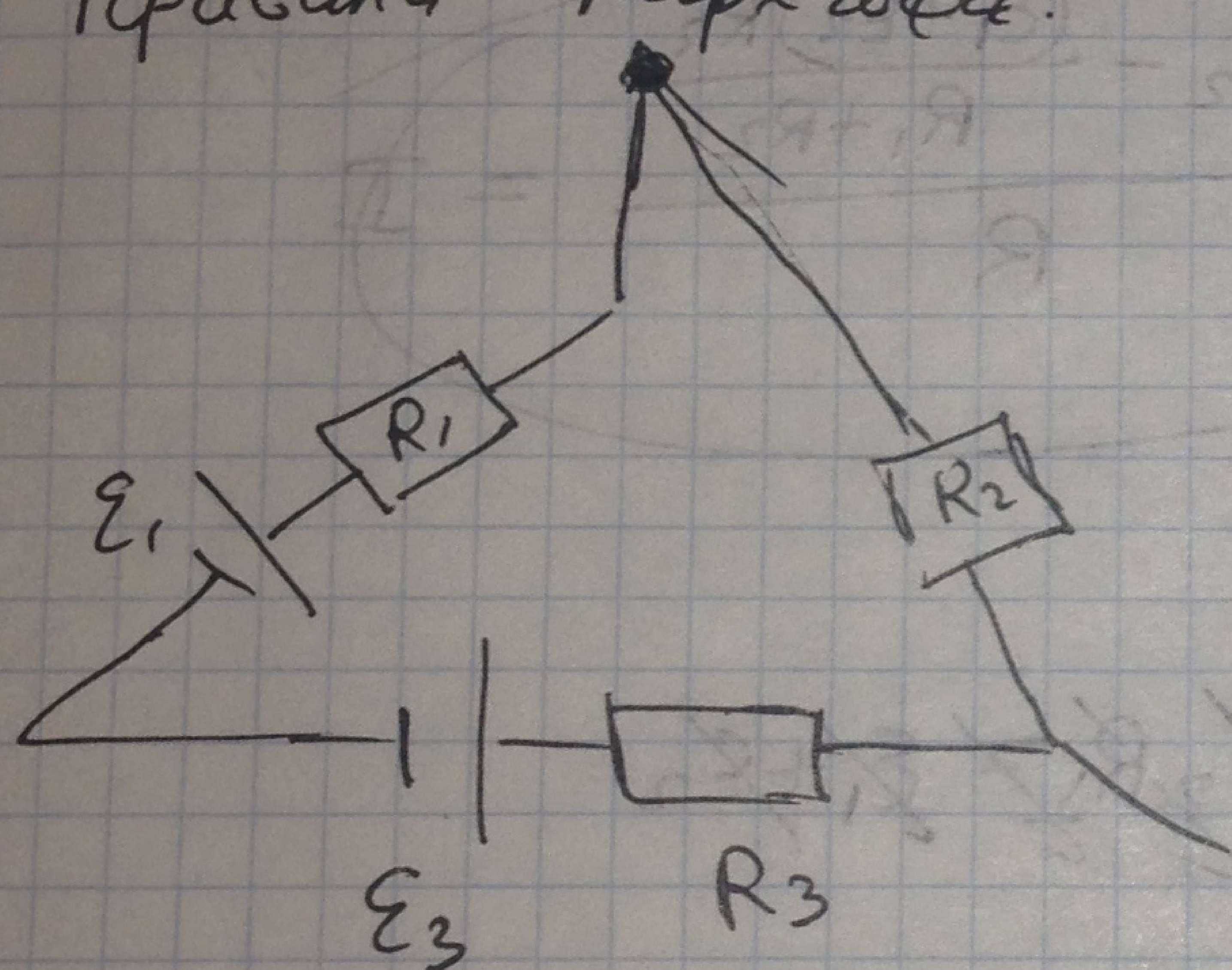
$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}}{R}$$ — закон Ома в инт. форме

$\vec{E}$ сторонних сил

$$\vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}_{ст})$$ закон Ома в дифф. форме

$\lambda = 1/\rho$ — удельное сопр. среды

Правила Кирхгофа:



