Глава 8. Интегралы, зависящие от параметров (ИЗП).

Примеры: 1) ОДУ: $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k y^{(n-k)}(x) = f(x),\ x \in (a,b)$

$\{y_k(x)\}_{k=1}^{n}$ — ФСР.

$$\Rightarrow \quad y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_k y_k(x) + \int_{x_0}^{x} k(x,t) f(t)\,dt, \quad c_k = const,\ x_0 \in [a,b]$$

2) Преобразование Фурье

$$F[t] = \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{ixt}\,dt$$

3) Преобразование Лапласа.

$$F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t) e^{-pt}\,dt, \quad p \in \mathbb{C}$$

§1. Собственный ИЗП.

Прямоугольник $P = \{(x,y):\ x \in [a,b],\ y \in [c,d]\}$, $f(x,y)$ — определена на P, $\forall$ фиксированный $y \in [c,d]$ интегрируем по x на $[a,b]$.

$I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ (1) — собств. ИЗП с постоянными пределами интегрирования

$P \to D = \{(x,y):\ x \in [a(y), b(y)]\},\ y \in [c,d]\}$.

$I(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$ (2) — собств. ИЗП с переменными пределами интегрирования

1° Постоянные пределы интегрирования.

Теорема 1. Пусть $f(x,y)$ непрерывна в P $\Rightarrow$ (1) $I(y)$ является непрерывной по y на $[c,d]$, интегрируемой на $[c,d]$ и возможно интегрирование под знаком интеграла.

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \quad (2).$$

Д-во: Непрерывность.

Р-м для $\forall$ фикс. $y \in [c,d]$ $\Delta I(y) = I(y+\Delta y) - I(y) = \int_a^b [f(x,y+\Delta y) - f(x,y)]dx$

$f(x,y)$ - равн. непр. на P $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $|\Delta y| < \delta$ $\forall y, y+\Delta y \in [c,d]$, $\forall x \in [a,b]$ $|f(x,y+\Delta y) - f(x,y)| < \varepsilon$

$\underset{|\Delta y|<\delta}{\Rightarrow}$ $|\Delta I(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b 1dx = \varepsilon$ $\Rightarrow$ $I(y)$ непр. в т. y, а т.к. $\forall y \in [c,d]$ f непрерывна.

(2). $f(x,y)$ непр. на P $\Rightarrow$ интегрируема на P, т.е. $\exists \iint_P f(x,y)dxdy$

f - непр. $\Rightarrow \exists \int_a^b f(x,y)dx$ и $\int_c^d f(x,y)dy$ для $\forall x$ и $\forall y$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ оба повторных интеграла (2), каждый из них равен $\iint_P f(x,y)dxdy$ $\Rightarrow$ равны между собой $\Rightarrow$ (2) справедливо

Замечания:

1) (для теоремы 2 из главы 10). Для справедливости (2) достаточно, чтобы f была такова, что $\exists \iint_P f(x,y)dxdy$ и $\int_a^b f(x,y)dx$ и $\int_c^d f(x,y)dy$

2) В (2) можно вместо $[c,d]$ взять $\forall [c_1,d_1] \subseteq [c,d]$.

Пример. $I(y)=\int\limits_0^1 \ln(x^2+y^2)dx$ непр.? $y\in\mathbb{R}$

$y\neq 0 \Rightarrow x^2+y^2>0 \Rightarrow \ln(x^2+y^2)$ непр. на $\forall P=[0,1]\times[c,d]$, $0\notin[c,d]$

$\Rightarrow$ по т. 1 $I(y)$ непр. $\forall y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$y=0 \Rightarrow I(0)=\int\limits_0^1 \ln x^2\,dx = 2\int\limits_0^1 \ln x\,dx = 2x\ln x\Big|_{x=0+0}^{1} - 2\int\limits_0^1 \frac{x}{x}dx=-2$ $\quad I(0)=-2$

$y\neq 0$ $\quad I(y)=\int\limits_0^1 \ln(x^2+y^2)dx = x\ln(x^2+y^2)\Big|_{x=0}^{1} - \int\limits_0^1 \frac{x\cdot 2x}{x^2+y^2}dx =$

$=\ln(1+y^2)-0-2\int\limits_0^1\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}dx + 2\int\limits_0^1\frac{y^2dx}{x^2+y^2} = \ln(1+y^2)-2+\frac{2y^2}{y}\int\limits_0^1\frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=$

$=\ln(1+y^2)-2+2y\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}\Big|_{x=0}^{1} = \ln(1+y^2)-2+y2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{y}-0$

$I(y)=\ln(1+y^2)-2+y2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{y}$, $y\neq0$ — непр. $\forall y\neq 0$

$\lim\limits_{y\to0} I(y)=-2=I(0)$, т.е. $I(y)$ непр. на $\mathbb{R}$.

Теорема 2. Пусть $f(x,y)$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непр. в P $\Rightarrow$ (1) $I(y)$ дифференцируема на $[c,d]$ и $I'(y)=\int\limits_a^b\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$ (3) $\forall y\in[c,d]$ (правило Лейбница).

Док-во: $\varphi(y)$ непр. на $[c,d] \Rightarrow \int\limits_c^y \varphi(t)dt$ — дифф. функция

$\left(\int\limits_c^y \varphi(t)dt\right)' = \left(\Phi(y)-\Phi(c)\right)'=\varphi(y)$ — непр.

Пусть $g(y)=\int\limits_a^b\frac{\partial f(x,y)dx}{\partial y}$. Найдём связь $g(y)$ и $I(y)$

f'_y — непр. в $P \Rightarrow g(y)$ непр. на $[c,d]$, (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_c^y g(t)dt = \int\limits_c^y dt\int\limits_a^b\frac{\partial f}{\partial t}dx = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^y\frac{\partial f}{\partial t}dt = \int\limits_a^b f(x,t)\Big|_{t=c}^{y}dx =$

$=\int\limits_a^b f(x,y)dx - \int\limits_a^b f(x,c)dx = I(y)-I(c)$ $\qquad I(y)=\int\limits_c^y g(t)dt + I(c)$ $\quad \forall y\in[c,d]$

g — непр. $\Rightarrow \int\limits_c^y g\,dt$ — дифф. и $I'(y)=g(y)$, т.е. (3) $\forall y\in[c,d]$.

Замечание. При условии теоремы $I(y)$ - непр. на $[c,d]$, т.к. $\frac{\partial f}{\partial y}$ непр. в P + теор. 1.

Пример. $I(y) = \int_0^1 \ln(x^2+y^2)\,dx$, $y\in\mathbb{R}$ дифф. - ? $\forall y \neq 0$

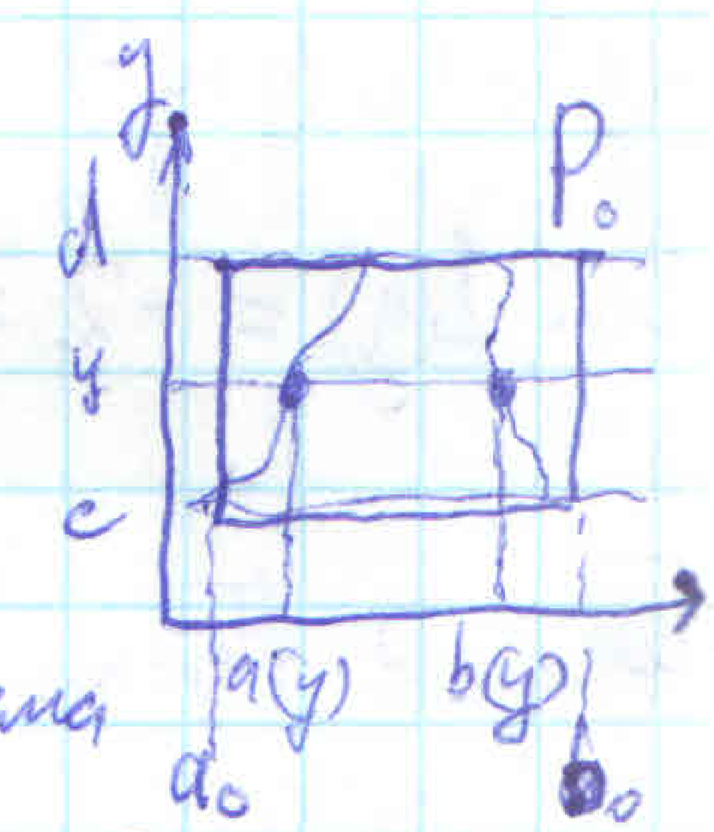
$\exists\; f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ - непр. в $P = [0,1]\times[c,d]$, $\forall [c,d]$, $0 \notin [c,d]$.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} \text{ - непр. на } P \overset{т.2}{\Rightarrow} \underset{\forall y\neq 0}{\exists\, I'(y)} \underset{(3)}{=} \int_0^1 \frac{2y}{x^2+y^2}\,dx =$$

$$= \frac{2y}{y}\int_0^1 \frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}\Big|_{x=0}^{1} = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{y}$$

$y \to +0$: $\frac{\pi}{2}$; $y \to -0$: $-\frac{\pi}{2}$ $\;\to\; I'(0)\; \nexists$

2° Переменные пределы интегрирования.



