Следствие из теоремы 13.

Пусть $f(x) \in L[-\pi,\pi]$, $2\pi \sim \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\exists f(x_0 \pm 0)$, $\{S_n(x_0,f)\}$ — сходящаяся. $\Rightarrow$ $S_n(x_0,f) \longrightarrow \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

Д-во: Из регулярности метода Чезаро следует, что $\{\sigma_n(x_0,f)\}$ сх. и предел совпадает с пределом $\{S_n(x_0,f)\}$.

Но по т.13 $\sigma_n(x_0,f) \to \tilde{f}(x_0)$ $\Rightarrow$ $S_n(x_0,f) \longrightarrow \tilde{f}(x_0)$

§4. Простейшие условия ~~[illegible]~~ равномерной сходимости и почленной дифференцируемости ТРФ.

Известно, что ~~$f(x)$~~ если $f(x) \in L[-\pi,\pi]$, $2\pi \sim \mathbb{R}$, то $S_n(x,f) \underset{\text{в среднем}}{\Rightarrow} f(x)$ $[-\pi,\pi]$.

Сходимость в точке, равн. сход., почл. дифф. $f(x)$?

$f(x) \in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi) \Leftrightarrow \sigma_n(x,f) \rightrightarrows f(x)$ на $[-\pi,\pi]$ $S_n(x,f) \to ?$

$f \in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$, ТРФ может расходиться в $\forall$ наперед заданной точке (наборе точек).

$\exists f(x) \in L[-\pi,\pi] \Rightarrow$ ТРФ сходится хотя бы в одной точке?

Пример. (Колмогоров, 1923 г.)

$f(x) \in L[-\pi,\pi]$ (по Лебегу), ТРФ расходящаяся почти всюду на $[-\pi,\pi]$.

$f \in L[-\pi,\pi]$ (по Лебегу), ТРФ расходится всюду на $[-\pi,\pi]$. (Колмогоров, 1926 г.)

1966. Carleson

$f(x) \in L_2[-\pi,\pi]$ (по Лебегу), $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \Rightarrow$ ТРФ сх. на $[-\pi,\pi]$ почти всюду к f.

1967 г. Хант.

$f \in L_p[-\pi,\pi]$, $p>1$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx \Rightarrow$ ТРФ сх. п. в. на $[-\pi,\pi]$ к f

$f \in L[-\pi,\pi]$ (по Риману) $\Rightarrow f^2(x) \in L[-\pi,\pi] \Rightarrow$ и по Лебегу

$\Rightarrow$ ТРФ сх. п. в. на $[-\pi,\pi]$.

1° Равномерная и абсолютная сходимость ТРФ.

Опр. Функция $f(x)$ имеет на $[a,b]$ кусочно-непрерывную производную, если $f(x)$ непр. во всех точках $[a,b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек $x_k \in (a,b)$, $k=\overline{1,n}$, в которых $\exists f'(x_k \pm 0)$. (в точках x_k $f'(x_k)$ доопределяем произвольным образом)

Опр. Функция $f(x)$ имеет на $[a,b]$ кусочно-непрерывную производную m-го порядка ($m \in \mathbb{N}$), если $f^{(m-1)}(x)$ имеет кусочно-непрерывную производную на отрезке $[a,b]$

~~Теорема~~ 14.

Пусть $f(x) \in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ и $\exists$ кусочно-непр. $f'(x)$ на $[-\pi,\pi]$ $\Rightarrow$ ТРФ $f(x)$ сход. к $f(x)$ равномерно на $[-\pi,\pi]$, он сх. абсолютно на $[-\pi,\pi]$ и ряд из модулей тоже сходится равномерно на $[-\pi,\pi]$.

$$\left(S_n(x,f)-f(x)=\frac{o(1)}{\sqrt{n}},\ n\to\infty\right)$$

Д-во:

$$S_n(x,f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\ n\geq 1$$

Достаточно д-ть равн. сх. ряда из модулей

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k\cos kx+b_k\sin kx| \text{ на } [-\pi,\pi].$$

Для этого дост. д-ть сходимость числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|) \text{ (пр. Вейерштрасса).}$$

Обозначим через α_k, β_k тригон. коэф. Фурье функции $f'(x)$.

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=$$

$$\left\{f'(x)\ -\ x_\ell \text{ — точки разрыва},\ \ell=\overline{1,n}\right\}=\frac{1}{\pi}\sum_{\ell=1}^{n}\int_{x_{\ell-1}}^{x_\ell}f(x)\cos kx\,dx \overset{\text{инт. по частям}}{=}$$

($x_n=\pi$)

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{\ell=1}^{n}\left[\frac{f(x)\sin kx}{k}\Bigg|_{x=x_{\ell-1}}^{x_\ell}-\frac{1}{k}\int_{x_{\ell-1}}^{x_\ell}f'(x)\sin kx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{f(x)\sin kx}{k}\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi}-\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin kx\,dx=-\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin kx\,dx$$

$$a_k=-\frac{\beta_k}{k}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx=\frac{1}{\pi}\sum\int_{x_{\ell-1}}^{x_\ell}\ldots=-\frac{f(x)\cos kx}{\pi k}\Bigg|_{x=-\pi}^{\pi}+$$

$$+\frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos kx\,dx=\left\{f(-\pi)\cos k(-\pi)=f(\pi)\cos k\pi\right\}=$$

$$= \frac{1}{\pi k} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx\, dx \Rightarrow b_k = \frac{\alpha_k}{k}$$

$$|a_k| + |b_k| = \frac{|\alpha_k| + |\beta_k|}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\alpha_k| + |\beta_k|}{k} < +\infty ? \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \text{ — сходится (сл. 1 из теор. 1?)}$$

$$ab \le \frac{a^2+b^2}{2}, \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$\frac{|\alpha_k|}{k} = \underset{a}{|\alpha_k|} \cdot \underset{b}{\frac{1}{k}} \le \frac{|\alpha_k|^2 + \frac{1}{k^2}}{2}$$

$$\frac{|\beta_k|}{k} \le \left(\beta_k^2 + \frac{1}{k^2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \text{ — сх.} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ — сх.} \end{array}\right| \overset{\text{1 пр. сравн.}}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\alpha_k| + |\beta_k|}{k} \text{ — сх.}$$

2°. Почленное дифф. ТРФ.

Теор. 15.

Пусть $f(x)$ и $f^{(l)}(x)$, $l = \overline{1,m}$, непр. на $[-\pi, \pi]$, $f^{(l)}(-\pi) = f^{(l)}(\pi)$, $l = 0, \dots, m$, и пусть $\exists f^{(m+1)}(x)$ — кус.-непр. на $[-\pi, \pi]$ $\Rightarrow$ ТРФ функции $f(x)$ можно m раз почленно дифференцировать на $[-\pi, \pi]$.