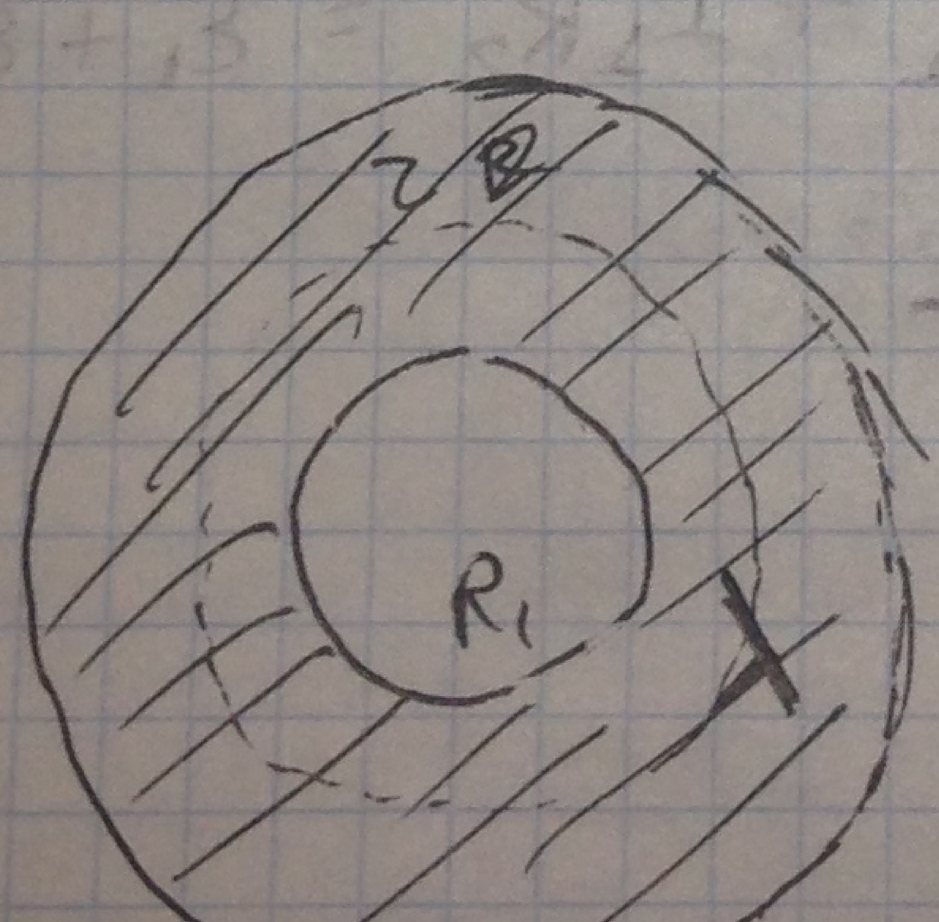
1) $\sum I_k = 0$

2) $\sum I_k R_k = \sum \mathcal{E}_k$

необх. замкнутый контур
выбираем напр. токе
выбир. напр. обхода

Мощность: $P = UI$

R – ?

