Глава 9.

Ряды Фурье 1811 г.

$Q \sim K \nabla t$

$u_t - u_{xx} = f(x,t)$

E^n $\quad f = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \bar{e}_k \quad \{c_k\}$

$E^\infty = E$ $\quad f \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k \in ?$

§1. Задача о наилучшем приближении элементов евкл. прост.

$E^\infty = E$ $\forall n$ $\exists n$ лин. независимых элементов из E.

Опр. 1. Лин. пр. E наз. евклидовым, если $\forall \{f, g\} \in E \to$
$\to (f,g) \in \mathbb{R}$, называемое скалярным произведением
f и g, так что

1° $(f,g) = (g,f)$

2° $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f,h) + \beta(g,h)$ $\quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall f, g, h \in E$

3° $(f,f) > 0$, $f \neq \theta$

$(f,f) = 0$, если $f = \theta$.

Пример

$E_0[a,b]$ — пр-во всех кус.-непр. на $[a,b]$ функций

$f(x)$ — кус. непр. на $[a,b]$, если $f(x)$ непр. во всех точках $[a,b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a,b)$, в которых $f(x)$ терпит разрывы 1-го рода, $\exists f(x_k \pm 0)$, $k=\overline{1,n}$, в точках x_k:

$$f(x_k) = \frac{f(x_k+0)+f(x_k-0)}{2}, \quad k=\overline{1,n}$$

$f(x_k)=1$? ← вставка

$f(x_k)=\alpha f(x_k+0)$? $\alpha\neq 0$

$f=\Theta: f(x)\equiv 0$ на $[a,b]$.

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

Бесконечномерное: $\forall n: \{x^k\}_{k=0}^n$ — лин. независ.

Опр. 2 Лин. пр. E наз. почти евклидовым, если для (f,g) вып. 1°, 2°, а $3^\circ \to \tilde{3}^\circ$: $(f,f)\geq 0$, $\forall f\in E$.

Обозн. $\tilde{E}$ — почти евклидово пространство.

Любое E явл. почти евклидовым $\Rightarrow$ достаточно д-ть утв. для $\tilde{E}$, они будут верны и для E.

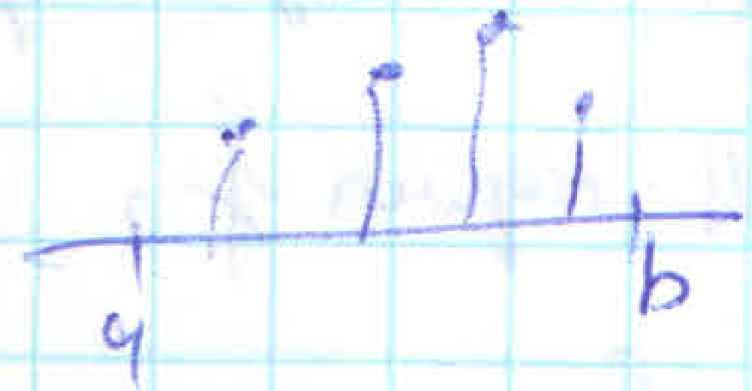
Пример. $L[a,b]$ — пр-во всех инт. по Риману функций на $[a,b]$

$f=\Theta$: $f\equiv 0$ на $[a,b]$. $\quad 1^\circ, 2^\circ$ выполняются

$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx \qquad \int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0 \Rightarrow \tilde{3}^\circ$ — выполн.

3° может не выполняться $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^b f^2(x)\,dx = 0 \not\Rightarrow f=0$



$f\neq 0 \quad \int_a^b f^2(x)\,dx=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow L[a,b]$ — почти евклидово.

Бесконечномерное: $\forall n \; \{x^k\}_{k=0}^n$ — лин. независ. на $[a,b]$

$E_0[a,b] \subset L[a,b]$

Теор. 1

$\forall f, g \in \tilde{E}$ справедливо нер-во Коши-Буняковского:

$(f,g)^2 \leq (f,f)\cdot(g,g)$

$|(f,g)| \leq \sqrt{(f,f)}\sqrt{(g,g)}$

$f^2 = (f,f) \neq 0: \quad (g-\lambda f)^2 = (g,g) - 2\lambda(g,f) + \lambda^2(f,f) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{D}{4} = (g,f)^2 - (f,f)(g,g) \leq 0$

$(g,f)^2 \leq (f,f)(g,g)$

$f^2 = 0,\ g^2 \neq 0: \quad (f-\lambda g)^2 = (f,f) - 2\lambda(f,g) + \lambda^2(g,g) \geq 0$

$\Rightarrow \frac{D}{4} = (f,g)^2 - (f,f)(g,g) \leq 0$

$f^2 = g^2 = 0: \quad (f+g)^2 = \underbrace{(f,f)}_{=0} + 2\underbrace{(f,g)}_{\geq 0} + \underbrace{(g,g)}_{=0} \geq 0$

$(f-g)^2 = \underbrace{(f,f)}_{=0} - 2(f,g) + \underbrace{(g,g)}_{=0} \geq 0$

$(f,g) \leq 0$

$(f,g) = 0$

Опр. 3. Лин. пр. L наз. нормированным, если $\forall f \in L \to \|f\|$ - норма f,

1°. $\|f\| > 0,\ f \neq \theta$,

$\|f\| = 0,\ f = \theta$.