Д-во. Обозначим ТРФ $f(x) \overset{\text{т.14}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$

$$f^{(l)}(x) \sim \left|\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)\right)^{(l)}\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} k^l (|a_k| + |b_k|), \; l = \overline{1,m} \le$$

$\leq \sum_{k=0}^{\infty} k^m(|a_k|+|b_k|)$, если ряд сходится.

Обозначим через α_k, β_k тригон. коэф. Фурье функции $f^{(m+1)}(x)$, $\sum_1^{\infty}(\alpha_k^2+\beta_k^2)<\infty$.

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \underset{\substack{m\text{ раз}\\\text{по частям}}}{=} \ldots = \sum_{\ell=1}^{n}\int_{x_{\ell-1}}^{x_\ell}, \text{ по частям}$$

$$|a_k|+|b_k|=\frac{|\alpha_k|+|\beta_k|}{k^{m+1}}$$

конец д-ва как в т.14.

§5. Уточнённые

условия равн. сход. и сход. в точке ТРФ.

1^0 Св-ва коэф. Фурье функции двух переменных.

Р-м функцию $F(x,t)=f(x+t)\,g(t)$, её коэфф. Фурье

$$a_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x,t)\cos nt\,dt,\ n=0,1,2,\ldots$$

$$b_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x,t)\sin nt\,dt.$$

Лемма 6. Пусть $f(x)\in L[-\pi,\pi]$, 2π ~ $\mathbb{R}$, а $g(x)\in L[-\pi,\pi]$

$\Rightarrow$ 1) $I(x)=\int_{-\pi}^{\pi} F(x,t)\,dt$ – непр. на $[-\pi,\pi]$ (и на $\mathbb{R}$).

2) $a_n(x),\ b_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{[-\pi,\pi]\,(\text{и на }\mathbb{R})}{\rightrightarrows}} 0$

3) $c_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x,t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt \overset{[-\pi,\pi]\,(\text{и на }\mathbb{R})}{\rightrightarrows} 0$

Д-во:

1) Докажем, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |u| < \delta \ |\Delta I(x)| = |I(x+u) - I(x)|$ $< \varepsilon \ \forall x \in [-\pi, \pi] \ (\mathbb{R})$

$$|\Delta I(x)| = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+u+t) - f(x+t)] g(t)\,dt$$

$g \in L[-\pi, \pi] \Rightarrow$ ограничен. $\Rightarrow \exists M > 0 : |g(x)| \le M, \ \forall x \in [-\pi,$

$$\Rightarrow |\Delta I(x)| \le M \int_{-\pi}^{\pi} |\underbrace{f(x+u+t) - f(x+t)}_{2\pi\text{-периодич.}}|\,dt \overset{\text{лем. 1}}{=} M \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)|\,d$$ $\forall x \in$

Достаточно д-ть: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |u| < \delta$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{M} \qquad (1)$$

По теор. 10 для f и $\forall \varepsilon > 0 \ \exists T(x)$ — триг. многочлен:

$$\|f(x) - T(x)\|_{L[-\pi,\pi]} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T(x))^2 dx} < \frac{\varepsilon}{3M\sqrt{2\pi}}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T(x)|\,dx = (|f(x) - T(x)|, 1) \underset{\text{К-Б}}{\overset{\text{т. 1}}{\le}} \|f - T\|_{L[-\pi,\pi]} \cdot \|1\|_{L[-\pi,\pi]}$$

$$= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f-T)^2 dx} \cdot \underbrace{\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx}}_{=\sqrt{2\pi}} < \frac{\varepsilon}{3M\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = \frac{\varepsilon}{3M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - T(t)]\,dt < \frac{\varepsilon}{3M}, \text{ т.к. } f, T \text{ — } 2\pi\text{-периодич.} \Rightarrow$$

$$\overset{\text{лем. 1}}{\Rightarrow} \forall u \in \mathbb{R} \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - T(t+u)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3M}$$

$T(t)$ — непр., равн. непр. на $\mathbb{R}$ функция.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ |u| < \delta \quad |T(t+u) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{3M\,2\pi} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |T(t+u) - T(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3M} \quad \forall |u| < \delta$

Инт. из (1): $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) \underset{\pm T(t+u) \pm T(t)}{-} f(t)|\,dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - T(t+u)|\,dt +$

$+ \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - T(t)|\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} |T(t+u) - T(t)|\,dt \underset{|u|<\delta}{<} \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M} = \frac{\varepsilon}{M} \to (1).$

2) Ф-я $F(x,t)$ при каждом фикс. $x \in \mathbb{R}$ явл. инт. по t ф-ей на $[-\pi, \pi]$. $\overset{\text{Сл. 1 из т. 10}}{\Longrightarrow}$ справедливо р-во Парсеваля

$\frac{a_0^2(x)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2(x) + b_k^2(x)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F^2(x,t)\,dt, \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_k(x), b_k(x) \underset{k\to\infty}{\to} 0 \ \forall x$

По 1) функции $a_n(x)$ и $b_n(x)$ непр. на $[-\pi, \pi]$ $(\mathbb{R})$ $\left(g(t) \sim \begin{matrix} g(t)\cos nt \\ g(t)\sin nt \end{matrix} \right)$

По 1) инт. в правой части р-ва – непр. функция на $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ на $[-\pi, \pi]$ выполняются все условия пр. Дини равн. сх. ФР.

$\Rightarrow$ ряд в левой части р-ва сходится равн. на $[-\pi, \pi]$ $(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ в силу необх. условия равн. сход. $a_n(x)$ и $b_n(x)$ равн. стремятся к 0 при $n \to \infty$ на $[-\pi, \pi]$ $(\mathbb{R})$

3) $c_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \underbrace{g(t)\cos\frac{t}{2}}_{g(t)} \sin nt\,dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \underbrace{g(t)\sin\frac{t}{2}}_{\tilde{g}(t)} \cos nt\,dt =$

$= b_n(x) + \tilde{a}_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{2)}{\rightrightarrows}} 0$ на $[-\pi, \pi]$ $(\mathbb{R})$

2° Выделение главной части в $S_n(x,f)$.

Пусть $f(x) \in L[-\pi,\pi]$, $2\pi \sim \mathbb{R}$

(1) Лемма 2,3: $S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sin(n+\frac{1}{2})t \cdot \frac{dt}{2\sin\frac{t}{2}} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D$

$S_n(x,f) - f(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)-f(x)]D_n(t)dt$ (2) $\delta > 0$

Лемма 7.

$f \in L[-\pi,\pi]$, $2\pi \sim \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ справедливо представление 1) $S_n(x,f)$
$= \int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+t)D_n(t)dt + c_n(x)$ (3)

$S_n(x,f) - f(x) = \int\limits_{-\delta}^{\delta}[f(x+t)-f(x)]D_n(t)dt + \hat{c}_n(x)$, (4) $\forall\delta \in (0,\pi)$,

где $c_n(x), \hat{c}_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ на $[-\pi,\pi]$ ($\mathbb{R}$)

2) Фикс. $\forall$ т. $x_0 \in \mathbb{R}$ и пусть $\exists f(x_0 \pm 0)$. Обозн. $\tilde{f}(x_0) =$
$= \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ $\Rightarrow$ $\forall\delta \in (0,\pi)$.

