Т.А. ЛЕОНТЬЕВА

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Допущено учебно-методическим советом по прикладной математике и информатике УМО по классическому университетскому образованию для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности "Прикладная математика и информатика"

МОСКВА
НАУЧНЫЙ МИР
2004

УДК 517.5
ББК 22.161.5
Л-47

Леонтьева Т. А.

Л-47 Лекции по теории функций комплексного переменного.
– М.: Научный мир, 2004, 216с., 53 илл.

ISBN 5-89176-255-2

Лекции по теории функций комплексного переменного рассчитаны на читателя, знакомого с основным курсом математического анализа в объеме, например, учебника «Основы математического анализа», часть II, В.А. Ильин, Э.Г. Позняк.

Данный курс состоит из 18 лекций. Рассматриваются такие фундаментальные понятия, как непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость функций комплексного переменного. Изучаются вопросы теории аналитических и гармонических функций и применение этой теории к конформным отображениям. Изучение свойств гармонических функций и их разложение в ряды Фурье согласуется с изложением теории рядов Фурье в курсе математического анализа. Рассмотрены также вопросы операционного исчисления и его связь с решениями дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Лекции содержат около 50 задач теоретического характера.

Данное пособие будет полезно также студентам и аспирантам технических университов и вузов, изучающих курс ТФКП

УДК 517.5
ББК 22.161.5

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, проф. А. М. Седлецкий,
доктор физ.-мат. наук, проф. Е. В. Шикин

ISBN 5-89176-255-2

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный курс лекций по теории функций комплексного переменного в течение многих лет читался автором для студентов 2-го курса факультета ВМиК МГУ, где курс ТФКП входит как составная часть курса математического анализа. Число лекций по ТФКП ограничивается 18 лекциями. Автору пришлось ввести понятие аналитической функции как функции, имеющей непрерывную производную. Некоторые теоремы, а именно, теорема Римана о конформном отображении, большая теорема Пикара о поведении функции в окрестности существенно особой точки, даются без доказательства.

Курс ТФКП согласован с курсом математического анализа. Так, знание свойств криволинейных интегралов от функций действительного переменного, свойства равномерно сходящихся рядов действительных функций, методы суммирования расходящихся рядов (методы Чезаро и Пуассона-Абеля) предполагаются известными. К моменту чтения лекций по ТФКП уже известны свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра. Изучение свойств гармонических функций и их разложение в ряды Фурье согласуется с изложением теории рядов Фурье в курсе математического анализа. В некоторых вузах, в частности, на факультете ВМиК МГУ, изложение теории рядов Фурье в математическом и комплексном анализе идет параллельно.

Изложение теории функций комплексного переменного начинается со свойств комплексных чисел и таких понятий, как непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость функций комплексного переменного. Далее рассматривается теория аналитических функций и применение этой теории к конформным отображениям. Подробно исследуются свойства дробно-линейной функции и элементарных функций. Наряду с однозначными функциями рассматриваются многозначные функции и методы выделения однозначнх ветвей многозначных функций. Вводится понятие римановой поверхности. Наряду с аналитическими функциями исследуются свойства гармонических функций. Строится решение задачи Дирихле для оператора Лапласа для области определенного вида. Вводится функция Грина или функция источника и показывается связь существования функции Грина для области и конформного отображения этой области на единичный круг. Как еще одно применение теории аналитических функций рассматривается преобразование Лапласа при решении дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Наряду с изложением лекций приводится список задач теоретического характера, рекомендуемых студентам для лучшего усвоения курса. Число задач около 50, некоторые из задач можно рассматривать как самостоятельные теоремы. Лекции согласованы также с задачником по теории функций комплексного переменного: Т. А. Леонтьева, В. С. Панферов, В. С. Серов "Задачи по теории функций комплексного переменного".

Приводится список литературы, рекомендуемой студентам для изучения курса ТФКП и при подготовке к экзамену, а также список литературы, на которую в тексте лекций имеются ссылки. В конце книги приводится также биографическая справка об авторах, чьим именем названа та или иная теорема.

Данный курс лекций будет полезен студентам и аспирантам технических университетов и вузов, знакомящихся с курсом теории функций комплексного переменного, методы которой используются в физике, механике, аэродинамике, радиотехнике.

Пользуясь случаем, хочу выразить благодарность моим рецензентам: д.ф.-м.н., профессору механико-математического факультета А. М. Седлецкому и д.ф.-м.н., профессору факультета ВМиК Е. В. Шикину за труд прочтения текста лекций и за ценные замечания, которые были учтены. Также хочется поблагодарить М. В. Комарова за профессиональный компьютерный набор рукописи.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ИХ СВОЙСТВА. МНОЖЕСТВА НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

1 лекция

"Мнимые числа – это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием." (Лейбниц [1])

Рассмотрим множество пар действительных чисел (x, y), $x, y \in \mathbb{R}$. Два элемента этого множества (x, y) и (x_1, y_1) называются равными, если $x = x_1$, $y = y_1$. На этом множестве введем две операции – сложение и умножение:

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1),$$
$$(x, y) * (x_1, y_1) = (x \cdot x_1 - y \cdot y_1, x_1 \cdot y + x \cdot y_1).$$

Операции сложения и умножения обладают свойствами ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности умножения относительно сложения.

Элементы вида $(x, 0) = x$ будем отождествлять с действительными числами. В частности, элемент вида $(0, 0) = 0$ будем считать нулевым элементом, элемент $(1, 0) = 1$ – единицей. Элемент $(0, 1) = i$ назовем *мнимой единицей*. Так, $i^2 = i \cdot i = -1$, $i \cdot y = (0, 1) * (y, 0) = (0, y)$. Элемент $(0, y)$ будем называть чисто мнимым числом. Имеем $(x, y) = x + iy$. Итак, элементы (x, y) данного множества будем называть *комплексными числами* и обозначать

$$z = x + iy, \;\; x = \operatorname{Re} z, \;\; y = \operatorname{Im} z,$$

где $Re\ z$ означает действительную, а $Im\ z$ – мнимую часть комплексного числа z.