Мн-во: $D(y) = \{(x,y):\; x \in [a(y), b(y)],\; y\in[c,d]\}$

$\exists\; f(x,y)$ определена на D и $\forall y \in [c,d]$ интегрируема по x на $[a(y), b(y)]$ $\quad I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$ (4) - собств. ИЗП с переменными пределами интегрирования.

Фиксируем нек. прямоугольник $P_0 = [a_0, b_0]\times[c,d]:\; D\subset P_0$.

Теорема 3. Пусть $f(x,y)$ непр. в P_0, $D\subset P_0$, $a(y)$ и $b(y)$ непр. на $[c,d]$ $\Rightarrow$ (4) $I(y)$ непр. на $[c,d]$.

Д-во: фиксируем $\forall$ т. $y_0 \in [c,d]$ и докажем, что $I(y)$ непр. в т. y_0

$$I(y) = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)\,dx + \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx + \int_{a(y)}^{a(y_0)} f(x,y)\,dx = \underbrace{\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)\,dx}_{\tilde I(y)} + \underbrace{\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx}_{B(y)} - \underbrace{\int_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)\,dx}_{=A(y)} = \tilde I(y) + B(y) - A(y) \quad (5)$$

$\tilde{I}(y)$: $f(x,y)$ непр. в $\tilde{P} = [a(y_0), b(y_0)] \times [c,d] \underset{\text{т.1}}{\Rightarrow} \tilde{I}(y)$ непр. на $[c,d]$ в т. y_0 $\tilde{I}(y) \xrightarrow[y\to y_0]{} \tilde{I}(y_0) = I(y_0)$

$$M = \max_{P_0} |f(x,y)|$$

$$|B(y)| = \left| \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right| \underset{\text{ф-ла среднего}}{=} \left| f(\tilde{x},y) \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} 1\,dx \right| \leq M\,|b(y) - b(y_0)| \xrightarrow[y\to y_0]{} 0,$$ т.к. $b(y)$ непр. на $[c,d]$

$\Rightarrow B(y) \to 0, y \to y_0$. Аналогично $A(y) \to 0$, $y \to y_0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow I(y) \xrightarrow[y\to y_0]{} I(y_0)$, т.е. $I(y)$ непр. в т. y_0 $\Rightarrow$ непр. на $[c,d]$.

Замечание. Справедлива теорема 3*. f – непр. на D, $a(y)$ и $b(y)$ – непр. на $[c,d]$ $\Rightarrow$ $I(y)$ непр. на $[c,d]$.

Теорема 4. Пусть $f(x,y)$ имеет частные производные по y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $f(x,y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непр. в P_0, $D \subset P_0$. Функции $a(y)$ и $b(y)$ дифф. на $[c,d]$ $\Rightarrow$ $I(y)$ дифф. на $[c,d]$ и
$$I'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx + b'(y)\cdot f(b(y),y) - a'(y)\cdot f(a(y),y) \quad (6)$$

Д-во: фиксируем $\forall$ т. $y_0 \in [c,d]$ $I(y) = \tilde{I}(y) + B(y) - A(y)$

$\exists\, I'(y)$ в т. y_0 ~~$I(y) - I y_0$~~ $\lim\limits_{y\to y_0} \frac{I(y) - I(y_0)}{y - y_0}$ $B(y_0) = A(y_0) = 0$

$\tilde{I}(y)$: f, $\frac{\partial f}{\partial y}$ – непр. в $\tilde{P}$ $\Rightarrow$ $\exists\, \tilde{I}'(y) = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$, $\forall y \in [c,d]$

$$\frac{I(y) - I(y_0)}{y - y_0} = \underbrace{\int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0}\,dx}_{\xrightarrow[y\to y_0]{} \tilde{I}'(y_0)} + \frac{B(y)}{y - y_0} - \frac{A(y)}{y - y_0}$$

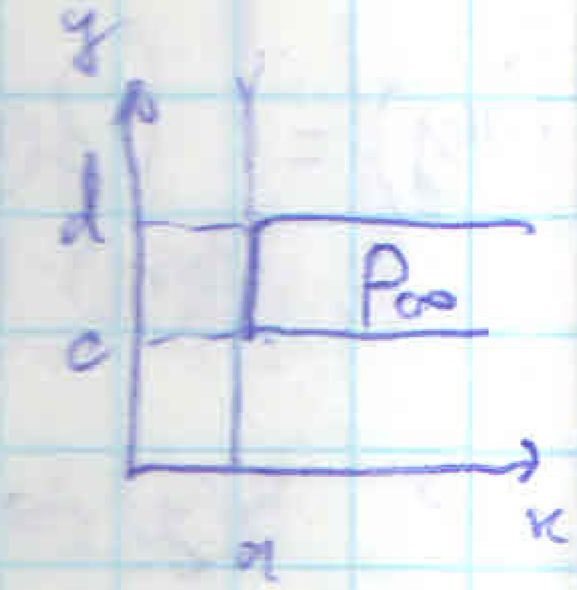
$$\frac{B(y)}{y-y_0} = \frac{1}{y-y_0} \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \underset{\text{ф-ла среднего}}{=} \frac{f(\tilde{x},y)}{y-y_0} \cdot \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} 1\,dx = \overset{\text{непр.}}{f(\tilde{x},y)} \cdot \overbrace{\frac{b(y) - b(y_0)}{y - y_0}}^{b(y)\text{ дифф.}} \xrightarrow[y\to y_0]{} f(b(y_0),y_0)\cdot b'(y_0)$$

$\tilde{x}$ между $b(y)$ и $b(y_0)$

$\frac{A(y)}{y-y_0} = f(a(y_0),y_0)\cdot a'(y_0)$ $\Rightarrow$ $\exists\, I'(y_0)$ и справедлива (6) $\Rightarrow$ $\forall y \in [c,d]$ верно.

Замечание. Справедлива теорема 4*: $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ - непр. в D, $a(y), b(y)$ - дифф. на $[c,d] \Rightarrow \exists I'(y)$ на $[c,d]$ и (6).

§2. Несобственные ИЗП.



Р-м полуполосу $P_\infty = \{(x,y): x \in [a,\infty), y \in [c,d]\}$

$\forall y \in [c,d]$ интегрируема по x (в ~~смысле~~ несобств. смысле) на $[a,+\infty)$ $\quad I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ (1) – несобств. ИЗП 1-го рода (инт. наз. сходящимся)

Сходимость: $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall y \in [c,d] \quad \exists A = A(\varepsilon, y) > a : \forall R \geq A$

$\left| \int\limits_R^{\infty} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$ ((2)) $\Rightarrow$ равн. сходимость (одинаково во всех точках).

1°. Равномерная сходимость.

Опр. Интеграл (1) называется сходящимся равномерно по параметру y на $[c,d]$, если он сходится для $\forall y \in [c,d]$ и $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A = A(\varepsilon) > a : \quad \forall R \geq A \quad \forall y \in [c,d] \quad \left| \int\limits_R f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$ (2)

Теорема 5 (критерий Коши).

Для того чтобы интеграл (1) сходился по y равномерно на $[c,d]$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > a : \forall R', R'' \geq A$

$\forall y \in [c,d] \qquad \left| \int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$ (3)

Д-во: Необходимость. Д-ть: (2) $\Rightarrow$ (3)

По условию $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A > a: \forall R \geq A \ \left|\int\limits_R^\infty f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall y \in [c,d]$

$\forall R', R'' > A \ \left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)dx\right| = \left|\int\limits_{R'}^{\infty} f dx - \int\limits_{R''}^{\infty} f dx\right| \leq \left|\int\limits_{R'}^{\infty} f dx\right| + \left|\int\limits_{R''}^{\infty} f dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \ \forall y \in [c,d]$,

т.е. верно (3).

