Теория функций комплексной переменной

Икрамов Хаким Дододжанович

А. И. Маркушевич, краткий курс теории анал. фций. Теория анал. фций

1) Комплексн. числа и действия над ними.

$z = (a, b)$, $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$

Оп. $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ считаются равными $\Leftrightarrow a_1 = a_2,\ b_1 = b_2$

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2)$

$0 = (0, 0)$

$-z = (-a, -b)$

$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2,\ a_1 b_2 + a_2 b_1)$

$z_1 = (a_1, 0)$, $z_2 = (a_2, 0)$,

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, 0)$,

$z_1 z_2 = (a_1 a_2, 0)$, $a = (a, 0)$, $i = (0, 1)$, $i^2 = ii = (-1, 0)$

$i^2 + 1 = 0$.

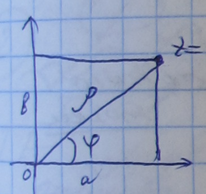
$(0, b) = (b, 0)(0, 1) = bi$;

$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi = a + ib$

Оп. $z = (a, b) = a + ib$, $\bar{z} = (a, -b) = a - ib$.

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

Геометрич. интерпретация комплексных чисел



$\rho = |z|$ – модуль числа z

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$0 \le \varphi < 2\pi$ $(-\pi < \varphi \le \pi)$

$\varphi = \arg z$ – главное значение аргумента

$a = \rho \cos\varphi$, $b = \rho \sin\varphi$, $\cos\varphi \ne 0 \sim a \ne 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$

$z = a + ib = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\cos\varphi + i\sin\varphi = \rho e^{i\varphi}$ – показат. форма z

$z_1, z_2 \ne 0$, $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = \rho_1 e^{i\varphi_1}$

$z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \rho_2 e^{i\varphi_2}$

$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho_1 \rho_2 e^{i\varphi}$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi k$, $\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2) \bmod 2\pi$.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i\varphi}$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + 2\ell\pi$, $\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2) \bmod 2\pi$.

$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho^n e^{in\varphi}$, $n \in N$

z_0 – корень n-й степени из z

$z_0^n = z$

$z \ne 0$ $z = \rho e^{i\varphi}$, $z_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$

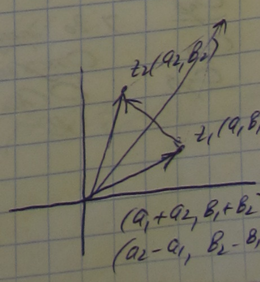
$\rho_0^n e^{in\varphi_0} = \rho e^{i\varphi}$,

$\rho_0^n = \rho \Rightarrow \rho_0 = \sqrt[n]{\rho}$

$n\varphi_0 = \varphi + 2\pi k$,

$\varphi_0 = \frac{\varphi}{n} + 2\frac{k}{n}\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$,

$\varphi_0 = \frac{\varphi}{n} + 2\pi$



$(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = z_1 + z_2$,

$(a_2 - a_1, b_2 - b_1) = (a_2 - a_1, b_2 - b_1)$

$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

$|z-z_0| = \rho \qquad |z-z_0| < \rho$

$|z-z_0| > \rho$

Предел последовательности

$\{z_n\}$

$z_n = a_n + i b_n \qquad K_\varepsilon(z_0)\{|z-z_0|<\varepsilon\}$ – ε-окр. т. z_0

$z_0 = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon): \forall n \ge N \ |z_n - z_0| < \varepsilon$

$z_n \in K_\varepsilon(z_0)$

$z_0 = a_0 + i b_0$

$|z_n - z_0|^2 < \varepsilon^2 \sim (a_n - a_0)^2 + (b_n - b_0)^2 < \varepsilon$

$z_n \to z_0 \sim a_n \to a_0 \wedge b_n \to b_0$

Теорема 1.1 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b_0$

Опр $\{z_n\}$ – огранич., если $\exists M > 0 \quad |z_n| < M \ \forall n$

Теорема 1.2 (Больцано-Вейерштрасса)
Из всякой огранич. послед. комплекс. чисел можно выделить сходящ. подпослед.

Опр $\{z_n\}$ – фундам., если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon): \forall k, \ell \ge N$
$|z_k - z_\ell| < \varepsilon$

Теорема 1.3 (Критерий Коши)
$\{z_n\}$ сх-ся тогда и только тогда, когда $\{z_n\}$ – фундам.

Бесконечность. Бесконечно удалённые точки

a – конечн. комплексн. ч.

∞

1) $|\infty| = +\infty$
2) $\infty \pm a = a \pm \infty = \infty$
3) $a \ne 0 \Rightarrow \infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty \cdot \infty = \infty$
4) $\frac{a}{\infty} = 0$
5) $\frac{\infty}{a} = \infty$
6) $a \ne 0 \Rightarrow \frac{a}{0} = \infty$
7) $\infty \pm \infty, \ 0\cdot\infty, \ \frac{0}{0}, \ \frac{\infty}{\infty}$ не имеют смысла

$\Rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ – расширенная компл. пл.

Опр z_n – б.б. послед. $\forall A > 0 \ \exists N = N(A): |z_n| > A \ \forall n \ge N \quad |z| > A$.

Замечание В комплексн. анализе б.б. сходятся к беск.

Мн-во точек на комплексной плоскости

Опр т. z_0 наз. внутр. точкой мн-ва M, если $\exists K_\varepsilon(z_0) \subset M$

Опр. Открытым наз. мн-во, все точки которого внутр.

Опр. Область ~ открытое мн-во (в анализе)

В ТФКП 2 условия

1) открытое
2) связное мн-во

$\forall$ 2 точки можно соедин. непр. кривой, принадл. этому мн-ву.

Опр z_0 – граничн. т. мн-ва M, если $\forall$ δ окр. есть точки из M и точки, не принадлеж. M

Опр Замкнутая область – область + граница

Опр z_0 – пред. т. M, если $\forall$ δ окр. беск. много точек из M.

Опр Замкнутое мн-во – мн-во, содержащее все свои предельные точки

Рассм. произв. мн-во M и т. z_0

$$\rho(z_0, M) = \inf_{z \in M} |z - z_0|$$

1) Если z_0 – пред. т. мн-ва $M \Rightarrow \rho(z_0, M) = 0$

2) Предположим M – замкн. мн-во, $z_0 \notin M \Rightarrow \rho(z_0, M) > 0$

$\exists$ $\rho(z_0, M) = 0 \Rightarrow z_0$ – пред. т $M \Rightarrow z_0 \in M$

M_1, M_2 : $\rho(M_1, M_2) = \inf |z_1 - z_2|$, $z_1 \in M_1$, $z_2 \in M_2$

Теорема 1.4

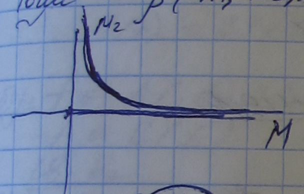
$\exists$ 1) M_1, M_2 – замкнуты

2) M_1 – ограниченное

3) $M_1 \cap M_2 = \varnothing$

Тогда $\rho(M_1, M_2) > 0$

Док-ть самостоятельно?



$\rho(M_1, M_2) = 0$

2) Функции комплексной переменной. Непрерывность и дифференцируемость

Опр. $\exists$ E – произв. мн-во, $\forall z \in E \longrightarrow w \Rightarrow w = f(z)$.

примеры

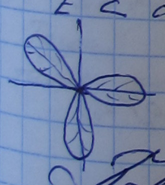
$|z|$, $\mathrm{Im}\, z$, $\mathrm{Re}\, z$, $\bar{z}$, z^n, $n \in \mathbb{N}$

$n > 1$ $\sqrt[n]{z}$ – n-значн. ф-ция ; $\mathrm{Arg}\, z$

$\mathrm{dom} f$ (domain) $\qquad \mathrm{im} f$ (image)

область определ $\qquad$ образ

$E \subset \mathrm{dom} f \Rightarrow f(E)$



$z = x + iy$ $\qquad w = u + iv$

$w = f(z) = u + iv = u(x, y) + i v(x, y)$

Пр $w = z^2$, $u + iv = (x + iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + i\underbrace{(2xy)}_{v}$

Предел ф-ции в точке

$E \subset \mathrm{dom} f$, z_0 – пред. т. E $\qquad \lim_{z \to z_0} f(z) = A$?

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$: $|f(z) - A| < \varepsilon$ для всех z : $|z - z_0| < \delta$.

$z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $f(z) = u + iv$, $A = B + iC$

Теорема 2.1

$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = B$, $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = C$

Следствие

$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = A_1$, $\exists \lim_{z \to z_0} g(z) = A_2$, $\Rightarrow \exists \lim_{z \to z_0} (f(z) \pm g(z)) = A_1 \pm A_2$

"Крупки комплексной сложности!)

$z = \lambda(t)$ $\quad t \in (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ $\qquad$ мн-во E

$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ E}} f(z)$ – предел по

Непрерывность

$E \subset dom f$, z_0 – пред. т. E, $z_0 \in E$ $\exists f(z_0)$

Опр $f(z)$ непр. в т. z_0, если $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Теорема 2.2 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u(x_0,y_0)$ и $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v(x_0,y_0)$.

Опр $f(z)$ непр. на E, если $f(z)$ непр. в каждой т. $z_0 \in E$

Следствия:

1) Если f и g непр. в т. z_0, то $f \pm g$, $f \cdot g$ непр. в т. z_0. Если $g(z_0) \neq 0$, то $\frac{f(z)}{g(z)}$ непр. в т. z_0.

2) Пусть $w = f(z)$ непр. в т. z_0, $w_0 = f(z_0)$, $f(E) \subset F$, $\zeta = g(w)$ непр. в т. w_0, $E \subset dom f$. Тогда $\zeta = g[f(z)] = G(z)$ непр. в т. z_0

3) E – компакт, f непр. на этом компакте. f ограничена на E, т.е. $\exists C > 0$: $|f(z)| \leq C$ $\forall z \in E$. (1-ая теорема Вейерштрасса)

4) $|f|$ достигает на E своих точных $\inf$ и $\sup$

5) (теор. Кантора) f равн. непр. на E

$z = \lambda(t)$ $t \in [\alpha, \beta]$

Если λ – непр. фун, то это ур-ие определяет непр. кривую (линию, дугу) на комплексной плоскости.

$z = \lambda(t)$ – параметр. ур-ие кривой γ

Производная и дифференциал.

$E \subset dom f$, z_0 – пред. точка E, $z_0 \in E$

Оп. $\exists \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in E}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0)$ $\Rightarrow$ $f(z)$ дифф. в т. z_0

$f'_E(z_0)$

$z - z_0 = \Delta z$, $f(z) - f(z_0) = \Delta f$

$\frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_0) + \varepsilon(z_0, \Delta z)$

$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon \Delta z$ (2.2)

$\Delta f = A\Delta z + \varepsilon \Delta z$ $/ : \Delta z$ $\Rightarrow$ $\frac{\Delta f}{\Delta z} = A + \varepsilon \to A$ $\Rightarrow \exists \lim\limits_{\substack{\Delta z \to 0 \\ z \to z_0}} \frac{\Delta f}{\Delta z} = A = f'(z_0)$

Теорема 2.3 $\exists f'(z_0)$ ~ f дифф. в т. z_0 $\Leftrightarrow$ $\Delta f = A\Delta z + \varepsilon \Delta z$, $\varepsilon \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

$W = f(z)$, $\exists f'(z_0)$ $W_0 = f(z_0)$ $f(E) \subset F$

$\zeta = g(w)$ $\exists g'_F(w_0)$

$\zeta = g[f(z)] = G(z)$ – дифф. в т. z_0 $G'(z_0) = f'_E(z_0)\, g'_F(w_0)$

Теорема 2.4 (условие Коши-Римана)

Пусть $E \subset dom f$, $f(z) = u + iv$, $z = x + iy$

Тогда $f(z)$ дифф. в т. $z_0 = x_0 + iy_0$ $\Leftrightarrow$ $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифф. в т. (x_0, y_0) как фун двух вещ. переменных и выполн. услов. Коши-Римана

$u'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0)$, $u'_y(x_0,y_0) = -v'_x(x_0,y_0)$ (КР)

Док-во

($\Rightarrow$) $\exists f'(z_0) \Rightarrow \Delta f = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon \cdot \Delta z$

$z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$

$\Delta z = z - z_0 = x - x_0 + i(y - y_0) = \Delta x + i\Delta y$

$f = u + iv$, $f'(z_0) = a + ib$, $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$

$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x - \varepsilon_2 \Delta y$,

$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \varepsilon_2 \Delta x + \varepsilon_1 \Delta y$, $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = |\Delta z|$

$a = u'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0)$, $b = v'_x(x_0,y_0) = -u'_y(x_0,y_0)$

$$\left|\begin{aligned} \Delta u &= a\Delta x - b\Delta y + \alpha\Delta z \\ \Delta v &= b\Delta x + a\Delta y + \beta\Delta z \end{aligned}\right.$$

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = \underbrace{(a+ib)}_{A}\underbrace{(\Delta x + i\Delta y)}_{\Delta z} + (\alpha+i\beta)|\Delta z| = A\Delta z + \varepsilon\Delta z,$$

$\varepsilon = \dfrac{(\alpha+i\beta)|\Delta z|}{\Delta z}$, $\Delta f = A\Delta z + \varepsilon\Delta z$, $|\varepsilon| = |\alpha+i\beta| \to 0$ при $\Delta z \to 0$

$\exists f'(z_0) = A = a+ib$

$$\boxed{f'(z_0) = a+ib} = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y = $$
$$= u'_x - iu'_y = v'_y - iv'_x$$

Аналитические функции (регулярные, голоморфные)

Опр. $f(z)$ – аналит. в области G, если $f(z)$ дифф. в $\forall z \in G$.

(Ст) $f'(z)$ непр. в G

Пример $z = x+iy$, $w = f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$

$u = e^x\cos y$ $\quad v = e^x\sin y$

$u'_x = e^x\cos y$ $\quad v'_x = e^x\sin y = -u'_y$ $\Rightarrow$ ф-ия явл. аналит. во всей компл. пл.

$u'_y = -e^x\sin y$, $\quad v'_y = e^x\cos y = u'_x$ $\Rightarrow$ она целая

$W = u'_x + iv'_x = e^x\cos y + ie^x\sin y = f(z)$, $f'(z) = f(z)$

$f(z) = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z$ – показат. ф-ия комплекс. перем.

Обозн. $f \in A(G)$ – ф-ия анал. в обл. G,

$f \in C(E)$ – непр. на E

Св-ва

1. Если $f \in A(D) \Rightarrow f \in C(D)$
2. $f, g \in A(D) \Rightarrow f \pm g \in A(D)$

Если $g(z) \neq 0$ $\forall z \in D \Rightarrow \dfrac{f}{g} \in A(D)$

3. (Аналитичность сложной ф-ии)

$w = f(z) \in A(D)$, $F = f(D)$, $\zeta = g(w) \in A(F)$. Тогда $\zeta = g[f(z)] = G(z) \in A(D)$

4. (Теорема об образе области) $f(z) \in A(D)$, $f(z) \neq const \Rightarrow$ тогда $f(D)$ также явл. областью

5. $w = f(z) \in A(D)$ $f'(z_0) \neq 0$ для $z_0 \in D$ $w_0 = f(z_0)$.

Тогда $\exists K_\varepsilon(w_0)$ и ф-ия $z = \varphi(w)$, опред. в $K_\varepsilon(w_0)$, такие, что 1) $\varphi(w)$ – ф-ия, обратн. к $f(z)$, т.е.