$S_n(x_0,f) - \tilde{f}(x_0) = \int\limits_{-\delta}^{\delta}[f(x_0+t)-\tilde{f}(x_0)]D_n(t)dt + \tilde{c}_n$ (5), где

$\tilde{c}_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$

Д-во: 1) Фикс. $\forall\delta \in (0,\pi)$ и воспользуемся (1):

$S_n(x,f) = \int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+t)D_n(t)dt + \int\limits_{\delta \le |t| \le \pi} f(x+t)D_n(t)dt = I_1 + I_2$

Р-м вспом. ф-цию $g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}, & \delta \le |t| \le \pi \\ 0, & |t| < \delta \end{cases}$, $g(t) \in L[-\pi,$

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t)\,\frac{\sin(n+\frac12)t}{2\sin\frac t2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\sin(n+\tfrac12)t\,dt \overset{\text{Лем.6}}{=}$$

$$= c_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{\text{Лем.6}}{\rightrightarrows}} 0 \text{ на } [-\pi,\pi]\ (\mathbb{R})$$

Из (2): $S_n(x,f) - f(x) \overset{(3)}{=} \int\limits_{-\delta}^{\delta}[f(x+t)-f(x)]\,D_n(t)\,dt + c_n(x) - f(x)\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} D_n(t)\,dt =$

$$= \int\limits_{-\delta}^{\delta}\ldots dt + c_n(x) - \boxed{f(x)\cdot c_{1n}} = f(x)\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\cdot g(t)\sin(n+\tfrac12)t\,dt, \quad f(x+t)\equiv 1$$

По Лем.6 $c_{1n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $f(x)$ – огр. $\Rightarrow f(x)\cdot c_{1n} \rightrightarrows 0$ на $[-\pi,\pi]\ (\mathbb{R})$

$c_n(x) - f(x)c_{1n} \equiv \hat{c}_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ на $[-\pi,\pi]\ (\mathbb{R})$

Т.к. при обосн. (4) на $[\pi,\pi]$ $(\mathbb{R})$ от $f(x)$ требовалась лишь ограниченность, то заменяя в (4) x на x_0, $f(x)$ на $\tilde f(x_0)$, получим соотн. (5), $\tilde c_n = c_n(x_0) - \tilde f(x_0)\cdot c_{1n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

3°. Принцип локализации Римана.

Теорема 16. Пусть: $f(x) \in L[-\pi,\pi]$, $2\pi \sim \mathbb{R}$. Фикс. $\forall$ т. $x_0 \in \mathbb{R}$,

$\left\{ a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad \Sigma\left(\underline{a_n}\cos \underline{nx} + \ldots\right)\right\}$

Тогда сходимость или расходимость функции $f(x)$ в т. x_0 зависит от поведения $f(x)$ в как угодно малой окрестности т. x_0 (т.е. сх-ть в точке имеет локальный характер).

Д-во: Фикс. $\forall \delta \in (0,\pi)$, $|t|\le\delta$, то $x+t \in [x-\delta, x+\delta] \overset{\text{из (3)}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow$ сходимость или расходимость $\{S_n(x,f)\}$ зависит от первого слагаемого в (3), т.е. от поведения f на $[x_0-\delta, x_0+\delta]$

9°. Классы функций Гёльдера.

$C[a,b]$, $C^1[a,b]$

$f(x+t)-f(x)$ $\quad \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$

Пусть $f(x)$ непр. на $[a,b]$.

Опр. Для $\forall\delta>0$ назовём модулем непрерывности функции $f(x)$ на $[a,b]$ супремум следующей величины:

$$w(\delta,f)=\sup_{\forall x,x+t\in[a,b],\,|t|\le\delta}|f(x+t)-f(x)|$$

Из f - равн. непр. на $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$: $|f(x+t)-f(x)|<\varepsilon$ $\forall t$: $|t|\le\delta$ $\Rightarrow$ $w(\delta,t)\xrightarrow[\delta\to0]{}0$ для $f\in C[a,b]$

$\boxed{w(\delta,t)=\bar{o}(1),\ \delta\to0}$.

Пусть $f(x)$ имеет огр. производную на $[a,b]$:

$\exists M>0$: $|f'(x)|\le M$, $\forall x\in[a,b]$

$|f(x')-f(x'')|=|f'(\xi)|\,|x'-x''|\le M|x'-x''|\underset{|x'-x''|<\delta}{<}M\delta$, т.е.

$w(\delta,t)=\underline{O}(\delta)$

Утв. Существуют непр. на $[a,b]$ ф-ции, модуль непр. которых есть величина $w(\delta,t)=\underline{O}(\delta^\alpha)$, $0<\alpha<1$

Пример. $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x\in[0,1]$, непр., $f'(x)$ – не явл. огр.

$x_1, x_2\in[0,1]$, $x_1>x_2$ $\qquad \omega(\delta,t)\overset{?}{=}\underline{O}(\delta^{\frac{1}{3}})$

$$\sqrt[3]{x_1}-\sqrt[3]{x_2}=\frac{x_1-x_2}{\sqrt[3]{x_1^2}+\sqrt[3]{x_1x_2}+\sqrt[3]{x_2^2}}=\sqrt[3]{x_1-x_2}\cdot\frac{\overbrace{\sqrt[3]{(x_1-x_2)^2}}^{<x_1^2}}{\sqrt[3]{x_1^2}+\underbrace{\sqrt[3]{x_1x_2}+\sqrt[3]{x_2^2}}_{\geq 0}}\leq$$

$$\leq\sqrt[3]{x_1-x_2}\cdot\frac{\sqrt[3]{x_1^2}}{\sqrt[3]{x_1^2}}=\underbrace{\sqrt[3]{x_1-x_2}}_{\leq\delta}\Rightarrow\omega(\delta,\sqrt[3]{x})=\underline{O}(\delta^{\frac{1}{3}})$$

$\omega(\delta,\sqrt{x})=\underline{O}(\delta^{\frac{1}{2}})$ $\qquad \omega(\delta,\sqrt[n]{x})=\underline{O}(\delta^{\frac{1}{n}})$, $n=1,2,\dots$

Опр. Пусть $f(x)$ непр. на $[a,b]$ и для нек. α, $0<\alpha\leq 1$, существует конечная точная верхняя грань:

$$\sup_{\substack{x,x+t\in[a,b]\\|t|>0}}\frac{|f(x+t)-f(x)|}{|t|^\alpha}=M \text{ – константа Гёльдера}$$

Тогда будем говорить, что ф-ция $f(x)$ принадлежит на $[a,b]$ классу Гёльдера $C^\alpha[a,b]$ с показателем α.

