$= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T(x))^2 dx} < \varepsilon$ (($\Rightarrow$ сист. явл. замкн. в $E_0[-\pi,\pi] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ и полной в $E_0[-\pi,\pi]$))

Д-во:

I. Докажем, что $\exists$ кус.-пост. функция $f_1(x)$ на $[-\pi,\pi]$:

$\|f(x) - f_1(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$

II. Докажем, что $\exists g(x) \in C[-\pi,\pi]$, $g(-\pi) = g(\pi)$: $\|f_1(x) - g(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$

III. Докажем, что $\exists T(x)$: $\|g(x) - T(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\|f(x) - T(x)\| \pm f_1(x) \pm g(x) \leq \|f - f_1\| + \|f_1 - g\| + \|g - T\| <$

$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

I. $f(x) \in L[-\pi,\pi] \Rightarrow f$-огр. $\Rightarrow \exists M = const > 0$: $|f(x)| \leq M$

$\forall x \in [-\pi,\pi]$. Фикс. $\forall \varepsilon > 0$, разбиение $[-\pi,\pi]$:

$x_0 = -\pi < x_1 < \ldots < x_n = \pi$ $\quad 0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - s < \frac{\varepsilon^2}{18M}$, $s = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$

$m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$

Введём вспомогательную функцию

$f_1(x) = \begin{cases} m_k, & x_{k-1} < x \leq x_k,\ k = 2,3,\ldots,n \\ m_1, & x_0 \leq x \leq x_1 \end{cases}$ – кус. пост. на $[-\pi,\pi]$

$\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} m_k dx = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) = s \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f_1(x))dx < \frac{\varepsilon^2}{18M}$

$|f_1(x)| \leq M$, $\forall x \in [-\pi,\pi]$ $\quad f_1(x) \leq f(x)$ на $[-\pi,\pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f_1(x)|\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f_1(x))\,dx < \frac{\varepsilon^2}{18M}$$

$$\|f(x)-f_1(x)\|^2_{L[-\pi,\pi]} = \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-f_1(x)]^2dx = \int_{-\pi}^{\pi}|\cdot|\cdot|\cdot|\,dx \le \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f_1(x)|\cdot$$

$$\cdot(|f(x)|+|f_1(x)|)\,dx \le 2M\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f_1(x)|\,dx < 2M\cdot\frac{\varepsilon^2}{18M} = \frac{\varepsilon^2}{9}$$

$$\|f-f_1\|_{L[-\pi,\pi]} < \frac{\varepsilon}{3}$$

II. $\exists\, g(x) = f_1(x)$ на $[-\pi,\pi]$, кроме δ-окрестностей точек x_k, $k=1,2,\dots,n$, а в этих окрестностях $g(x)$ определим линейным образом так, чтобы $g(x)\in C[-\pi,\pi]$, $g(-\pi)=g(\pi)$

δ $\quad \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}[f_1(x)-g(x)]^2dx}_{\text{огр.}} < \frac{\varepsilon^2}{9}$ $\quad |g(x)|\le M$ $\quad \delta=\delta(\varepsilon)$ $\quad \frac{\varepsilon^2}{32M^2n} > \delta > 0$

$$\|f_1-g\|_{L[-\pi,\pi]} < \frac{\varepsilon}{3}$$

III. $g(x)\in C[-\pi,\pi]$, $g(-\pi)=g(\pi) \overset{\text{т.Ф}}{\Longrightarrow} \exists\, T(x)$ (по т. Ф. $\sigma_n(x,g)\rightrightarrows$ $\rightrightarrows g(x)$ на $[-\pi,\pi]$ $\Rightarrow \sigma_n \rightrightarrows g$ в среднем на $[-\pi,\pi]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, T(x) = \sigma_n(x,g) : \|g(x)-T(x)\|_{L[-\pi,\pi]} < \frac{\varepsilon}{3}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \|f(x)\underset{\pm f_1 \pm g}{-}T(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Теорема 11. (1я теорема Вейерштрасса).

Пусть $f(x) \in C[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$. Тогда её можно равномерно на $[-\pi,\pi]$ приблизить тригоном. многочленами, т.е. $\forall \varepsilon>0 \ \exists T(x): |f(x)-T(x)|<\varepsilon, \ \forall x \in[-\pi,\pi]$

Д-во: по т.9 $\sigma_n(x,f) \rightrightarrows f$ на $[-\pi,\pi] \Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists T(x)=\sigma_n(x,f)$: $|f(x)-T(x)|<\varepsilon, \ \forall x\in[-\pi,\pi]$

Замечание. Как и в т.9 оба условия $f\in C[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$ явл. и необх.