Достаточность: Д-ть: (3) $\Rightarrow$ (2)

По условию $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A > a: \forall R', R'' \geq A \ \left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall y \in [c,d] \quad (4) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (по кр. Коши для несобств. интегралов без параметра) интеграл (1) сходится $\forall y \in [c,d]$

Т.к. в (4) R'' – $\forall$, то $\exists R'' \to \infty$. Предел в левой части (4) существует для $\forall y \in [c,d] \Rightarrow \left|\int\limits_{R'}^{\infty} f(x,y)dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \ \forall y \in [c,d]$, т.е. верно (2).

$I(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx \quad (1)$

2°. Признаки равномерной сходимости

Теорема 6. (признак Вейерштрасса).

Р-м интеграл (1). Пусть выполнены условия: 1) $f(x,y)$ опр. в P_∞ и $\forall y \in [c,d]$ интегрируема по x на $\forall [a,R]$, $R > a$;

2) $g(x) \geq 0$, определена на $[a,+\infty)$ и сходится интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)dx$.

Пусть $|f(x,y)| \leq g(x) \quad \forall (x,y) \in P_\infty \Rightarrow$ интеграл (1) сходится равномерно по y на $[c,d]$.

Д-во: $\forall R', R'' > a, \ a < R' < R'' \ \left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)dx\right| \leq \int\limits_{R'}^{R''} |f(x,y)|dx \leq \int\limits_{R'}^{R''} g(x)dx < \varepsilon$ по кр. Коши $\forall y \in [c,d] \ \exists A > a: \forall R', R'' \geq A \ \int\limits_{R'}^{R''} g(x)dx < \varepsilon \Rightarrow$ справедливо (3) и интеграл (1) сходится равномерно (по т.5) на $[c,d]$.

(Д-ли, что (1) сходится абсолютно и $\int_a^{\infty}|f|dx$ – сходится равномерно на $[c,d]$)

Теорема 7 (признак Дирихле-Абеля)

Д-м интеграл $\int_a^{\infty} f(x,y)g(x)dx$ (5). Пусть выполнены условия:

1) $f(x,y)$ определена на P_∞ и $\forall y\in[c,d]$ интегрируема по x на $\forall[a,R]$, $R>a$ и $\exists M\text{-const}>0$: $\left|\int_a^{R} f(t,y)dt\right|\le M$, $\forall(x,y)\in R$

2) $g(x)\geq 0$ определена на $[a,+\infty)$ и монотонно не возрастает стремится к 0 при $x\to+\infty$. $\Rightarrow$ интеграл (5) сходится равномерно по y на $[c,d]$

Д-во: $\forall R', R''>a$, $a<R'<R''$ $\left|\int_{R'}^{R''} f(x,y)g(x)dx\right| =$ 2-я ф-ла среднего (Бонне) $\exists\,\xi\in[R',R'']$

$$=\left|g(R')\int_{R'}^{\xi} f(x,y)dx + g(R'')\int_{\xi}^{R''} f(x,y)dx\right| \le g(R')\left|\int^{\xi} f dx\right| + g(R'')\left|\int^{R''} f dx\right| \le *$$

Д-м $\forall\alpha,\beta>a$: $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)dx\right| = \left|\int_a^{\beta} f dx - \int_a^{\alpha} f dx\right| \le \left|\int_a^{\beta} f dx\right| + \left|\int_a^{\alpha} f dx\right| \le$

$\le M+M=2M$ $\forall y\in[c,d]$

$$* \le 2M\left(g(R')+g(R'')\right) \le 4Mg(R') \underset{R'>A(\varepsilon)}{<} \varepsilon, \quad g(x)\downarrow 0 \quad g(R')\geq g(R'')$$

$g(x)\to 0$, $x\to+\infty$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists A>a$: $\forall R'\geq A$ $0\le g(R')<\frac{\varepsilon}{4M}$

$\left|\int_{R'}^{R''} f(x,y)g(x)dx\right|<\varepsilon$ $\forall y\in[c,d]$, т.е. выполн. (3) и по т.5 интеграл (5) сходится равномерно по y на $[c,d]$.

Замечание. ~~Пусть~~ Р-м $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,g(x,y)\,dx$, выполн. условия теоремы на f и $g(x,y)$ определена в P_∞, $\forall y\in[c,d]$ монотонна по x на $[a,\infty)$, $g(x,y)\rightrightarrows 0$ при $x\to+\infty$ по y:

$\forall\varepsilon>0\ \exists A>a:\ \forall R\geq A\ \ |g(R,y)|<\frac{\varepsilon}{4M}\ \forall y\in[c,d]$

Теорема 8 (признак Дини) $\Big(\{f_n(x)\}$ на $\{x\}$, $f_n\to f$. 1) $\{x\}$ - компакт 2) f_n - монотон. 3) f_n - непр. 4) f - непр. $\Big)$ $\Rightarrow f_n\rightrightarrows f$ $\{x\}$

Р-м интеграл (1) на $[c,d]$. Пусть $f(x,y)\geq 0$ и непр. в P_∞, $I(y)$ - непрерывная ф-я на $[c,d]$ $\Rightarrow$ интеграл (1) сходится равномерно по y на $[c,d]$.

Д-во: Р-м функциональную последовательность

$I_n(y)=\int\limits_a^{a+n} f(x,y)\,dx$, $y\in[c,d]$. Покажем, что для $\{I_n(y)\}$ вып. условия признака Дини для ф. посл.

Фиксируем n, р-м ф-ю $I_n(y)$.

$f(x,y)$ непр. в прямоугольнике $P=[a,a+n]\times[c,d]$ $\overset{m.1}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow$ ф-я $I_n(y)$ непр. на $[c,d]$ по y ($\forall n$).

Т.к. $f(x,y)\geq 0\Rightarrow\{I_n(y)\}$ монотонно не убывает $\forall y\in[c,d]$

$I_n(y)\to I(y)$, $I(y)$ - непр. на $[c,d]$ $\underset{\text{пр. Дини}}{\Rightarrow}$ $I_n(y)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} I(y)$ на $[c,d]$, т.е.

$\forall\varepsilon>0\ \exists N:\ \forall n>N\ \ |I(y)-I_n(y)|=\left|\int\limits_{a+n}^{\infty} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon,\ \forall y\in[c,d]$

(2): $\left|\int\limits_R^\infty f\,dx\right|<\varepsilon\quad\forall R\geq A$

$R\geq a+N$ $\exists A=a+N\Rightarrow\forall R\geq A$ $0\leq\int\limits_R^\infty f(x,y)\,dx\underset{f\geq 0}{\leq}\int\limits_A^\infty f(x,y)\,dx=\int\limits_{a+N}^\infty f(x,y)\,dx<\varepsilon$ $\forall y\in[c,d]$, т.е. вып. (2) и интеграл (1) сходится равномерно на $[c,d]$.

3. Функциональные св-ва несобственных ИЗП.

Д-м интеграл (1).

Теорема 9. $\exists$ $f(x,y)$ непр. в P_∞, а интеграл $I(y)$ (1) сходится равномерно по y на $[c,d]$. $\Rightarrow$ ф-я $I(y)$ является непрерывной на $[c,d]$, интегрируема на $[c,d]$, возможно интегрирование по y под знаком интеграла:

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)\,dy \qquad (6)$$

Д-во: Непрерывность $I(y)$.

Д-м ф. посл. $I_n(y) = \int_a^{a+n} f(x,y)\,dx$, $y \in [c,d]$

Т.к. $f(x,y)$ непр. в прямоугольнике $P = [a, a+n] \times [c,d]$ $\forall n$, то $I_n(y)$ - непр. по y на $[c,d]$ $\forall n$.

Докажем, что $I_n \underset{n\to\infty}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} I(y)$. Интеграл (1) сходится равномерно $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A > a$: $\forall R \geq A$ $\left|\int_R^{\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$ $\forall y \in [c,d]$

$\left|I(y) - I_n(y)\right| = \left|\int_{a+n}^{\infty} f(x,y)\,dx\right|$ $\exists$ $a+n \geq A$, $n \geq A-a$ $N = [A-a]+1$

$\Rightarrow$ $\forall n \geq N$ $\left|I(y) - I_n(y)\right| < \varepsilon$, $\forall y \in [c,d]$, т.е. $I_n(y) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} I(y)$ на $[c,d]$.