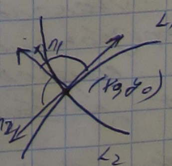
$f[\varphi(w)] = w$ $\forall w \in K_\varepsilon(w_0)$

а) $\varphi \in A(K_\varepsilon(w_0))$,

б) $\varphi'(w_0) = \dfrac{1}{f'(z_0)}$.

6. (Ортогональность линий уровня)

$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \in A(D)$



$\mathcal{L}_1: u(x,y) = C$, $\mathcal{L}_2: v(x,y) = K$,

$(x_0,y_0) \in D$

L_1: $u(x,y) = u(x_0,y_0)$

L_2: $v(x,y) = v(x_0,y_0)$

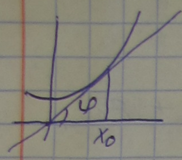
$n_1 = \{u'_x, u'_y\}$, $\quad \cos\varphi = \dfrac{(n_1,n_2)^2}{|n_1||n_2|}$

$n_2 = \{v'_x, v'_y\}$

$(n_1,n_2) = u'_x \cdot v'_x + u'_y \cdot v'_y = u'_x v'_x - v'_x u'_x = 0$ $\Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Семейства линий уровня $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ ортогональны.

Геометрический смысл производной



$y = f(x)$ $\exists f'(x_0)$ $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$

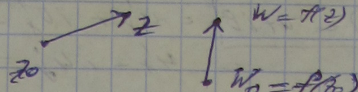
• вернёмся к комплексным рядам:

$w = f(z)$, $\exists f'(z_0) \neq 0$.

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Для z, близких к z_0, $f'(z_0) \approx \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$,

$$|f'(z_0)| \approx \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$$



$|f'(z_0)|$ – коэфф. растяж. под действ. ф-ии f в т. z_0.

$z = \lambda(t) = x(t) + iy(t)$

$t \in E = [\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$

$t_0 \in [\alpha, \beta]$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\lambda(t) - \lambda(t_0)}{t - t_0} = \lim \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + i \lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0},$$

$\exists \lambda'(t_0) \Leftrightarrow \exists x'(t_0), y'(t_0)$ $\lambda'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$,

t_0 – особая т. γ, если $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$,

t_0 – неособая

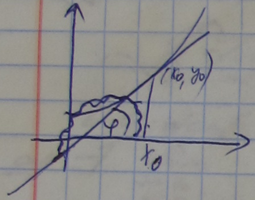
$\lambda'(t_0) \neq 0$ $\varphi = \arg \lambda'(t_0)$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$

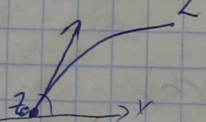
$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$

t_0: $x'(t_0) \neq 0$, $x_0 = x(t_0)$ $y_0 = y(t_0)$ $y = y(x)$ непр. в окр. т. t_0

$\operatorname{tg}\psi = y'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$,

$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\varphi \Rightarrow \psi = \varphi$.





Условие:

$z = \lambda(t)$

$t \in [\alpha, \beta]$

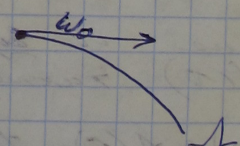
$\lambda(\alpha) = z_0$, $\lambda'(\alpha) \neq 0$.

$w = f(z) = f[\lambda(t)] = \mu(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$

$w_0 = f(z_0)$

$\mu(\alpha) = f[\lambda(\alpha)] = f(z_0) = w_0$

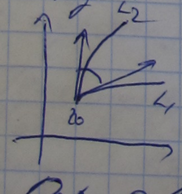
$\mu'(\alpha) = \lambda'(\alpha) \cdot f'(z_0)$

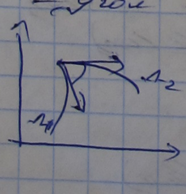


$\operatorname{Arg} \mu'(\alpha) = \operatorname{Arg} \lambda'(\alpha) + \operatorname{Arg} f'(z_0)$

$\operatorname{Arg} \mu'(\alpha) - \operatorname{Arg} \lambda'(\alpha) = \operatorname{Arg} f'(z_0)$

$\operatorname{Arg} f'(z_0)$ – угол поворота кривой, прох. через т. z_0





Опр Локальн. опр

Отображение посредством непр. ф-ии $w = f(z)$ наз. конформным в т. z_0, если оно сохр. угол между кривыми, проходящими через z_0.

Теорема 2.5 Если $f(z)$ дифф. в т. z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то отобр. $w = f(z)$ конформн. в т. z_0.

Предпол. обл. $D \to$ обл. F $(w = f(z))$

Глобальное опр.

Опр Отображение обл. D в обл. F, осуществляемое ф-ией $w=f(z)$, называется конформным, если оно конформно в каждой точке z_0 у D, и соответствие между точками у D и F взаимно-однозн. (1-1)

3) Элементарные анал. ф-ии и реализуемые ими конформные отображ.

1) Целая, линейная функция

$w = L(z) = \alpha z + \beta, \quad \alpha \neq 0$

$dom\, L = \mathbb{C}$,

$im\, L = \mathbb{C} \quad \Rightarrow L'(z) = \alpha.$

$L(z) \in A(\mathbb{C})$ - целая

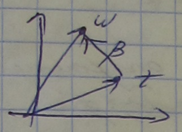
$\alpha \neq 0$ $w = L(z)$ - локально конформна в $\forall z_0 \in \mathbb{C}$

$\mathbb{C} \xrightarrow{L} \mathbb{C}$ конформно отобр.

1) $\alpha = 1$

$w = z + \beta$

$w - z = \beta$



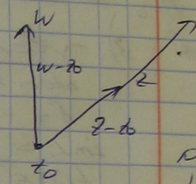
Сдвиг $\mathbb{C}$ по вектору β

2) при $\alpha \neq 1$ $\quad f(z_0) = z_0$

$\alpha z_0 + \beta = z_0, \quad z_0 = \frac{\beta}{1-\alpha}, \quad w - z_0 = \alpha(z - z_0)$

$z - z_0 \to \rho(z - z_0) \to w - w_0 = e^{i\varphi}\rho(z - z_0)$

$\varphi = \arg \alpha$



конф L

$L(\infty) = \infty$

$\bar{\mathbb{C}} \xrightarrow{L} \bar{\mathbb{C}}$ конф

$z \to \zeta = \frac{1}{z} \qquad w = L(z)$

$\infty \to 0$

$$\varphi = \frac{1}{L(z)} = \frac{1}{L(\frac{1}{\zeta})} = \frac{1}{\alpha\frac{1}{\zeta} + \beta} = \frac{\zeta}{\beta\zeta + \alpha}$$

$0 \to 0$

$w \to \zeta = \frac{1}{w}$

$\infty \to 0$

$$\varphi' = \frac{\beta\zeta + \alpha - \beta\zeta}{(\beta\zeta + \alpha)^2} = \frac{\alpha}{(\beta\zeta + \alpha)^2} \qquad \zeta = 0 \quad \varphi' \neq 0$$

2) Дробно-линейная ф-ия

$w = L(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad \Delta = ad - bc \neq 0$ опред. ф-ии L

1) Групповые св-ва дробно-линейн (д/л) отображений

$w = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}, \quad \tilde{\Delta} = \lambda^2 \Delta = 1, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$

$w = L_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \qquad w = L_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$

$\frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \qquad (a_1 z + b_1)(c_2 z + d_2) = (c_1 z + d_1)(a_2 z + b_2)$

$a_1 c_2 = c_1 a_2, \qquad a_1 d_2 + b_1 c_2 = a_2 d_1 + b_2 c_1$

$b_1 d_2 = d_1 b_2$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$

$$L(z) = L_2(L_1(z)) = \frac{a_2 \cdot \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} = \frac{a_3 z + b_3}{c_3 z + d_3},$$

$a_3 = a_2 a_1 + b_2 c_1,$

$b_3 = a_2 b_1 + b_2 d_1,$

$c_3 = c_2 a_1 + d_2 c_1,$

$d_3 = c_2 b_1 + d_2 d_1$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix}$

$L_1(z) \to \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad L_2(z) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$

$L(z) \to \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}$

$A_3 = A_2 A_1, \quad \Delta_3 = \Delta_1 \Delta_2 \neq 0$

$\Rightarrow$ Композиция д/л преобр. есть д/л преобраз

если $c=0$ $\quad w = L(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$

$I(z) = z$ – тожд. ф-ия (единичная)

$I(z) = \frac{z+0}{0z+1} \Rightarrow I(z) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\forall A \quad A I_2 = I_2 A = A$

$LI = IL = L$

$L(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \tilde{L} : L\tilde{L} = \tilde{L}L = I$

$\Delta = 1 \qquad \tilde{L}(z) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$,

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$

На мн. д/л фий опр: $I, \tilde{L}$

$\Rightarrow$ Мн. во д/л фий с операцией композ. есть некоммутат. группа, изоморфна группе $\sim L_2(\mathbb{C})$

Группа д/л преобр (устр. также, как группа конт. матр. с опред. 1.

3) Конформность ($c \neq 0$)

$\operatorname{dom} L = \{z \neq \delta = -\frac{d}{c}\}$

$\delta = -\frac{d}{c}$

$\operatorname{im} L = \{w \neq \frac{a}{c}\} = \operatorname{dom} L^{-1}$

$L(z) \in A(\operatorname{dom} L)$, $\quad w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $L'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{\overbrace{ad-bc}^{\Delta \neq 0}}{(cz+d)^2} \neq 0$

$\operatorname{dom} L \xrightarrow[\text{конф}]{L} \operatorname{im} L$

$z \to \delta \qquad w = L(z) \to \infty$,

$z \to \infty \qquad w \to \frac{a}{c}$,

$L(\delta) = \infty, \; L(\infty) = \frac{a}{c}, \qquad \overline{\mathbb{C}} \xrightarrow[1-1]{L} \overline{\mathbb{C}}$

$w = L(z) \to \varphi = \frac{1}{L(z)}, \quad z = \delta \to \varphi = 0$

$\zeta = \frac{1}{z} \quad w = L(z) \to L\left(\frac{1}{\zeta}\right), \quad z = \infty \to \frac{a}{c}, \; \zeta = 0 \to \frac{a}{c}$.

$\overline{\mathbb{C}} \xrightarrow[\substack{1-1 \\ \text{конф}}]{L} \overline{\mathbb{C}}$

$z = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad cz^2 + (d-a)z - b = 0$

Всякое д/л отобр.) имеет на $\mathbb{C}$ не более двух неподв. точек

<u>Теорема 3.1</u> $\exists L(z), \Lambda(z)$ – д/л ф-ии. Если $L(z_i) = \Lambda(z_i)$, $i = 1,2,3$, где точки z_1, z_2, z_3 попарно различны, то $L \equiv \Lambda$

<u>Док-во</u> $\quad V = \Lambda^{-1} L$

$V z_i = \Lambda^{-1} L(z_i) = z_i, \quad i = 1,2,3 \Rightarrow V = I, \; L = \Lambda$

4) <u>Инвариантность двойного отношения</u>

<u>Задача 3.1</u> Заданы z_1, z_2, z_3 – конечные, попарно различные w_1, w_2, w_3 — " —

Построить д/л $w = L(z)$ такую, что $L(z_i) = w_i$, $i = 1,2,3$ (3.2)

$\frac{w_1 - w}{w_2 - w} : \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} = \frac{z_1 - z}{z_2 - z} : \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ (3.3) $\sim (w_1, w_2, w_3, w) = (z_1, z_2, z_3, z)$

Проверить, что (3.3) опр. w как д/л ф-ию от z

$z_i \to w_i$

$\exists a, b, c, d$ – попарно различные числа

$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = (a, b, c, d)$ – двойное отношение (ангармонич.) чисел a, b, c, d

Теорема 3.2 Двойное отношение ост. инвариантно всякого д/л отображения

Док-во. Пусть L — произв. д/л ф., a, b, c, d — произв. попарно-разл. числа, $A = L(a)$, $B = L(b)$, $C = L(c)$, $D = L(d)$,

$(a,b,c,d) = (A,B,C,D)$

Рассм. L как решение задачи 3.1 для $\{a,b,c\}$:

$$\frac{w-A}{w-B} : \frac{D-A}{D-B} = \frac{z-a}{z-b} : \frac{d-a}{d-b}$$

$$(A,B,C,D) = \frac{C-A}{C-B} : \frac{D-A}{D-B} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = (a,b,c,d)$$

Формула (3.3) решает задачу (3.1), когда и/или одно из чисел равно ∞, тогда в (3.3) все разности, в которые входят беск. z и/или w можно заменить единицами.

Теорема 3.3 При действии д/л отображения всякая прямая или окружность переходит в прямую или окружность

Док-во $w = L(z)$, γ — прямая или окр-ть $\Gamma = L(\gamma)$ — пр. или окр

$A(x^2+y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0$ (3.4)

$A = 0$, $B^2 + C^2 \neq 0$ прямая

$A \neq 0$, $B^2 + C^2 - AD > 0$ — окр-ть

$$\left(x^2 + 2\frac{B}{A}x + \frac{B^2}{A^2}\right) + \left(y^2 + 2\frac{C}{A}y + \frac{C^2}{A^2}\right) = \frac{B^2+C^2}{A^2} - \frac{D}{A}$$

$$\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{A}\right)^2 = \frac{B^2+C^2-AD}{A^2}$$

$x = \frac{z+\bar z}{2}$, $y = \frac{z-\bar z}{2i}$, $E = B + iC$

$A\underbrace{z\bar z}_{z^2} + \bar E z + E\bar z + D = 0$ (3.5)

$A = 0$, $E \neq 0$ ($E = B + iC$)

$A \neq 0$, $|E|^2 - AD > 0$ — окр-ть прямая

$W = \frac{az+b}{cz+d} - \alpha z + \beta$, $c \neq 0$

Док-во: $w = \frac{1}{z}$, γ — прямая или окружн.

$Az\bar z + \bar E z + E\bar z + D = 0$

Γ: $A\frac{1}{w\bar w} + \bar E \cdot \frac{1}{w} + E \cdot \frac{1}{\bar w} + D = 0$

Γ: $Dw\bar w + Ew + \bar E\bar w + A = 0$

$D = 0$ $\begin{cases} A = 0, \ E \neq 0 \text{ прямая} \\ A \neq 0, \ |E|^2 - AD > 0 \sim |E|^2 > 0 \ E \neq 0 \text{ — прямая} \end{cases}$

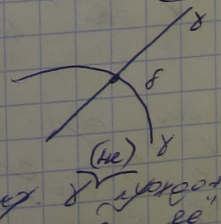
$D \neq 0$ $\begin{cases} A = 0, \ E \neq 0 \Rightarrow |E|^2 - AD = E^2 > 0 \text{ — окр-ть} \\ A \neq 0 \Rightarrow |E|^2 - AD > 0 \text{ — окр-ть} \end{cases}$

$w = L(z) = \frac{a}{c} + \frac{\overbrace{bc - ad}^{-\Delta}}{c(cz+d)} = L_2(\Lambda(L_1(z)))$

$z_1 = cz + d$, $z_2 = \frac{1}{z_1} \sim \Lambda$, $w = \frac{a}{c} - \frac{\Delta z_2}{c} \sim L_2$

$w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d} \neq \alpha z + \beta$,

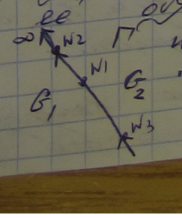
$\exists\ c \neq 0$ $\delta = -\frac{d}{c}$

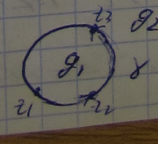


$\Gamma = L(\gamma)$,

$\infty = L(\delta) \in \Gamma$

Если прямая или окр. γ (не) проходит через особую точку δ д/л функ. $w = L(z)$, то ее образом явл. прямая (окр-ть)





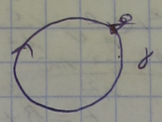
При действ. д/л фун. $w = L(z)$ обл. G_1 переходит в одну из областей G_1 и G_2, G_2 переходит в др. из них

① Выбрать т. $z_0 \in \rho_1$. Найти её образ $w_0 = L(z)$. Если $w_0 \in G_1 (G_2)$, то $G_1 = L(\rho_1)$ $(G_2 = L(\rho_1))$

② Выбрать на γ т. z_1, z_2 и z_3 так, чтобы при движении от z_1 к z_3 через z_2 область ρ_1 оставалась слева от наблюд., движущегося по γ.
Найдём точки $w_i = L(z_i)$, $i = 1,2,3$
Будем двигаться по Γ в напр. от w_1 к w_3 через w_2.
Если при таком движении слева от набл. находится обл. G_1 (G_2), то $G_1 = L(\rho_1)$ $(G_2 = L(\rho_1))$

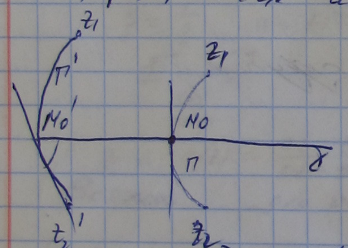
Пусть ρ-обл. на пл. z одного из 3 типов: {откр. круг, внешн. замкн. круга, полуплоск-ть}
— || — G
Тогда $\exists$ д/л преобразов., конформно отображающ. ρ в G
Пусть $\gamma = \partial\rho$, $\Gamma = \partial G$
Выберем на γ т. z_1, z_2, z_3 так, чтобы они задавали положительный обход γ
Выберем на Γ w_1, w_2, w_3 так, чтобы они задавали + обход Γ.
Тогда нужное д/л преобр. даётся решением задачи (3.1) для троек z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3.