Для операции сложения комплексных чисел существует обратная операция – вычитание. Если $z_1 = x_1+iy_1$, $z_2 = x_2+iy_2$, то

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

На множестве $z \neq 0$ для операции умножения существует обратная операция – деление. Пусть $z_2 \neq 0$, тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом, множество комплексных чисел с введенными операциями сложения и умножения образует поле, оно называется *полем комплексных чисел*. В курсе алгебры доказывается, что поле комплексных чисел есть минимальное поле, содержащее поле действительных чисел и элемент i, такой, что $i^2 = -1$.

$\boxed{\text{Задача 1.}}$ Существует ли поле, для которого поле комплексных чисел (с введенными операциями сложения и умножения) являлось бы подполем?

Итак, $z = x + iy$. Число $\overline{z} = x - iy$ называется *числом, комплексно сопряженным с числом* z. Справедливы соотношения

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}, \; z_2 \neq 0.$$

Число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем комплексного числа*.

Множество комплексных чисел можно отождествить с точками плоскости. Для этого на плоскости введем декартову систему координат (x, y) (рис. 1). Рассмотрим точку z с координатами (x, y) и радиус-вектор $\overrightarrow{Oz}$. Угол φ, который образует радиус-вектор с положительным направлением оси Ox, определен с точностью до $2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Имеем: $x = |z|\cos\varphi$, $y = |z|\sin\varphi$, $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – тригонометрическая запись комплексного числа, $\varphi = \varphi_0 + 2\pi n$, $-\pi < \varphi_0 \leqslant \pi$.

Под *главным значением аргумента комплексного числа* z будем понимать угол φ_0 и обозначать $\varphi_0 = \arg z$, тогда $\varphi = \arg z + 2\pi n = \operatorname{Arg} z$.

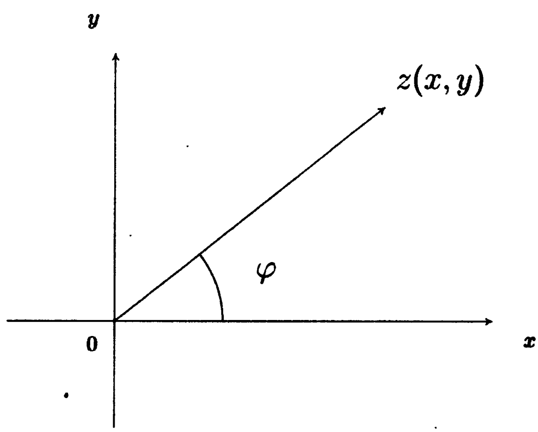

Рис. 1

Выразим $\arg z$ через действительную часть x и мнимую часть y комплексного числа z:

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad x > 0$$

$$\arg z = \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad y \geqslant 0,\ x < 0$$

$$\arg z = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad y < 0,\ x < 0$$

Для точки $z = 0$ угол не определен. Если числа заданы в тригонометрической форме $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right) .$$

В частности, если $n \in \mathbb{N}$ и $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) .$$

Эта формула носит название *формулы Муавра.* Положим $|z| = r$, $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ (в дальнейшем будет объяснена формула Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$), тогда $z = re^{i\varphi}$, $z^n = r^n e^{in\varphi}$.

Совокупность всех точек z на плоскости называют *комплексной плоскостью* и обозначают $\mathbb{C}$. Ось Ox называют *вещественной осью*, ось Oy называют *мнимой осью.*

Стереографическая проекция

Во многих вопросах теории функций комплексного переменного наряду с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$ рассматривается расширенная комплексная плоскость – совокупность всех комплексных чисел плюс бесконечно удаленная точка (∞). Эта плоскость обозначается через $\overline{\mathbb{C}}$. Как можно трактовать $\overline{\mathbb{C}}$? Для этого вводится понятие *стереографической проекции* – как взаимно однозначное отображение $\overline{\mathbb{C}}$ на сферу Римана. А именно, рассмотрим трехмерное пространство (ξ, η, ζ), и в нем – сферу (сферу Римана) (рис. 2):

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \zeta.$$

Центр сферы – точка $\overline{O}(0, 0, 1/2)$, радиус равен $1/2$, а точка $P(0, 0, 1)$ – полюс.

Комплексную плоскость $\mathbb{C}$ совместим с плоскостью (ξ, η) так, чтобы действительная ось совпала с осью ξ, а мнимая – с осью η. Рассмотрим точку $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$. Соединим точку z с полюсом P и рассмотрим векторы $\overrightarrow{Pz}$, $\overrightarrow{PM}$, где M – точка пересечения прямой Pz и сферы Римана:

$$\overrightarrow{PM} = (\xi, \eta, \zeta - 1), \quad \overrightarrow{Pz} = (x, y, -1).$$

Так как $\overrightarrow{PM} \parallel \overrightarrow{Pz}$, то

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta - 1}{-1} = \alpha,$$

откуда получаем: $\xi = \alpha x,\ \eta = \alpha y,\ \zeta = -\alpha + 1$.