$f(x)\in C^\alpha[a,b]$

Из опр.: $|f(x+t)-f(x)|\leq M|t|^\alpha$, $\forall x,x+t\in[a,b]$ $\Rightarrow \omega(\delta,t)=\underline{O}(\delta^\alpha)$

$\omega(\delta,f)=\bar{o}(1)$, $\omega(\delta,f)=\underline{O}(\delta)$, $0<\alpha\leq 1$ (если $\alpha=1$, то класс Липшица)

$\alpha>1$ $\quad C^\alpha[a,b]$ – ?

$\sqrt[3]{x}\in C^{\frac{1}{3}}[0,1]$ $\qquad (\sqrt[n]{x}\in C^{\frac{1}{n}}[0,1])$

5°. Равномерная сход. ТРФ

Теорема 17. Пусть $f(x)\in C^\alpha[-\pi,\pi]$, с нек. показателем $\alpha\in(0,1]$ и

$f(-\pi)=f(\pi) \Rightarrow S_n(x,f) \rightrightarrows f(x)$ на $[-\pi,\pi]$ (и $\rightrightarrows$ на $\mathbb{R}$ к 2π-пр)

Д-во. Продолжим $f(x)$ 2π ~ $\mathbb{R}$.

Т.к. $f(-\pi)=f(\pi) \Rightarrow f(x)$ непр. на $\mathbb{R}$, $f(x)\in C^\alpha(\mathbb{R})$

$f(x)\in C^\alpha[\pi-\delta,\pi+\delta]$, $\forall\delta>0$ $\quad \delta=\pi \quad C^\alpha[-2\pi,2\pi]$

$|f(x+t)-f(x)| \leqslant M|t|^\alpha$, $x+t,\ x\in[2\pi,2\pi]$ $\quad (*)$

Фикс. $\forall\varepsilon>0$ и $\delta>0$: $\frac{M\delta^\alpha}{\alpha}<\frac{\varepsilon}{2}$ $\quad (1)$

Из (4): $S_n(x,f)-f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left(f(x+t)-f(x)\right)\frac{\sin(n+\frac12)t}{2\sin\frac t2}dt + \hat{c}_n(x)$

$\hat{c}_n(x) \overset{\text{лем. 7}}{\rightrightarrows} 0 \quad \exists N: \forall n>N \quad |\hat{c}_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x\in[-\pi,\pi]\ (\mathbb{R})$ $\quad (2)$

$t\in(-\pi,\pi) \quad \frac t2\in\left(-\frac\pi2,\frac\pi2\right) \Rightarrow \left|\sin\frac t2\right| \geqslant \frac{2}{\pi}\frac{|t|}{2} = \frac{|t|}{\pi} \Rightarrow$

$\Rightarrow |S_n(x,f)-f(x)| \underset{n>N}{\overset{(*)}{<}} \frac{M}{\pi}\cdot\int\limits_{-\delta}^{\delta}|t|^\alpha\cdot\frac{\pi}{2|t|}dt + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{M}{2}\cdot\int\limits_{-\delta}^{\delta}|t|^{\alpha-1}dt+\frac\varepsilon2 =$

$= \frac{\cancel{2}M}{\cancel{2}}\cdot\int\limits_0^\delta t^{\alpha-1}dt + \frac\varepsilon2 = \frac{M\delta^\alpha}{\alpha}+\frac\varepsilon2 \underset{(1)}{<} \frac\varepsilon2+\frac\varepsilon2=\varepsilon \Rightarrow$
$\forall x\in[-\pi,\pi]\ (\mathbb{R})$

$\Rightarrow S_n(x,f) \rightrightarrows f(x)$ на $[-\pi,\pi]$ $(\mathbb{R})$.

3° $\rightrightarrows$

Теорема 17. $f(x) \in C^{\alpha}[-\pi,\pi]$, $\alpha \in (0,1]$, $f(-\pi)=f(\pi) \Rightarrow S_n(x,f) \rightrightarrows f(x)$ на $[-\pi,\pi]$ ($2\pi \sim \mathbb{R}$ к $f(x)$ на $\mathbb{R}$)

$f(x) \in C^{\alpha}[a,b]$, $[a,b] \subseteq [-\pi,\pi]$ $\quad S_n(x,f) \rightrightarrows ?$

Теорема 18. Пусть $f(x) \in L[-\pi,\pi]$, $2\pi \sim \mathbb{R}$, на некотором отрезке $[a,b]$, $b-a \le 2\pi$, $f(x) \in C^{\alpha}[a,b]$, $\alpha \in (0,1] \Rightarrow \forall \delta_0 \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$ $S_n(x,f) \rightrightarrows f(x)$ на $[a+\delta_0, b-\delta_0]$

Д-во: положим в (4) $\delta \le \delta_0$, $x \in [a+\delta_0, b-\delta_0]$, $|t| \le \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow x, x+t \in [a,b] \Rightarrow |f(x+t)-f(x)| \le M|t|^{\alpha}$, $\forall x \in [a+\delta_0, b-\delta_0]$, $|t| \le \delta$

4° Сходимость ТРФ в точке.

Опр. Функция $f(x)$ удовлетворяет в т. x_0 справа условию Гёльдера с показателем α, $\alpha \in (0,1]$, если $\exists f(x_0+0)$, $\exists M = const > 0$, $\delta > 0$: $|f(x_0+t) - f(x_0+0)| \le M t^{\alpha}$, $\forall t \in (0,\delta]$.

Функция $f(x)$ удовл. в т. x_0 слева условию Гёльдера с $\alpha \in (0,1]$, если $\exists f(x_0-0)$, $M>0$, $\delta>0$: $|f(x_0+t) - f(x_0-0)| \le M|t|^{\alpha}$, $\forall t \in [-\delta, 0)$

$f \in C^{\alpha}[x_0, x_0+\delta]$, $[x_0-\delta, x_0]$. $\exists$ правая (левая) производная

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{t} \quad \left(f'_{-}(x_0) = \ldots\right)$$

$\forall \alpha \le 1$ $\quad f(x) = |x|$ $\quad$ при x $-\exists f'_{+}(0)$

Теорема 19. Пусть $f(x) \in L[-\pi,\pi]$, $2\pi \sim \mathbb{R}$, и в некоторой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ $f(x)$ удовл. справа условию Гёльдера с некоторым α_1, $\alpha_1 \in (0,1]$, и слева в т. x_0 — с показателем α_2, $\alpha_2 \in (0,1] \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_n(x_0, f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tilde{f}(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Д-во: $\exists M = \max\{M_1, M_2\}$, $\alpha = \min\{\alpha_1,\alpha_2\}$, $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &|f(x_0+t)-f(x_0+0)| \le M t^\alpha, \forall t \in (0,\delta] \\ &|f(x_0+t)-f(x_0-0)| \le M|t|^\alpha, \forall t \in [-\delta, 0) \end{aligned}\right\} (7)$$

Используем (5) из леммы {7} с δ из оценок (7).

$$\hat{C}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \text{ Фикс } \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N\ \forall n > N\ |\hat{C}_n| < \frac{\varepsilon}{2} \ (9)$$