$w_i = L(z_i)$, $i = 1,2,3$.



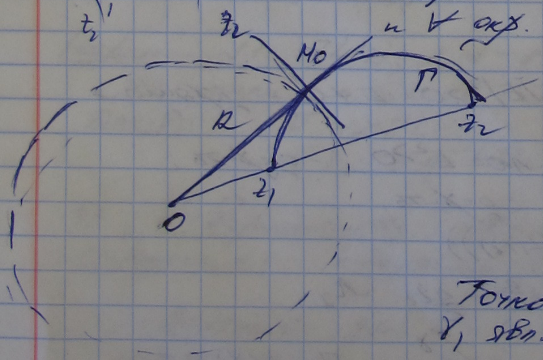
Сохранение симметрии

Теор. 3.4 Пусть $w = L(z)$ - произв. д/л ф., γ - произв. прям. или окр на пл. z, $\Gamma = L(\gamma)$, т. z_1 и z_2 симм. отн. γ. Тогда т. $w_1 = L(z_1)$ и $w_2 = L(z_2)$ симм. отн. Γ.



Если z_1 и z_2 симм. отн. γ, то прямая и $\forall$ окр, проход. через z_1 и z_2 $\perp \gamma$

Опр Т. z_1 и z_2 симм. отн γ, если прямая и $\forall$ окр., проход. через z_1 и z_2, $\perp \gamma$



Задача Пусть γ $|z-a| = R$
Если z_1 и z_2 симм. отн. γ, то

$$\boxed{z_2 = a + \frac{R^2}{z_1 - a}}$$

Точкой, симм. с центром a окр-ти γ, явл. бесконечн. удал. точка

Док-во 3.4
Пусть Δ - прямая или окр на w, проход. через т. w_1 и w_2
Положим $\delta = L^{-1}(\Delta)$ - прямая или окр. на пл. z, проход. через т. $z_1 = L^{-1}(w_1)$ и $z_2 = L^{-1}(w_2)$.
Поскольку z_1 и z_2 симм. отн. γ, $\delta \perp \gamma$, поэтому угол между образами $\Delta = L(\delta)$ и $\Gamma = L(\gamma)$ равен $\frac{\pi}{2}$.
(В силу конформности $\Delta = L(\delta) \perp \Gamma = L(\gamma) \Rightarrow w_1$ и w_2 симм. отн. Γ.

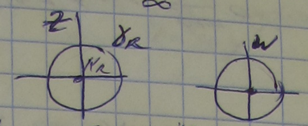
Пример 1 построить д/л преобразование, отображающее круг $|z|<R$ в круг $|w|<R$ так, чтобы заданная точка $\alpha\in K_R$ перешла в $w_0=0$.

∞

(1) $\alpha=0 \Rightarrow w_0=0$

$\infty \to \infty \Rightarrow$

$w=\varepsilon z+\cancel{b}$



$z=0$ $\quad w=\varepsilon z \Rightarrow |\varepsilon|=1$, $\quad \varepsilon=e^{i\varphi},\ \varphi\in\mathbb{R}$, $\quad w=e^{i\varphi}z,\ \varphi\in\mathbb{R}$

(2) $\alpha\neq 0$ $\quad \alpha^*$ — симм. с α отн. γ_R

$\alpha^*=\frac{R^2}{\bar\alpha}$, $\quad \alpha\to 0$, $\quad \alpha^*\to\infty$

$$W=L(z)=\lambda\frac{z-\alpha}{z-\alpha^*}=\lambda\frac{z-\alpha}{z-\frac{R^2}{\bar\alpha}}=\underbrace{(-\lambda\bar\alpha)}_{\mu}\frac{z-\alpha}{R^2-\bar\alpha z}=\mu\cdot\frac{z-\alpha}{R^2-\bar\alpha z}$$

$z\in\gamma_R \Rightarrow z=Re^{i\varphi}$ $\quad |w|=|\mu|\cdot\frac{|Re^{i\varphi}-\alpha|}{|R^2-\bar\alpha Re^{i\varphi}|}=\frac{|\mu|}{R}\,\overbrace{|e^{i\varphi}|}^{1}\,\frac{|R-\alpha e^{-i\varphi}|}{|R-\bar\alpha e^{i\varphi}|}$

$\frac{|\mu|}{R}=R \Rightarrow |\mu|=R^2$

$$\boxed{w=L(z)=R^2e^{i\psi}\frac{z-\alpha}{R^2-\bar\alpha z}}$$

(1) Задача т. $z_0\in\gamma_R$ перешла в зад. т. w на окр. $|w|=R$

(2) $L'(\alpha)>0$

Задача Док-ть, что $w=L(z)=R^2\frac{z-\alpha}{R^2-\bar\alpha z}$

Пример 2 Описать все д/л преобр., отобр. верхнюю полупл-ть $\operatorname{Im} z>0$ на внутр. круга $|w|<1$

Пример (Ф-ия Жуковского)

$W=\lambda(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

$\operatorname{dom}\lambda=\{z\neq 0\}$, $\operatorname{Im}\lambda=\mathbb{C}$

$\lambda'(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)$ $\qquad \lambda(z)$ — анал. функ.

Если $z\neq\pm1 \Rightarrow \lambda'(z)\neq 0 \Rightarrow$ есть локальная конформн.

Задача Проверить, что локальн. конформн. нарушается в точках $z=\pm1$.

$\forall w\in\mathbb{C}$ $\quad z^2-2wz+1=0$ $\quad$ (у каждого w есть прообраз)

$z_1z_2=1$

Опр Пусть $f(z)\in A(G)$. f однолистна в G: $z_1,z_2\in G$, $z_1\neq z_2 \Rightarrow f(z_1)\neq f(z_2)$

В противном случае f многолистна в G

Если f многолистна в G, но однолистна в $D\subset G$, то D — область однолистн. для f.

$\lambda(z)$ двулистна в $\mathbb{C}$

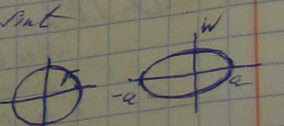
D: $|z|<1$ — обл. 1-листности для $\lambda(z)$

$\{|z|>1\}$ —"—

$D_{конф}$?

γ_r: $z=r(\cos t+i\sin t)$, $0\le t\le 2\pi$

Γ_r: $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+r\right)}_{a}\cos t+i\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-r\right)}_{b}\sin t$



$0<r<1$

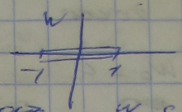
$x=a\cos t$, $y=-b\sin t$, $0\le t\le 2\pi$ $\quad (-1,0)$ $(1,0)$ $z_1=-1$, $z_2=1$

$c=\sqrt{a^2-b^2}=1$

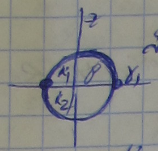
⇒ Софокусные эллипсы

Если $t\to 1$ $a\to 1$, $b\to 0$ сплющ. совп. с отр. $[-1,1]$

Получаем $g \xrightarrow[\text{конф}]{\lambda} \{w\notin[-1,1]\}$



плоскость w с „разрезом" по отр. $[-1,1]$



$\tilde K_2$

$G: |z|>1$ $\lambda(g)=\lambda(G)$

$z_1z_2=1$ $G\xrightarrow[\text{конф}]{\lambda}\{w\notin[-1,1]\}$

$K_1=\{|z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\}$

$K_2=\{|z|<1,\ \operatorname{Im} z<0\}$

$\tilde K_2=\{|z|>1,\ \operatorname{Im} z>0\}$

$K_1\xrightarrow[\text{конф}]{\lambda}\{\operatorname{Im} w<0\}$

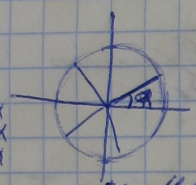
$K_2\xrightarrow[\text{конф}]{\lambda}\{\operatorname{Im} w>0\}$ $\lambda(K_2)=\lambda(\tilde K_2)$

$\tilde K_2\xrightarrow{\lambda}\{\operatorname{Im} w>0\}$

$\{\operatorname{Im} z>0\}=K_1\cup\tilde K_2\cup\gamma_1$ $(-1,1)$

$\{\operatorname{Im} z>0\}\xrightarrow[\text{конф}]{\lambda}\{w\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\}$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$



$\pi-\alpha$
$\pi+\alpha$
$2\pi-\alpha$

$z_\alpha:\ z=t(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

$R_\alpha:\ w=\frac12\left(z+\frac1z\right)=\frac12\left(\frac1t+t\right)\cos\alpha-i\frac12\left(\frac1t-t\right)\sin\alpha$

$u=\frac12\left(\frac1t+t\right)\cos\alpha,\ v=-\frac12\left(\frac1t-t\right)\sin\alpha$

$w=u+iv$ $0<t<1$

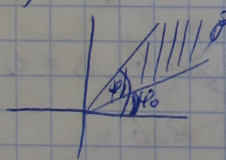
$\frac{u^2}{\cos^2\alpha}-\frac{v^2}{\sin^2\alpha}=1$ — гипербола

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=1$, $z_1=-1, z_2=1$ — софокусн. гиперболы

Функция $w=z^n$, где $n\in\mathbb{N}$, $n>1$

$\operatorname{dom} f=\mathbb{C}=\operatorname{im} f$

f n-листна в $\mathbb{C}$, $f'=nz^{n-1}\neq0$, $z\neq0$

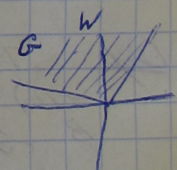


$\arg z=\varphi_0 \to \operatorname{Arg} w=n\varphi_0+2k\pi$

$\arg z=\varphi_1 \to \operatorname{Arg} w=n\varphi_1+2k\pi$

$\varphi_1-\varphi_0\le\frac{\pi}{2}$

g — обл. 1-листности для f



$g\xrightarrow[\text{конф}]{z^n}G$

Показательная ф-ия

$z=x+iy$,

$w=e^z=\exp z=e^x(\cos y+i\sin y)$

целая ф-ия $(e^z)'=e^z$

① $|e^z|=e^x\neq0\ \forall z\Rightarrow 0\notin\operatorname{im} e^z$

$\operatorname{Arg} e^z=y+2\pi k$

② $\tilde z=z+2\pi i=x+i(y+2\pi)$ $=e^x(\cos(y+2\pi)+i\sin(y+2\pi))=$
$=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z$

$e^{z+2\pi i}=e^z\ \forall z$

e^z – периодич. ф-ия с период. $2\pi i$

3) $\operatorname{dom} e^z=\mathbb{C}$ W–мн-во ненулев. $w=e^z$ $|w|=|e^z|=e^x$

$z=x+iy$ $x=\ln|w|$

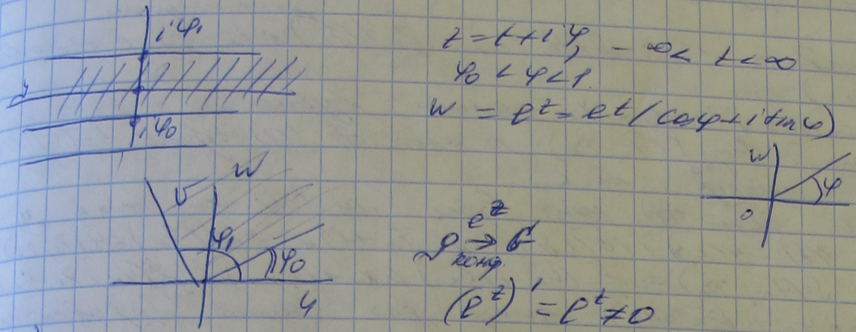
$\operatorname{Arg} w=y+2k\pi$

$\boxed{z=\ln|w|+i\operatorname{Arg}w}$ e^z – счётнолистн. ф-ия

4) $z=t+i\varphi,\ -\infty<t<\infty$

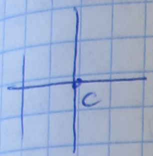
$\varphi_0<\varphi<\varphi_1$

$w=e^z=e^t(\cos\varphi+i\sin\varphi)$



$\mathcal{S}\xrightarrow[\text{конф}]{e^z}\mathcal{G}$

$(e^z)'=e^z\neq 0$



$z=c+it,\ -\infty<t<\infty$

$w=e^z=e^c(\cos t+i\sin t)$

Для конф. отображения $\infty\to$ в окр. радиуса e^c концентр. окр.

2 семейства: лучи из 0 и концентр. окр.

Задача Показать, что прямая на пл. z, не паралл. коорд. осям отображ. экспоненц. e^z в логарифм. спираль

Тригонометр. и гиперболич. ф-ии

$\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $\operatorname{tg} z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$

$\operatorname{ch} z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$, $\operatorname{sh} z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$, $\operatorname{th} z=\dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$, $\operatorname{cth} z=\dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$

1) $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ – целые

2) $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ период $2\pi i$

$\cos z$, $\sin z$ период 2π

$z=x+iy$

$e^{iz}=e^{-y+ix}=e^{-y}(\cos x+i\sin x)$,

$e^{-iz}=e^{y-ix}$

$z=x$ $\cos z=\dfrac{\cos x+i\sin x+\cos(-x)-i\sin x}{2}=\cos x$

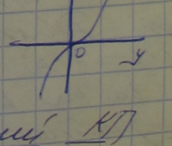
$z=x$

$\sin z=\sin x$

$|\cos z|=\sqrt{\operatorname{ch}^2 y-\sin^2 x}$ $|\sin z|=\sqrt{\operatorname{sh}^2 y+\sin^2 x}$

$|\operatorname{sh} y|=\sqrt{\operatorname{ch}^2 y-1}\le|\cos z|\le\operatorname{ch} y$ $|\operatorname{sh} y|\le|\sin z|\le\sqrt{\operatorname{sh}^2 y+1}=\operatorname{ch} y$

$\operatorname{ch}^2 y-\operatorname{sh}^2 y=1$



Глава 4 Интегрирование ф-ий КП

$z=\lambda(t)$, $\alpha\le t\le\beta$ (простой непр. нерасп. – замкн. спрямл. (кус-гладк))

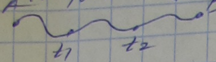
Предположим $z=\lambda(t)$ – кус.-гладк. ф-ия, где $x(t)$, $y(t)$ – кус. гл.