2°. $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

3°. $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$ – нер-во треугольника (Минковского).
$\forall f, g \in L$

Опр. 4. Если в опр. 3 $1^\circ \to \tilde{1}^\circ$: $\|f\| \ge 0$, $\forall f \in L$, $2^\circ, 3^\circ$, то
L наз. почти нормированным.
$\|f\|$ – норма.

Теорема 2.
Любое E ($\tilde{E}$) можно сделать нормированным (почти нормированным), положив $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$, $\forall f$.

3°: $\|f+g\| = \sqrt{(f+g, f+g)} = \sqrt{(f,f) + 2(f,g) + (g,g)} \underset{\text{К.-Б.}}{\le} \sqrt{(f,f) + 2\sqrt{f,f}\cdot\sqrt{g,g} + (g,g)} = \sqrt{(\sqrt{(f,f)})^2 + 2\sqrt{(f,f)}\cdot\sqrt{(g,g)} + (\sqrt{(g,g)})^2} = \sqrt{(\sqrt{f,f} + \sqrt{g,g})^2} = \sqrt{f,f} + \sqrt{g,g} = \|f\| + \|g\|$.

$\Rightarrow$ нер-во К.-Б.: $\boxed{|(f,g)| \le \|f\| \cdot \|g\|}$ $\forall f, g \in \tilde{E}$.

$E, \tilde{E}$ Т, $\forall f, g \in \tilde{E}$

$|(f,g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$

Теор. 2. в $\tilde{E}$ $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$.

Опр. $\forall f, g \in \tilde{E}$ отклонением элемента g от элемента f наз. $\|f-g\|$

$f \perp g$ $(f,g)=0$ $\forall f, g \in \tilde{E}$

Р-м систему элементов $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \tilde{E}$.

Система наз. ортогональной, если $(\psi_i, \psi_j) = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots$

Пример. $L[-\pi, \pi]$ $\{1, \cos nx, \sin nx\}$

Система наз. ортонормированной (ОНС), если

$(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i=j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$ - ОНС в $L[-\pi, \pi]$ (в $E_0[-\pi, \pi]$)

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ - тригонометрическая система функций

Фикс. $\forall$ ОНС $\{\psi_k\} \subset \tilde{E}$, фикс. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall c_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$

$\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$ (1)

Фикс. $\forall f \in \tilde{E}$ $\min\limits_{\forall \{c_k\}_{k=1}^{n}} \|f - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k\|$ - ?

$$\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k\|^2=\left(f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k,\ f-\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i\right)=(f,f)-2\sum_{k=1}^{n}c_k\underbrace{(\varphi_k,f)}_{=f_k}+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}c_k^2=\|f\|^2+\sum_{k=1}^{n}(c_k^2-2c_kf_k+f_k^2-f_k^2)=\|f\|^2+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(c_k-f_k)^2}_{\geq 0}-\sum_{k=1}^{n}f_k^2$$

min при $c_k=f_k$ $\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}f_k^2$

Опр. Рядом Фурье элемента $f\in\tilde{E}$ по ОНС $\{\varphi_k\}$ наз. ряд $\sum_{k=1}^{\infty}f_k\varphi_k$, где $f_k=(f,\varphi_k)$ наз. коэффициентами Фурье элемента f по системе $\{\varphi_k\}$.

$S_n=\sum_{k=1}^{n}f_k\varphi_k$ наз. n-ой частичной суммой ряда Фурье f по $\{\varphi_k\}$.

Теор. 3 Среди всевозможных линейных комбинаций (1) наименьшее отклонение от элемента $f\in\tilde{E}$ имеет n-я частичная сумма ряда Фурье элемента f по системе $\{\varphi_k\}$.

Следствие 1. $\forall\tilde{E}$, $\forall f\in\tilde{E}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall\{c_k\}_{k=1}^{n}\subset\mathbb{R}$, $\forall\{\varphi_k\}$ – ОНС в $\tilde{E}$ $\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k\|^2\geq\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}f_k^2$ (2)

Следствие 2. $\forall\tilde{E}$, $\forall f\in\tilde{E}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall$ ОНС $\{\varphi_k\}$ в $\tilde{E}$

$\|f-\sum_{k=1}^{n}f_k\varphi_k\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}f_k^2$ (3) – тождество Бесселя.

Теор. 4 $\forall\tilde{E}$, $\forall f\in\tilde{E}$, $\forall\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНС в $\tilde{E}$ $f_k=(f,\varphi_k)$

$\sum_{k=1}^{\infty}f_k^2\leq\|f\|^2$ (4) – неравенство Бесселя

Д-во:

$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \geq 0 \ \forall n \quad \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leq \|f\|^2, \forall n \Rightarrow$ частичная сумма ряда с неотр. членами $\sum f_k^2$ огранич $\overset{\text{т.2. глава 1}}{\Rightarrow}$ ряд $\sum_k f_k^2$ сходится.

