Теор. 8. Для $\forall$ полной (и тем более $\forall$ замкнутой) ОНС евклид. пр-ва E два различ. эл-та f и $g \in E$ не могут иметь одинаковые ряды Фурье по этой сист. (ряды одинаковы, если $f_k = g_k \ \forall k$)

Д-во. Пусть $f_k = (f, \psi_k) = g_k = (g, \psi_k) \ \forall k$.

$$(f, \psi_k) - (g, \psi_k) = \underbrace{(f-g, \psi_k)}_{(f-g)_k} = 0, \ \forall k$$

Т.к. система полна в $E \rightarrow f - g = \theta$, т.е. $f = g$.

§3. Замкнутость

тригонометр. сист. функций

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{k=1}^{\infty} \text{ — замкн. в } L[-\pi, \pi] \text{ — д-ть.}$$

$f(x) \in L[-\pi, \pi]$

~~Опред.~~ Опр. Р-м $\forall f(x) \in L[-\pi, \pi]$, пусть $\exists f(-\pi+0), f(\pi-0)$.

Функция $F(x)$ наз. периодическим (с периодом 2π) продолжением $f(x)$ на $\mathbb{R}$, если $F(x) = f(x) \ \forall x \in (-\pi, \pi)$,

$$F(-\pi) = F(\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$$

$F(x+2\pi) = F(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad F(x) \sim f(x)$ на $\mathbb{R}$ $\quad$ 2π – $\mathbb{R}$

2π-периодическое продолжение

Лемма 1. Пусть $f(x) \in L[-\pi, \pi]$, $2\pi \sim R$ $\Rightarrow$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\,dx$ – есть величина постоянная, напр. $\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

Будем использовать: $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x \pm \alpha)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

Д-во: $$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{-\pi} + \int\limits_{-\pi}^{\pi} + \int\limits_{\pi}^{\alpha+2\pi} = \int\limits_{\alpha+2\pi}^{\pi} \underbrace{f(t-2\pi)}_{f(t)}\,dt + \int\limits_{-\pi}^{\pi} + \int\limits_{\pi}^{\alpha+2\pi} f(x)\,dx =$$

взаимно уничтож.

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

1°. Ядро Дирихле.

$\forall f(x) \in L[-\pi, \pi]$ – частичн. сумму тригон. ряда Фурье (ТРФ)

$$S_n(x, f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1), \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$S_0(x, f) = \frac{a_0}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos ky\,dy, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin ky\,dy, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} (2)$$

$\boxed{2\pi \sim \mathbb{R}}$

Подставим (2) в правую часть (1):

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\cos ky \cos kx + \sin ky \sin kx\right]\right] dy \underset{y = t + x}{\overset{t = y - x}{=}}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t+x) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right] dt \overset{\text{Лем. 1}}{=} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right) dt =$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$$= \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right) \frac{2 \sin \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \left[\sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t - \right.\right.$$

$- \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t\Big] = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$ $\quad D_n(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$, $n=0,1,2$ –

$t=0$ $n+\frac{1}{2}$ – доопред.

– ядро Дирихле.

Лемма 2. $\forall f(x) \in L[-\pi,\pi]$, $2\pi \sim \mathbb{R}$, $S_n(x,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt =$
$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, D_n(t)\,dt$ (3) $\quad n=0,1,2,\dots$

Справедливо след. замечат. свойство ядра Дирихле.

Лемма 3. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1$, $n=0,1,2,\dots$

$$f(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, D_n(t)\,dt$$

Следствие

$$S_n(x,t) - f(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[f(x+t) - f(x)\right]\cdot D_n(t)\,dt, \; n=0,1,2,\dots$$

Д-во: В (1) полагаем $f(x)\equiv 1$, $S_n(x,1) = \frac{a_0}{2} + 0$ — т.к. $1 \perp \cos kx, \sin kx$
$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\,dy = 1$ $\qquad \Downarrow$ $a_k = b_k = 0, k=1,2$

Подставим $f=1$ в (3): $S_n(x,1) = 1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\; D_n(t)\,dt$, $n=0,1,2$

2°. Ядро Фейера.