$\lambda(t)=x(t)+iy(t)\to\lambda'(t)=x'(t)+iy'(t)$,

Опр Особой точкой t_0 наз точка, в кот. $\lambda'(t_0)=y'(t_0)=0$

Предполож., на нашей кривой особых точек нет

$A\,(x(\alpha), y(\alpha)) = \lambda(\alpha)$ L $B\,(x(\beta), y(\beta)) = \lambda(\beta)$ — α случай $+$ естеств. напр $\overset{L}{AB}$ $+$ против. $\overset{-L}{BA}$



$\exists L$ – спрямляем. кривая, описыв. ур-ием $z = \lambda(t)$, $\alpha \le t \le \beta$. Разобьём L конечным числом точек на сегменты $\Rightarrow$ этим точкам соотв. разбиен. отр. $[\alpha, \beta]$: $t_0 = \alpha < \ldots < t_i < \ldots < \beta$, точками $t_i = \lambda(t_i)$

Для кажд. т. $\Rightarrow f(z)$. Выберем на кажд. сегменте по т. ξ_i, каждая из котор. соотв. некот. т. τ_i: $\lambda(\tau_i) = \xi_i$ на $[\alpha, \beta]$.

Опр Составим Σ: $S(t_k, \tau_k) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta z_k}_{\text{инт. сумма}}$, где $\Delta z_k = (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1})$

Опр $\delta = \max\{t_i - t_{i-1}\}$ – диам. разбиен.

Опр Если $\exists \lim\limits_{\delta \to 0} S(t_k, \tau_k)$, то инт. от $f(z)$ вдоль L $\exists$: $\int\limits_L f(z)\,dz$, $f(z)$ – интегр. по L.

Теорема 4.1 Если $f(z)$ непр. вдоль L, то $f(z)$ инт. по L.

Док-во $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$, $\varphi_k = \xi_k + i\eta_k \Rightarrow f(\varphi_k) = \overset{u_k}{u(\xi_k, \eta_k)} + i\overset{v_k}{v(\xi_k, \eta_k)}$

Инт. Σ: $S(t_k, \tau_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} (u_k + i v_k)(\Delta x_k + i \Delta y_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + \sum\limits_{k=1}^{n} i(u_k \Delta y_k + v_k \Delta x_k)$ интегр для веществ. кривол. интегр: $\int\limits_L v\,dx + u\,dy$.

Оба интегр. $\exists$, т.к. f – непр. $\Rightarrow u, v$ непр. по $L \Rightarrow$ инт. Σ имеют lim: $\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_L (u\,dx - v\,dy) + i\int\limits_L (v\,dx + u\,dy)$.

Т.к. комплексн. инт. выраж. через вещ., то все утв. о вещ. инт. $\Rightarrow$ на компл. случай

<u>Св-ва</u>:

(1) $\int\limits_{BA} f\,dz = -\int\limits_{AB} f\,dz$

(2) $\exists L = L_1 \cup L_2$, где L_1 и L_2 – не имеют общ. внутр. точек: $\int\limits_L f\,dz = \int\limits_{L_1} f\,dz + \int\limits_{L_2} f\,dz$.

(3) $\int\limits_L (c_1 f_1 + c_2 f_2)\,dz = c_1 \int\limits_L f_1\,dz + c_2 \int\limits_L f_2\,dz$.

(4) $\left|\int\limits_L f\,dz\right| \le \int\limits_L |f|\,dL$ – инт. I$^{\text{го}}$ рода от вещ. ф-ии $|f|$, $|\Delta z_k| \le L_k$

$\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f(\varphi_k)\Delta z_k\right| \le \sum\limits_{k=1}^{n} |f(\varphi_k)\Delta z_k| \le \sum\limits_{k=1}^{n} |f(\varphi_k)|\,L_k$.

(4*) Достиг. более грубой оценкой, чем (4)

$\exists M = \sup|f(z)|$, $z \in L \Rightarrow \left|\int\limits_L f\,dz\right| \le M \cdot |L|$ ← длина L

(5) $z = \lambda(t)$, $t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$

$I = \int\limits_L f\,dz = \int\limits_\alpha^\beta f[\lambda(t)]\,\lambda'(t)\,dt$

<u>Пример</u>: $I = \int\limits_{|z-a|=\rho} \frac{dz}{z-a} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}}{\rho e^{it}}\,dt = 2\pi i$

Интегральн. теорема Коши

Опр $z = \lambda(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, наз. замкн., если конц. т. её совп. $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta)$.

Опр z_0 на L наз. двойной т., если эта т. получается по крайней мере при 2^х различн. знач. пар-ра t, притом хоть одно пар-р не совпад. с конц. т. $z_0 = \lambda(t_1) = \lambda(t_2)$, $\{t_1, t_2\} \ne \{\alpha, \beta\}$.

Опр Кривая, не имеющ. кратн. точек, наз. простой (Жорданов. кривая)

Опр Замкн. жордан. кривая наз. контуром

Опр: Инт-л, взятый по контуру, наз. контурным $\oint\limits_L f(z)\,dz$

Возьмём на комплекс. пл-ти $\forall$ контур. Всякий контур разбив. пл-ть на 2 области: $\mathrm{int}\, C$ (interior) – огр., внутр.; $\mathrm{ext}\, C$ (exterior).

Опр: Полож. напр. обхода контура – когда наблюд., движ. по C, видит внутр. контура слева от себя.

Противоп. напр. наз. отрицат.: $\oint_{C^+}$ или $\oint_{C^-}$

Области:

- связная. св-во: лю. во $\forall$, можно соед. непр. кривой
- односвязн. G – односв. область, если у тог. что $C \subset G \Rightarrow \mathrm{int}\, C \subset G$

Основная теорема (ф-ла Грина)

$\exists$ D – огр. контуром C, в обл. D огр. и непр. ф-ии $P(x,y)$, $Q(x,y) \in C(\bar{D})$ и имеют в D непр. произв. $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$.

$$\oint_{C^+} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy,$$

при условии, что инт-л в правой части $\exists$ хотя бы как несобств. инт-л Римана.

Теорема (Интегр. теорема Коши)

$\exists$ $f(z)$ явл. аналит. в обл. G. Если $C \subset G$ и его внутр. $\subset G$:

$f(z) \in A(G)$, $C \subset G$, $\mathrm{int}\, C \subset G \Rightarrow \oint_C f(z) dz = 0$.

Д-во:

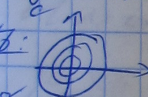
$f(z) = u + iv$, $z = x + iy$

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C u dx - v dy + i \oint_C u dy + v dx \underset{(\text{ф-ла Гр})}{\overset{\text{осит}}{=}} \iint_D (-v'_x - u'_y) dx dy + i \iint_D (u'_x - v'_y) dx dy$$

инт-лы равны 0 по соотнош. К-Р.

Следствие: $\exists G$ – односв. обл. Если $C \subset G$ – контур и $f(z) \in A(G)$, то $\oint_C f(z) dz = 0$.

Пр:



$1 < |z| < 3$, $f(z) = \frac{1}{z}$, $c: |z| = 2$ $\Rightarrow \oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$, обл-ть не односв. $\Rightarrow$ не удовл. усл-ям теоремы

вопросы:

- интегр. по контуру обл. в равен ли 0?
- найти аналог т. Коши для неодносв. обл.

Обобщенная Теорема Коши

$\exists G$ – односвязн. обл., огранич. контуром C. $f(z) \in A(G)$ и согл. непр. на гран. $(f(z) \in A(\bar{G})) \Rightarrow \oint_C f(z) dz = 0$.

Д-во Аналог., только двойн. инт-ы – несобств.

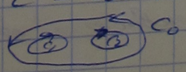
$\tilde{C}$ – приближение по $\forall$ замкн. контуру обл. инт. $\exists$ и $= 0 \Rightarrow \exists \lim$ вдоль исчерп. пл-ти $= 0$.

Опр $C = C_0 \cup C_1 \ldots \cup C_n$: 1) $C_i \subset \mathrm{int}\, C_0$, $i = 1, \ldots, n$ (C_0 – внешн., C_i – внутр.)

2) $C_i \subset \mathrm{ext}\, C_j$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$. Тогда C – составн. контур

Опр Наз-ём обл. G $(n+1)$ связн., если её граница составн. контур $C = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_n$

Пр:



Опр G: $\partial G = C$. Положит. напр. опр. аналогично контуру

Интеграл по составному

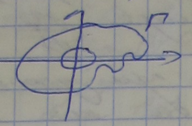
$$\oint_{C^+} f dz = \oint_{C_0} f dz + \oint_{C_0^+} f dz + \oint_{C_1^-} f dz + \ldots + \oint_{C_n^-} f dz$$

Теорема о составном контуре

Пусть G — $(n+1)$ связн. обл., огр. сост. контур. $C = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_n$; $f(z) \in A(G)$ и $f(z) \in C(\bar{G})$. Тогда $\oint_C f dz = 0$.

Д-во: то же, что и для обобщ. т. Коши. Поскольку осн. теорема верна для m — связн. обл.

$$\oint_{C_0^+} f dz = \oint_{C_1^+} f dz + \ldots + \oint_{C_n^+} f dz$$

Пр:  $G: \partial G = \Gamma \cup \gamma$: $\oint_\Gamma \frac{dz}{z} = \oint_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$;

Первообразная и неопредел. интеграл

Опр. Пусть $f(z) \in C(G)$. Ф-ия $F(z) \in A(G)$ наз. первообр. для $f(z)$ в G, если $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in G$

Совокупн. всех первообр. ф-ии $f(z)$ в G наз. её неопр. инт. в G. $(F(z)+C)' = F'(z) = f(z)$,
$F(z), \Phi(z): F'(z) = \Phi'(z) = f(z)$ $\forall z \in G$

$w = F(z) - \Phi(z)$, $w'(z) = 0$ $\forall z \in G$; $w = u + iv$,
$u'_x = v'_x = u'_y = v'_y = 0$ $\forall (x,y) \in G \Rightarrow$

$\Rightarrow u(x,y) = C_1$, $v(x,y) = C_2$, C_1, C_2 — const $\Rightarrow$
$w = C_1 + C_2 i \Rightarrow F(z) = \Phi(z) + C$.

• G — обл. на Oxy: $P(x,y), Q(x,y) \in C(G)$:

① $\oint_L P dx + Q dy = 0$ $\forall$ замкн. крив. $L \subset G$

② $\int_{\cup AB} P dx + Q dy$ не зависит от выбора пути

③ $\exists$ непр. дифф. в G ф-я $U(x,y)$:
$dU = P dx + Q dy$, U — потенц. $\int_{AB} P dx + Q dy =$
$= U(B) - U(A)$.

$f(z) = u + iv$: $\int_L f(z) dz = \int u dx - v dy + i \int v dx + u dy$

След. св-ва ~:

① $\oint_L f(z) dz = 0$ для $\forall$ замкн. кривой $L \subset G$
(С — св-во)

② $\int_{\cup z_0 z}^{z} f(z) dz$ не зависит от выбора пути от z_0 к z

$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z) dz$, корректно опред.

③ $\exists\, U(x,y), V(x,y)$ непр. дифф. в G: $dU = u\,dx - v\,dy$, $dV = v\,dx + u\,dy$

Теорема о первообразной

$\exists\, f(z) \in C(G)$ и $f(z)$ имеет в G С-св-во. Тогда

1) $\oint_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = F(z) \in A(G)$

2) $F'(z) = f(z)\ \forall z \in G$

Д-во

$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{z_0}^{z} (u\,d\xi - v\,d\eta) + i(v\,d\xi + u\,d\eta) =$

$= \underbrace{U(x,y) - U(x_0,y_0)}_{\tilde{U}(x,y)} + i(\underbrace{V(x,y) - V(x_0,y_0)}_{\tilde{V}(x,y)})$

$\tilde{U}'_x = U'_x = u$, $\tilde{U}'_y = U'_y = -v$, $\tilde{V}'_x = V'_x = v$, $\tilde{V}'_y = V'_y = u \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (К-Р) – верно $\Rightarrow F(z) \in A(G) \Rightarrow$ 1) верно

$F'(z) = \tilde{U}'_x + i\tilde{V}'_x = u + iv \Rightarrow$ 2) верно

Усл-я т. о первообр., если G – односв. обл. и $f(z) \in A(G)$

Следствие:

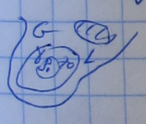
① $\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta + C \quad (*)$

② Формула Н-Л: $\exists\, \Phi(z)$ – $\forall$ первообр. для $f(z)$ в G

Положим $z = z_0$ в $(*)$: $C = \Phi(z_0)$: $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0)$.

Задача: $(\ln z)' = \frac{1}{z}$, $\forall z \neq 0$

Интегральная формула Коши



$f(z) \in A(G)$, $L \in G$, $\mathrm{int}\,L \subset G$, $z_0 \in \mathrm{int}\,L$

Тогда $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$ (инт-л Коши)

$\gamma_\rho : |z - z_0| = \rho$

$C = L \cup \gamma_\rho$, D, $z_0 \notin C$, $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0} \in A(D)$.

По т. о сос. контура: $\oint_{L^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \oint_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = ?$

Д-м: $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz \to f(z_0)$ при $\rho \to 0$

$\left|\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz - f(z_0)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz\right| =$

$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z_0)\,dz}{z - z_0} =$

$= \frac{1}{2\pi} \sup \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \cdot 2\pi\rho \leq$

$= \max_{z \in \gamma_\rho} |f(z) - f(z_0)| \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$

Замечание 1

① Если G – односв. обл., огр. L и $f(z) \in A(G)$ и $f \in C(\bar{G})$, то $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$, $\forall z_0 \in G$.

Замечание 2 $L: z=z_0+\rho e^{i\varphi}$, $0\le\varphi\le 2\pi$,

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+\rho e^{i\varphi})}{\rho e^{i\varphi}}\rho i e^{i\varphi}d\varphi=\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+\rho e^{i\varphi})d\varphi}$$

ф-ла о среднего значения

Интегралы, зависящие от параметра

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx \qquad f, f'_y\in C(\Pi),\ a\le x\le b,\ c\le y\le d,$$

$$I'_y=\int_a^b f'_y(x,y)dx$$

$f(x,y_1,\ldots,y_m)$

$f, f'_{y_1},\ldots,f'_{y_m}\in C(\Pi)$ $\quad I'_{y_i}=\int_a^b f'_{y_i}(x,y_1,\ldots,y_m)dx$

$P(x,y,t_1,\ldots,t_m)$, $Q(x,y,t_1,\ldots,t_m)$

$$I(t_1,\ldots,t_m)=\int_L Pdx+Qdy \qquad I'_{t_1}=\int_L P'_{t_1}dx+Q'_{t_1}dy$$

$$F(z)=\int_L\varphi(z,\xi)d\xi$$

① L - кус. гладк. кривая на пл. ξ, $z\in$ обл. G на пл. z.

② При фикс. ξ_1 $\varphi(z,\xi_1)\in A(G)$

③ $\varphi(z,\xi_1)$, $\varphi'_z(z,\xi_1)$ - непр. по совокупн. аргум.