По усл. $\exists$ последовательность $T_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[-\pi,\pi]$.

Т.к. $\forall T_n(x)$ - непр. на $[-\pi,\pi]$, а сходимость $\rightrightarrows$, то $f(x)\in C[-\pi,\pi]$ | Док. $\forall \varepsilon>0 \ \exists T(x): |f(x)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{2}, \ \forall x\in[-\pi,\pi]$

$\Rightarrow |f(\pi)-T(\pi)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad |f(-\pi)-T(-\pi)|<\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(\pi)-f(-\pi)|<\varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \Rightarrow f(\pi)=f(-\pi)$

Теорема 12 (2я теорема Вейерштрасса).

Док. $\forall [a,b]\subset \mathbb{R}$. Любую непр. на $[a,b]$ функцию $f(x)$ можно равномерно на $[a,b]$ приблизить алгебраическими многочленами $(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m)$

$\forall \varepsilon>0 \quad \forall f(x)\in C[a,b] \ \exists P_m(x)$ - алг. многочлен $|f(x)-P_m(x)|<\varepsilon, \forall x\in[a,b]$

$[a,b] \to [0,\pi]$ $\quad t = \frac{x-a}{b-a}\pi \in [0,\pi] \quad x = t\frac{b-a}{\pi} + a$
$\quad\ x \qquad\ t$

$f(x) = f\left(t\frac{b-a}{\pi} + a\right) \equiv \varphi(t) \in C[0,\pi]$, продолжим чётным образом $\varphi(t)$ на $[-\pi, 0]$ $\Rightarrow \varphi(t) \in C[-\pi,\pi]$ $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi) \underset{\text{т.Э}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists T(t) : |\varphi(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall t \in [-\pi,\pi]$

$T(t)$ – разложим в степ. ряд (Тейлора), который равн. сход. к $T(t)$ на $\forall$ отрезке $\Rightarrow$ на $[-\pi,\pi]$. Обозн. через $Q_m(t)$ – частичн. сумму ряда Тейлора: $|T(t) - Q_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall t \in$
$\in [-\pi,\pi]$ $\underset{t \to x}{\Longrightarrow}$ $\left|f(x) - \underbrace{Q_m\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right)}_{= P_m(x)}\right| = |f(x) - P_m(x)|$

$\Downarrow$

$|\varphi(t) - \underset{\pm T(t)}{Q_m(t)}| \leq |\varphi(t) - T(t)| + |T(t) - Q_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall t \in [-\pi,\pi]$

5° Следствия из т. 10 (о замкнутости тригоном. системы функций)

Р-м тригн. сист. функций: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ –
– замкн. в $L[-\pi,\pi]$

Следствие 1. $\forall f(x) \in L[-\pi,\pi]$, $2\pi \sim R$ справедливо р-во Парсеваля
$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$ (из т. 10, т. 5)

Следствие 2.

$\forall f(x) \in L[-\pi,\pi]$, $2\pi \sim R$, ТРФ функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ в среднем на $[-\pi,\pi]$, т.е. $\|f(x) - S_n(x,f)\| =$
$= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x,f)]^2 dx} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (т. 10, т. 6)

Следствие 3. $\forall f \in L[\pi,\pi]$, $2\pi \sim \mathbb{R}$, её ТРФ можно почленно интегрировать на $[-\pi,\pi]$ (+ т. 12 следств 2)

Следствие 4. Пусть $f(x), g(x) \in E_0[-\pi,\pi]$. Если f и g имеют на $[-\pi,\pi]$ одинак. ТРФ (т.е. $f_k = g_k \ \forall k$), то $f(x) \equiv g(x)$ на $[-\pi,\pi]$ (из т.10 и т. 8)

Следствие 5. $f(x) \in L[-\pi,\pi]$, $2\pi \sim \mathbb{R}$ и ТРФ функции $f(x)$ $\in E[a,b]$ сходится равн. на некотором $[a,b] \subseteq [-\pi,\pi] \Rightarrow$ ТРФ сход. на $[a,b]$ равн. именно к $f(x)$

Д-во. Пусть $S_n(x,f) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} g(x)$ непр. на $[a,b]$ Д-ть: $g(x) \equiv f(x)$ на $[a,b]$. Т.к. из $(\rightrightarrows) \to \underset{\text{в среднем}}{(\rightrightarrows)}$, то $S_n(x,f) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x)$.