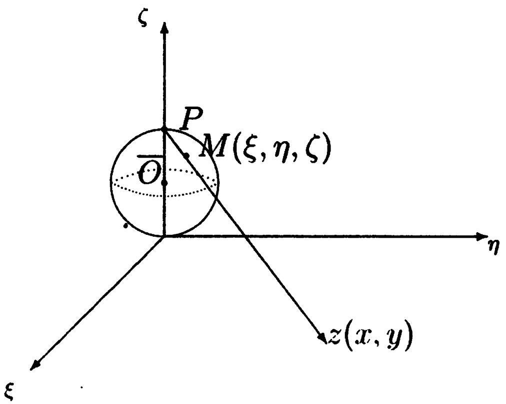

Рис. 2

Подставим координаты (ξ, η, ζ) в уравнение сферы Римана:

$$\alpha^2(x^2 + y^2) + (\alpha - 1)^2 = -\alpha + 1 \ \rightarrow \ \alpha^2(x^2 + y^2) = (1 - \alpha)\alpha \ \rightarrow$$

$$\alpha|z|^2 = 1 - \alpha \ \rightarrow \ \alpha = \frac{1}{1 + |z|^2}.$$

Итак,

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}.$$

Точка $M(\xi, \eta, \zeta)$ называется *стереографической проекцией точки* $z = x + iy$ комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Тем самым установлено взаимно-однозначное соответствие между $\overline{\mathbb{C}}$ и сферой Римана с полюсом в точке $P(0,0,1)$. Бесконечно удаленной точке (∞) соответствует точка P.

Задача 2. Доказать, что $\rho_c(z_1, z_2) = \dfrac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}$ – расстояние между стереографическими проекциями точек $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ в трехмерном пространстве.

Задача 3. Доказать, что при стереографической проекции прямые и окружности на комплексной плоскости переводятся в окружности на сфере Римана. И обратно: любая окружность на сфере Римана является образом прямой или окружности на комплексной плоскости при стереографической проекции.

Множества на комплексной плоскости

Рассмотрим последовательность комплексных чисел $\{z_n\}, z_n \in \mathbb{C}$. По определению последовательность $\{z_n\}$ сходится к комплексному числу $z \in \mathbb{C}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что для любого $n \geqslant N(\varepsilon)$ имеет место $|z_n - z| < \varepsilon$. С использованием кванторов всеобщности $(\forall)$ и существования $(\exists)$ приведенную выше формулировку после слова "если" можно записать в виде формулы:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N(\varepsilon), \ \forall n \geqslant N(\varepsilon) : |z_n - z| < \varepsilon.$$

Теорема 1. *Для того, чтобы последовательность* $\{z_n\}$, $z_n = x_n + iy_n$, *сходилась к конечному пределу* $z = x + iy$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *сходились:* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Определение. Последовательность $\{z_n\}$ называется *фундаментальной*, если

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon),\ \forall n \geqslant N(\varepsilon),\ \forall p \in \mathbb{N} : |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon\,.$$

Критерий Коши. *Для того, чтобы последовательность комплексных чисел* $\{z_n\}$ *сходилась к конечному пределу, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Замечание. Доказательство теоремы 1 и критерия Коши легко получить, если использовать неравенства, справедливые для любых двух комплексных чисел. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, тогда

$$|z_1-z_2| \geqslant |x_1-x_2|;\ |z_1-z_2| \geqslant |y_1-y_2|;\ |z_1-z_2| \leqslant |x_1-x_2|+|y_1-y_2|.$$

Для сходящихся последовательностей справедливы следующие теоремы.

Теорема. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} z'_n = z'$, $\lim\limits_{n\to\infty} z''_n = z''$;

$$\text{тогда } \lim_{n\to\infty} (z'_n \pm z''_n) = z' \pm z''.$$

Теорема. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} z'_n = z'$, $\lim\limits_{n\to\infty} z''_n = z''$;

$$\text{тогда } \lim_{n\to\infty} (z'_n \cdot z''_n) = z' \cdot z''.$$

Теорема. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} z'_n = z'$, $\lim\limits_{n\to\infty} z''_n = z'' \neq 0$;

$$\text{тогда } \lim_{n\to\infty} \frac{z'_n}{z''_n} = \frac{z'}{z''}.$$

Доказательство теорем следует из того, что соответствующие теоремы справедливы для последовательностей действительных чисел, и из теоремы 1.

Множество $E \subset \mathbb{C}$ называется *ограниченным*, если

$$\exists M > 0, \ \forall z \in E : |z| \leqslant M\,.$$

Справедлива **теорема Больцано-Вейерштрасса**: из любой ограниченной последовательности комплексных чисел можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Определение. Множество $U_\varepsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, называется *ε-открытой окрестностью точки* z_0. Это есть открытый круг с центром в точке z_0 и радиусом ε.

Точка z_0 называется *предельной точкой* множества $E \subset \mathbb{C}$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists z_1 \in E, \ z_1 \neq z_0 : z_1 \in U_\varepsilon(z_0)$$

или

$$\exists \{z_n\}, \ z_n \in E, \ \lim_{n\to\infty} z_n = z_0, \ z_n \neq z_0\,.$$

Из теоремы Больцано-Вейерштрасса следует, что любое бесконечное ограниченное множество имеет по крайней мере одну предельную точку.

ε-окрестностью бесконечно удаленной точки (∞) называется множество точек $U_\varepsilon(\infty) = \{z : |z| > \varepsilon\}$.
Говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N(\varepsilon), \ \forall n \geqslant N(\varepsilon) : |z_n| > \varepsilon\,.$$

Множество E имеет ∞ предельной точкой, если

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists z \in E \ : \ |z| > \varepsilon.$$

Рассмотрим $\overline{\mathbb{C}}$ – расширенную комплексную плоскость. Справедлива

Теорема. *Любое бесконечное множество $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ имеет по крайней мере одну предельную точку.*

Доказательство. Если множество E – ограниченное, то это следует из теоремы Больцано-Вейерштрасса. Если множество не ограниченное, то $\exists\{z_n\} \subset E \ : \ \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$; следовательно $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ – предельная точка.