$I_n(y) \rightrightarrows I_y$ на $[c,d]$
$\forall I_n(y)$ - непр. на $[c,d]$
$\overset{\text{по теор. о непр. пред. ф. ф. посл.}}{\Rightarrow}$ $I(y)$ - непр. на $[c,d]$

Докажем (6). Д-ть сходимость интеграла в правой части (6) и равенство его $\int\limits_c^d I(y)dy$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A > a: \ \forall R \geq A \ \left|\int\limits_c^d I(y)dy - \int\limits_a^R dx \int\limits_c^d f(x,y)dy\right| < \varepsilon$ (7)

Д-м $\int\limits_c^d I(y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \underset{\forall R > a}{=\!=} \int\limits_c^d dy \int\limits_a^R f(x,y)dx + \int\limits_c^d dy \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx$

ф-я $f(x,y)$ непр. на $P = [a,R] \times [c,d] \underset{т.1}{\Rightarrow} \int\limits_c^d dy \int\limits_a^R f(x,y)dx = \int\limits_a^R dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$

Т.к. интеграл (1) сходится равномерно, то

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A \geq a: \ \forall R \geq A \ \left|\int\limits_R^{\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c} \ \forall y \in [c,d] \Rightarrow$

$\underset{\forall R \geq A}{\Rightarrow} \left|\int\limits_c^d I(y)dy - \int\limits_a^R dx \int\limits_c^d f(x,y)dx\right| = \left|\int\limits_c^d dy \int\limits_R^{\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}\int\limits_c^d 1dy =$

$= \frac{\varepsilon}{d-c}(d-c) = \varepsilon$, т.е. справедливо (7) $\Rightarrow$ и (6).

Следствие из теоремы 9.

При условиях признака Дини (теор. 7) справедлива ф-ла (6).

Теорема 10.

] $f(x,y)$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в P_∞. Интеграл $I(y)$ (1) сходится в $\forall$ т. $y \in [c,d]$, $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx$ – сх. равномерно по y на $[c,d]$ $\Rightarrow$ ф-я $I(y)$ дифференцируема на $[c,d]$ и справедливо правило Лейбница: $I'(y) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx$ (8).

Д-во: $I_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)dx$, $I_n(y) \to I(y)$ на $[c,d]$, f – непр. в $P = [a, a+n] \times [c,d]$, $\forall n \Rightarrow I_n(y)$ – непр. на $[c,d]$.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ непр. в $P \overset{т.9}{\Rightarrow} \exists\, I_n(y) = \int\limits_a^{a+n} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$.

Т.к. $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx$ сходится равномерно на $[c,d]$, то (как в т.9 док.)

$$I_n'(y) \rightrightarrows \int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx \text{ на } [c,d] \Rightarrow I_n(y) \rightrightarrows I(y) \text{ на } [c,d]$$

$$\exists\, I'(y) = \lim_{n\to\infty} I_n'(y) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx, \text{ т.е. (8).}$$

Теорема 11.

] $f(x,y) \geq 0$ и непр. в $П = \{x \geq a, y \geq c\}$ и $I(y) = \int\limits_a^{\infty} f(x,y)\,dx$, $K(x) = \int\limits_c^{\infty} f(x,y)\,dy$, $I(y)$, $K(x)$ – непр. в $П$ и $\exists \int\limits_c^{\infty} I(y)\,dy$. Тогда $\exists \int\limits_a^{\infty} K(x)\,dx = \int\limits_c^{\infty} I(y)\,dy$.

Д-во: $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_a^R K(x)\,dx = \int\limits_c^{\infty} I(y)\,dy$. $\int\limits_a^R K(x)\,dx = \int\limits_a^R dx \int\limits_c^{\infty} f(x,y)\,dy =$

$= \int\limits_c^{\infty} dy \int\limits_a^R f(x,y)\,dx$, т.к. $\int\limits_c^{\infty} f(x,y)\,dy$ сходится равномерно.

$$\int\limits_c^{\infty} I(y)\,dy - \int\limits_a^R K(x)\,dx = \int\limits_c^{\infty} dy \int\limits_a^{\infty} f(x,y)\,dx - \int\limits_c^{\infty} dy \int\limits_a^R f(x,y)\,dx = \int\limits_c^{\infty} dy \int\limits_R^{\infty} f(x,y)\,dx$$

$$\Rightarrow \int\limits_c^{\infty} dy \int\limits_R^{\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_c^{R} dy \int\limits_R^{\infty} f(x,y)\,dx + \int\limits_R^{\infty} dy \int\limits_R^{\infty} f(x,y)\,dx$$

$$\int\limits_c^{\infty} dy \int\limits_a^{\infty} f(x,y)\,dx \Rightarrow \exists \int\limits_c^{\infty} dy \int\limits_R^{\infty} f(x,y)\,dx \Rightarrow \exists \bar{R}: \int\limits_{\bar{R}}^{\infty} dy \int\limits_R^{\infty} f(x,y)\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow$ фиксируем $\bar{R}$

$$\exists \int\limits_c^{\infty} dy \int\limits_a^{\infty} f(x,y)\,dx \Rightarrow \int\limits_c^{\bar{R}} dy \int\limits_R^{\infty} f(x,y)\,dx \qquad \int\limits_R^{\infty} f(x,y)\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2(\bar{R}-c)} \quad \forall y \geq c$$

$$\Rightarrow \int\limits_c^R dy \int\limits_R^\infty f(x,y)\,dx < \int\limits_c^R \frac{\varepsilon}{2(R-c)}\,dy < \frac{\varepsilon}{2}, \quad R \geq \frac{2}{\varepsilon}$$

Теорема (Фубини). //???

$\int\limits_c^\infty dy \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ и $\exists \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^\infty f(x,y)\,dy$, и они равны. Тогда для почти всех x $\exists \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dy$.

§3. Вычисление несобственных ИЗП. //???

$$I(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} \cdot \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \alpha, \quad \alpha \geq 0$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \qquad \int\limits_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \sin\beta$$

$$\beta > 0 \quad \beta x = t \quad \Rightarrow \int\limits_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x\beta}\,d(x\beta) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$$

$$\beta < 0 \quad \int\limits_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta = 0 \quad \int\limits_0^\infty \frac{\sin 0 x}{x}\,dx = 0$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x}\,dx = \int\limits_0^\infty \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2ix}\,dx = \int\limits_0^\infty \frac{e^{i\beta x}}{2ix}\,dx - \int\limits_0^\infty \frac{e^{-i\beta x}}{2ix}\,dx \qquad \beta = u + iv,\ v > 0$$

1) $\rceil F = -e^{-\alpha x} \frac{(\cos x + \alpha \sin x)}{1+\alpha^2} \qquad \frac{dF}{dx} = e^{-\alpha x} \sin x$

$$\int\limits_R^\infty e^{-\alpha x} \cdot \frac{\sin x}{x}\,dx = \int\limits_R^\infty \frac{dF}{x} = \frac{F}{x}\Bigg|_{x=R}^{x=\infty} + \int\limits_R^\infty \frac{F}{x^2}\,dx = \frac{F}{R}\Bigg|_{x=R} + \int\limits_R^\infty \frac{F}{x^2}\,dx$$

$$|F| < \frac{|\cos x + \alpha \sin x|}{1+\alpha^2} \leq \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{1+\alpha^2} \leq 1 \qquad \int\limits_R^\infty \frac{F}{x^2}\,dx \leq \int\limits_R^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{R} \to 0$$

2) Равн. сходимость и $\alpha \geq 0$ $\int\limits_R^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int\limits_R^\infty \frac{dF}{x} = \frac{F}{x}\Bigg|_{x=R}^{x=\infty} + \int\limits_R^\infty \frac{F}{x^2}\,dx \leq$

$$\leq \Rightarrow \int\limits_R^\infty \frac{e^{-\alpha x} \sin x}{x}\,dx \leq \frac{1}{R} + \int\limits_R^\infty \frac{dx}{x^2} \leq \frac{2}{R} < \varepsilon, \quad R \geq \frac{2}{\varepsilon}, \quad \forall \alpha \geq 0$$

3) $I(\alpha)$ непр. по $\alpha \geq 0$. $e^{-\alpha x} \cdot \frac{\sin x}{x}$ непр. при $x>0$, $\alpha \geq 0$.