в последнем нер-ве $n \to \infty \Rightarrow (4) \Rightarrow \forall f \in \tilde{E}, \forall$ ОНС $\{\psi_k\}$

$f_k = (f, \psi_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ и $\sum_1^{\infty} f_k^2$ — сх.

$c_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ — не являются коэфф. Фурье никакого $f \ \forall \tilde{E}$.

Пример:

$L[-\pi, \pi]$, $E_0[-\pi, \pi]$ ОНС $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\}$ — ряд Фурье $\forall f(x) \in L[-\pi, \pi]$.

$$f(x) \sim \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{f_k'}{\sqrt{\pi}} \cos kx + \frac{f_k''}{\sqrt{\pi}} \sin kx\right)$$ — тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ (ТРФ)

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad f_k' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx$$

$$f_k'' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,dx, \ k = 1, 2, \ldots$$

Нер-во Бесселя: $$f_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(f_k'^2 + f_k''^2\right) \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

Другая форма записи: $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$ ТРФ

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,dx, \ k = 1, 2, \ldots$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$ — нер-во Бесселя

$\forall f(x) \in L[-\pi,\pi]$, $a_k, b_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$ - сх.

В $L[a,b]$ $\|f-g\| = \sqrt{\int\limits_a^b (f(x)-g(x))^2 dx}$ - средн. кв. отклон.

§2. Св-ва полноты и замкнутости ОНС

Опр. Сист. элементов $\{\psi_k\}$ пр-ва $\tilde{E}$ наз. замкнутой в этом пр-ве, если $\forall \varepsilon > 0$, $\forall f \in \tilde{E}$ найдётся такая лин. комбинация конечного числа элементов этой системы отклонение которой от f (по норме $\tilde{E}$) будет $< \varepsilon$, т.е.

с любой точностью приобл. лин. комб. конечн. числа элементов $\{\psi_k\}$ по норме $\tilde{E}$, т.е

$\forall \varepsilon > 0$ $\forall f \in \tilde{E}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $C_1, \dots, C_{n_0} \in \mathbb{R}$:

$\|f - \sum\limits_{k=1}^{n_0} C_k \psi_k\|_{\tilde{E}} < \varepsilon$

Теор. 5. Для любой замкнутой ОНС элементов $\{\psi_k\} \subset \tilde{E}$ и $\forall f \in \tilde{E}$ нер-во Бесселя по этой системе переходит в точное равенство

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2$ (5) - равенство Парсеваля (ур-е замкнутости Ляпунова)

Д-во: Т.к сист. $\{\psi_k\}$ явл. замкнутой в $\tilde{E}$, то

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0, C_1, \dots, C_{n_0}$: $\varepsilon > \|f - \sum\limits_{k=1}^{n_0} C_k \psi_k\|^2_{\tilde{E}} \underset{(2)}{\geq} \|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n_0} f_k^2 \geq$

$\underset{\forall n \geq n_0}{\Rightarrow} \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \underset{(4)}{\geq} 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$ - сходится и его

сумма $= \|f\|^2$, т.е. справедливо (5).

Теор. 6. Для всякой замкнутой ОНС $\{\varphi_k\} \subset \tilde{E}$ и $\forall f \in \tilde{E}$ ряд Фурье элемента f по $\{\varphi_k\}$ сходится к f по норме этого пр-ва, т.е. $\exists \lim_{n\to\infty} \|f - \sum_{k=1}^{n} f_k \varphi_k\|_{\tilde{E}} = 0$. (сильная сходимость)

Д-во: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|f - \sum_{k=1}^{n} f_k \varphi_k\|^2 \underset{(3)}{=} \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ (5)}]{} 0$.

В $L[a,b]$, $\tilde{E}_0[a,b]$ сходимость по норме:

$\|f - \sum_{k=1}^{n} f_k \varphi_k\| = \sqrt{\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k \varphi_k(x)\right]^2 dx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ - сх. в среднем.

Опр. Система элементов $\{\varphi_k\}$ пр-ва $\tilde{E}$ наз. полной в этом пр-ве, если в $\tilde{E}$ не существует элемента, отличного от нулевого, ортогонального сразу ко всем элементам этого пространства, т.е. из того что $(f, \varphi_k) = 0, \forall k \Rightarrow f = \theta$.

Теор. 7 Всякая замкнутая ОНС элементов евклидова пр-ва E является полной в этом пр-ве.

Д-во: Пусть $f \in E$ и $(f, \varphi_k) = 0, \forall k$ $\underset{(5)}{\Rightarrow} \|f\| = 0 \underset{E}{\Rightarrow}$
$= f_k$

$\Rightarrow f = \theta$, т.е. $\{\varphi_k\}$ - полна.