Определение. Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Определение. Множество $\overline{E}$ называется *замыканием множества* E, если $E \subset \overline{E}$ и $\overline{E}$ содержит все предельные точки множества E. Таким образом, $\overline{E}$ – всегда замкнутое множество.

Определение. Множество ∂E называется *границей множества* E, если

$$\partial E = \overline{E} \cap \overline{(\mathbb{C} \setminus E)},$$

или, что то же самое,

$\forall \varepsilon > 0, \ \forall z_0 \in \partial E, \ \exists z_1 \in E, \ \exists z_2 \overline{\in} E \ : \ z_1 \in U_\varepsilon(z_0), \ z_2 \in U_\varepsilon(z_0)$.

Определение. Множество $E \subset \mathbb{C}$ называется *компактом*, если оно замкнутое и ограниченное.

Определение. Множество $O \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется *открытым*, если

$$\forall z \in O, \ \exists U_\varepsilon(z) \ : \ U_\varepsilon(z) \subset 0 .$$

Определение. Точка z называется *внутренней точкой множества* $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, если существует $U_\varepsilon(z) \subset E$. Таким образом, для открытого множества O все точки этого множества являются внутренними.

Для замкнутых и открытых множеств справедливы следующие утверждения.

I. Конечная сумма или конечное пересечение открытых или замкнутых множеств есть множество открытое или замкнутое, а именно пусть O_i – открытое множество, F_i – замкнутое множество, $i \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$\bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i$ – открытое множество; $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i$ – замкнутое множество;

$\bigcup\limits_{i=1}^{n} O_i$ – открытое множество; $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ – замкнутое множество.

II. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} O_i$ – открытое множество; $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i$ – замкнутое множество.

Пустое множество и $\overline{\mathbb{C}}$ – одновременно и замкнутые, и открытые множества.

Говорят, что система открытых и замкнутых множеств на комплексной плоскости $\mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}}$ определяют *топологию*. Топологии в $\mathbb{C}$ и в $\overline{\mathbb{C}}$ различны. Например: сама плоскость $\mathbb{C}$ в топологии $\mathbb{C}$ – открытое и замкнутое множество одновременно, но $\mathbb{C}$ в топологии $\overline{\mathbb{C}}$ не есть замкнутое множество. Множество E – ограниченное и замкнутое – есть компакт в $\mathbb{C}$; множество E – замкнутое, но не обязательно ограниченное – может быть компактом в $\overline{\mathbb{C}}$ (определение компактного множества в топологическом пространстве будет дано ниже).

Определение. Скажем, что система открытых множеств $\{O\}$ образует *открытое покрытие множества* E, если

$$\forall z \in E, \ \exists O_z \in \{O\} \ : \ z \in O_z .$$

Лемма Гейне-Бореля. *Из любого бесконечного открытого покрытия $\{O\}$ компакта E можно выделить конечное подпокрытие.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует бесконечное открытое покрытие $\{O\}$ компакта E, из которого нельзя выделить конечного подпокрытия. Так как E – компакт, то оно ограничено. Тогда E можно заключить в некоторый замкнутый прямоугольник M_1 со сторонами, параллельными осям координат на плоскости (рис. 3).

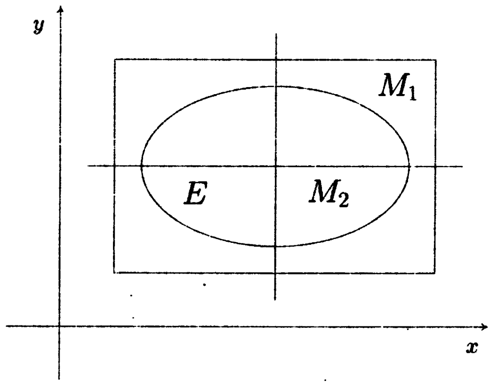

Рис. 3

Разобьем прямоугольник M_1 на четыре прямоугольника, проведя прямые, параллельные осям координат и проходящие через середины сторон прямоугольника M_1. Из этих четырех прямоугольников можно выбрать такой прямоугольник M_2, что для $M_2 \bigcap E$ не существует конечного подпокрытия. Продолжим процесс построения прямоугольников, исходя из M_2. Будем иметь последовательность прямоугольников $\{M_n\}$, M_n – замкнутое множество, $M_{n+1} \subset M_n$, причем $E \bigcap M_n$ не имеет конечного подпокрытия множествами $\{O\}$. Так как размеры прямоугольников M_n стремятся к нулю, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n = z_0$, $z_0 \in E$ (т. к. E – замкнутое множество). По условию система $\{O\}$ – открытое покрытие, следовательно, существует открытое множество $O_{z_0} \subset \{O\}$, $z_0 \in O_{z_0}$. Так как O_{z_0} открытое множество, то существует $U_\varepsilon(z_0) \subset O_{z_0}$, но $z_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n$. Отсюда следует существование прямоугольника $M_N \subset U_\varepsilon(z_0) \subset O_{z_0}$, поэтому $E \bigcap M_N \subset O_{z_0}$ получили противоречие с построением $\{M_n\}$.

Задача 4. Пусть множество $E \subset \mathbb{C}$ таково, что для любого открытого покрытия $\{O\}$ множества E можно выделить конечное подпокрытие. Следует ли отсюда, что E есть компакт?

Определение. Множество E в топологическом пространстве называется *компактом*, если из любого открытого покрытия $\{O\}$ множества E можно выделить конечное подпокрытие.

Лемма Гейне-Бореля показывает, что для комплексной плоскости $\mathbb{C}$ это определение компакта эквивалентно ограниченности и замкнутости.

Определение. Множество E в топологическом пространстве называется *связным*, если из того, что E представимо в виде

$$E = E_1 \bigcup E_2, \quad E_1 \neq \emptyset, \quad E_2 \neq \emptyset, \quad E_1 \bigcap E_2 = \emptyset$$

следует, что или $E_1 \bigcap \overline{E}_2 \neq \emptyset$, или $E_2 \bigcap \overline{E}_1 \neq \emptyset$.