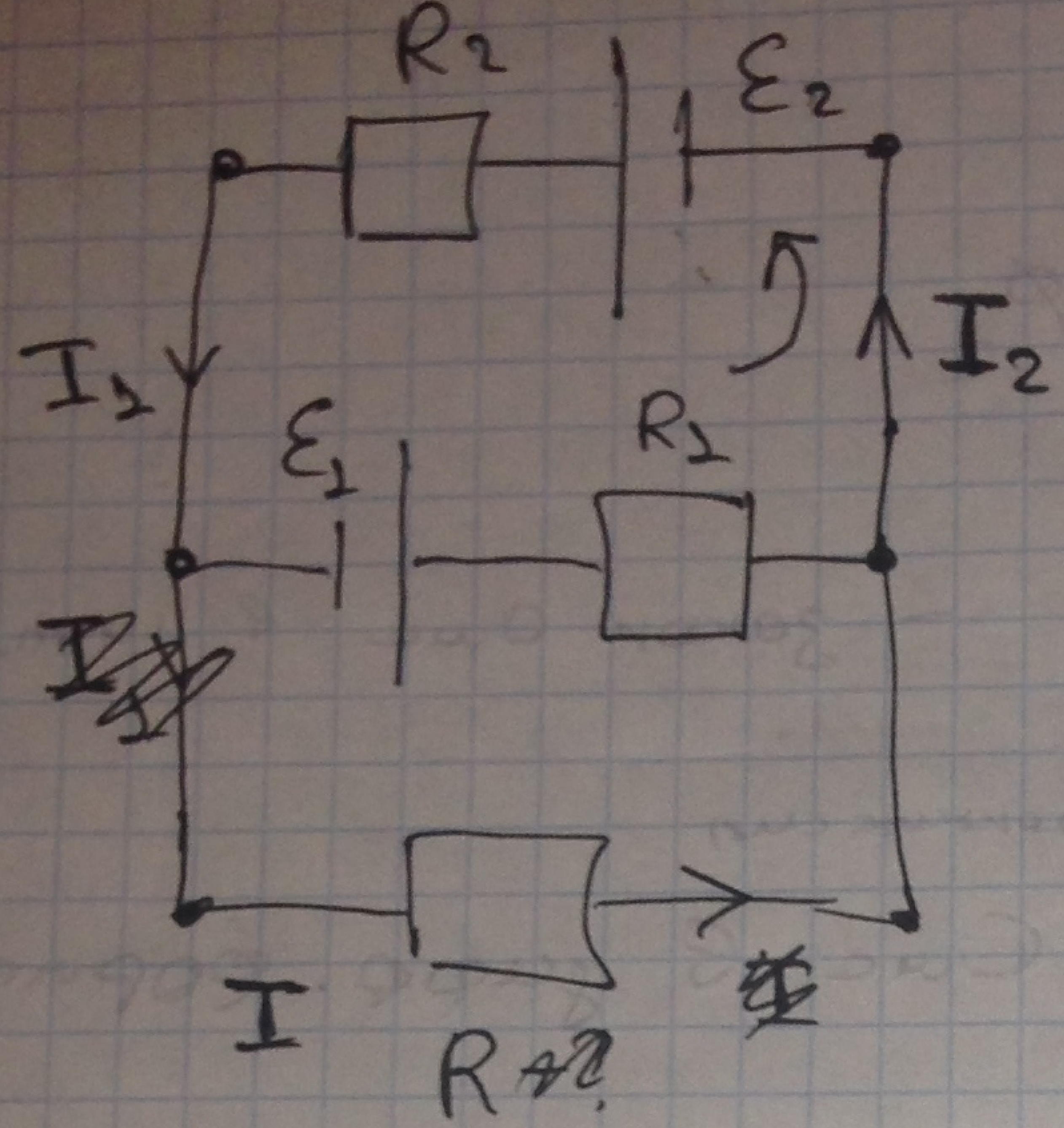


$$I = 4\pi r^2 \cdot j(r)$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E\,dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{I}{4\pi\lambda} \frac{dr}{r^2}$$

$E = \frac{j}{\lambda}$

$$= I \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi\lambda} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}}_{=R}$$



$I = I_1 + I_2$

1) верх:

$$I_2 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R_1 + R_2}$$

$\Uparrow$

$$I_2 R_2 + I_2 R_1 = \varepsilon_2 + \varepsilon_1$$

2) все:

$$IR + I_2 R_2 = \varepsilon_2$$

$\Downarrow$

$$I = \frac{\varepsilon_2 - I_2 R_2}{R} =$$

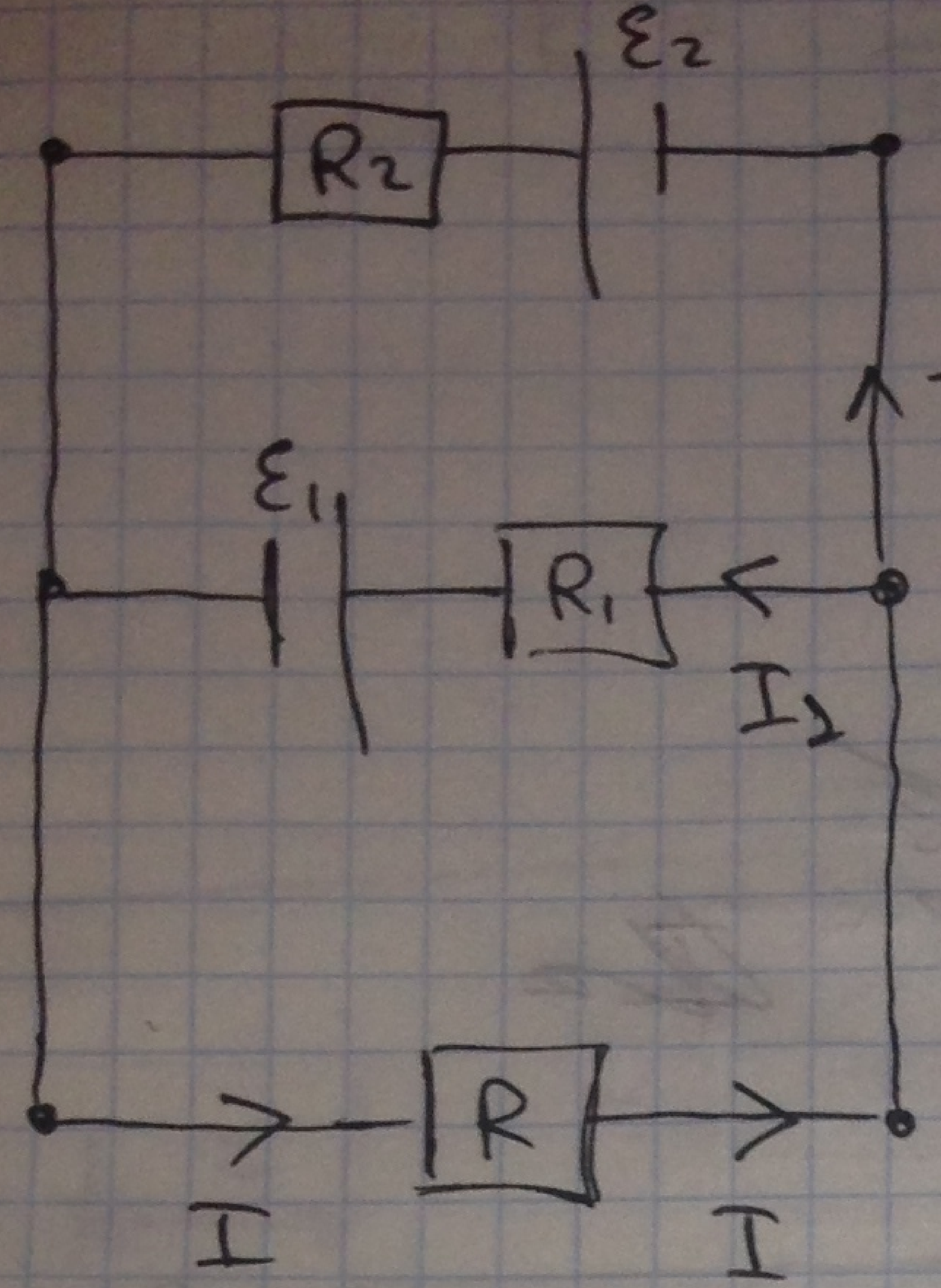
$$= \frac{\varepsilon_2 - \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) R_2}{R_1 + R_2}}{R} = I$$