Фикс. $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1: \forall n > N_1 \ \|S_n(x,f) - g(x)\|_{L[a,b]} < \frac{\varepsilon}{2}$ $\equiv E_0[a,b]$

Согласно следств. 2 $S_n(x,f) \underset{\text{в среднем}}{\rightrightarrows} f(x)$ на $[-\pi,\pi]$ $\Rightarrow$ и на $[a,b]$, т.е. $\exists N_2: \forall n > N_2 \ \|S_n(x,f) - f(x)\|_{E_0[a,b]} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \|f(x) - g(x) \underset{\pm S_n(x,f)}{}\|_{E_0[a,b]} \leq$

$\leq \|f - S_n(x,f)\|_{E_0[a,b]} + \|g - S_n(x,f)\|_{E_0[a,b]} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\|f(x) - g(x)\|_{E_0[a,b]} < \varepsilon$, т.к. $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \forall n > N = \max(N_1, N_2)$

$\Rightarrow \|f-g\|_{E_0[a,b]} = 0 \Rightarrow f - g \equiv 0$ $f \equiv g$ на $[a,b]$
т.к. $f, g \in E_0[a,b]$

6° Локальная теорема Фейера.

Т. 9: $f(x) \in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi) \Rightarrow \sigma_n(x,f) \rightrightarrows f$ на $[-\pi,\pi]$

$f \in L[-\pi,\pi]$, $\sigma_n(x,f)$ – ?

Теорема 13 (лок. т. Фейера:)

Пусть $f(x) \in L_0[-\pi,\pi]$, $2\pi \sim \mathbb{R}$ и в нек. т. $x_0 \in \mathbb{R}$ $\exists f(x_0 \pm 0)$

$\Rightarrow \sigma_n(x_0,f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} \equiv \tilde{f}(x_0)$

Д-во: $f \in L[-\pi,\pi]$, $2\pi \sim \mathbb{R} \Rightarrow f$ – огр. на $\mathbb{R}$: $\exists M>0: |f(x)| \le M, \forall x \in \mathbb{R}$

$\exists f(x_0 \pm 0)$: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, $] \delta < \pi$

$$\left.\begin{aligned}&|f(x_0+t)-f(x_0+0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall t \in (0,\delta]\\ &|f(x_0+t)-f(x_0-0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall t \in [-\delta,0)\end{aligned}\right\} (1)$$

$$\sigma_n(x_0,f) - \tilde{f}(x_0) \underset{1,4,5.}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\,\Phi_n(t)\,dt - \tilde{f}(x_0)\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt}_{1} =$$

$$= \int_{\delta \le |t| \le \pi} f(x_0+t) - \tilde{f}(x_0)\,\Phi_n(t)\,dt + \int_{-\delta}^{\delta} f(x_0+t)\,\Phi_n(t)\,dt - \tilde{f}(x_0)\cdot$$

$$\left\{\cdot\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)\,dt = \frac{f(x_0+0)}{2}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n\,dt + \frac{f(x_0-0)}{2}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n\,dt = \frac{f(x_0+0)}{2}\cdot 2\cdot\right.$$

$$\cdot\int_0^{\delta}\Phi_n\,dt + \frac{f(x_0-0)}{2}\cdot 2\int_{-\delta}^{0}\Phi_n\,dt = f(x_0+0)\int_0^{\delta}\Phi_n\,dt + f(x_0-0)\int_{-\delta}^{0}\Phi_n\,dt$$

$$= \int_{\delta \le |t| \le \pi} [f(x_0+t) - \tilde{f}(x_0)]\,\Phi_n(t)\,dt + \int_0^{\delta}[f(x_0+t) - f(x_0+0)]\,\Phi_n(t)\,dt\, +$$

$$+ \int_{-\delta}^{0}[f(x_0+t) - f(x_0-0)]\,\Phi_n(t)\,dt = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1: |f|\cdot|\tilde{f}| \le M \quad |I_1| \le 2M\Big[\int_{-\pi}^{-\delta}\Phi_n\,dt + \int_{\delta}^{\pi}\Phi_n\,dt\Big] = 2M\cdot 2\eta_n(\delta) = 4M\eta_n(\delta) \xrightarrow[\text{л. } 5,3]{} 0$$

$|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \exists N: \forall n > N$

$I_2 + I_3 \underset{(1)}{<} \frac{\varepsilon}{2}\left[\int\limits_0^{\delta} \varphi_n dt + \int\limits_{-\delta}^{0} \varphi_n dt\right] = \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \varphi_n dt < \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_n dt = 1$

$|\sigma_n(x_0, f) - \tilde{f}(x_0)| < \varepsilon, \forall n > N$