Теорема об инт-ле с параметром

Пусть выполн. усл-я 1-3. Тогда:

1) $F(z)\in A(G)$

2) $F'(z)=\int_L\varphi'_z(z,\xi_1)d\xi_1$, $\quad z=x+iy$, $\xi=\xi+i\eta$

Док-во $F(z)=U(x,y)+iV(x,y)$

$\varphi(z,\xi_1)=u(x,y,\xi,\eta)+iv(x,y,\xi,\eta)$

$$U(x,y)=\int_L u\,d\xi-v\,d\eta,\quad V(x,y)=\int_L v\,d\xi+u\,d\eta$$

u'_x,u'_y, v'_x,v'_y - непр. по всем 4 переменным.

$$U'_x=\int_L u'_x d\xi-v'_x d\eta,\quad U'_y=\int_L u'_y d\xi-v'_y d\eta$$

$$V'(x,y)=\int_L v'_x d\xi+u'_x d\eta=\int_L -u'_y d\xi+v'_y d\eta=-U'_y$$

$$V'_y(x,y)=\int_L v'_y d\xi+u'_y d\eta=\int_L u'_x d\xi-v'_x d\eta=U'_x(x,y)$$

$U(x,y)$, $V(x,y)$ непр. дифф. и удовл. усл. (CR) $\Rightarrow F(z)\in A(G)$

$$F'(z)=U'_x+iV'_x=\int_L u'_x d\xi-v'_x d\eta+i\int_L v'_x d\xi+u'_x d\eta$$

$\varphi'_z(z,\xi_1)=u'_x+iv'_x$

$$\int_L\varphi'_z(z,\xi_1)d\xi_1=\int_L u'_x d\xi-v'_x d\eta+i\int_L v'_x d\xi+u'_x d\eta$$

Бесконечн. дифф. аналит. ф-ии

Теорема о бескон. дифф-ти

Ф-ия $f(z)$, аналит. в обл. G, имеет в этой обл. произв. всех порядков.

Док-во

Пусть z - произв. т. из G. Построим контур L так, чтобы $L\subset G$, $\operatorname{int}L\subset G$ и $z\in\operatorname{int}L$. Тогда $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L^+}\frac{f(\xi_1)}{\xi_1-z}d\xi_1$, $D=\operatorname{int}L$

По правилу Лейбница $f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L^+}\frac{f(\xi_1)d\xi_1}{(\xi_1-z)^2}$

$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_{L^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3}d\zeta$, $f'''(z) = \frac{3!}{2\pi i}\oint_{L^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^4}d\zeta$

$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{L^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$

Следствие

1) Произв. аналит. ф-ии сама явл. анал. ф-ей

$f(z) \to f'(z) \to f''(z) \to f'''(z)$.

2) Теорема Морера. Пусть $f(z)\in C(G)$ и f имеет в G С-св-во. Тогда в регул. $f\in A(G)$.

Д-во. По теореме о первообр. $\exists F(z)\in A(G)$, такая, что $F'(z)=f(z)$ $\forall z\in G$. По сл. 1, $f(z)\in A(G)$

3) Теорема Лиувилля. Целая ф-ия $f(z)$, огранич. во всей $\mathbb{C}$, есть константа

Док-во. Фикс. произв. т. $z_0\in\mathbb{C}$. $f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L^+}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$

$L: |z-z_0|=R$

$\exists M>0$ $|f(z)|\le M$ $\forall z\in\mathbb{C}$.

$|f'(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\max_{z\in L}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^2}\cdot 2\pi R \le \frac{M}{R}$ при $R\to\infty$ имеем $f'(z_0)=0$.

$f'(z)=0$ $\forall z\in\mathbb{C}$ $\Rightarrow f(z) = const$

4) Основная теорема алгебры

Многочлен $P_n(z)$ степени $n\ge1$ имеет в $\mathbb{C}$ хотя бы один корень

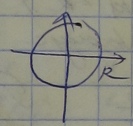
Док-во (от противного)

Пусть P_n не имеет корней в $\mathbb{C}$. Тогда $f(z)=\frac{1}{P_n(z)}$ — целая

Т.к. $P_n(z)\to\infty$ при $z\to\infty$, то $f(z)$ имеет конечный предел (нуль) на бесконечности

$\Rightarrow f(z)$ огранич. во всей $\mathbb{C}$

$f_\infty = \lim_{z\to\infty} f(z)$ $|f(z)-f_\infty|\le 1$ $|z|\ge R$



$|z|\ge R$ $|f(z)|\le|f_\infty|+1$.

По теореме Лиувилля, $f(z)$ и $P_n(z)$ суть константы. противоречие $\Rightarrow$

$P_n(z)$ имеет корни в $\mathbb{C}$.

5) $\sin z$, $\cos z$ — целые ф-ии, то они не могут быть ограничены.

Глава 5 Ряды аналитических ф-ий

Задача. Пусть ряд из $f_n \rightrightarrows$ $\exists M>0$ $|\varphi(z)|\le M$ $\forall z\in G$ $\varphi(z)$ — огр. в G.

Тогда $\sum \varphi(z) f_n(z) \underset{G}{\rightrightarrows}$

Теорема 5.1 Пусть $f_n(z)$ непр. в G ($f_n(z)\in C(G)$), $n=1,2,\dots$, а $\sum f_n(z)\underset{G}{\rightrightarrows} f(z) \Rightarrow$ тогда

1) $f(z)\in C(G)$,

2) Если L — произв. кривая в G, то $\int_L f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_L f_n(z)dz$

Опр. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится в обл. G нормально (к ф-ии $f(z)$), если он сходит. (к f) равномерно на всяком замкн. круге $\bar K\subset G$

1-ая теорема Вейерштрасса (о рядах аналит. ф-ий)

Пусть $u_n(z)\in A(G)$, $n=1,2,\dots$, $\sum u_n(z)$ сх-ся в G нормально к $f(z)$. Тогда:

1) $f(z)\in A(G)$

2) ряд $f(z)=\sum u_n(z)$ можно почленно дифф-ть $\forall$ число раз.

$f^{(k)}(z)=\sum u_n^{(k)}(z)$, $\forall k\in N$, $\forall z\in G$,

Все продифф. ряды сходятся в G нормально.

Док-во

1) Покажем, что $f(z)$ аналит. в окр. всякой точки $z_0\in G$

Пусть $K_R(z_0)=\{|z-z_0|\le R\}\subset G$ $\sum u_n(z)\underset{K_R}{\rightrightarrows} f(z)$

По Теор. 5.1 $f(z) \in C(\overline{K_R})$ $\exists \gamma$ — кусоч. контур $\subset K_R$

$\oint\limits_\gamma f(z) = \sum \oint\limits_\gamma \underset{0}{\underset{\parallel}{u_n(z)}}$ (по следствию) Теор. Коши

По теореме Морера, $f(z) \in A(K_R)$

2) $\exists z_0$ — произв. т. из G. Постр. круг $\overline{K_R(z_0)} \subset G$

$\gamma_R = \{|z-z_0| = R\}$

$f(z) = \sum u_n(z) \underset{\gamma_R}{\rightrightarrows}$ Фикс. $k \in \mathbb{N}$. Умножим обе части в (*)

на $\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}} = g(z)$

$|g(z)| = \frac{1}{R^{k+1}}$, $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum \frac{u_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \underset{\gamma_R}{\rightrightarrows}$ $|g(z)| = \frac{1}{R^{k+1}}$ $z \in \gamma_R$

Интегрируем почленно по γ_R:

$$\frac{k!}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum \frac{k!}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_R} \frac{u_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}, \quad f^{(k)}(z_0) = \sum u_n^{(k)}(z_0)$$

Степенные ряды

(*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ (*) c_n ($n=1,2,\dots$) и z_0 — конст.

Теорема 5.2 $\exists R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$ (Ф.Ад.)

Если $R=0$, то ряд (*) сход. только в т. $z_0 = 0$

Если $R>0$ (возможен случай $R=\infty$), то ряд (*) сход. абсол. в круге $K(z_0) = \{|z-z_0| < R\}$ и расход. если $|z-z_0| > R$

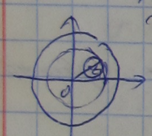
R — радиус сходимости, K_R — круг сходимости

Лемма Ряд (*) с $R>0$ сход. к своей сумме $f(z)$ нормально в K_R.

Док-во

$\exists \overline{K_r} = \{|z-z_1| \le r\} \subset K_R$, где $\rho = |z_1 - z_0| + r < R$

Тогда круг $\overline{K_\rho} = \{|z-z_0| \le \rho\} \supset \overline{K_r}$. В т. $\hat{z} = z_0 + \rho$ ряд (*)



сход. абсол., т.е. сход. ряд $\sum |c_n| \rho^n$

Этот ряд служит мажорантой Вейерштрасса для ряда (*), рассматриваем в круге $\overline{K_\rho}$ $\Rightarrow$ ряд (*) $\underset{\overline{K_\rho}}{\rightrightarrows}$

$(|z-z_0| \le \rho)$ ряд (*) $\underset{\overline{K_r}}{\rightrightarrows}$

По теореме Вейерштрасса:

1) $f(z) \in A(K_R)$

2) хар-во $f(z) = \sum c_n(z-z_0)^n$; можно почленно дифф. $\forall$ число раз

$f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)\dots(n-k+1)(z-z_0)^{n-k}$ (**), $R_k = R$

$R>0$ $z=z_0$ (*) $c_0 = f(z_0)$ $z = z_0$ (**) $c_k k! = f^{(k)}(z_0)$

(+) $c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$, $k = 0,1,2,\dots$

Степенной ряд с $R>0$ однозн. опред. своей суммой $f(z)$

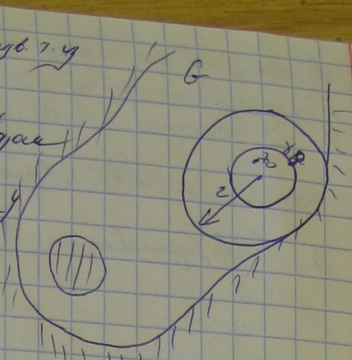
Опр Степенной ряд с коэфф. (+) наз. рядом Тейлора для $f(z)$, а его коэфф. наз. коэфф. Тейлора

Пример $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n$ $c_n = 1$ $\forall n \Rightarrow R = 1$

$|z-z_0| < 1$

$S_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} (z-z_0)^k = \frac{1-(z-z_0)^{n+1}}{1-(z-z_0)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(z) = \frac{1}{1-(z-z_0)}$

Теорема Тейлора Пусть $f(z)\in A(G)$, z_0 — произв. т. G, $r=\rho(z_0,\Gamma)$, $\Gamma=\partial G$.



Тогда $f(z)$ разлагается, причём единственным образом, в степенной ряд по степеням $z-z_0$, сходящийся по меньшей мере в круге $K_r=\{|z-z_0|<r\}$.

Док-во. Единств. степен. разлож. вытек. из замечания о единств. степ. ряда.

z — произв. т. из K_r. Построим вспомог. окр-ть $\gamma_\rho\{|\zeta-z_0|=\rho\}$ так, чтобы $\rho<r$ ($\gamma_\rho\subset K_r$) и $z\in \operatorname{int}\gamma_\rho$.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

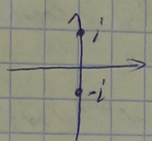
$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} \qquad \left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1$$

$$\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n \underset{\gamma_\rho}{\rightrightarrows}\ \zeta\in\gamma_\rho \qquad \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta}_{c_n}(z-z_0)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

Пример $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ $\qquad G=\{z\neq\pm i\}$



1) $z_0=0$ $\quad$ 2) $z_0=1$

$|z|<1$

1) $\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$, $1-(-z^2)$) $|z|<1$ $r=1$.

2) $\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-1)^n$ $\qquad \frac{1}{z-i}=\frac{1}{z-1-i+1}=\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{1-i}}=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{(1-i)^n}=$

$\left|\frac{z-1}{1-i}\right|<1 \sim |z-1|<|1-i|=\sqrt{2}$ $\qquad =\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{(1-i)^{n+1}}$

$$\frac{1}{z+i}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{(1+i)^{n+1}} \qquad |z-1|<|1+i|=\sqrt{2}$$

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}}-\frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right]\cdot(z-1)^n.$$

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{4}\right]}{2^{\frac{n+1}{2}}}(z-1)^n$$

Теорема о единственности

Обл. G, подмн-во E достаточно мощное (имеет хотя бы 1 конечн. пред. т. z_0, м.б. $\notin$ самому мн-ву, но $\in G$)

1. Формулировка: может $\exists$ не более 1 ф-ии $f(z)\in A(G)$, принимающ. заданные значения на E.
2. Фор-ка: $\exists\ \varphi(z)\in A(G)$: обращ. в 0 на E ($\varphi(z)=0,\ \forall z\in E$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(z)\equiv 0,\ \forall z\in G$

Задача: р-ть эквивалентны.

($\Rightarrow$) единственн., напр., все 0 на E.

($\Leftarrow$) от противного: $\exists z \Rightarrow$ разн. $\neq 0$ $\Rightarrow$ против. со 2 ф-ой

Док-во 2 ф. Выделим в E послед. $\{z_k\}$, сход. к z_0 и такую, что $z_k\neq z_0$ $\forall k$. Разложим $\varphi(z)$ в ряд по степ. $(z-z_0)$ $\Rightarrow$ по т. Тейлора ряд сход-ся в $K_r(z-z_0)$, где $r=\rho(z_0,\partial G)$ $\Rightarrow$

$\varphi(z)=c_0+c_1(z-z_0)+\ldots$

2) док, что все коэфф. $= 0$; $c_0 = \varphi(z_0) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi(z_k) = 0$.

индукция: $\exists$ $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} = 0 \Rightarrow \varphi(z) = c_n (z-z_0)^n + c_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \dots$

положим $z = z_k$, $0 = \varphi(z_k) = c_n (z-z_0)^n + \dots$ $\Big| : (z_k - z_0)^n \neq 0$ $z_k \neq z_0$

$0 = c_n + c_{n+1}(z_k - z_0) + \dots \xrightarrow{z_k \to z_0} c_n = 0$.

Все $c_i = 0$, $\forall i = 0, 1, 2, \dots$, $\forall z \in E \Rightarrow \varphi(z) \equiv 0$ в $K_r(z_0)$.

II. (Маркушевич, гл. 6, разд. 8, т. о!)

Следствия из т. о единственности

Опр: $f(z) \in A(G)$ и $f(z) \neq const$. Фикс. число $A \Rightarrow \forall$ т. $z_0 \in G : f(z_0) = A$ наз. A точкой f.

Опр: $\exists f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$, $f^{(k)}(z_0) \neq 0 \Rightarrow z_0$ – A точка порядка (кратности) k. $A = 0$ – нуль ф-ии f.

Опр: $f(z) = A + \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k + \dots$ $k = 1 \Rightarrow z_0$ – простая A-точка; $k > 1$ – кратная

Пр: 1) $z_k = 2\pi k$, $f(z) = \cos z \Rightarrow f(z_k) = 1$, $f'(z_k) = 0, \dots \Rightarrow z_k$ – двоичные 1-точки для $\cos z$.

2) $z_0 = 0$ $f(z) = \sin z - z$, $f(0) = 0 \Rightarrow z_0$ – нуль ф-ии $f(z)$.

$f'(z) = \cos z - 1 \Rightarrow f'(0) = 0$ $f''(z) = -\sin z \Rightarrow f''(0) = 0$ $f'''(z) = -\cos z \overset{z=z_0}{\neq} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z_0 = 0$ – тройной нуль $f(z)$

1° $\exists$ на $[a, b] \subset \mathbb{R}$ опред. ф-ия $\varphi(x)$, $[a, b] \subset$ обл. G.

Тогда $\exists$ не более 1 ф-ии $f(z) \in A(G)$ совпад. с $\varphi(x)$ на $[a, b]$

Опр: Если ф-ия $f(z) \exists$, то она наз. аналит. продолжением ф-ии φ с $[a, b]$ в обл. G.