Определение. Множество D называется *областью*, если это множество связное и открытое одновременно, $\overline{D}$ – замкнутая область.

Рассмотрим $D \subset \mathbb{C}$. Для областей $D \subset \mathbb{C}$ связность эквивалентна следующему определению.

Определение. Множество E называется связным, если для любых z_1, $z_2 \in E$ существует ломаная, состоящая из конечного числа прямолинейных отрезков, целиком принадлежащих множеству E.

В общем случае последнее определение связности не эквивалентно определению связности в топологическом пространстве.

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ АРГУМЕНТА И МОДУЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ

2

лекция

Пусть множества $E, F \subset \mathbb{C}$, точка $z \in E$, а точка $w \in F$ (рис. 4).

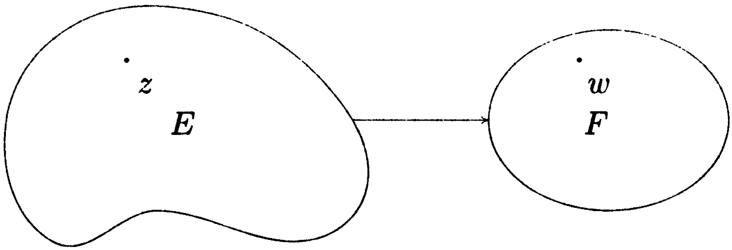

Рис. 4

Скажем, что на множестве E задана *функция комплексного переменного* $f(z)$, если

$$\forall z \in E,\ \exists w \in F\ :\ f(z) = w.$$

Множество F называется *областью изменения* функции $f(z)$, если $\forall w \in F.\ \exists z \in E : f(z) = w$. Вообще говоря, каждому $z \in E$ может соответствовать одно или более значений $w : f(z) = w$. Если такое значение w единственное, то $f(z)$ *однозначная функция*, в противном случае – *функция многозначная*. Например:

1. $f(z) = z^n,\ n \in \mathbb{N}$ – однозначная функция на $E = \mathbb{C}$.

2. $f(z) = \sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$. По определению число w есть $\sqrt[n]{z}$, если $w^n = z$. Пусть $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|(\cos\arg z + i\sin\arg z)$ – тригонометрическая запись комплексного числа, тогда

$$f(z) = \sqrt[n]{z} = |z|^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\arg z + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\arg z + 2\pi k}{n}\right)\right],$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Функция $\sqrt[n]{z}$ многозначная, а именно, n-значная функция: каждому значению z, $z \neq 0$, соответствует n различных значений $f(z)$. Функция $\sqrt[n]{z}$ определена на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и является обратной к функции z^n.

Функция называется *однолистной*, если она осуществляет взаимно-однозначное отображение множества E на множество F. Пример: $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}, n > 1$ не является однолистной на $\mathbb{C}$, но если в качестве E взять множество $E = \{z : 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}\}$ – угол раствора $\frac{2\pi}{n}$, то на множестве E функция $f(z)$ будет однолистной.

В дальнейшем, если не оговорено особо, будем рассматривать однозначные функции.

Предельное значение функции в точке

Пусть $f(z)$ определена на множестве E, для которого z_0 – предельная точка. Определение предельного значения функции по Коши и запись $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w$ означают:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta(\varepsilon) > 0,\ \forall z \in E:\ 0 < |z - z_0| < \delta\ \to\ |f(z) - w| < \varepsilon.$$

Иногда пишут $\lim\limits_{\substack{z\in E\\ z\to z_0}} f(z) = w$, когда хотят подчеркнуть, что рассматривают предельное значение функции по множеству E.

Пусть $z = x + iy$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$.

Теорема 2. *Для того, чтобы существовал предел* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w = a + ib$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = a, \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = b.$$

Доказательство следует из выполнения следующих неравенств:

$$|u(x,y) - a| \leqslant |f(z) - w| = \sqrt{(u(x,y) - a)^2 + (v(x,y) - b)^2}$$
$$\leqslant |u(x,y) - a| + |v(x,y) - b|,$$
$$|f(z) - w| \geqslant |u(x,y) - a|.$$

Пусть $\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z) = w_1$, $\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z) = w_2$; тогда справедливы следующие утверждения:

1. $\lim\limits_{z\to z_0} [f_1(z) \pm f_2(z)] = w_1 \pm w_2$.
2. $\lim\limits_{z\to z_0} [f_1(z) \cdot f_2(z)] = w_1 \cdot w_2$.
3. Если $w_2 \neq 0$, то $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{w_1}{w_2}$.

Доказательства этих утверждений следуют из справедливости соответствующих утверждений для функций действительного переменного и из теоремы 2.

Определение предельного значения функции по Гейне и запись $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w$ означают:

$$\forall\{z_n\} \subset E.\quad z_n \neq z_0: \quad \lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \quad\to\quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = w.$$

Определения предельного значения по Коши и по Гейне эквиваленты.

Определения:

1. $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z) = \infty$:

$$\forall\varepsilon > 0,\quad \exists\delta(\varepsilon) > 0,\quad \forall z \in E:\quad 0 < |z - z_0| < \delta \quad\to\quad |f(z)| > \varepsilon.$$

2. $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ z\in E}} f(z) = w:$

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta(\varepsilon) > 0, \quad \forall z \in E: \quad |z| > \delta \quad \to \quad |f(z) - w| < \varepsilon.$$

3. $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ z\in E}} f(z) = \infty:$

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta(\varepsilon) > 0, \quad \forall z \in E: \quad |z| > \delta \quad \to \quad |f(z)| > \varepsilon.$$

Непрерывность функции в точке

Пусть функция $f(z)$ определена на множестве $E \subset \mathbb{C}$, точка $z_0 \in E$, z_0 – предельная точка множества E. По определению функция $f(z)$ *непрерывна в точке* z_0, если существует

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Иногда говорят, что функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0 по множеству E. Функция, непрерывная в каждой точке $z \in E$, называется функцией, непрерывной на множестве E. Класс непрерывных функций на множестве E будем обозначать $C(E)$.