$I(0) = \lim\limits_{\alpha \to +0} I(\alpha) \Rightarrow \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim\limits_{\alpha \to +0} I(\alpha)$

4) $I'(\alpha) = -\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} \cdot \sin x \, dx = -F \Big|_{x=0}^{x=\infty} = -\frac{1}{1+\alpha^2} \Rightarrow I(\alpha) = C - \operatorname{arctg} \alpha$

$\int\limits_R e^{-\alpha x} \sin x \, dx$ <..> $|F| < 1$

5) $I(\alpha) = C - \operatorname{arctg} \alpha, \forall \alpha > 0$

$I(\alpha) = \left| \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \left| \int\limits_0^\infty \frac{dF}{x} \right| = \left| \int\limits_0^R e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx \right| + \left| \int\limits_R^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx \right|$

$\left| \int\limits_R^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \left| \frac{F}{x} \right|_{x=R}^{x=\infty} + \left| \int\limits_R^\infty \frac{F}{x^2} dx \right| \leq \frac{e^{-\alpha R}}{R} + \frac{e^{-\alpha R}}{R} \xrightarrow[\alpha \to +\infty]{} 0$

$\left| \frac{e^{-\alpha x} \sin x}{x} \right| \leq e^{-\alpha x} \leq \begin{cases} e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}}, & x \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \\ 1, & x \leq 1 \end{cases}$

6) $I(\alpha) = C - \operatorname{arctg} \alpha$, $\alpha \to +\infty$

$0 = C - \operatorname{arctg}(+\infty) = C - \frac{\pi}{2}$ $\quad C = \frac{\pi}{2}$

$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \alpha$

Интеграл Дирихле

разрывный множитель Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \alpha>0 \\ 0, & \alpha=0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \alpha<0 \end{cases}$$

$$D(\alpha,\beta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\cdot\cos\beta x}{x}\,dx, \quad \alpha\geq 0,\ \beta\geq 0$$

$$2\sin\alpha x\cos\beta x = \sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x$$

$$D(\alpha,\beta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x}\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha-\beta)x}{x}\,dx \overset{\substack{\alpha>0\\ \beta>0}}{=} \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi}\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \alpha>\beta\\ 0, & \alpha=\beta\\ -\frac{\pi}{2}, & \alpha<\beta\end{cases} =$$

$$=\frac{1}{2}+\begin{cases}\frac{1}{2}, & \alpha>\beta\\ 0, & \alpha=\beta\\ -\frac{1}{2}, & \alpha<\beta\end{cases} \qquad D(\alpha,\beta)=\begin{cases}1, & \alpha>\beta\\ \frac{1}{2}, & \alpha=\beta\\ 0, & \alpha<\beta\end{cases}$$

$$\operatorname{si} x = \frac{2}{\pi}\int_0^{x}\frac{\sin t}{t}\,dt \quad \left(\frac{2}{\pi}\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt\right)$$

Несобств. ИЗП 2-го рода

$f(x,y)$ в $\bar{P}=\{(x,y): x\in[a,b),\ y\in[c,d]\}$

$\forall y\in[c,d]$ $f(x,y)$ интегрируема в несобств. смысле на $[a,b)$ по x

$\Rightarrow$ $I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ (1) – ИЗП 2-го рода. $\delta(\varepsilon,y)$

Инт. поз. сходящимся: $\forall y\in[c,d]$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$: $\forall\alpha\in(0,\delta)$ $\left|\int_{b-\alpha}^{b} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon$

Опр. Инт. (1) поз. равномерно сходящимся по y на $[c,d]$, $\delta(\varepsilon)$

если он сходится для $\forall y\in[c,d]$ и $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$: $\forall\alpha\in(0,\delta)$

$\forall y\in[c,d]$ $\left|\int_{b-\alpha}^{b} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon$

Сведение к инт. 1-го рода.

В (1) $t=\frac{1}{b-x}$, $b-x=\frac{1}{t}$, $x=b-\frac{1}{t}$, $dx=\frac{dt}{t^2}$ $\Rightarrow$ $I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx=$

$=\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b-\frac{1}{t},y\right)\frac{dt}{t^2}$ $\Rightarrow$ справедл. те же теоремы 5^*-10^*.

(равномерной замены на $\bar{P}$.)

$$\int_{b-\lambda}^{b} f(x,y)\,dx = \int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2} \qquad \lambda = R \geq A = \frac{1}{\delta}$$

Теор. 9*. $\exists$ $f(x,y)$ непр. на $\tilde{P}$ и инт. (1) сх. равномерно по y на $[c,d]$ $\Rightarrow$ $I(y)$ непр. и интегр. на $[c,d]$, возможна перемена местами интегралов.

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

Д-во: сведём к инт. 1-го рода и ссылаемся на теор. 9

§4. Интегралы Эйлера.

1°. Гамма-функция Эйлера (- инт. Эйлера 2-го рода)

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx \quad (1)$$

$y = \Gamma(p)$ (Γ-функция).

1) $\mathcal{D}(\Gamma)$ (область определения)

$$\Gamma(p) = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x}\,dx + \int_1^{\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx = I_1 + I_2$$

I_1: $\frac{x^{p-1}}{e} \leq x^{p-1} e^{-x} \leq x^{p-1}$, $x>0$

$\int_0^1 x^{p-1}\,dx$ $\quad p-1 > -1 \quad p>0$ – сходится

$\quad p-1 \leq -1 \quad p\leq 0$ – расходится $\quad \Rightarrow$

$\Rightarrow$ I_1 сх. при $p>0$, расх. при $p\leq 0$

I_2: $\int_1^{\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx$

$\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| \cdot x^r = C$, $r>1$ $\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)\,dx$ – сх. (след. признак сравнения)

$\left(e^{-x}x^{p-1}\right)x^{2} \xrightarrow[x\to\infty]{\forall p\in\mathbb{R}} 0 \Rightarrow I_2$ сх. для $\forall p\in\mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{D}(\Gamma)=\{p: p>0\}$

2) Непрерывность. (теор. 9, 9*)

$f(x,y)$ - непр., $\int f dx \rightrightarrows$

$x^{p-1}e^{-x} = f(x,p)$ - непр. $x>0$, $p>0$.

$p\to 0$: $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{x} \not\rightrightarrows$

Фикс. $\forall$ т. $p_0>0$, рассмотрим $\forall [c,d]: p_0\in[c,d]$ $0\notin[c,d]$

$0<c<p_0<d<+\infty$

Р-м $\Gamma(p)$ на $[c,d]$

$0<x^{p-1}e^{-x} \le e^{-x}\left(x^{c-1}+x^{d-1}\right)$, $x>0$, $\forall x\in[c,d]$

$\int\limits_0^\infty e^{-x}\left(x^{c-1}+x^{d-1}\right)dx$ — сх. по спец. пр. сравнения.

$\Gamma(p)=\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ (1) $\xRightarrow[\text{т. 9, 9*}]{\text{по Вейерштр.}}$ инт. (1) сх. равномерно на $[c,d]$

$\Rightarrow \Gamma(p)$ - непр. на $[c,d] \Rightarrow$ непр. в т. p_0, а т.к. $\forall p_0>0 \Rightarrow \Gamma(p)$ непр. на $(0,+\infty)$.

3) Дифференцируемость (теор. 10, 10*)

$f(x,y)$ в P_∞, $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ - непр., $\int f$ - сх. $\forall y\in[c,d]$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ - равн. сх. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists I'(y) = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$

$f(x,p)=x^{p-1}e^{-x}$ - непр., $x>0$, $p>0$

$\frac{\partial f(x,p)}{\partial p} = x^{p-1}e^{-x}\ln x$ - непр., $x>0$, $p>0$ инт. (1) - сх. $\forall p>0$

Фикс. $\forall$ т. $p_0>0$, $\exists c,d$: $0<c<p_0<d<+\infty$

Р-м $\Gamma(p)$ на $[c,d]$ $0<x^{p-1}e^{-x}|\ln x| < e^{-x}|\ln x|\left(x^{c-1}+x^{d-1}\right)$

$\int_0^\infty e^{-x}|\ln x|(x^{c-1}+x^{d-1})\,dx$ — сх. по спец. пр. сравнения. $\xRightarrow[\text{т. 6,6°}]{\text{по Вейерштр.}}$

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}\,dx$ — сх. равн. на $[c,d]$

$\Rightarrow \exists\, \Gamma'(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\ln x\,dx,\ \forall p\in[c,d]$

в т. p_0 $\exists\,\Gamma'(p_0)$, $\forall p_0>0 \Rightarrow \forall p>0\ \exists\,\Gamma'(p)$, и т.к. $\frac{\partial f}{\partial p}$ — непр,
$\int \frac{\partial f}{\partial p} \rightrightarrows\ \Gamma \Rightarrow \Gamma'(p)$ непр. на $[c,d]$ $\Rightarrow$ ... на $\mathcal{D}(\Gamma)$.

Аналогично $\exists\,\Gamma^{(l)}(p)=\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}\ln^l x\,dx$, $\forall l=1,2,3,\dots$, непр. на $\mathcal{D}(\Gamma)$. $\Rightarrow \Gamma(p)\in C^\infty(0,+\infty)$.

4) Формула приведения.