Пр. $[0, 2\pi]$: $\varphi(x) = \sin x$, $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$, $G = \mathbb{C}$

2° $\exists$ F – компакт, $F \subset G$, $f(z) \in A(G)$, $f(z) \neq const \Rightarrow$ компакт F может содержать лишь конечное число A-точек ф-ии f.

В частности, если $f(z) \neq 0$, то F может содерж. лишь конечное число 0.

Д-во (от противного)

$\exists F$ содерж. беск. мн-во A-точек $f(z) \Rightarrow$ это мн-во E имеет хотя бы 1 пред. т. z_0 (Б–В) $\Rightarrow z_0 \in F$ (замкн) $\Rightarrow$

$z_0 \in G \Rightarrow$ на мн-ве E $f(z)$ совпад. с $g(z) \equiv A \Rightarrow f(z) \equiv A$ на всей $G \Rightarrow$ противор. с условием, что $f \neq const$ на G.

Пр. 1) F – неогр $\mathbb{C}$, $f(z) = \sin z \Rightarrow z_k = k\pi$, $f(z_k) = 0$, $f(z) \neq 0$

2) $F = \{0 < |z| < 1\}$ – не замкн. $f(z) = \sin\frac{1}{z}$, $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $f(z_k) = 0$, $f(z) \neq 0$.

3° Несуществ. аналит. ф-ии с заданными св-вами

Задача: $\exists$ ли ф-ия $f(z)$, аналит. в круге $|z| < 1$ и такой, что $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$, $n = 2, 3, \dots$?

Решение: $E = \{\frac{1}{n}\}$, $n = 2, 3, \ldots$ $\frac{1}{n} \to z_0 = 0 \in G$. На E: $f(z) = g(z)$, $g(z) = \frac{1}{z}$ по т.о единств. $f(z) = g(z)$, $\forall z \in G$, $g(-\frac{1}{n}) = -\frac{1}{n} \neq \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ нужное аналит. фун не $\exists$.

4° Продолжение соотношений (Свешников, Тихонов, гл. 3, §1 п2)

Пр: 1) $F(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ — аналит (целая) в $\mathbb{C}$
$F(z) = 0$ для $z = x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ по т. о един. $F(z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

2) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$ (*) (*)

Фикс. вещ. z_2 и рассм. обе части (*) как фун от z_1:
$f(z_1) = \cos(z_1 + x_1)$, $g(z_1) = \cos x_2 \cos z_1 - \sin x_2 \sin z_1$ — целые, $f(z_0) = f(z_1)$, если $z_1 = x_1 \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f(z_1) = g(z_1)$ $\forall z_1 \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ (*) верно для $\forall$ вещ. z_2 и компл. z_1.

Фикс. $\forall z_1 \in \mathbb{C}$ и рассм. обе части (*) как фун от z_2:
$F(z_2) = \cos(z_1 + z_2)$, $G(z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2$ — целые, $F(z_2) = G(z_2)$, если $z_2 = x_2 \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow F(z_2) = G(z_2)$ $\forall z_2 \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ (*) верна для $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Ряды Лорана и изолированные особые точки

$\exists f(z) \in A(U_r(z_0))$, $U_r(z_0) \overset{\det}{=} \{0 < |z - z_0| < r\} \Rightarrow$ т. Тейлора не работает

Опр. Рядом Лорана наз ряд вида $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ (*)

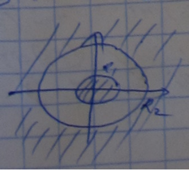
Опр. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n = \underbrace{\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n}_{\text{I}} + \underbrace{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}}_{\text{II}}$ (*)

Опр. Ряд (*) сход. в т. z_0 если в этой т. сход. оба ряда I и II.
Ряд I сход. абс. в круге $K_1 : |z - z_0| < R_1$, где $R_1 \overset{\text{C-A}}{=} \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}}$

$R_1 = 0 \Rightarrow$ ряд (*) не сход. нигде $\Rightarrow \exists R_1 > 0$, ~~где $R_1 =$~~ $\Rightarrow$
в круге K_1 I опред. аналит. фун $f_1(z)$

Аналогич., ряд II сход. абс. в круге K_2: $|\xi| < \frac{1}{R_2}$, где
$\frac{1}{z - z_0} = \xi$ $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n} \xi^n\right)$, при этом $R_2 = \infty \Rightarrow$ ряд (*) не сходится нигде $\Rightarrow \exists R_2 \neq \infty \Rightarrow$ в K_2 ряд II опр. аналит фун $f_2(z)$ $\Rightarrow$ ряд II сход. абсол. в обл. $|z - z_0| > R_2$ и опред. анал. ф-цию $f_2(z)$ $\Rightarrow$ ряд II сход. абс. в обл $|z - z_0| > R_2$ и опред. анал. фун $f_2(z)$ $\Rightarrow$ $|z - z_0| > R_2$ и опред. анал. фун $f_2(z)$,
$\Rightarrow$ ряд II сход. абс. в обл. $|z - z_0| > R_2$ и опред. анал. фун $f_2(z)$.

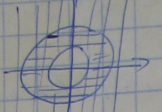
1) $R_1 < R_2$



(*) не сход. нигде

② $R_1 = R_2 = R$ ряд (*) может ...

③ $R_1 > R_2$



$D: R_1 < |z-z_0| < R_2$

ряд (*) сход. абс. Внутри кольца D и аналит. функ. $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ $\forall$ ряд f_1, f_2 сход. норм ⇒ сход. (*) к $f(z)$ – норм

Замечание о нормальн. сходимости:
Если $\sum u_n(z)$ сход. в обл. в норм., то этот ряд сход. ⇒ на каждом компакте $K \subset G$

Задача: док-ть зам., использ. лемму Гейне-Бореля

Замечание о единств. ряда Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

Д-во: $\gamma_\rho: |z-z_0| = \rho$, $R_2 < \rho < R_1$. Ряд (*) $\rightrightarrows$ умн. обе части (**) на $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}$, $k \in \mathbb{Z}$ – огр.:

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i} c_n (z-z_0)^{n-k-1} \overset{\gamma_\rho}{\rightrightarrows};\quad \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum c_n \oint_{\gamma_\rho}(z-z_0)^{n-k-1}dz$$

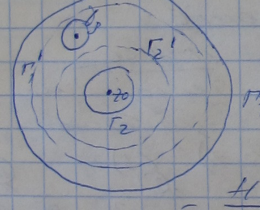
но $\oint_{\gamma_\rho}\frac{dz}{(z-z_0)^m} = \begin{cases}0, & m \ne 1\\ 2\pi i, & m = 1\end{cases}$, $n-k-1 = -1$, $n = k$ ⇒

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\boxed{c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{k+1}}}$$

Теорема Лорана

Ф-ия $f(z) \in A(D: R_2 < |z-z_0| < R_1)$ м.б. представлена в D рядом Лорана, причём это представл. единств.



Док-во: 1) единств. представл. из зам-я
2) $\exists z$ – т. кольца D ⇒ $z \in \text{int}\, D'$: $R_2' < |\zeta - z_0| < R_1'$,
где $D' \subset D$, $\gamma_\rho: |\zeta - z| = \rho$, $\gamma_\rho \subset D'$.

Рассмотр. $3^х$-связн. обл., огр. конт. $\Gamma_1' \cup \Gamma_2' \cup \gamma_\rho$: $\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \in A$ ⇒ по Т о сост. контура

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta}_{=f(z)}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \quad (***)$$

а) $\zeta \in \Gamma_1'$: $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{R_1'} = \theta < 1$.

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)} = -\|- = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \Rightarrow \text{числ. мажор. со } \theta)$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n \rightrightarrows \overset{\text{почл}}{\Rightarrow} \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1'}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Аналогично

б) $\zeta \in \Gamma_2'$, $\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right| = \frac{R_2'}{|z-z_0|} = \mu < 1$

$$-\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{(z-z_0)-(\zeta-z_0)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} \overset{\Gamma_2'}{\rightrightarrows}$$

$$-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \sum_{n=1}^{\infty} f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}\frac{1}{(z-z_0)^n} \underset{\Gamma_2'}{\overset{\text{почл}}{\rightrightarrows}} -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2'}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} = \sum c_{-n}(z-z_0)^{-n},$$

где $c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2'}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}$, $n = 1, 2, \dots$

т.о. подставляя в (***) получаем нер-во
Лорановское представление для $f(z)$. Для $\oint$ получим
Γ_1 и Γ_1' – можно зависят от z, но зависимость $C_n(z)$ нет,
т.к. не зависит от контура по т. о сост. контура.

Классификация изолированных особых точек

$f(z) \in A_{D}$, $\{0 < |z-z_0| < R\} = D$, z_0 – изолир. особая т. $f(z)$

По т. Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}(z-z_0)^{-n}$, $z \in D$

① Ряд (*) не содержит отриц. степ. двучл. $z-z_0$
$\Leftrightarrow$ z_0 – устранимая особая точка (УОТ)

② Ряд (*) содержит конечное число чл. с отр. ст. $z-z_0$
$\Leftrightarrow$ z_0 – полюс.

③ Ряд (*) содерж. бескон. число членов с отр. ст. $z-z_0$
$\Leftrightarrow$ z_0 – существ. особ. т. (СОТ)

Теорема 6.1 След. высказ. $\sim$:
1) z_0 – УОТ $f(z)$
2) $\exists$ конечн. $\lim_{z\to z_0} f(z)$
3) $f(z)$ огр. в некот. окр. $U(z_0)$

Д-во ($1 \to 2$) z_0 – УОТ $f(z) \Rightarrow$ (*) $= f(z) = C_0 + C_1(z-z_0) + \ldots$, $f(z) \xrightarrow{z\to z_0} C_0$

($2 \to 3$) Тривиально

($3 \to 1$) $U(z_0) \subset D$, $\gamma_\rho : |z-z_0| = \rho$, $\gamma_\rho \subset U(z_0)$

$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}$, $n = 0, \pm1, \pm2$

$\exists M > 0: \ |f(z)| \le M \ \forall z \in U(z_0)$: $|C_n| \le \frac{1}{2\pi} \max_{\xi \in \gamma_\rho} \frac{|f(\xi)|}{\underbrace{|\xi - z_0|^{n+1}}_{\rho^{n+1}}} \cdot 2\pi\rho \le$

$\le M\rho^{-n}$: для $n < 0$: $\rho \to 0 \Rightarrow C_n = 0$

Замечание 1 Значит, в УОТ – либо неопределена, либо имеет др. значение $\Rightarrow$ перепоред. $f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)$

Замечание 2 Если z_0 $f(z)$ не явл. УОТ, то $f(z)$ неогр. в $\forall$ окр. z_0

z_0 – полюс: $\ldots m$

(**) $f(z) = \frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{C_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{C_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$

$C_{-m} \ne 0 \Rightarrow z_0$ – полюс кратности (порядка) m

$m = 1$ – простой полюс, $m > 1$ – кратный полюс

Теорема 6.2 (Теорема о поведении ~~полюса~~ функции вблизи полюса)
След. выскaз. $\sim$:

1) z_0 – полюс крат. m
$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \underbrace{(C_{-m} + C_{-m+1}(z-z_0) + \ldots)}_{\varphi(z) \in A(D) \,:\, \varphi(z) \xrightarrow{z\to z_0} C_{-m} \ne 0}$

$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ $\quad z \to z_0$ $\quad \frac{C_{-m}}{0} = \infty \Rightarrow f(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} \infty$

Замечание $\varphi(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \neq z_0, \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$, z_0 — нуль порядка m для $\varphi(z)$

$\boxed{2) \to 1)}$ $f(z) \to \infty$ при $z \to z_0$.

Определим $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$, $z \in U \subset D$

$\exists \lim\limits_{z\to z_0} \varphi(z) = 0$ z_0 — УОТ для $\varphi(z)$. Положим $\varphi(z_0) = 0$.

$\exists z_0$ — нуль $\varphi(z)$ кр-ти m, $\varphi(z) = d_m (z-z_0)^m + d_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \ldots =$

$= (z-z_0)^m \underbrace{(d_m + d_{m+1}(z-z_0) + \ldots)}_{\psi(z)}$

$d_m \neq 0$

$\psi(z_0) = d_m \neq 0$, $\psi(z) \neq 0$, $\forall z \in U \subset D$

$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m} \underbrace{\frac{1}{\psi(z)}}_{\varphi(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m}(a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots)$
$z \in U$ $\{a_0 = \varphi(z_0) = \frac{1}{\psi(z_0)} = \frac{1}{d_m}\}$

$f(z) = \frac{a_0}{(z-z_0)^m} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots$ z_0 — полюс пор. m для $f(z)$

Теорема 6.3 Т. z_0 тогда и только тогда явл. полюсом порядка m для $f(z)$, когда z_0 есть нуль порядка m для $\varphi(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \in U \subset D, \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$

z_0 — СОТ $f(z) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$

Теорема Сохоцкого $\exists z_0$ — сущест. особая т. фии f, тогда для всякого комплексн. числа A (конечного или бесконечного) найдется послед. $\{z_n\}$ такая, что $z_n \to z_0$, $f(z_n) \to A$

Док-во 1) $A = \infty$ $f(z)$ не огранич. в $\forall$ окр. т. z_0

$U_n : 0 < |z - z_0| < \frac{1}{n}$ $z_n' \in U_n$, $|f(z_n')| > n$

$\{z_n'\}$ — ∞-послед Сохоцкого

2) A — конечн. число

Док-во от противного. $\exists$ для данного A не $\exists$ A — послед. Сохоцкого. Тогда $\exists U_\delta : 0 < |z - z_0| < \delta$ и число $\varepsilon > 0$ такое, что $|f(z) - A| > \varepsilon$, $\forall z \in U_\delta$

Положим $\psi(z) = \frac{1}{f(z) - A}$, $z \in U_\delta$, $\psi(z)$ — анал. для $z \in U_\delta$

$|\psi(z)| = \frac{1}{|f(z) - A|} \leq \frac{1}{\varepsilon}$

z_0 — УОТ для $\psi(z)$

$\exists \lim\limits_{z \to z_0} \psi(z)$ $\{6.1\}$ $z = z_n'$, z_n' — ∞ — послед. Сохоцкого

$\psi(z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \psi(z_n') = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{f(z_n') - A} = 0$

$\lim\limits_{z \to z_0} \psi(z) = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{1}{f(z) - A} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow z_0$ — полюс для $f(z)$ $\Rightarrow$ противоречие

След. A-послед. Сохоцкого $\exists$

Пример $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$ СОТ

$e^z = 1 + \frac{1}{1!} z + \frac{1}{2!} z^2 + \ldots + \frac{1}{n!} z^n + \ldots$ $\forall z \in \mathbb{C}$

$z \neq 0$ $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{2 z^2} + \ldots + \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} + \ldots$ $\forall z \neq 0$

$A = \infty$ $z_n' = \frac{1}{n} \to 0$,
$f(z_n') = e^n \to \infty$

$A = 0$ $z_n' = -\frac{1}{n} \to 0$, $f(z_n') = e^{-n} \to 0$

A $f(z_n)$
$f(z_n) = A$ z_n
$\lim f(z_n) = A$

$$e^{\frac{1}{z_n}} = A \sim \frac{1}{z_n} = \ln A$$

$$\ln A = \ln|A| + i\arg A = \underbrace{\ln|A| + i\arg A}_{\ln A} + i2\pi n =$$

$$= \ln A + i\alpha\pi n$$

$z_n = \frac{1}{\ln A} = \frac{1}{\ln A + i2\pi n}$, $n = 1, 2, \dots$

$z_n \to 0$ $\quad f(z_n) = A$

Теорема Пикара (Большая)

$\exists$ z_0 - СОТ для $f(z)$. Тогда для $\forall$ конечного A (с единств. возможным исключением A_0) $\exists$ послед. A-точек ф-ии f, сходящиеся к т. z_0.