Теорема 3. *Для того, чтобы функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ была непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно, чтобы действительные функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были непрерывны в точке (x_0, y_0).*

Доказательство следует из теоремы 2 и определения непрерывной функции.

Свойства непрерывных функций

Пусть функции $f(z)$, $g(z)$ непрерывны в точке z_0; тогда
1. $f(z) \pm g(z)$ непрерывны в точке z_0.

2. $f(z) \cdot g(z)$ непрерывна в точке z_0.

3. Если $g(z_0) \neq 0$, то функция $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ непрерывна в точке z_0.

4. Суперпозиция двух непрерывных функций есть непрерывная функция, а именно, справедливо следующее.

Пусть функция $f(z)$ определена на множестве E и непрерывна в точке z_0, $z_0 \in E$. Множество E отображается функцией $f(z)$ в множество F : $w_0 = f(z_0)$, $w_0 \in F$. Функция $g(w)$ определена на множестве G и непрерывна в точке w_0, $F \subset G$. Тогда функция $g[f(z)]$ есть функция, непрерывная в точке z_0.

Определение. Функция $f(z)$ называется *равномерно-непрерывной* на множестве E, если

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall z_1, z_2 \in E : |z_1 - z_2| < \delta \to |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$

Теорема 4. *Для того, чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была равномерно-непрерывной на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были равномерно-непрерывны на множестве E.*

Свойства непрерывных функций на компакте E

Пусть функция $f(z) \subset C(E)$; тогда

1. $|f(z)|$ – ограниченная функция на E.

2. $|f(z)|$ достигает своей верхней и нижней грани на E.

3. $f(z)$ – равномерно-непрерывная функция на E (теорема Кантора).

Доказательства этих утверждений следуют из теоремы 4 и выполнения соответствующих утверждений для функций $u(x, y)$, $v(x, y)$.

Дифференцируемость функции

Пусть $f(z)$ определена на $U_\delta(z_0)$, $\delta > 0$. Если существует предел $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, то этот предел называют *производной* функции $f(z)$ в точке z_0 и обозначают $f'(z_0)$.

Положим $f(z) = u(x.y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ и $\Delta f = f(z) - f(z_0)$, $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$, $\Delta z = z - z_0$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, где $\Delta u = u(x,y) - u(x_0,y_0)$, $\Delta v = v(x,y) - v(x_0,y_0)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$.

Предположим, что существует $f'(z_0)$; тогда $\dfrac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z_0) = \bar{o}(1)$, $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \bar{o}(1) = 0$. Следовательно, $\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \bar{o}(1)\Delta z$.

Определение. Функция $f(z)$ называется *дифференцируемой*, если приращение $\Delta f = A\Delta z + \bar{o}(1)\Delta z$, $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \bar{o}(1) = 0$, A не зависит от Δz.

Итак, если существует $f'(z_0)$, то функция $f(z)$ дифференцируема; если она дифференцируема, то существует $f'(z_0) = A$.

Из дифференцируемости следует непрерывность – достаточно найти $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta f = \lim\limits_{\Delta z \to 0} (A\Delta z + \bar{o}(1)\Delta z) = 0$.

Пусть $f(z)$ · дифференцируемая функция в точке z_0, т. е. $\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \bar{o}(1)\Delta z$.

Обозначим $f'(z_0) = a + ib$, $\bar{o}(1) = \bar{o}_1(1) + i\bar{o}_2(1)$, причем $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \bar{o}_1(1) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \bar{o}_2(1) = 0$.

Имеем

$$\Delta u + i\Delta v = (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + [\bar{o}_1(1) + i\bar{o}_2(1)](\Delta x + i\Delta y),$$

отсюда

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \bar{o}_1(1)\Delta x - \bar{o}_2(1)\Delta y.$$
$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + o_1(1)\Delta y + o_2(1)\Delta x.$$

Так как $\Delta z \to 0$, то $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Получаем, что функции $u(x,y), v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и при этом

$$u'_x = a, \quad u'_y = -b, \quad v'_x = b, \quad v'_y = a, \quad f'(z_0) = u'_x + iv'_x,$$

или

$$\boxed{u'_x = v'_y,\ u'_y = -v'_x} \tag{1}$$

Эти условия называют *условиями Коши-Римана* или *условиями Эйлера-Даламбера.*

Условия (1) имеют основополагающее значение в теории аналитических функций и в приложениях этой теории к задачам механики и физики. По традиции условия (1) называются условиями Коши-Римана математиками, а механики и физики называют их условиями Даламбера-Эйлера, так как еще в 18 веке Даламбер (Д'Аламбер), а потом и Эйлер изучали эти условия применительно к вопросам гидродинамики, картографии и интегральному исчислению.