$\forall p>0$, р-м $\Gamma(p+1)=\int_0^{+\infty}x^pe^{-x}\,dx = \overbrace{\underbrace{-x^pe^{-x}\Big|_{x=0}^{+\infty}}_{p>0}}^{0} + p\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}\,dx =$
$= p\,\Gamma(p)$

$$\boxed{\Gamma(p+1)=p\,\Gamma(p)\quad \underset{\forall p>0}{(2)}}$$ — ф-ла приведения.

$$\boxed{\underset{z\in\mathbb{C}}{\Gamma(z+1)=z\,\Gamma(z)}}$$

Фикс. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists\, p>n-1$. Р-м $\Gamma(p+1)=p\,\Gamma(p)=p(p-1)\,\Gamma(p-1)=\dots=$
$=p(p-1)\dots\underbrace{(p-n+1)}_{>0}\Gamma(p-n+1)$ (3)

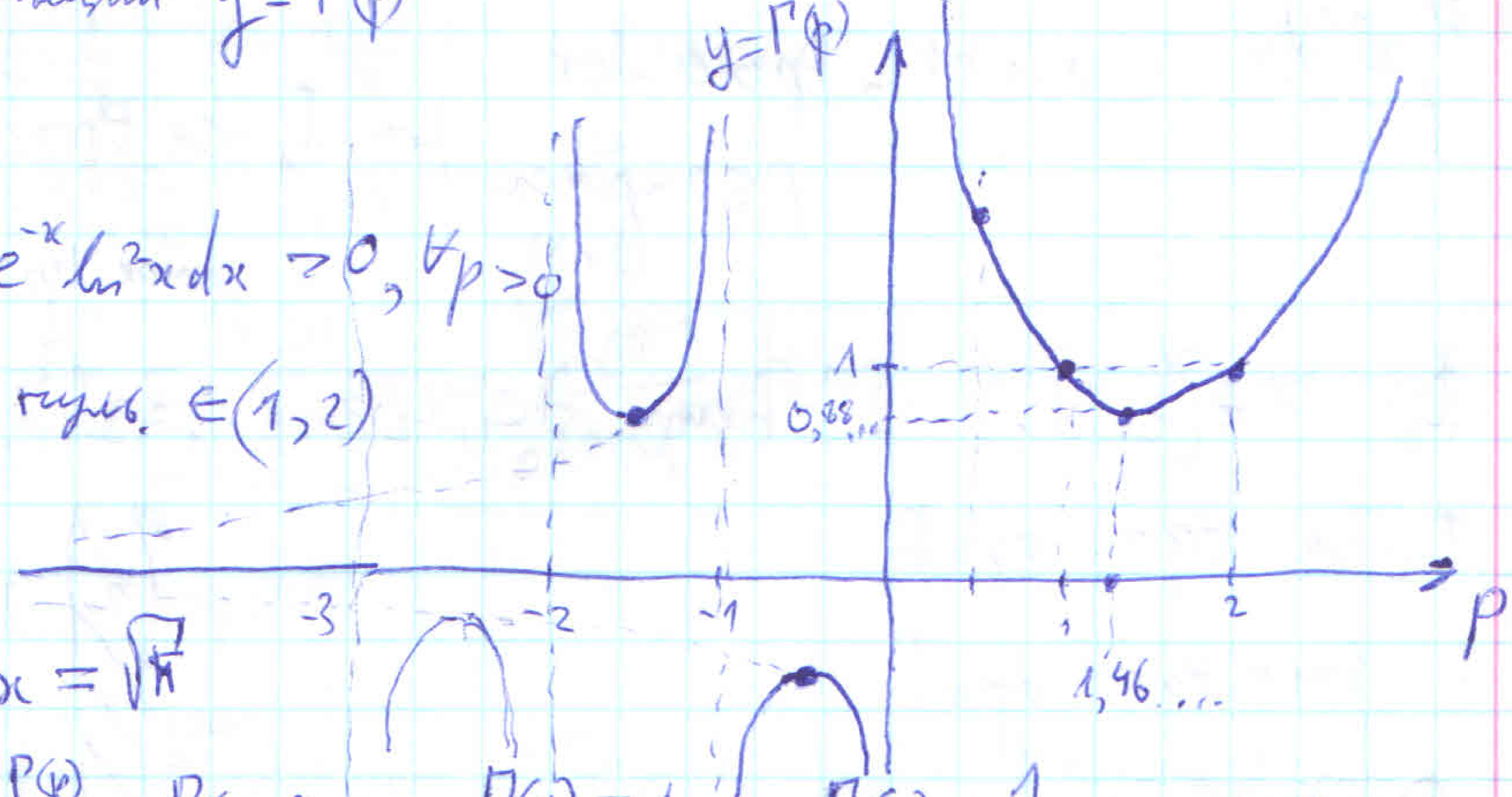
$p\gg 1$: (3) $\Gamma(p+1)$ можно выразить через $\Gamma()$ на $(0,1]$ или $[1,2]$.

Пусть $p=n\in\mathbb{N}$ в (3): $\Gamma(n+1)=n(n-1)\dots2\cdot1\cdot\Gamma(1)=n!$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}\,dx=1$ (3) $\Gamma(p+1)=p!$ $\forall p>0$

$\Gamma(2) \overset{(2)}{=} 1 \cdot \Gamma(1) = \Gamma(1) = 1$

5) График функции $y = \Gamma(p)$



$\Gamma(p) > 0$

$\Gamma''(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \ln^2 x \, dx > 0, \ \forall p > 0$

$\Gamma'(p)$ — один нуль $\in (1,2)$

$\Gamma(1) = \Gamma(2)$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi}$

(2): $p\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p)}{\frac{1}{p}} = \Gamma(p+1) \underset{p \to 0+0}{\longrightarrow} \Gamma(1) = 1 \qquad \Gamma(p) \sim \frac{1}{p}, \ p \to 0+0$

$\exists p \in (-1, 0) \quad \Gamma(p) \overset{(2)}{=} \frac{\Gamma(p+1)}{p}$, $p+1 \in (0,1)$, $p \neq 0$, — определен.

$\exists p \in (-2, -1) \quad \Gamma(p) = \frac{\Gamma(p-1)}{p}$ — определен. $\Rightarrow \Gamma(p)$ на $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

$\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ — площадь поверхности ед. сферы в n-мерном пр-ве.

$n=1: \ \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 2 \qquad n=2: \ 2\pi \left(= \frac{2\pi}{\Gamma(1)}\right) \qquad n=3: \ 4\pi \left(= \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right)$

2° Бета-функция Эйлера (-инт. Эйлера 1-го рода)

$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \quad (4)$ — B-функция Эйлера.

1) $\Theta(B)$

$B(p,q) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = I_1 + I_2$

I_1: $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow (1-x)^{q-1}$ непр. $\forall q \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists c_1, c_2 > 0$ — пост.:

$0 < c_1 \leq (1-x)^{q-1} \leq c_2 \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$0 < C_1 x^{p-1} \le x^{p-1}(1-x)^{q-1} \le C_2 x^{p-1}$

$\forall x \in (0, \frac{1}{2}]$

$\int\limits_0^{1/2} x^{p-1}dx$, $p-1>-1$, $p>0$ — сх.

$p \le 0$ — расх. $\Rightarrow I_1$ — сх. $\forall p>0, \forall q \in R$

расх. $\forall p \le 0, \forall q \in R$.

I_2: $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, x^{p-1} — непр., $\exists C_1, C_2 > 0$: $C_1 \le x^{p-1} \le C_2$

I_2 сх. $\forall q>0, \forall p \in R$

расх. $\forall q \le 0, \forall p \in R$

$\mathcal{D}(B) = \{(p,q): p>0, q>0\}$

Симметричность.

$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \int\limits_0^1 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt = B(q,p), \forall p,q>0$

$t = 1-x \quad x = 1-t \quad dx = -dt$

Формулы приведения.