Задача Док-ть, что 1) для $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ т. $z_0 = 0$ - существенно особая
2) для этой ф-ии последов. A-точек, сходящ. к z_0, можно построить для $\forall$ конечн. A

Особенность в бесконечно удалённой точке

$f(z) \in A(D)$; D: $|z| > R$
$z_0 = \infty$ - изол. особ. т. f
$\zeta = \frac{1}{z}$, $g(\zeta) = f(\frac{1}{\zeta})$ $\zeta \in$ окр-ти т. $\zeta_0 = 0$ $\quad 0 < |\zeta_0| < \frac{1}{R}$

Опр. т. $z_0 = \infty$ явл. для $f(z)$ УОТ, полюсом или СОТ, для $g(\zeta)$

$z_0 = \infty$, $\zeta_0 = 0$	$g(\zeta)$	$f(z)$ $\quad \zeta = \frac{1}{z}$
УОТ	$g(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \dots + a_n\zeta^n + \dots$	$f(z) = a_0 + a_1\frac{1}{z} + \dots + a_n\frac{1}{z^n} + \dots$
	$g(\zeta) = a_{-m}\zeta^{-m} + \dots + a_{-1}\zeta^{-1} + a_0 + a_1\zeta + \dots$ $\quad a_{-m} \neq 0$	$f(z) = a_{-m}z^m + \dots + a_{-1}z + a_0 + a_1\frac{1}{z} + \dots$ $\quad a_{-m} \neq 0$
	$g(\zeta) = \dots + a_{-n}\zeta^{-n} + \dots + a_{-1}\zeta^{-1} + a_0 + a_1\zeta + \dots$	$f(z) = \dots + a_{-n}z^n + \dots + a_{-1}z + a_0 + a_1\frac{1}{z} + \dots$

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n}_{\text{главн. часть}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \cdot a_n}_{\text{правильная часть}}$$

① Следующие утверждения эквивалентны:
1) $z_0 = \infty$ - УОТ для $f(z)$
2) $\exists \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$
3) $f(z)$ ограничен. в некот. окрестн. бесконечно удал. точки

② $z_0 = \infty$ - полюс для $f(z) \iff \exists \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$

Если $z_0 = \infty$ есть СОТ для $f(z)$, то $\nexists \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ (ни конечного, ни бесконечн.)

Примеры ① $f(z) = \sin^2\frac{1}{z}$, $\exists \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$,
$f(\infty) = 0$, $z_0 = \infty$ - двойной нуль для f.

② $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$
$a_0 \neq 0$

③ $f(z) = e^z$
$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \dots + \frac{1}{n!}z^n + \dots$
$z_0 = \infty$ СОТ для e^z

7 Вычеты и их приложения

$f(z)$ – аналит. в обл. G за исключ. некоторого числа изолир. особых точек

Соглашение о контурах: все рассм. контуры не проходят через особые точки ф-ии $f(z)$.

Опр. ∃ z_0 – изол. особ. т. ф. $f(z)$ и $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ (*) есть лорановское разложение f в окр. т. z_0.

$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho} f(z)\,dz$

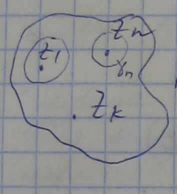
Вычетом ф-ии $f(z)$ в т. z_0 (или отн. т. z_0) наз. коэфф. C_{-1} в разлож. (*)

$$C_{-1}=\underset{z=z_0}{\operatorname{res}} f(z)=\operatorname{res}[f(z),z_0]=\text{Выч}[f(z),z_0]$$

Теорема 7.1 (теорема о вычетах) ∃ $z_1,\dots,z_n$ – все изолиров. особые точки внутри контура $\Gamma\subset G$. Тогда $\oint_\Gamma f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}[f(z),z_k]$

{ Если $\{z_k\}$ – беск. → ∃ z_0 – пред. т. для $\{z_k\}$. z_0 – неизол. особая точка }

Док-во:



$$\gamma_k:\ |z-z_k|=\rho_k,\quad (1\le k\le n)$$
$$\gamma_1,\dots,\gamma_n\subset \operatorname{int}\Gamma$$
$$\gamma_i\subset \operatorname{ext}\gamma_j\ (i\ne j)$$

По теореме о составн. контуре, $\oint_{\Gamma^+} f(z)\,dz=\oint_{\gamma_1^+} f(z)\,dz+\dots+\oint_{\gamma_n^+} f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}[f(z),z_k]$.

z_0 – простой полюс

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\dots$$

$f(z)(z-z_0)=c_{-1}+c_0(z-z_0)+c_1(z-z_0)^2+\dots$ Перейдем к пределу при $z\to z_0$:

$$\boxed{c_{-1}=\lim_{z\to z_0}[f(z)(z-z_0)]}$$

$f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z),\psi(z)$ – анал. в окр-ти z_0,

$\varphi(z_0)\ne 0,\ \psi(z_0)=0,\ \psi'(z_0)\ne 0$

$$\psi(z)=\psi'(z_0)(z-z_0)+\frac{\psi''(z_0)}{2}(z-z_0)^2+\dots$$

$$\left[c_{-1}=\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi'(z_0)+\frac{\psi''(z_0)}{2}(z-z_0)+\dots}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}\right]$$

$$c_{-1}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

∃ z_0 – полюс кратности $m>1$ ⇒ $f(z)=\dfrac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\dots+\dfrac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\dots$ $c_{-m}\ne 0$

$$f(z)(z-z_0)^m=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\dots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+c_0(z-z_0)^m+\dots$$

$$\frac{d^{m-1}[f(z)(z-z_0)^m]}{dz^{m-1}}=\underbrace{(m-1)(m-2)\dots 2\cdot 1}_{(m-1)!}\cdot c_{-1}+m(m-1)\dots 2\cdot c_0(z-z_0)+\dots$$

При $z\to z_0$: $\boxed{c_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}[f(z)(z-z_0)^m]}{dz^{m-1}}}$

Вычет относительно бесконечно удалённой точки

$f(z)\in A(\overset{\circ}{O}_\infty)$, $\overset{\circ}{O}_\infty$: $|z|>R$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

$res[f(z), \infty] = -c_{-1}$

Def. $\oint_\gamma f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \oint_{\gamma_b} t^n dz = -2\pi i\, c_{-1} = 2\pi i\, res[f(z), \infty]$

$res[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z)dz$

$z_0 = \infty$ - УОТ ф. $f(z)$ $\quad res[f(z), \infty] \neq 0$

Пр. $f(z) = \frac{1}{z}$ $\quad res[f(z), \infty] = -1 \neq 0$

Теор. 4 (теорема о полной сумме вычетов)

$\exists f(z)$ имеет в $\bar{C}$ только изолир. особые точки $z_1, \dots, z_n$ и $z_0 = \infty$

Тогда $\sum_{k=0}^{n} res[f(z), z_k] = 0$.

$\gamma_b: |z| = b \quad |z_i| < b, \; i = 1, 2, \dots, n$

$\oint_{\gamma_b^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res[f(z), z_k]$

$\oint_{\gamma_b^-} f(z)dz = 2\pi i\, res[f(z), \infty]$

$\sum_{k=0}^{n} res[f(z), z_k] = 0$

Замечание Условие теор. 4.2 выполнено для всякой рацион. функ. $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$

Пример 1 Вычислить $I = \oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$

$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ $\quad z_1, \dots, z_5$ - корни 5 ст. из 1 - простые полюса

$z_6 = 3, \; z_0 = \infty$

$I = \{ТЛ\} = 2\pi i \sum_{k=1}^{5} res[f(z), z_k]$

$\varphi(z) = \frac{1}{z-3}, \quad \psi(z) = z^5 - 1, \; \psi(z_k) = 0, \; \psi'(z_k) = 5z_k^4 \neq 0$

$\varphi(z_k) \neq 0$

$res[f(z), z_k] = \frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)} = \frac{\frac{1}{z_k - 3}}{5z_k^4} = \frac{1}{5}\frac{z_k}{z_k - 3}$

Тогда $I = \frac{2\pi i}{5} \sum_{k=1}^{5} \frac{z_k}{z_k - 3} = \dots$

Другой способ: $\sum_{k=1}^{5} res[f(z), z_k] = -res[f(z), z_6] - res[f(z), z_0]$

z_6: $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\frac{1}{z^5-1}}{z-3}$ $\quad \varphi(z) \neq 0, \; \psi(3) = 0, \; \psi'(z) = 1 \neq 0$.

$res[f(z), z_6] = \frac{\varphi(3)}{\psi'(3)} = \frac{1}{3^5 - 1} = \frac{1}{242}$

$f(z) = \frac{1}{z^6} \frac{1}{1-\frac{3}{z}} \frac{1}{1-\frac{1}{z^5}} = \frac{1}{z^6}\left(1 + \frac{3}{z} + \frac{9}{z^2} + \dots\right)\left(1 + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^{10}} + \dots\right) =$

$= \frac{1}{z^6} + \frac{3}{z^7} + \frac{9}{z^8} + \dots \quad c_{-1} = 0$

$res[f(z), z_0] = 0$

$I = -2\pi i\, res[f(z), z_6] = -2\pi i \frac{1}{242} = -\frac{\pi i}{121}$.

Применение вычетов к вычислению интегралов от веществ. переменных

Инт-лы вида $I = \int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi$

$R(x, y)$ - рац. функ., т.е. $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, $\quad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

Замена $z = e^{i\varphi}$ $\quad [0, 2\pi] \to |z| = 1$

$\sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$

$dz = \underbrace{ie^{i\varphi}}_{z} d\varphi \to d\varphi = \frac{dz}{iz}$

$I = \frac{1}{2i} \oint_{|z|=1}^{+} \tilde{R}(z)dz, \quad \tilde{R}(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$

Пример 2 Вычислить $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(5+3\cos\varphi)} = \frac{1}{i}\oint \frac{dz}{z(5+3\frac{z+z^{-1}}{2})} = \frac{2}{i}\oint_{|z|=1} \frac{1}{3z^2+10z+3}dz$

$f(z) = \frac{1}{3z^2+10z+3}$, $z_1 = -\frac{1}{3}$, $z_2 = -3$.

$res[f(z), -\frac{1}{3}] = \frac{\varphi(z)}{\psi'(z)} = \frac{1}{6z+10}\Big|_{z=-\frac{1}{3}} = \frac{1}{8}$

$I = \frac{2}{i}\cdot 2\pi i\, res[f(z), -\frac{1}{3}] = 4\pi \frac{1}{8} = \frac{\pi}{2}$.

Инт-лы вида $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

$P_+ = \{Im\, z > 0\}$

$\overline{P_+} = \{Im\, z \geq 0\}$.

Теор. 7.3 $f(z)$ удовл. условиям:

1) f - аналит. в откр. верхней полуплоск. и непр. в $\overline{P_+}$ за исключением (неустр.) изолированных особых точек $z_1, \dots, z_n \in P_+$

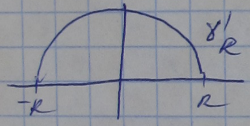
2) $\exists R_0 > 0$ и неотр. ф-ия $M(z)$ такая, что $|f(z)| \leq \frac{M(z)}{|z|}$, $z \in \overline{P_+}$, $|z| \geq R_0$; $M(z) \to 0$ при $z \to +\infty$, $z \in \overline{P_+}$

Тогда инт-л I $\exists$ хотя бы в смысле главного значения и $(v.p)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res[f(z), z_k]$

Док-во $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R_1, R_2 \to \infty} \int_{-R_2}^{R_1} f(x)dx$

$(v.p)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$ }

$|z_i| < R_0$, $i = 1, 2, \dots, n$ Фикс. $R > R_0$



$\Gamma_R = [-R, R] \cup \gamma'_R$

$\oint_{\Gamma_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma'_R} f(z)dz \equiv 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res[f(z), z_k]$

$R \to \infty$ $\left|\int f(z)dz\right| \leq \max_{z \in \gamma'_R} |f(z)| \cdot \pi R \leq \max_{z \in \gamma'_R} \frac{M(z)}{|z| = R} \pi R = \pi \max_{z \in \gamma'_R} M(z) \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$

$\exists \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = (v.p)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res[f(z), z_k]$.

Пример 3 Вычислить $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$ $z_0 = i$ тройной полюс

$I = 2\pi i\, res[f(z), z_0] = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \lim_{z \to i} \frac{d^2[\overbrace{f(z)(z-i)^3}^{g(z)}]}{dz^2} = (*)$

$g(z) = f(z)\cdot(z-i)^3 = (z+i)^{-3}$ $g''(z) = 12(z+i)^{-5}$

$(*) = \pi i \frac{12}{(2i)^5} = \pi \frac{12}{32} = \frac{3}{8}\pi$.

Задача Сформулировать ~~задачу~~ аналог теоремы 7.3 для P_-.

Инт-лы вида $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)dx$

Лемма Жордана $f(z)$ непр. в обл. $|z| \geq R_0$, $Im\, z \geq 0$; $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$, $z \in \overline{P_+}$. Тогда для $\forall a > 0$ $\int_{\gamma'_R} e^{iaz} f(z) dz$

$(\gamma'_R: |z| = R, Im\, z \geq 0)$

$$|J| \le \int_{\gamma_R'} |e^{iaz}|\,|f(z)|\,ds \le M_R \int_{\gamma_R'} |e^{iaz}|\,ds = M_R \int_0^{\pi} |e^{iaz}|\,d\varphi = M_R R \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi =$$

Обозначим $\max\limits_{z\in\gamma_R'}|f(z)| = M_R \to 0$ при $R\to\infty$

$$= 2M_R R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi \le 2M_R R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}aR\varphi}\,d\varphi = 2M_R R\cdot\frac{\pi}{2aR}\left[-e^{-\frac{2}{\pi}aR\varphi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$\sin\varphi \le \varphi$, $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$\sin\varphi \ge \frac{2}{\pi}\varphi$,

$-aR\sin\varphi \le -\frac{2}{\pi}aR\varphi$

$$= \frac{\pi}{a}M_R\left(1-e^{-aR}\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Теор. 7.4 $\exists f(z)$ удовл. условию в теор. 7.3. Если $f(z)\to 0$ при $z\to\infty$, $z\in\overline{P_+}$, то для $\forall a>0$ $\exists$ сущ. хотя бы в смысле главного значения и

$$(V.p.)\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}\left[e^{iaz}f(z), z_k\right]$$

Док-во Построим тот же контур Γ_R, что и в теореме 7.3.

Тогда
$$\oint_{\Gamma_R} e^{iaz}f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} e^{iax}f(x)\,dx + \int_{\gamma_R'} e^{iaz}f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}\left[e^{iaz}f(z), z_k\right]$$

$\int_{\gamma_R'}\ldots \to 0$ $R\to\infty$ (по лемме Жордана)

Из (*) при $R\to\infty$ следует:

1) $\exists \lim\limits_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{iax}f(x)\,dx = (V.p.)\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(x)\,dx$

2) Переходя в (*) к пределу при $R\to\infty$, получим $I = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}\left[e^{iaz}f(z), z_k\right]$.

Пример 4. Вычислить инт-л Лапласа $I=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{x^2+a^2}\,dx$, $\alpha, a>0$.