Предположим, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и выполнены условия (1).
Пусть $u'_x = a = v'_y, \quad u'_y = -b = -v'_x$.
Имеем

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \bar{o}_1(1)\Delta x + \bar{o}_2(1)\Delta y,$$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \bar{o}_3(1)\Delta x + \bar{o}_4(1)\Delta y,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \bar{o}_1(1) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \bar{o}_2(1) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \bar{o}_3(1) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \bar{o}_4(1).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \Delta u + i\Delta v \\
&= a\Delta x - b\Delta y + \bar{o}_1(1)\Delta x + \bar{o}_2(1)\Delta y + ib\Delta x \\
&\qquad + ia\Delta y + i\bar{o}_3(1)\Delta x + i\bar{o}_4(1)\Delta y \\
&= \Delta x(a+ib) + \Delta y(-b+ia) + \Delta x\Big(\bar{o}_1(1) + i\bar{o}_3(1)\Big) + \Delta y\Big(\bar{o}_2(1) + i\bar{o}_4(1)\Big) \\
&= (a+ib)(\Delta x + i\Delta y) + \Delta x\Big(\bar{o}_1(1) + i\bar{o}_3(1)\Big) + \Delta y\Big(\bar{o}_2(1) + i\bar{o}_4(1)\Big).
\end{aligned}$$

Тем самым

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = a + ib + \frac{\Delta x}{\Delta z}\Big(\bar{o}_1(1) + i\bar{o}_3(1)\Big) + \frac{\Delta y}{\Delta z}\Big(\bar{o}_2(1) + i\bar{o}_4(1)\Big).$$

Так как $|\Delta x| \leqslant |\Delta z|, \quad |\Delta y| \leqslant |\Delta z|$, то

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=a+ib=f'(z_0)=u'_x+iv'_x=v'_y-iu'_y=u'_x-iu'_y=v'_y+iv'_x.$$

Итак, доказана теорема

Теорема 5. *Для того, чтобы функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ была дифференцируема в точке $z_0=x_0+iy_0$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были дифференцируемы в точке (x_0,y_0) и выполнялись условия Коши-Римана.*

Свойства дифференцируемых функций

Пусть существует $f'(z_0), \quad g'(z_0)$; тогда справедливы следующие утверждения.

1. Существует $[f\pm g]'_{z_0}=f'(z_0)\pm g'(z_0)$.
2. Существует $[f\cdot g]'_{z_0}=f'(z_0)\cdot g(z_0)+f(z_0)\cdot g'(z_0)$.
3. Если $g'(z_0)\neq 0$, то существует

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_{z_0}=\frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

4. Пусть функция $f(z)$ определена в $U_\delta(z_0), \delta>0$, пусть $f(z_0)=w_0$ и существует $f'(z_0)$. При этом функция $f(z)$ переводит окрестность $U_\delta(z_0)$ в множество $F, \quad w_0\in F, \quad F\subset U'_{\delta_1}(w_0)$. На множестве $U'\delta_1(w_0). \delta_1>0$, определена функция $g(w)$ и существует $g'(w_0)$. Тогда суперпозиция $g[f(z)]$ дифференцируема в точке z_0 и при этом

$$[g(f(z))]'_{z_0}=g'(w_0)f'(z_0).$$

5. Пусть функция $f(z)$ определена в $U_\delta(z_0), \quad \delta>0$, и $f'(z_0)\neq 0, \quad f(z_0)=w_0$. Пусть функция $f(z)$ отображает взаимно однозначно $U_\delta(z_0)$ на $U'_{\delta_1}(w_0), \quad \delta_1>0$. Тогда, если функция,

обратная к функции $f(z)$ — $\varphi(w) = z$, непрерывна в точке w_0, то существует $\varphi'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

Доказательство. Рассмотрим предел

$$\lim_{w\to w_0} \frac{\varphi(w)-\varphi(w_0)}{w-w_0} = \lim_{w\to w_0} \frac{1}{\dfrac{w-w_0}{\varphi(w)-\varphi(w_0)}} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

При доказательстве мы использовали по существу взаимнооднозначное отображение ($w \neq w_0$, $z \neq z_0$) и непрерывность функции $\varphi(w)$ в точке w_0 (из условия $w \to w_0$ следует $z \to z_0$).

Геометрический смысл аргумента производной

Рассмотрим непрерывную кривую $\breve{AB}$ (рис. 5): $x = \lambda_1(t)$, $y = \lambda_2(t), t \in [\alpha, \beta]$, t – действительный параметр, $\lambda_1(t), \lambda_2(t) \in C([\alpha, \beta])$. Тогда $z = x + iy = \lambda_1(t) + i\lambda_2(t) = \lambda(t)$ – комплексно-значная функция действительного переменного.

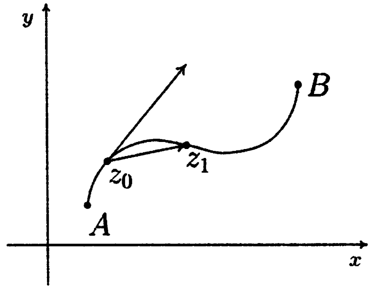

Рис. 5

Пусть возрастанию параметра t соответствует данное направление от точки A к точке B. Возьмем точки

$z_0 = \lambda(t_0)$, $z_1 = \lambda(t_1)$, $t_0 < t_1$ на кривой $\breve{AB}$. Пусть существует $\lambda'(t_0) \neq 0$. Вектор $\overrightarrow{z_1 - z_0}$ имеет такое же направление, как и вектор $\left(\overrightarrow{\dfrac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0}}\right)$. Так как существует $\lim\limits_{t_1 \to t_0} \dfrac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0} = \lambda'(t_0) \neq 0$, то $\arg \lambda'(t_0) = \lim\limits_{t_1 \to t_0} \arg \left(\dfrac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0}\right)$ при условии, что $\lambda'(t_0)$ не есть отрицательное число. Если $\lambda'(t_0) < 0$, то, вообще говоря, $\lim\limits_{t_1 \to t_0} \arg \left(\frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0}\right)$ может не существовать. Тогда мы будем писать $\operatorname{Arg} \lambda'(t_0) = \lim\limits_{t_1 \to t_0} \operatorname{Arg} \left(\frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0}\right)$, понимая это равенство с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Итак, $\arg \lambda'(t_0)$ есть угол наклона касательного луча, исходящего из точки z_0, с положительным направлением оси OX.