$\cancel{I_1 R_2 + I_2 R_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2}$

$\cancel{I_1 R}$

$$I_2 R_1 + I_1 R_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$IR -$



$$I_2 = I - \frac{\mathcal{E}_1 - IR}{R_1} \qquad I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - IR}{R_1}$$

1) $I = I_1 + I_2$

2) верх: $I_2 R_2 - I_1 R_1 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$

3) низ: $IR + I_1 R_1 = -\mathcal{E}_1$

~~4) вне~~

$$I_2 R_2 - \cancel{I_1 R_1} + IR + \cancel{I_1 R_1} = \mathcal{E}_2$$

$$\Downarrow$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_2 - I_2 R_2}{R}$$

$$\Downarrow$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_2 - \frac{IR_1 - \mathcal{E}_1 - IR}{R_1} \cdot R_2}{R}$$

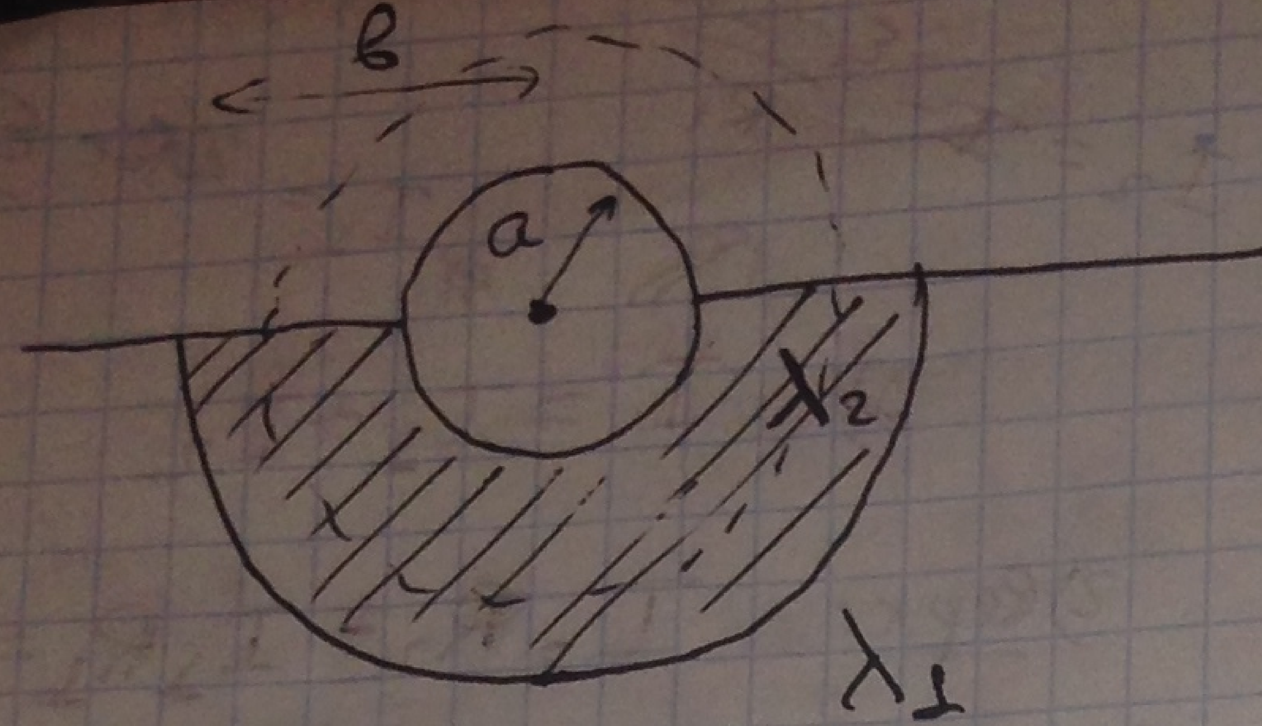
$$IR = \frac{\mathcal{E}_2 R_1 - IR_1 R_2 - \mathcal{E}_1 R_2 - IRR_2}{R_1}$$

$$IRR_1 = \mathcal{E}_2 R_1 - IR_1 R_2 - \mathcal{E}_1 R_2 - IRR_2$$

$$\Downarrow$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_2 R_1 - \mathcal{E}_1 R_2}{R \cdot R_1 + R_1 \cdot R_2 + RR_2}$$