$f(x) \in L[-\pi,\pi]$, $2\pi \sim \mathbb{R}$. Р-м среднее Чезаро частичных сумм ТРФ. $\sigma_n(x,f) = \frac{S_0(x,t) + S_1(x,t) + \dots + S_{n-1}(x,t)}{n}$ (4)

Получим интегральное представление для (4).

Подставим (3) в (4)

$$\sigma_n(x,f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{f(x+t)}{\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right]dt$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\cdot\frac{2\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}=\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos kt-\cos(k+1)t\right)=(1-\cancel{\cos t})+$$

$$+(\cancel{\cos t}-\cancel{\cos 2t})+\ldots+(\cancel{\cos(n-1)t}-\cos nt)=\frac{1-\cos nt}{2\sin\frac{t}{2}}=$$

$$=\frac{1-1+2\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}=\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

$\Phi_n(t)=\frac{1}{2\pi n}\frac{\sin^2 nt/2}{\sin^2\frac{t}{2}}$, $n=1,2,\ldots$ — ядро Фейера

Лемма 4. $\forall f(x)\in L[-\pi,\pi]$, 2π-п, $\sigma_n(x,f)=\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}dt=$

$=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\Phi_n(t)\,dt$ (5) $n=1,2,\ldots$

~~Следствие.~~ $\cancel{f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}}$

Св-ва ядра Фейера.

Лемма 5. Справедливы след. св-ва

1) $\Phi_n(t)$ — чётная неотр. функция.

2) $\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt=1$, $\forall n=1,2,\ldots$

3) $\forall\delta\in(0,\pi)$ $\eta_n(\delta)=\int_{-\pi}^{-\delta}\Phi_n(t)\,dt=\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

Из 2): $f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\Phi_n(t)\,dt$

Следствие.

$$\sigma_n(x,t)-f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x+t)-f(x)\right]\Phi_n(t)\,dt$$

Д-во: 1) очевидно.

2) Подставим $f \equiv 1$ в (4) и в (5):

$$\sigma_n(x,1) \overset{(4)}{=} \frac{S_0(x,1)+\ldots+S_{n-1}(x,1)}{n} = \frac{\overbrace{1+\ldots+1}^{n}}{n} = 1$$

$$\sigma_n(x,1) = 1 \overset{(5)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \Phi_n(t)\,dt, \ \forall n = 1, 2, \ldots$$

3) $\int_\delta^\pi$, $0<\delta\le t\le\pi$, $0<\frac{t}{2}\le\frac{\pi}{2}$ $\quad \sin\frac{t}{2} \ge \sin\frac{\delta}{2}$ $\quad \left|\sin\frac{nt}{2}\right| \le 1$

$$\eta_n(\delta) = \frac{1}{2\pi n}\int_\delta^\pi \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt \le \frac{\pi-\delta}{2\pi n\sin^2\frac{\delta}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

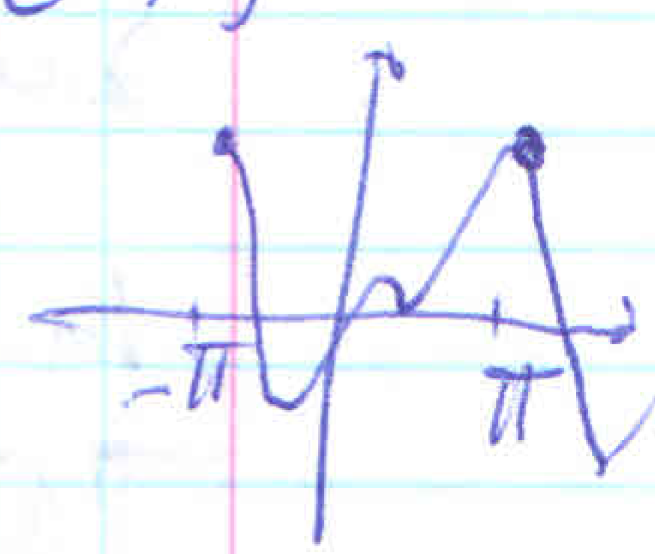
3°. Теорема Фейера.