$e^{i\alpha x} = \cos\alpha x + i\sin\alpha x$

$I = \mathrm{Re}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2+a^2}\,dx}_{J}$, $f(z)=\frac{1}{z^2+a^2}$ — аналит. всюду кроме $\pm ia$, $z_0 = ia\in P_+$

$$J \overset{7.4}{=} 2\pi i\,\mathrm{res}\left[\frac{e^{i\alpha z}}{z^2+a^2}, ia\right] = 2\pi i\,\frac{e^{i\alpha z}}{2z}\Big|_{z=ia} = 2\pi i\,\frac{e^{-\alpha a}}{2ia} = \frac{\pi}{a}e^{-\alpha a}.$$

$$\boxed{I = J = \frac{\pi}{a}e^{-\alpha a}}$$

Логарифмический вычет и принцип аргумента

Напом. особые т. $f(z)$ в G — это только полюсы

Все наши контуры не проходят через полюсы и нули $f(z)$

$\Gamma\subset G$

$b_1,\ldots,b_p$ — полюсы f внутри Γ.

$\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ — их кратности

$a_1,\ldots,a_n$ — нули f внутри Γ.

$\beta_1,\ldots,\beta_n$ — их кратности

(то, что нулей f внутри Γ конечное число, следует из теоремы единственности)

$N_f(\Gamma) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k$ — полное число нулей f внутри Γ.

$P_f(\Gamma) = \sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell$ — полное число полюсов f внутри Γ.

Теорема о логарифм. вычете

логарифм. от f в Γ … $\oint \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma)$, Док-во: $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$

Особ. т. $\varphi(z)$ внутри Γ – это полюса $f(z_1, .., z_p)$ и нули $f(\zeta_1, .., \zeta_{\tilde{n}})$

Покажем, что каждая из этих точек есть простой полюс для $\varphi(z)$.

Возле ζ_k:

$f(z) = (z-\zeta_k)^{\beta_k} g(z)$ (1)

$g(z)$ – анал. в окр-ти т. ζ_k и $g(\zeta_k) \neq 0$

$f'(z) = \beta_k (z-\zeta_k)^{\beta_k - 1} g(z) + (z-\zeta_k)^{\beta_k} g'(z) =$

$= \beta_k (z-\zeta_k)^{\beta_k-1} h(z)$

$h(z) = g(z) + \frac{1}{\beta_k}(z-\zeta_k) g'(z)$, $h(\zeta_k) = g(\zeta_k)$

Разделим (2) на (1): $\varphi(z) = \frac{\beta_k}{z-\zeta_k} + \psi(z)$, $\psi(z)$ – анал. в окр-ти ζ_k

$\varphi(z) = \frac{\beta_k}{z-\zeta_k} \cdot \frac{h(z)}{g(z)}$ $h(\zeta_k) = g(\zeta_k) \neq 0$ $\frac{h(z)}{g(z)}$ – анал. в окр-ти ζ_k

$\frac{h(z)}{g(z)} = a_0 + a_1(z-\zeta_k) + a_2(z-\zeta_k)^2 + ...$

$\frac{h(z)}{g(z)}$ – анал. в окр-ти ζ_k $a_0 = \frac{h(\zeta_k)}{g(\zeta_k)} = 1$

$\varphi(z) = \frac{\beta_k}{z-\zeta_k} \cdot \frac{h(z)}{g(z)} = \frac{\beta_k}{z-\zeta_k}(1 + a_1(z-\zeta_k) + a_2(z-\zeta_k)^2 + ...) =$

$= \frac{\beta_k}{z-\zeta_k} + \beta_k a_1 + \beta_k a_2 (z-\zeta_k) + ...$

$\beta_k = \operatorname{res}[\varphi(z), \zeta_k]$

Возле z_m: $f(z) = \frac{r(z)}{(z-z_m)^{d_m}}$, $r(z_m) \neq 0$ (3)

$f'(z) = -\frac{d_m}{(z-z_m)^{d_m+1}} r(z) + \frac{r'(z)}{(z-z_m)^{d_m}} = -\frac{d_m}{(z-z_m)^{d_m+1}} s(z)$

$s(z) = r(z) - \frac{1}{d_m}(z-z_m) r'(z)$, $s(z_m) = r(z_m)$

Разделим (4) на (3): $\varphi(z) = -\frac{d_m}{z-z_m} + \xi(z)$,

$\xi(z)$ – анал. в окр-ти т. z_m

z_m – простой полюс для $\varphi(z)$, $-d_m = \operatorname{res}[\varphi(z), z_m]$

$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \varphi(z)\,dz \overset{\text{теор. о вычетах}}{=} \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \operatorname{res}[\varphi(z), \zeta_k] + \sum_{l=1}^{p} \operatorname{res}[\varphi(z), z_l] =$

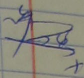
$= \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \beta_k - \sum_{l=1}^{p} \beta_l = N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma)$

~~$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ – логар. произв. от $f(z)$~~

~~$(\ln f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$~~

$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$, $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, $z \neq x \geq 0$

$u = \ln|z| = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, $\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\,\varphi \Rightarrow \varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$ (?)



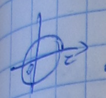
$v = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} \Rightarrow$ C-R, $(\ln z)' = u'_x + v'_x = \frac{1}{z}$

$k \in \mathbb{Z}$: $L_k(z) = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k) = \ln z + i\,2\pi k$, $L_k'(z) = \frac{1}{z}$.

$L_k(z)$ — однозн. ветви многозн. ф-ии $\mathrm{Ln}\, z$

$\ln z = L_0(z)$

$\mathrm{Ln}\, f(z) = \ln|f(z)| + i\,\mathrm{Arg}\, f(z) \sim L_k(z) \Rightarrow L_k'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \varphi(z)$

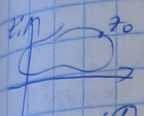


$\ln z$

$\ln z + 2\pi i$

$z = 0$ — т. ветвл. $\mathrm{Ln}\, z$ и $z = \infty$ $L_k(z) \to L_{k+1}(z)$

Если $z_0 : f(z_0) = 0$, z_0 — т. ветвл. $\mathrm{Ln}\, f(z)$



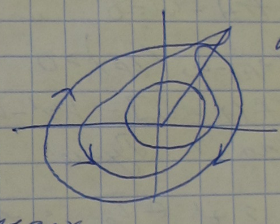
$\oint_{\Gamma^+} f(z)dz$. Ц ввести (многозн.) первообр. $F(z)$ для $f(z)$, т.е. для каждой однозн. ветви $F_k'(z) = f(z)$

Фикс. $\forall$ т. $z_0 \in \Gamma$ и $\forall F_k(z_0)$. Совершим обход Γ, выбирая в каждой т. $z \in \Gamma$ единств. знач-е $F(z)$ и усл-я непр. $\exists F_{кон}(z_0)$ — знач-е $F(z)$, выбранное при возвр. в т. z_0.

Тогда $\oint_{\Gamma^+} f(z)dz = F_{кон}(z_0) - F_{нач}(z_0)$ } Обобщ. ф-ла Н-Л для многозн. ф-ий

$\mathrm{Ln}\, f(z) = \ln|f(z_0)| + i\Phi_k \Rightarrow \oint_{\Gamma^+} \varphi(z)dz = i(\Phi_k - \Phi_0) = i\,\mathrm{Var}_\Gamma\,\mathrm{Arg}\, f(z)$.

Принцип аргумента



$w_0 = f(z_0)$

$N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}_\Gamma\,\mathrm{Arg}\, f(z)$.

Если γ — число полных оборотов радиус-вектора w вокруг 0 при обходе т. z контура Γ в полож. напр., то $\mathrm{Var}_\Gamma f(z) = 2\pi\gamma$

Ещё одна формулировка Т. о лог. вычете

$N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) = \gamma$

Следствие: $\exists f(z) \in A(G)$, $\Gamma \subset G$, $\mathrm{int}\,\Gamma \subset G$. Тогда $N_f(\Gamma) = \gamma$

Теорема Руше: $\exists f(z), \varphi(z) \in A(G)$, $\Gamma \subset G$, $\mathrm{int}\,\Gamma \subset G$. Кроме того, $|f(z)| > |\varphi(z)|$ $\forall z \in \Gamma$. Положим $F(z) = f(z) + \varphi(z)$.

Тогда $N_F(\Gamma) = N_f(\Gamma)$.

Пр. $z^8 - 4z^5 + z^2 = 1$ (*) Найти число корней (*) внутри ед. окр. $|z| = 1$. $F(z) = 0$, $F(z) = f(z) + \varphi(z)$

$\Gamma : |z| = 1$, $f(z) = -4z^5$, $\varphi(z) = z^8 + z^2 - 1 \Rightarrow$

$|\varphi(z)| \leq |z^8| + |z|^2 + 1 = 3 \Rightarrow$

для $z \in \Gamma$: $|f(z)| = 4$.

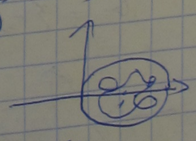
$|f(z)| > |\varphi(z)|$ $\forall z \in \Gamma \Rightarrow N_F(\Gamma) = N_f(\Gamma)$: $4z^5 = 0$, $z = 0$, $k = 5$

$\Rightarrow$ 5 корней внутри $|z| = 1$

$N_f(\Gamma) = 5 \Rightarrow N_F(\Gamma) = 5$

Док-во $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \Gamma \Rightarrow F(z) = f(z) + \varphi(z) = f(z)\left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) = f(z)g(z)$

$\mathrm{Var}_\Gamma\,\mathrm{Arg}\, F(z) = \mathrm{Var}_\Gamma\,\mathrm{Arg}\, f(z) + \mathrm{Var}_\Gamma\,\mathrm{Arg}\, g(z)$



$w = g(z) = 1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}$, $z \in \Gamma$: $|w - 1| = \left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right| < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Var}_\Gamma\,\mathrm{Arg}\, g(z) = 0 \Rightarrow \mathrm{Var}_\Gamma\,\mathrm{Arg}\, F(z) = \mathrm{Var}_\Gamma\,\mathrm{Arg}\, f(z) \Rightarrow$

$N_F(\Gamma) = N_f(\Gamma)$

Основная теорема алгебры

Пусть $P_n(x)$ — многочл. ст. $n \geq 1$.
Тогда $P_n(z)$ имеет в $\mathbb{C}$ ровно n корней (с учётом кратн.)

Док-во: $P_n(z) = a_0 z^n + \ldots + a_n$, $f(z) = a_0 z^n$, $\varphi(z) = a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$
Для всех достат. больших $R > 0$: $|f(z)| > |\varphi(z)|$ $\forall z \in \Gamma_R$:
$|z| = R$. По т. Руше $N_{P_n}(\Gamma_R) = N_f(\Gamma_R)$; $z^n = 0$ $N_f(\Gamma_R) = n$ $\Rightarrow$
$N_{P_n}(\Gamma_R) = n$

Теорема об образе области

Пусть $f(z) \in A(G)$, $f(z) \not\equiv const$. Тогда $D = f(G)$ — область.

Док-во:
Пусть $w_1, w_2 \in D$; $z_1, z_2 \in G$ — их прообр. для w_1, w_2.
Пусть w_0 — любая т. из D, z_0 — её прообраз в G. Покажем, что
найдётся окр-ть т. z_0 ... K_μ: $|w - w_0| < \mu \subset D$

Построим замкн. круг $\overline{C_\rho}$: $|z - z_0| \leq \rho$ так, чтобы

1) $\overline{C_\rho} \subset G$ 2) т. z_0 — единств. w_0-точка функ. $f(z)$ в $\overline{C_\rho}$
$f(z) = w_0 \sim z = z_0$ (по т. единств.)

$\mu = \max |f(z) - w_0| > 0$.
Докажем, что круг $K_\mu \subset D$.
Пусть w' — любая т. из K_μ, т.е. $|w' - w_0| < \mu$. Рассм. $f(z) - w_0 = 0$,
$f(z) - w' = 0$ и найдём число корней в $\overline{C_\rho}$:

$N_{f(z) - w_0}(\gamma_\rho) > 0$

$[f(z) - w_0] - [w' - w_0] = 0$, $z \in \gamma_\rho$: $|f(z) - w_0| \geq \mu$, $|w' - w_0| < \mu \Rightarrow$
$\Rightarrow$ по т. Руше $N_{f(z) - w'}(\gamma_\rho) = N_{f(z) - w_0}(\gamma_\rho) > 0 \Rightarrow$

$\exists$ т. $z' \in \overline{C_\rho}$: $f(z') = w' \Rightarrow z'$ — искомый прообр. в G т.д.

Принцип макс. модуля аналит. функ.

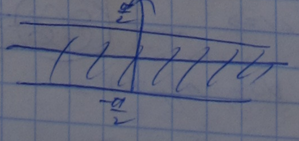
Пусть $f(z) \in A(G)$, $f(z) \not\equiv const$. Тогда ни в одной точке $z_0 \in G$
$|f(z)|$ не может достиг. макс. знач-я.

Если G — огран. област. и $f(z) \in A(G) \cap C(\overline{G})$, то $|f(z)|$
достиг. своего максимума на ∂G.

Док-во (от противного)
Пусть $|f(z)|$ достиг. max в т. $z_0 \in G$, т.е. им $w_0 = f(z_0)$,
то $|w_0| \geq |f(z)| = |w|$ $\forall w = f(z)$, $z \in G$
$w_0 = r e^{i\varphi}$, K_μ $|w - w_0| < \mu \subset D$. Тогда $w = (r + t) e^{i\varphi}$, где
$0 < t < \mu \subset D$ и имеют модуль $r + t > r \Rightarrow$ противоречие

G — огранич. $\Rightarrow \overline{G}$ — компакт $\Rightarrow$ непр. ф-ия $|f(z)|$
достиг. на $\overline{G}$ своего максимума $\Rightarrow$ он
может достигаться только на ∂G

$G = \{ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2} \}$ $f(z) = e^{e^z}$, $z = x \pm \frac{\pi}{2} i$; $e^z = e^x \cdot e^{\pm \frac{\pi}{2} i} = \pm i e^x$



$|e^{e^z}| = e^{\pm i e^x} \Rightarrow |e^{e^z}| = 1$ $\forall z \in \partial G$

Принцип максимума модуля аналит. ф-ии

$\exists f(z) \in A(G)$, $f(z) \neq const$ и $f(z) \neq 0$ $\forall z \in G$.

Тогда ни в одной т. $z_0 \in G$ $|f(z)|$ не может дост. min.

Док-во:

Положим $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ $\forall z \in G$.

Принцип max $|\,|$ ф-и $g(z) = \min |\,|$ ф-и $f(z)$.

Вторая теорема Вейерштр. (о рядах аналит. ф-ий)

$\exists G$ - огр. обл-ть, $u_n(z) \in A(G) \cap C(\overline{G})$ $n = 1, 2, \ldots$

Если $\sum u_n(z) \rightrightarrows$ на ∂G, то $\sum u_n(z) \rightrightarrows$ на $\overline{G}$.

Док-во: Согласн. крит. Коши равн. сход.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ $\forall n \geq N$ $\forall p \in \mathbb{N}$: $|\underbrace{u_n(z) + \ldots + u_{n+p}(z)}_{\varphi_{n,p}(z)}| < \varepsilon$, $\forall z \in \partial G$

$\varphi_{n,p}(z) \in A(G) \cap C(\overline{G})$. по принц. max $|\,|$ $|\varphi_{n,p}(z)| < \varepsilon$ $\forall z \in \partial G \Rightarrow$

$\Rightarrow |\varphi_{n,p}(z)| < \varepsilon$ $\forall z \in \overline{G}$:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ $\forall n \geq N$ $\forall p \in \mathbb{N}$: $|u_n(z) + \ldots + u_{n+p}(z)| < \varepsilon$ $\forall z \in \overline{G} \Rightarrow$

выполнен крит. Коши равн. сход-ти на $\overline{G}$.