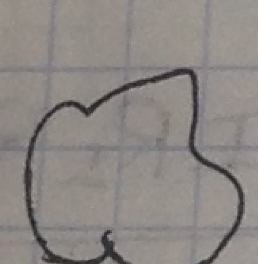
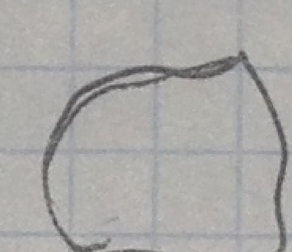
Ответ



R - ?

$\cancel{U = \int_a^b}$

$\cancel{U = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{E\,dr}{2} + \frac{1}{2}\int_a^b E\,dr}$

 λ, ε 

$R(C)$ - ?

$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}$

$C = \frac{q}{\Delta\varphi} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{q}{C}$

$\Delta\varphi =$

$\frac{q}{C} = IR$

$\vec{j} = \lambda \vec{E}$

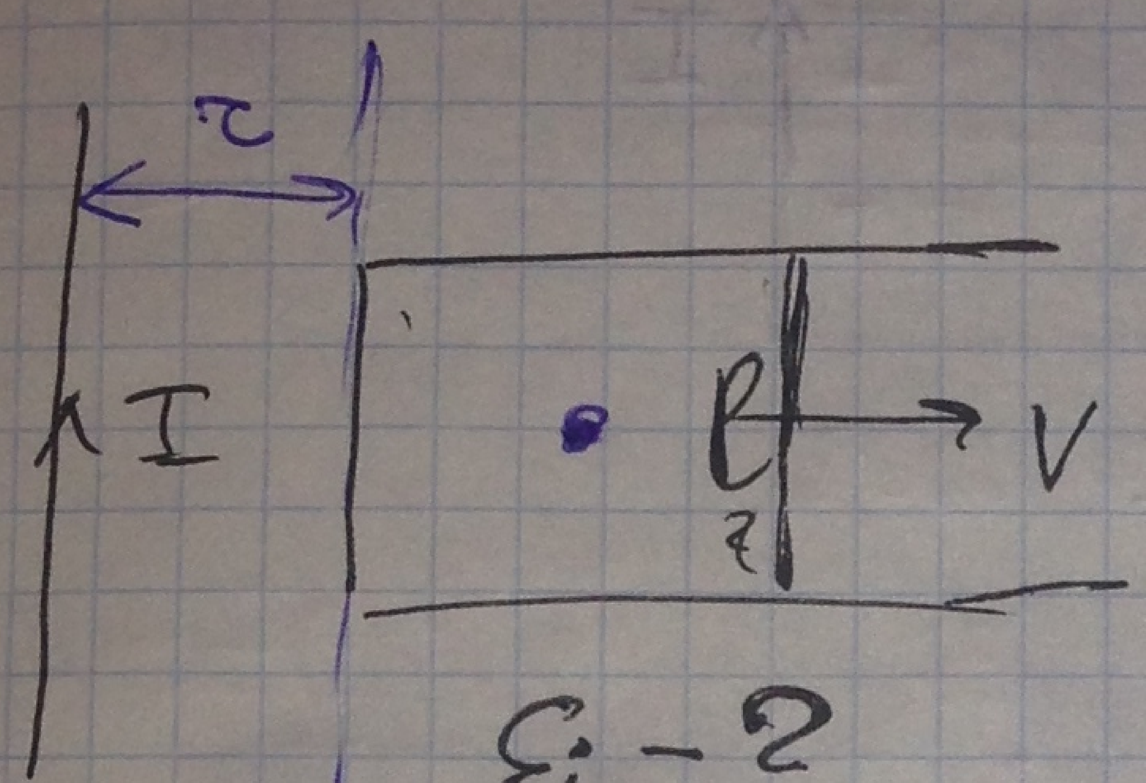
$\lambda = \frac{1}{\rho}$

$I = \frac{E}{\rho} \cdot d$

$\Delta\varphi = IR$

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}$$

$$\Delta\varphi = -\int E\,dr$$

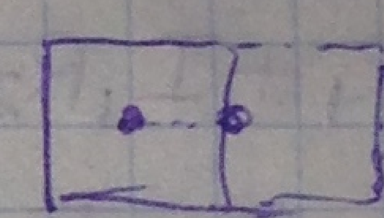


$\mathcal{E}_i$ – ?