Теорема 3. (т. Фейера)

Пусть $f(x) \in C[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi) \Rightarrow \sigma_n(x,f) \rightrightarrows f(x)$ на $[-\pi,\pi]$

$(f(x),\ 2\pi\text{-}\mathbb{R} \Rightarrow \sigma_n \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R})$

Д-во: Продолжим $f(x)$ 2π-$\mathbb{R}$. Т.к. $f(-\pi)=f(\pi)$ и f-непр. на $[-\pi,\pi]$ $\Rightarrow$ $f(x)$ на $\mathbb{R}$, непрерывна, а т.к. на $[-\pi,\pi]$ она равн. непр. $\Rightarrow$ на $\mathbb{R}$ $f(x)$ явл. равн. непр.:



$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x', x''\in\mathbb{R},\ |x'-x''|\le\delta$

$|f(x')-f(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\quad f(x)$ огр. на $\mathbb{R} \Rightarrow \exists M\text{-const}>0:$

$|f(x)| \le M,\ \forall x\in\mathbb{R}$. $\quad$ Пусть $\delta<\pi$.

По следствию из лем 5 $\quad \sigma_n(x,f)-f(x) = \int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)-f(x)]\,\Phi_n(t)\,dt =$

$$= \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} = I_- + I_0 + I_+$$

$|I_-| |I_+| \le 2M \cdot \eta_n(\delta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$|f(x+t) - f(x)| \le |\cdot| + |\cdot| \le 2M$

$\Rightarrow \exists N: \forall n \ge N \quad |I_-| \cdot |I_+| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x$

$$I_0 = \int_{-\delta}^{\delta} [f(x+t) - f(x)] \Phi_n(t)\,dt \underset{(6)}{<} \frac{\varepsilon}{3} \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)\,dt \underset{\text{св.(5)}}{<} \frac{\varepsilon}{3} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt \underset{\text{лем 5.2}}{=}$$

$|t| \le \delta$

$$= \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N: |\sigma_n(x,f) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_n(x,f) \rightrightarrows f \text{ на } \mathbb{R}$$

Задача. 1) $f \in C[-\pi, \pi]$ 2) $f(-\pi) = f(\pi)$ необх. для $\sigma_n \rightrightarrows f$ на $[-\pi, \pi]$

4°. Следствия из т. Фейера.

Р-м тригоном. сист. функций $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{k=1}$.

Опр. Тригонометрическим многочленом назовём произвольную линейн. комбинацию конечного числа элементов тригонометрической системы функций, т.е. $T(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k' \cos kx + c_k'' \sin kx)$, $c_k', c_k'' \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$T(x)$: элементы тригоном. сист., $S_n(x,f)$, $\sigma_n(x,f)$

Теорема 10. Тригон. сист. функций явл. замкнутой в $L[-\pi,\pi]$ – всех интегр. по Риману функций на $[-\pi,\pi]$, т.е. $\forall \varepsilon > 0, \forall f(x) \in L[-\pi,\pi] \ \exists T(x): \|f(x) - T(x)\| =$

$= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T(x))^2 dx} < \varepsilon$ (($\Rightarrow$ сист. явл. замкн. в $E_0[-\pi,\pi]$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ и полной в $E_0[-\pi,\pi]$))

Д-во:

I. Докажем, что $\exists$ кус.-пост. функция $f_1(x)$ на $[-\pi,\pi]$:

$\| f(x) - f_1(x) \| < \frac{\varepsilon}{3}$

II. Докажем, что $\exists g(x) \in C[-\pi,\pi]$, $g(-\pi) = g(\pi)$: $\| f_1(x) - g(x) \| < \frac{\varepsilon}{3}$

III. Докажем, что $\exists T(x)$: $\| g(x) - T(x) \| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\| f(x) - T(x) \| \pm f_1(x) \pm g(x) \leq \| f - f_1 \| + \| f_1 - g \| + \| g - T \| <$
$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.