δ: (7) $\quad \frac{M\delta^\alpha}{\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}$ (8)

$$\int_{-\delta}^{\delta} D_n(t)\,dt = 2\int_0^\delta D_n(t)\,dt = 2\int_{-\delta}^0 D_n(t)\,dt, \text{ т.к. } D_n \text{ — чётн.}$$

$$|D_n(t)| \le \frac{1}{2|t|} \ (10) \text{ в т. 17. } \left\{ \begin{aligned} &|\sin(n+\tfrac12)t| \le 1 \quad |\sin\tfrac{t}{2}| \ge \frac{|t|}{\pi} \\ &|D_n(t)| = \left|\frac{1}{\pi}\frac{\sin(n+\frac12)t}{2\sin\frac t2}\right| \le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{|t|} = \frac{1}{2|t|} \end{aligned}\right\}, \forall t \in [-\pi,\pi]$$

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta}\left[f(x_0+t)-\tilde{f}(x_0)\right]D_n(t)\,dt\right| = \left|\int_{-\delta}^{\delta} f(x_0+t)D_n(t)\,dt - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_{-\delta}^{\delta} D_n(t)\,dt\right| = \left|\int_{-\delta}^{\delta} f(x_0+t)D_n(t)\,dt - \frac{f(x_0+0)}{2}2\int_0^\delta D_n(t)\,dt -\right.$$

$$\left. - \frac{f(x_0-0)}{2}\cdot 2\int_{-\delta}^0 D_n\,dt\right| = \left|\int_0^\delta [f(x_0+t)-f(x_0+0)]D_n(t)\,dt + \int_{-\delta}^0 [f(x_0+t) -\right.$$

$- f(x_0-0)\big] D_n(t)\,dt \Big| \le \int_0^\delta |f(x_0+t)-f(x_0+0)|\,|D_n(t)|\,dt \;+$

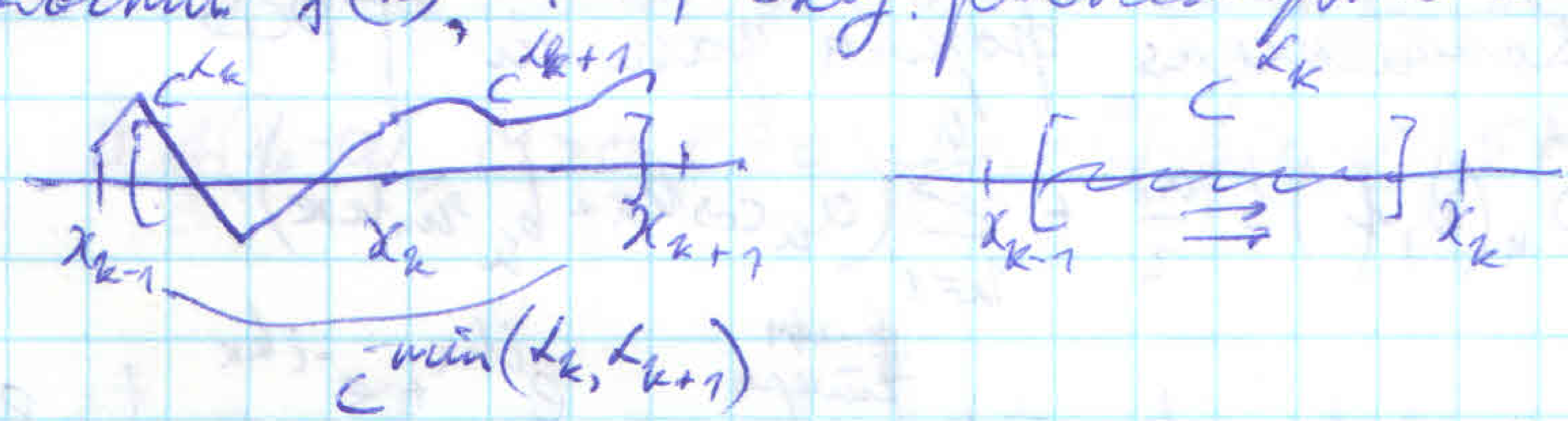
$+\int_{-\delta}^0 |f(x_0+t)-f(x_0-0)|\,|D_n(t)|\,dt \overset{(7),(10)}{<} \frac{M}{2}\left[\int_0^\delta t^{\alpha-1}dt + \int_{-\delta}^0 |t|^{\alpha-1}dt\right] =$

$= \frac{M}{2}\cdot 2\int_0^\delta t^{\alpha-1}dt = \frac{M\delta^\alpha}{\alpha} \overset{(8)}{<} \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n \quad (11)$

Подставим (9), (11) в (5) $\Rightarrow S_n(x,f)\xrightarrow[n\to\infty]{} \tilde f(x_0)$.

Опр. $f(x)$ наз. кусочно-гёльдеровой на $[\cancel{-\pi},\cancel{\pi}]$ $[a,b]$, если точками $x_0=a<x_1<\ldots<x_n=b$, отрезок $[a,b]$ разбивается на $I_k=[x_{k-1},x_k]$, $k=\overline{1,n}$, на каждом из которых $f(x)\in C^{\alpha_k}[I_k]$, $\alpha_k\in(0,1]$. Отрезки I_k наз. отрезками гладкости $f(x)$.