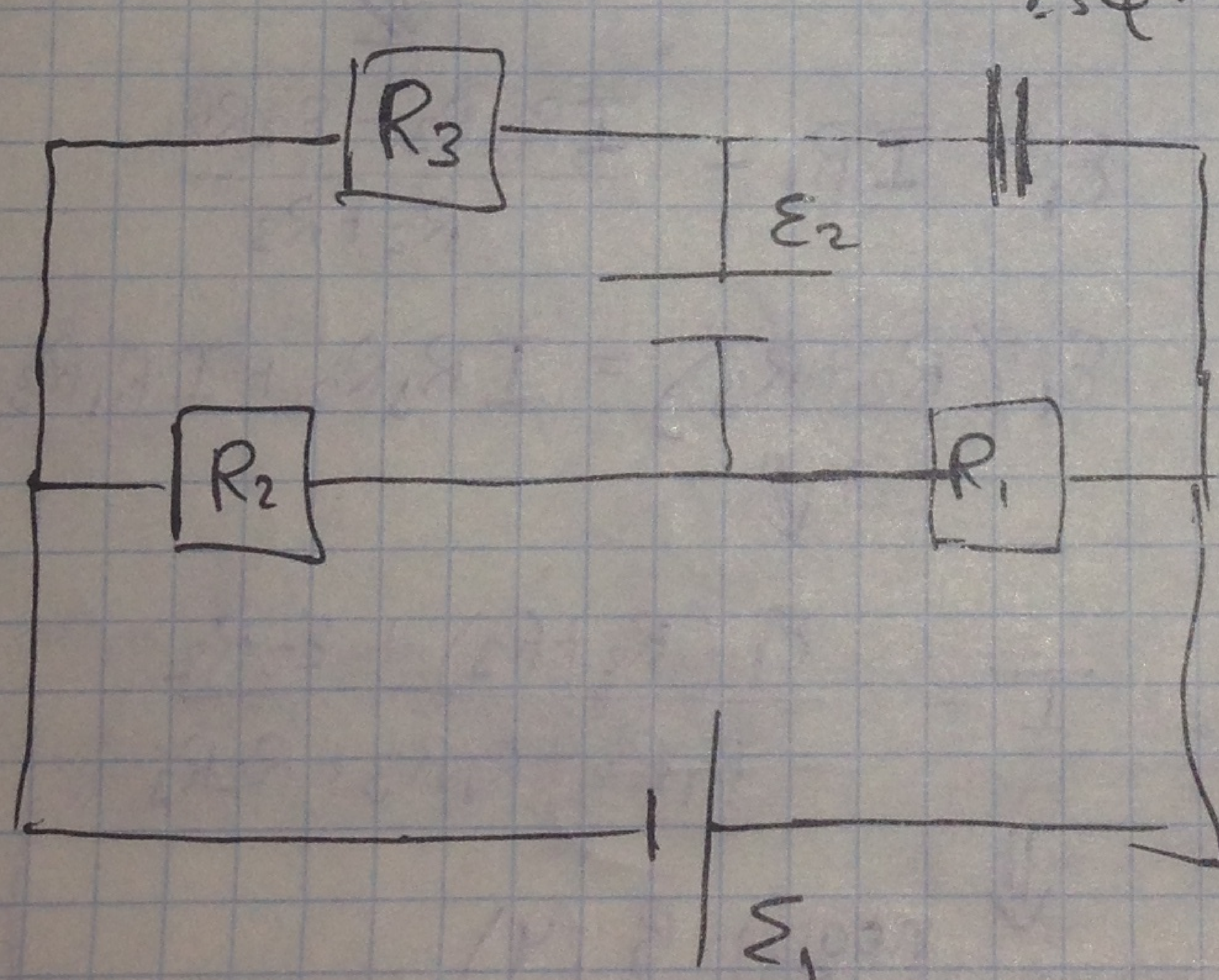
$$\mathcal{E} = BlVt$$

$$a(t) = r + \cdot Vt$$

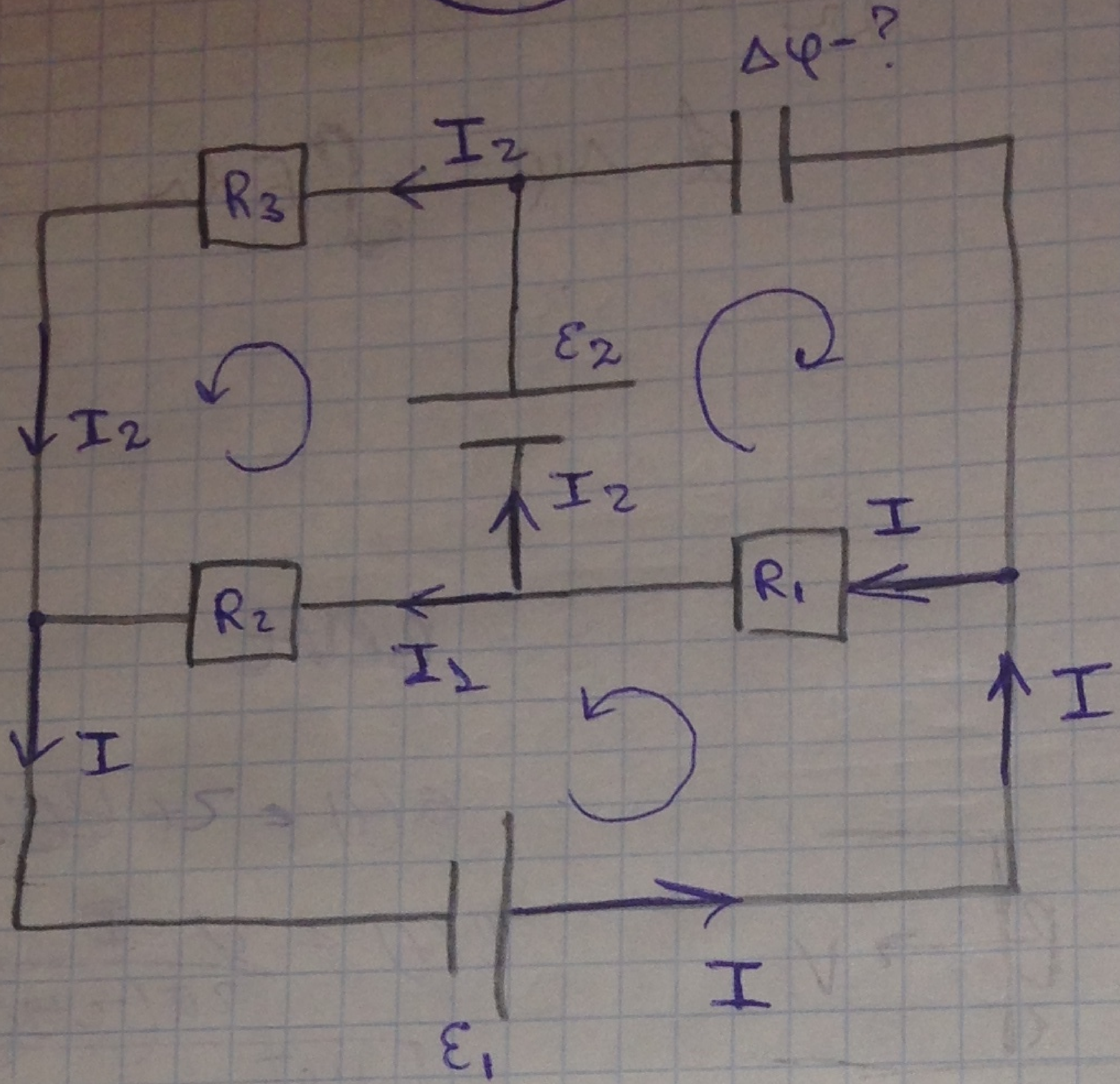
$$B(t) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\left(r + \frac{Vt}{2}\right)} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{2\pi r + \cancel{2}\pi V t}}$$



$\Delta\varphi$ – ?



№2



$$\begin{cases} 1)\ I = I_1 + I_2 \\ \text{киз. } 2)\ \varepsilon_1 = IR_1 + I_1R_2 \\ \text{лево } 3)\ \varepsilon_2 = I_2R_3 - I_1R_2 \Rightarrow \varepsilon_2 = (I - I_1)R_3 - I_1R_2 \Rightarrow I_1 = \dfrac{IR_3 - \varepsilon_2}{R_2 + R_3} \\ \text{прав. } 4)\ \varepsilon_2 + \Delta\varphi = IR_1 \end{cases}$$

$\Downarrow$ подст. в (2)

$$\varepsilon_1 = IR_1 + \frac{IR_2R_3 - \varepsilon_2R_2}{R_2 + R_3}$$

$$\varepsilon_1(R_2 + R_3) = IR_1R_2 + IR_1R_3 + IR_2R_3 - \varepsilon_2R_2$$

$$\Downarrow$$

$$I = \frac{\varepsilon_1(R_2 + R_3) + \varepsilon_2R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