$B(p,q+1) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx = \frac{x^p}{x}(1-x)^q\Big|_{x=0}^{1} + \underbrace{\frac{q}{p}\int\limits_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx}_{= \frac{q}{p}B(p+1,q)} =$

$= \{x^p = x^{p-1} - x^{p-1} + x^p = x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)\} = \frac{q}{p}\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx -$

$- \frac{q}{p}\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx = \frac{q}{p}B(p,q) - \frac{q}{p}B(p,q+1) = \frac{p+q}{q}\cdot B(p,q+1) =$

$= \frac{q}{p\cdot\frac{p+q}{p}}B(p,q)$. $\boxed{B(p,q+1) = \frac{q}{p+q}B(p,q) \quad \forall p,q>0}$

$p,q >> 1$
$\downarrow$
$[0,1]^2$

$\frac{q}{p}B(p+1,q) = B(p,q+1) = \frac{q}{p+q}B(p,q) \qquad B(p+1,q) = \frac{p}{p+q}B(p,q)$

3° Выражение $B(p,q)$ через $\Gamma(p)$.

$$\boxed{B(p,q)} = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \overset{*}{=}$$

$$x = \frac{1}{1+t} \quad 1+t = \frac{1}{x} \quad t = \frac{1-x}{x} \quad x=1 \Rightarrow t=0 \quad x\to 0+ \Rightarrow t\to+\infty$$

$$1-x = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} \quad dx = -\frac{dt}{(1+t)^2}$$

$$\overset{*}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^{p-1}} \cdot \frac{t^{q-1}}{(1+t)^{q-1}} \cdot \frac{dt}{(1+t)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt = \{\text{исп. симметричность}\} =$$

$$= \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt, \ \forall p,q>0}$$

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} t^{p-1}y^{p-1}\cdot e^{-ty}\cdot t\,dy = t^p\int_0^{+\infty} y^{p-1}e^{-ty}\,dy \neq$$

$x = ty$, $y \geq 0$, $t>0$ – параметр

$$\neq \boxed{\frac{\Gamma(p)}{t^p} = \int_0^{+\infty} y^{p-1}e^{-ty}\,dy \quad (1)}$$

$t \to 1+t$, $p \to p+q$

$$\boxed{\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\,dy \quad (2)} \qquad \Big| \cdot t^{p-1}, \ \int_0^{+\infty} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma(p+q)\cdot \overbrace{\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt}^{B(p,q)} = \int_0^{+\infty} t^{p-1}\,dt \int_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\,dy \overset{?}{=}$$

$$= \int_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-y}\,dy \underbrace{\int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-ty}\,dt}_{=\frac{\Gamma(p)}{y^p}} = \int_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-y}\frac{\Gamma(p)}{y^p}\,dy = \int_0^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}\,dy \cdot \Gamma(p) =$$

$$= \Gamma(p)\cdot\Gamma(q) = B(p,q)\cdot\Gamma(p,q) \qquad (3)\ \boxed{B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p,q)}}, \ p,q - ?$$

при условии, что (?) доказано.

Т.11 $f(t,y)\geq 0$ непр. $t,y\geq 0$

$\int\limits_0^{+\infty} f(t,y)\,dt$, $\int\limits_0^{+\infty} f(t,y)\,dy$ – непр.

$\int\limits_0^{\infty} dt\int\limits_0^{+\infty} f\,dy$ или $\int\limits_0^{+\infty} dy\int\limits_0^{+\infty} f\,dt$ сх.

$\Rightarrow$ сходится и второй из них и они равны.

Пусть $p,q\geq 1$

$f(t,y)=t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\geq 0$ непр. на $y,t\geq 0$

$\int\limits_0^{+\infty} f(t,y)\,dt = y^{p+q-1}e^{-y}\cdot\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-ty}\,dt \overset{(1)}{=} y^{p+q-1}\cdot e^{-y}\cdot\frac{\Gamma(p)}{y^p} = y^{q-1}e^{-y}\cdot\Gamma(p)$ –

– непр. на $y\geq 0$.

$\int\limits_0^{+\infty} f(t,y)\,dy = t^{p-1}\int\limits_0^{+\infty} y^{p+q-1}\cdot e^{-(1+t)y}\,dy \overset{(2)}{=} \frac{t^{p-1}\cdot\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}}$ – непр. на $t\geq 0$.

$\int\limits_0^{+\infty} dy\int\limits_0^{+\infty} f(t,y)\,dt \underset{сх.}{=} \Gamma(p)\cdot\Gamma(q)$ $\Rightarrow$ вып. условия Т.11 $\Rightarrow$ (?) заключен. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (3) верна $\forall p,q\geq 1$

Пусть $p,q>0$ $\Rightarrow$ $p+1,\ q+1>1$ $\Rightarrow$ верно $B(p+1,q+1)=\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}$

$$B(p+1,q+1)=\frac{\Gamma(p+1)\cdot\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}=\frac{p\Gamma(p)\cdot q\Gamma(q)}{(p+q+1)(p+q)\Gamma(p+q)}=\frac{pq}{(p+q+1)(p+q)}\cdot\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$\frac{q}{p+q+1}B(p+1,q)=\frac{q}{p+q+1}\cdot\frac{p}{p+q}\cdot B(p,q)$$ $\Rightarrow$ (3) верна $\forall p,q>0$

(3) $\Rightarrow$ $B(p,q)$ непр. на $p,q>0$, непр. дифф. любое число раз по p,q на $p,q>0$.

Задача. Из (3) и графика $y=\Gamma(p)$ построить $y=B(p,q)$

$q=q_0$ – фикс. $y=B(p,q_0)$, $B(p,p)$, $B(p,q_1)$ ...

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{x})^2} d\sqrt{x} = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$$

§5. Асимптотическая формула для $\Gamma(\lambda+1)$ при $\lambda \to +\infty$

Формула Стирлинга.

$$n! = \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\bar{o}(1)\right),\ n\to+\infty$$ " Формула Муавра-Стирлинга.

$$\Gamma(\lambda+1) = \int_0^{+\infty} t^\lambda e^{-t}dt \underset{\lambda\gg1}{=} \sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda\left(1+\underbrace{\underline{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)}_{\text{с любой точн.}}\right)$$

Фикс. $\forall a>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$

Лемма. Пусть $f(t)$ определена и интегр. на $[-a,a]$, представима в виде $f(t)=\sum_{k=0}^{2n-1} c_k t^k + \underline{O}(t^{2n})$ (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \Lambda = \Lambda(a,n) > 1 : \forall \lambda > \Lambda$ справедлива формула:

$$\int_{-a}^{a} e^{-\lambda t^2} f(t)\,dt = \sum_{l=0}^{n-1} c_{2l}\cdot\frac{\Gamma(l+\frac{1}{2})}{\lambda^{l+\frac{1}{2}}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}\right) \quad (2)$$

Д-во. Подставим пр. часть (1) в левую часть (2).

$$\int_{-a}^{a} t^{2l+1} e^{-\lambda t^2}dt = 0 \quad (l\geq 0 \text{ нечётн.}) \qquad \int_{-a}^{a} t^{2l} e^{-\lambda t^2}dt = 2\int_0^a t^{2l}e^{-\lambda t^2}dt =$$
$l=\overline{0,n-1}$

$$= 2\int_0^{+\infty} t^{2l}e^{-\lambda t^2}dt - 2\int_a^{+\infty} t^{2l}e^{-\lambda t^2}dt = I_1 - I_2$$

$$I_1 = 2\int_0^{+\infty} t^{2l}e^{-\lambda t^2}dt = \left\{\lambda t^2 = x,\ t=\sqrt{\frac{x}{\lambda}},\ dt=\frac{dx}{2\sqrt{\lambda x}}\right\} = 2\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^l e^{-x}\frac{dx}{2\sqrt{\lambda x}} =$$

$$= \frac{1}{\lambda^{l+\frac{1}{2}}}\int_0^{+\infty} x^{\overset{l-\frac{1}{2}}{}}_{\ (l+\frac{1}{2})-1} e^{-x}dx = \frac{\Gamma(l+\frac{1}{2})}{\lambda^{l+\frac{1}{2}}},\quad l=\overline{0,n-1}.$$

$$I_2 = 2\int_a^{+\infty} t^{2l} e^{-\lambda t^2} dt \quad \left\{ e^{-\lambda t^2} = e^{-\lambda t^2 + t^2 - t^2} = e^{-(\lambda-1)t^2 - t^2} \right\}^{*}$$

Пусть $\lambda > 1 \Rightarrow \lambda - 1 > 0$

$$* \leq e^{-(\lambda-1)a^2} e^{-t^2} \qquad 0 < I_2 < 2e^{-(\lambda-1)a^2} \int_a^{+\infty} t^{2l} e^{-t^2} dt = ce^{-\lambda a^2},$$

$$c = e^{a^2} \int_a^{+\infty} t^{2l} e^{-t^2} dt$$

$$I_2 = \underline{\underline{O}}\left(e^{-\lambda a^2}\right), \ \lambda > 1$$

$$\int_{-a}^{a} t^{2l} e^{-\lambda t^2} dt = \frac{\Gamma(l+\frac{1}{2})}{\lambda^{l+\frac{1}{2}}} + \underline{\underline{O}}\left(e^{-\lambda a^2}\right), \ \forall \lambda > 1, \ l = \overline{0, n-1}.$$

$$\left| \int_{-a}^{a} O(t^{2n}) e^{-\lambda t^2} dt \right| \leq \tilde{c} \int_{-a}^{a} t^{2n} e^{-\lambda t^2} dt = \tilde{c} \cdot \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}} + \underline{\underline{O}}\left(e^{-\lambda a^2}\right) \quad \forall \lambda > 1$$

убывает медленнее всех (худшее слагаемое)

$e^{-\lambda a^2} \downarrow 0$ быстрее $\forall \frac{1}{\lambda^k}, \lambda \to +\infty$

$$\exists \Lambda > 1: \ e^{-\lambda a^2} < \frac{1}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}} \quad \forall \lambda > \Lambda \quad \underline{\underline{O}}\left(e^{-\lambda a^2}\right) = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}\right) \Rightarrow (2).$$

Лемма доказана.