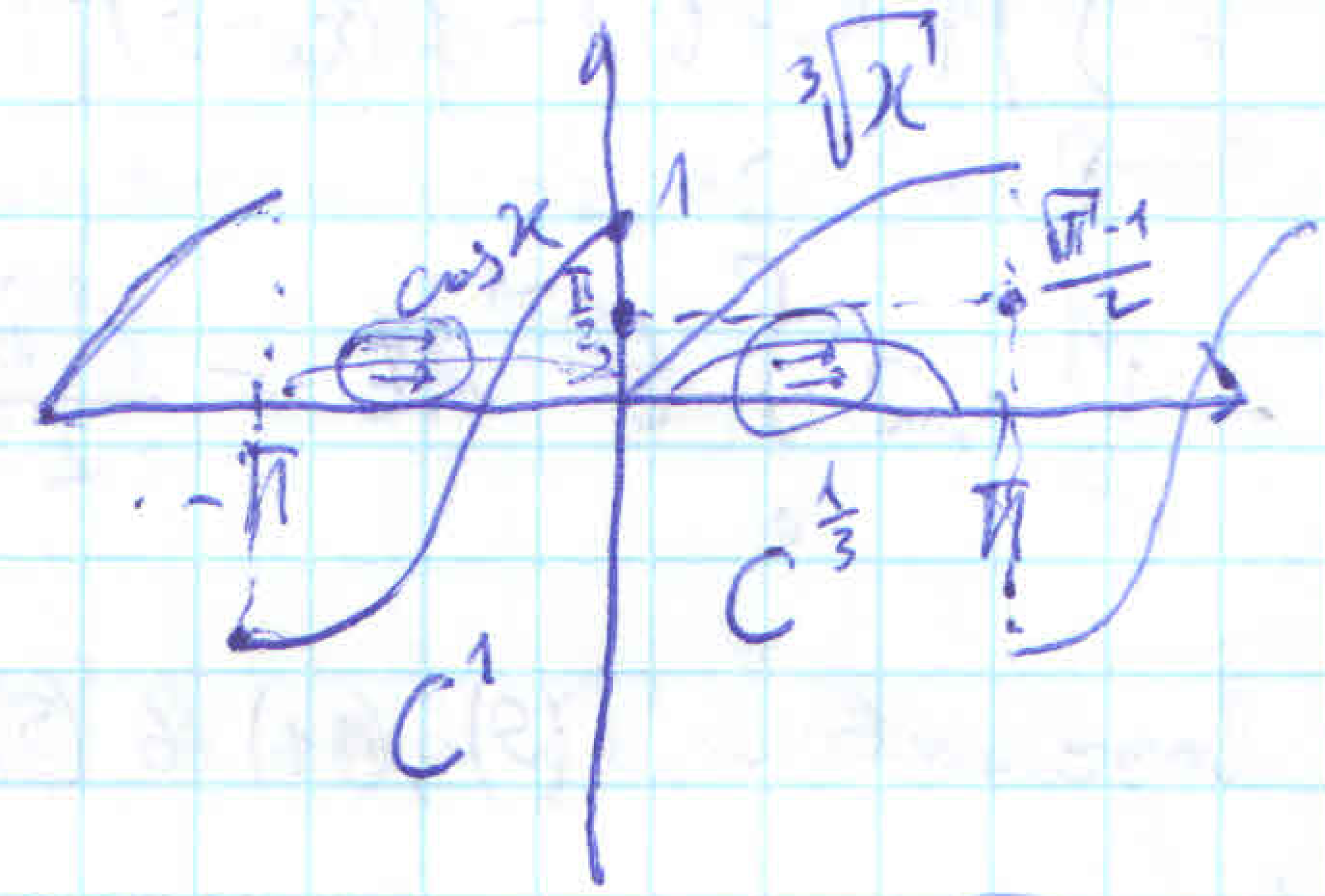
Теорема 20. Пусть $f(x)$ является кусочно-гёльдеровой на $[-\pi,\pi]$ и $2\pi\sim\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Триг. ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в среднем к $f(x)$ на $\forall[a,b]\subset\mathbb{R}$, в $\forall$ т. $x\in\mathbb{R}$ ТРФ $f(x)$ сход. к $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, строго внутри отрезков гладкости $f(x)$ ТРФ сход. равномерно к $f(x)$.



Д-во: сходимость в среднем $\Rightarrow$ из Следствия 2 из т. 10, т.к. $f(x)\in L[-\pi,\pi]$, $2\pi\sim\mathbb{R}$

Сходимость в $\forall$ т. $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ из т. 19; $\rightrightarrows$ на $[a,b] \subset$ (участок гладкости) $\Rightarrow$ из т. 18

$S_n(x,f) \underset{\text{в средн.}}{\rightrightarrows} f$ на $[-\pi,\pi]$



Замечание 1.

$[-\pi,\pi] \to [-l,l],\ l>0:\ 2\pi \sim \mathbb{R} \to 2l \sim \mathbb{R}$

$$S_n(x,f) \underset{l}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k \cos\frac{\pi k x}{l} + b_k \sin\frac{\pi k x}{l}\right]$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi k x}{l}\,dx,\ k=0,1,2,\ldots$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi k x}{l}\,dx,\ k=1,2,\ldots$$

, все теоремы ост. в силе.

$\forall [a,b],\ b-a=2l,\ 2l \sim \mathbb{R}$

Замечание 2

Комплексная форма записи ТРФ

$$S_n(x,f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx \overset{\text{ф-ла Эйлера}}{=\!=} a_k \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} + \underbrace{b_k \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\Big|\frac{\cdot i}{\cdot i}}_{i b_k \frac{e^{-ikx}-e^{ikx}}{2}} =$$

$$= c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}$$

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx - i\sin kx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx,\ k=1,2,\ldots$$

$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,dx,\ k=1,2,\ldots$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\, e^{i0x},\ k=0$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$S_n(x,f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

$$f(x) \overset{\text{ТРФ}}{\sim} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$

Можно положить $a_k\cos kx + b_k \sin kx = \tilde{c}_{-k} e^{ikx} + \tilde{c}_k e^{-ikx}$,

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,dx,\quad S_n(x,f) = \sum_{k=-n}^{n} \tilde{c}_k e^{-ikx}.$$

Глава 10.

Интеграл Фурье.

§1. Преобразования Фурье.

$f(x)$ опред. на $\mathbb{R}$ и не имеет никакого периода $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в ТРФ мы её разложить не можем $\Rightarrow$ инт. Фурье-обобщ.

Опр. Функция $f(x)$ принадлежит классу $L_1(-\infty,+\infty)$ $[f(x)\in L_1(\mathbb{R})]$, если $f(x)$ интегрир. на $\forall$ отрезке числ. прямой и сходится несобств. инт. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx = M$ (1)

Например.

$f(x) = e^{-x^2};\ e^{-|x|};\ \frac{1}{x^{1+\delta}};\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, & |x|\geq 1\\ 0, & |x|<1\end{cases}$.

Опр. След. интеграл $\hat{f}(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iyx}dx$ (2) наз. образом Фурье (преобразованием Фурье [прямым]) функции $f(x)$ (обозн. $F[f]$).

Теорема 1. Пусть $f(x)\in L_1(\mathbb{R})$, тогда преобр. Фурье (2) определено в $\forall$ т. $y\in\mathbb{R}$, $\hat{f}(y)$ - непр. функция на $\mathbb{R}$ и

$\lim\limits_{|y|\to\infty}|\hat{f}(y)|=0$ (3)

Д-во: $|f(x)\cdot e^{iyx}| = |f(x)|\cdot \underbrace{|e^{iyx}|}_{|\cos yx + i\sin yx| = \sqrt{\sin^2+\cos^2}=1} = |f(x)|$ и т.к. инт. (1) сходится, то инт. (2) сходится равномерно по y (пр. Вейерштрасса) на $\forall$ конечном отрезке числовой прямой.

Следовательно, инт. (2) $\exists$ $\forall y \in \mathbb{R}$.

<u>Непрерывность (2)</u>:

$f(x)$ не явл. непр. в общем случае $\Rightarrow$ на теор. гл. 8

<u>нельзя</u> ссылаться.