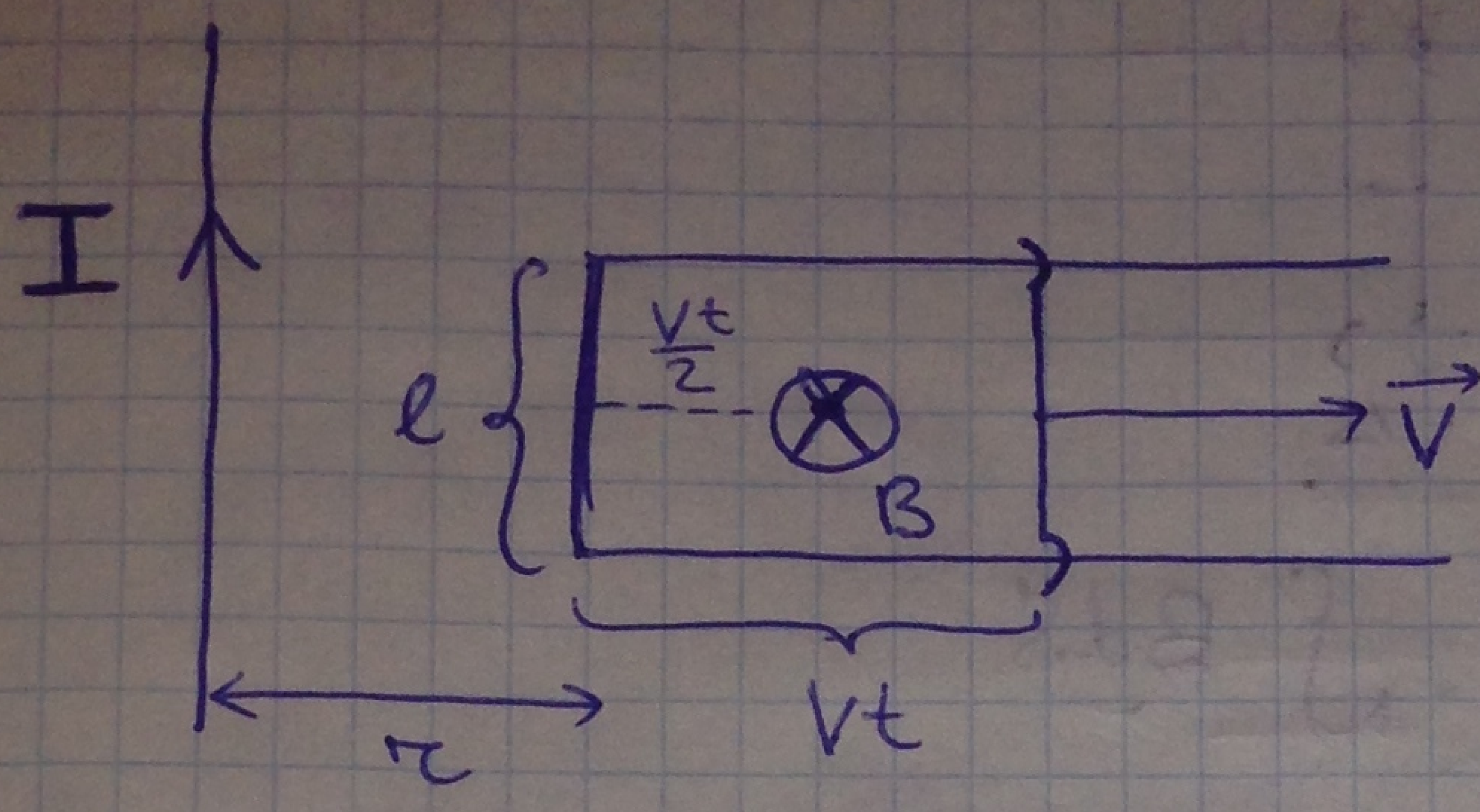
$\Downarrow$ подст. в (4)

$$\Delta\varphi = IR_1 - \varepsilon_2 =$$

$$= \frac{\varepsilon_1R_1(R_2 + R_3) + \cancel{\varepsilon_2R_1R_2} - \cancel{\varepsilon_2R_1R_2} - \varepsilon_2R_1R_3 - \varepsilon_2R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} =$$

$$= \boxed{\frac{\varepsilon_1R_1(R_2 + R_3) - \varepsilon_2R_3(R_1 + R_2)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = \Delta\varphi}$$

№1



$$\Phi = BS \Rightarrow \Phi(t) = \underbrace{B(t)}_{\frac{\mu_0 I}{2\pi\left(r+\frac{Vt}{2}\right)}} \cdot \overbrace{S(t)}^{l\cdot Vt} =$$

$$= lVt \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi \cancel{t}\left(\frac{r}{t}+\frac{V}{2}\right)} = \frac{\mu_0 I l V}{\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}t}\left(2r+Vt\right)} =$$

$$= \frac{\mu_0 I l V t}{\pi\left(2r+Vt\right)} =$$

$$= \frac{\mu_0 I l V}{\pi} \cdot \frac{t}{2r+Vt}$$

$$\left[\frac{t}{2r+Vt}\right]' = \frac{(2r+Vt) - tV}{(2r+Vt)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\varepsilon_i = \frac{\mu_0 I l V}{\pi} \cdot \left[\frac{2r}{(2r+Vt)^2}\right]}$$