Д-м $\Gamma(\lambda+1) = \int_0^{+\infty} t^{\lambda} e^{-t} dt = \left\{ t = \lambda(1+x) \ \ dt = \lambda dx, \ \lambda > 0 \right\} =$

$$= \int_{-1}^{+\infty} \lambda^{\lambda} (1+x)^{\lambda} e^{-\lambda(1+x)} \lambda dx = \lambda^{\lambda+1} e^{-\lambda} \int_{-1}^{+\infty} (1+x)^{\lambda} e^{-\lambda x} dx =$$

$g(x)$ должна быть монотонной

$$= \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda} \cdot \lambda \int_{-1}^{+\infty} e^{-\lambda(x - \ln(1+x))} dx = \left\{ x - \ln(1+x) = g^2(x) \geq 0 \ (=0 \text{ при } x = 0), \ -1 < x < +\infty \right\} =$$

$$= \left\{ g(x) = \operatorname{sgn} x \sqrt{x - \ln(1+x)}, \ x \in (-1, +\infty) \right\} =$$

$$\Gamma(\lambda+1) = \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda} \cdot \underbrace{\lambda \int_{-1}^{+\infty} e^{-\lambda g^2(x)} dx}_{I_\lambda} = \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda} I_\lambda \quad (3) \qquad I_\lambda - ?$$

$g(x)$ определена на $x > -1$, монотонно возрастает,

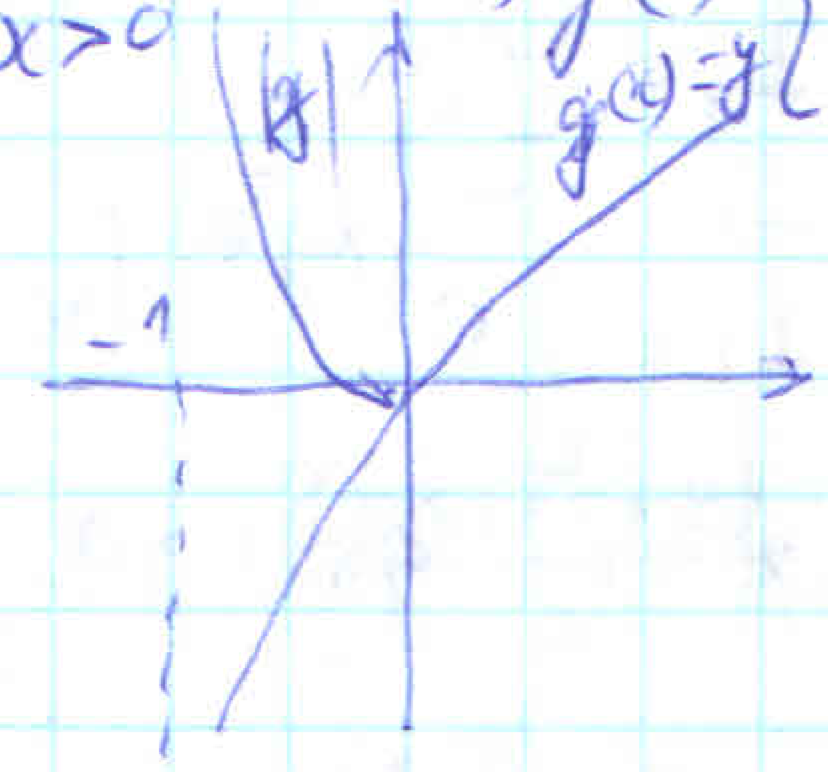
беск. дифф., $g(0)=0$, | $\Rightarrow$ $\exists$ обратная ф-ия $x = g^{-1}(y) = \varphi(y)$

g принимает все значения на $(-\infty, +\infty)$ | $\varphi(y)$ опред. на $(-\infty, +\infty)$

$\varphi(0)=0$, беск. дифф., монот. возр.

Монотонность

$$\left(g^2(x)\right)' = \left(x - \ln(1+x)\right)' = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \begin{cases} <0, & x \in (-1,0) \\ >0, & x>0 \end{cases}, \quad g^2(x) \begin{cases} \downarrow, & x\in(-1,0) \\ \nearrow, & x>0 \end{cases}$$



$$|g(x)| \begin{cases} \downarrow, & x \in (-1,0) \\ \nearrow, & x>0 \end{cases}, \text{т.}$$

$\Downarrow$

$$g(x) \begin{cases} \nearrow, & x \in (-1,0) \\ \nearrow, & x>0 \end{cases}, \text{ т.к. } g<0,\ x\in(-1,0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $g(x) \nearrow$ на $(-1,+\infty)$ $\Rightarrow$ $\exists\, g^{-1} \nearrow$

Гладкость

$x \neq 0 \quad g(x) \in C^\infty\left((-1,+\infty)\setminus\{0\}\right)$

$$g^2(x) = x - \ln(1+x) = x - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right) = x^2 \Big(\underbrace{\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{5} + \dots}_{h(x)}\Big) =$$

$= x^2 h(x)$

$$h(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{5} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k+2}, \quad R=1$$ радиус сходимости

$h(x) \in C^\infty(-1,1)$

$h(0) = \frac{1}{2} \quad h(x)>0 \ \forall x \in (-1,1)$, т.к. $g^2(x) \geq 0$ и $=0$ только при $x=0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) = x\sqrt{h(x)} \in C^\infty(-1,1) \Rightarrow g(x) \in C^\infty(-1,+\infty)$

Р-м $\quad I_\lambda = \int\limits_{-1}^{\infty} e^{-\lambda g^2(x)}\,dx$

$\forall a>0$ $y=g(x)$

$$\boxed{\Gamma(\lambda+1)=\left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\sqrt{\lambda}\left[\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(2\ell+1)}(0)}{(2\ell)!}\cdot\frac{\Gamma(\ell+\frac{1}{2})}{\lambda^{\ell}}+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^{n}}\right)\right]\quad\forall\lambda>\Lambda>1}$$

асимптотическая ф-ла для $\Gamma(\lambda+1)$ при $\lambda\to+\infty$

$\varphi^{(k)}(0)$ – ?

Схема:

$$\exists n=1:\ \Gamma(\lambda+1)=\left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\sqrt{\lambda}\left[\frac{\varphi'(0)}{1}\cdot\frac{\overset{\sqrt{\pi}}{\overset{\parallel}{\Gamma(\frac{1}{2})}}}{1}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

$$\varphi'(0)=?\quad (g^2(x))'=2g(x)\cdot g'(x)=\frac{x}{1+x},\ x\neq0$$

$$g'(x)=\frac{x}{2g(x)(1+x)},\ g(x)=t,\ x=\varphi(t),\ \varphi'(t)=\frac{1}{g'(x)}=\frac{2g(x)(1+x)}{x}=\frac{2t(1+\varphi(t))}{\varphi(t)}\Big|\cdot\varphi(t)$$

$$\varphi(t)\cdot\varphi'(t)=2t+2t\cdot\varphi(t),\ \forall t\in(-\infty,+\infty)\ \Big|\ \frac{d}{dt}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\varphi'(t))^2+\varphi(t)\cdot\varphi''(t)=2+2\varphi(t)+2t\varphi'(t)$$

$$t=0:\ (\varphi'(0))^2+0=2+0+0\quad(\varphi'(0))^2=2\quad\varphi'(t)>0$$

$$\Rightarrow\boxed{\varphi'(0)=+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow\ \Gamma(\lambda+1)=\sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\left(1+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$$

$$\exists\lambda=n\in\mathbb{N}\quad\Gamma(n+1)=n!=\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\cdot\left(1+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{n}\right)\right),\ \forall n>N>1$$

ф-ла Стирлинга (-Муавра).

$$\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\frac{139}{51840n^3}+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$