$\underset{\text{непр.}}{I_n(y)} \rightrightarrows I(y)$. Фикс. $\forall n$ и рассмотрим $I_n(y) = \int_{-n}^{n} f(x) e^{iyx} dx$

Фикс. $\forall [c,d] \subset \mathbb{R}$ и р-м прямоугольник $P = \overset{(x)}{[-n,n]} \times \overset{(y)}{[c,d]}$,

$\forall y \in [c,d]$, Δy : $y + \Delta y \in [c,d]$

$I_n(y+\Delta y) - I_n(y) = \Delta I_n(y) = \int_{-n}^{n} f(x) \left[e^{i(y+\Delta y)x} - e^{iyx} \right] dx$

e^{iyx} – непр., равн. непр. на P. $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $|\Delta y| < \delta$

$\left| e^{i(y+\Delta y)x} - e^{iyx} \right| < \frac{\varepsilon}{M}$ из (1).

$\forall x, y$: $(x,y), (x, y+\Delta y) \in P$

$\Rightarrow$ $|\Delta I_n(y)| \overset{|\Delta y| < \delta}{<} \frac{\varepsilon}{M} \int_{-n}^{n} |f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{M} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \frac{\varepsilon}{M}, M = \varepsilon$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $I_n(y)$ непр. в т. y. $\Rightarrow$ $I_n(y)$ непр. на $[c,d]$

Р-м $\{I_n(y)\}$ на $[c,d]$. Т.к. инт. (2) $\rightrightarrows$ на $[c,d]$,

$\{I_n(y)\} \rightrightarrows \hat{f}(y)$ на $[c,d]$ $\underset{\text{теор. о непр. пр. ф-ии ФП}}{\Rightarrow}$ $\hat{f}(y)$ непр. на $[c,d]$ $\Rightarrow$ на $\mathbb{R}$

Д-во (3):

Д-во (3): докажем свойство (3). Инт. (1) сходится $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$

$\exists A > 0: \int\limits_{|x|\geq A} |f(x)| dx = \int\limits_{-\infty}^{-A} \ldots + \int\limits_{A}^{+\infty} \ldots < \frac{\varepsilon}{3}$

$|\hat{f}(y)| = \left| \int\limits_{-A}^{A} f(x) e^{iyx} dx + \int\limits_{|x|\geq A} f \cdot e^{iyx} dx \right| \leq \left| \int\limits_{-A}^{A} f(x) \cdot e^{iyx} dx \right| + \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall y \in \mathbb{R}$ $\quad |e^{iyx}| = 1$

Дост. д-ть: $\left| \int\limits_{-A}^{A} f(x) e^{iyx} dx \right| < \frac{2}{3} \varepsilon, \ |y| \gg 1$

$f(x)$ интегр. на $[-A, A] \Rightarrow \exists$ разбиение $T: x_0 = -A < x_1 < \ldots < x_n = A$:

$0 \leq S - \int\limits_{-A}^{A} f(x) dx < \frac{\varepsilon}{3} \qquad S = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k, \ M_k = \sup\limits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$

$$f_1(x) = \begin{cases} M_k, & x \in (x_{k-1}, x_k], \ k = 2, 3, \ldots, n \\ M_1, & x \in [x_0, x_1] \end{cases}$$

$\int\limits_{-A}^{A} f_1(x) dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} M_k dx = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = S \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leq \int\limits_{-A}^{A} |f_1(x) - f(x)| dx = \int\limits_{-A}^{A} [f_1(x) - f(x)] dx = S - \int\limits_{-A}^{A} f(x) dx < \frac{\varepsilon}{3}$

$\left| \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} e^{iyx} dx \right| = \left| \frac{1}{iy} e^{iyx} \right| \Big|_{x = x_{k-1}}^{x_k} = \frac{|e^{iyx_k} - e^{iyx_{k-1}}|}{|y|} \leq \frac{|e^{iyx_k}| + |e^{iyx_{k-1}}|}{|y|} =$

$= \frac{2}{|y|} \qquad \left| \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} e^{iyx} dx \right| \leq \frac{2}{|y|}, \ \forall y \neq 0 \quad (5)$

$\left| \int\limits_{-A}^{A} f(x) e^{iyx} dx \right| = \left| \int\limits_{-A}^{A} e^{iyx} (f(x) \pm f_1(x)) dx \right| \leq \left| \int\limits_{-A}^{A} f_1(x) e^{iyx} dx \right| + \int\limits_{-A}^{A} |f_1(x) - f(x)| dx \overset{(4)}{<}$ $\quad |e^{iyx}| = 1$

$$< \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} M_k e^{iyx} dx \right| + \frac{\varepsilon}{3} \overset{(5)}{\leq} \left(2 \sum_{k=1}^{n} |M_k| \right) \cdot \frac{1}{|y|} + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon$$

$$2 \sum_{k=1}^{n} |M_k| \cdot \frac{1}{|y|} < \frac{\varepsilon}{3} : \quad |y| > \frac{6 \sum_{k=1}^{n} |M_k|}{\varepsilon} = y_0 > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists y_0 > 0 : \quad \forall |y| \geq y_0 \quad |\hat{f}(y)| < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \text{ ч.т.д.}$$

$$\hat{f}(y) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos yx \, dx}_{\operatorname{Re} \hat{f}} + i \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin yx \, dx}_{\operatorname{Im} \hat{f}}$$

$\hat{f} \to 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \hat{f} \to 0, \operatorname{Im} \hat{f} \to 0$ $\quad y \to \lambda > 0$

Следствие. $\forall f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(косинус-преобразование Фурье)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x \, dx \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(синус-преобразование Фурье)}$$

§2.

Представление функций интегралом Фурье.

$f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$

Опр. Для $\forall x \in \mathbb{R}$ следующий предел (если $\exists$)

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(y) e^{-iyx} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{-iyx} dy \quad (1)$$

называется интегралом Фурье ф-ии $f(x)$ в т. x

(либо обратным преобразованием Фурье ф-ии $f(x)$)

Теорема 2. Пусть $f(x) \in L_1(-\infty,+\infty)$ и в нек. точке $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет справа условию Гёльдера с показателем α_1, $\alpha_1 \in (0,1]$ и в т. x слева усл. Гёльдера с показателем α_2, $\alpha_2 \in (0,1]$ $\Rightarrow$ предел (1) $\exists$ и

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{-iyx} dy = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \equiv f_0(x) \quad (2)$$

Д-во: Т.к. $\hat{f}(y)$ непр. на $\mathbb{R}$ (т. 1) $\Rightarrow \int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(y) e^{-iyx} dy - \exists$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(y) e^{-iyx} dy = \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iyx}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{iyu} du\right] dy \quad (3)$$

Д-ть: $\quad I(\lambda,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(y) e^{-iyx} dy =$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\frac{\sin \lambda t}{t} dt \quad (4)$$

$\lambda > 0$

В правой части (3) можно поменять местами инт. по u и по y.

Инт. в квадр. скобках в (3) сходится равномерно на $\forall$ отрезке числовой прямой по y (в частности на $y \in [-\lambda, \lambda]$) (пр. Вейерштрасса). $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists A_0 > 0 : \ \forall A \geq A_0$

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{iyu} du - \int_{-A}^{A} f(u) e^{iyu} du\right| < \frac{\varepsilon\pi}{\lambda} \ \forall y \in [-\lambda, \lambda] \quad (5)$$

$$\left| I(\lambda,x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iyx}\int_{-A}^{A} f(u)e^{iyu}\,du\,dy\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iyx}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{iyu}du - \right.\right. \quad |e^{-iyu}|=1$$

$$\left.\left. - \int_{-A}^{A} f(u)e^{iyu}du\right]dy\right| \overset{(5)}{<} \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon\pi}{\lambda}\cdot\int_{-\lambda}^{\lambda} 1\,dy = \frac{\varepsilon\cdot 2\lambda}{2\lambda} = \varepsilon$$

$$\left| I(\lambda,x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iyx}\int_{-A}^{A} f(u)e^{iyu}\,du\,dy\right| < \varepsilon \quad (6)$$

Э-м прямоугольник $P = [-\lambda,\lambda]\times[-A,A]$

$f(u)$ - инт. $[-A,A]$ $\Rightarrow$ инт. на P, т.е.

$$\exists \iint_P f(u)e^{i(u-x)y}\,du\,dy$$

$$\exists \int_{-\lambda}^{\lambda} f(u)e^{i(u-x)y}dy, \quad \exists\int_{-A}^{A} f(u)e^{i(u-x)y}du \quad \forall u, \forall y$$

замечание 1 к т. 1, гл. 8

$$\Rightarrow \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iyx}\int_{-A}^{A} f(u)\,e^{iyu}\,du\,dy = \int_{-A}^{A} f(u)\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iyx}\cdot e^{iyx}\,du\,dy$$

$$\overset{(6)}{\Rightarrow} \left| I(\lambda,x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} f(u)\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i(u-x)y}\,dy\,du\right| < \varepsilon \quad \forall A \geq A_0(\varepsilon)$$

$\Rightarrow$ по опр. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i(u-x)y}\,dy\,du$ сходится и

$$I(\lambda,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i(u-x)y}\,dy\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\frac{1}{i(u-x)}\,e^{i(u-x)y}\Big|_{y=-\lambda}^{\lambda}du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\frac{e^{i(u-x)\lambda} - e^{-i(u-x)\lambda}}{i(u-x)}\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\frac{\sin\lambda(u-x)}{u-x}\,du =$$

$u - x = t \quad u = x + t$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt \Rightarrow (4) \qquad = I(\lambda, x)$$

Д-во(2): $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt = \int_{-\infty}^{0}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt \underset{\lambda>0}{=} \frac{\pi}{2} \Big| : \frac{\pi}{2}$

$$\underbrace{1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt}_{\cdot\frac{f(x+0)}{2}} = \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt}_{\cdot\frac{f(x-0)}{2}} \Rightarrow \quad \frac{f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x+0)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt$$

$$\frac{f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x-0)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt$$

$$I(\lambda, x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\big(f(x+t)-f(x+0)\big)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\big(f(x+t)-f(x-0)\big)\frac{\sin\lambda t\,dt}{t}$$

$\left(\underset{\lambda\to\infty}{\to} 0 ?\right)$

По усл. теоремы $\exists\, \delta_0 > 0 \;\; \alpha\in(0,1] \;\; M>0$:

$$|f(x+t) - f(x\pm 0)| \le M|t|^{\alpha}, \; \forall t\in[-\delta_0, \delta_0] \qquad (7)$$

"+" для $t>0$

"−" для $t<0$

$\delta\le\delta_0$: фикс $\varepsilon>0$: $\displaystyle\frac{M\delta}{\pi\alpha} < \frac{\varepsilon}{4}$ (8)

$$I(\lambda, x) - f_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\big(f(x+t)-f(x+0)\big)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}\big(f(x+t)-f(x-0)\big)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{|t|\ge\delta} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt - \frac{2}{\pi}f_0(x)\int_{\delta}^{\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt = I_1 + I_2 + I_3 - I_4$$

$$|I_1| \overset{(7),(8)}{<} \frac{M}{\pi}\int_0^{\delta} t^{\alpha-1}\,dt = \frac{M\delta^{\alpha}}{\pi\alpha} < \frac{\varepsilon}{4}, \; \forall\lambda>0$$

$|I_2| < \frac{\varepsilon}{4}$, $\forall\lambda>0$ - аналогично

I_3 : р-м ф-ию $g(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t)}{\pi t}, & |t| \geq \delta \\ 0, & |t| < \delta \end{cases} \in L_1(-\infty, +\infty)$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \sin \lambda t \, dt \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{\text{л. уm1.}} 0 \Rightarrow \exists \Lambda > 0 : \forall \lambda > \Lambda \; |I_3| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} dt \underset{\lambda t = y}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$$, как остаток сход. инт.

$\Rightarrow \exists \Lambda > 0 : \forall \lambda > \Lambda \quad |I_4| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \Lambda > 0 : \forall \lambda > \Lambda$

$$|I(\lambda, x) - f_0(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \cdot 4 = \varepsilon, \text{ т.е. } (2)$$

К главе 9

т. М. <...>

$$S_n(x, f) - f(x) = \frac{\bar{o}(1)}{\sqrt{n}}$$

Д-во:

a_k, b_k - коэф. Фурье $f(x)$, α_k, β_k - к. Ф. $f'(x)$

доказан.: $|a_k| + |\beta_k| = \frac{|\alpha_k| + |\beta_k|}{k}$

1) Нер-во Коши-Буняковского для сумм.

$$S_a = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|a_k\|_{\ell_2} \qquad ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

$$S_b = \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{a_k}{S_a} \cdot \frac{b_k}{S_b} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a_k^2}{S_a^2} + \frac{b_k^2}{S_b^2}\right) \Big| \sum_{k=1}^{\infty}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k\right) \cdot \frac{1}{S_a S_b} \leq 1 \ \Big| \cdot S_a S_b$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \leq S_a S_b = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$ – нер-во Коши-Буняковского для сумм.

$k=1 \to k=n+1$ (ничего не изменится)

$$\left|S_n(x,f) - f(x)\right| \overset{n.14}{=} \left|S_n(x,f) - \sum_{k=0}^{\infty}(\ldots)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(\ldots)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(|a_k| + |b_k|\right) \overset{n.14}{=}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\alpha_k| + |\beta_k|}{k}$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k| \cdot \frac{1}{k} \overset{\text{нер-во К.-Б.}}{\leq} \underbrace{\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{остаток сход. ряда (рав-во Парсеваля)} \ = \ \bar{\bar{o}}(1)} \cdot \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \bar{\bar{o}}(1) \cdot \left(\int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \bar{\bar{o}}(1) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\beta_k| \cdot \frac{1}{k} \leq \frac{\bar{\bar{o}}(1)}{\sqrt{n}}, \quad \bar{\bar{o}}(1) = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\beta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \left|S_n(x,f) - f(x)\right| = \frac{\bar{\bar{o}}(1)}{\sqrt{n}}, \quad n \to \infty$$