Рассмотрим функцию $f(z)$, заданную на области D, точку $z_0 \in D$ и рассмотрим две непрерывные кривые (рис. 6) $z = \lambda(t)$, $z = \beta(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, пересекающиеся в точке $z_0 = \lambda(t_1) = \beta(t_2)$, $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$. Пусть также существуют $\lambda'(t_1) \neq 0$ и $\beta'(t_2) \neq 0$. Предположим, что существует $f'(z_0) \neq 0$, $w_0 = f(z_0)$. С помощью функции $f(z)$ кривые $z = \lambda(t)$ (1-кривая), $z = \beta(t)$ (2-кривая) перейдут в кривые $w = f(\lambda(t))$ (1′-кривая), $w = f(\beta(t))$ (2′-кривая), пересекающиеся в точке w_0.

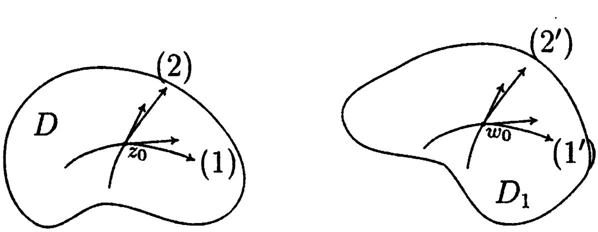

Рис. 6

Пусть $f(\lambda(t)) = \mu(t)$, $f(\beta(t)) = \nu(t)$. Угол между 1-кривой и 2-кривой (направление от 1-кривой к 2-кривой) равен

$$\operatorname{Arg} \beta'(t_2) - \operatorname{Arg} \lambda'(t_1).$$

Угол между образами этих кривых равен

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg}\ \nu'(t_2) - \operatorname{Arg}\ \mu'(t_1) &= \operatorname{Arg}\left[f(\beta(t_2))\right] - \operatorname{Arg}\left[f(\lambda(t_1))\right] \\ &= \operatorname{Arg}\ f'(z_0) + \operatorname{Arg}\ \beta'(t_2) - \operatorname{Arg}\ f'(z_0) - \operatorname{Arg}\ \lambda'(t_1) \\ &= \operatorname{Arg}\ \beta'(t_2) - \operatorname{Arg}\ \lambda'(t_1).\end{aligned}$$

Таким образом, угол между кривыми, пересекающимися в некоторой точке z_0 и имеющими в этой точке касательные, равен углу между их образами при отображении $f(z)$, если $f'(z) \neq 0$.

Определение. Отображение $f(z)$ называется *конформным* в точке z_0, если при этом отображении сохраняются углы между гладкими кривыми (или кривыми, имеющими в точке z_0 касательные) – т. е. угол между двумя кривыми, пересекающимися в точке z_0, равен углу между их образами, пересекающимися в точке $w_0 = f(z_0)$. Если при этом сохраняется и направление отсчета углов, то отображение называется конформным отображением 1-го рода, в противном случае – конформным отображением 2-го рода.

Таким образом, если в области D функция $f(z)$ имеет производную $f'(z) \neq 0$, то отображение $f(z)$ – конформное отображение 1-го рода области D на свой образ. В дальнейшем отображение 1-го рода мы и будем называть *конформным отображением.*

Геометрический смысл модуля производной

Пусть существует производная

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \text{ тогда } |f'(z_0)| = \lim_{z\to z_0} \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right|.$$

Величина $\left|\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right|$ называется растяжением вектора $\overrightarrow{z - z_0}$ при отображении $f(z)$. Величина $|f'(z_0)|$ называется растяжением в точке z_0 при отображении $f(z)$. Эта величина не зависит от направления вектора $\overrightarrow{z - z_0}$.

$\boxed{\text{Задача 5.}}$ Привести пример функций $f(z)$ $f'(z_0) = 0$, для которых отображение в точке z_0

1) будет конформным;

2) отображение не будет конформным.

Достаточное условие, при котором существует $f'(z)$. Если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ и функции $u(x, y), v(x, y)$ в области D имеют непрерывные частные производные первого порядка и выполняются условия Коши-Римана, то функция $f(z)$ дифференцируема в области D и $f'(z) \in C(D)$.

Определение. Функция $f(z)$ называется *аналитической* (голоморфной, регулярной, правильной, моногенной) в области D, если она в области D имеет производную $f'(z) \in C(D)$.

Замечание 1. Вообще говоря, условие непрерывности производной $f'(z)$ лишнее: уже из существования $f'(z)$ следует, что $f'(z)$ – непрерывная функция (смотри, например, Маркушевич [10]). Доказательство этого факта требует много времени, поэтому мы будем предполагать непрерывность производной.

Замечание 2. Аналитическая функция – это то же самое, что и голоморфная, или правильная, или регулярная, или моногенная функция. Различные названия связаны с различным подходом к рассмотрению аналитических функций. Теорию аналитических функций можно излагать, начиная с существования производной или с разложения в степенной ряд (так делал Коши), или через интегральное свойство аналитических функций. Мы начнем изложение с существования непрерывной производной и в дальнейшем покажем интегральное свойство аналитических функций и их разложение в степенные ряды.

Класс аналитических функций на области D будем обозначать $A(D)$. Понятие аналитической функции на области D подразумевает существование производной в каждой точке D и в некоторой окрестности точки. Функция аналитична в точке, если она аналитична в некоторой окрестности этой точки.

Задача 6. Доказать, что условия Коши-Римана в полярных координатах принимают следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r\frac{\partial v}{\partial r}; \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}, \quad r \neq 0.$$

Задача 7. Пусть $\overrightarrow{s}$ и $\overrightarrow{n}$ – взаимно перпендикулярные направления, причем поворот от $\overrightarrow{s}$ к $\overrightarrow{n}$ совершается против часовой стрелки; тогда обобщенное условие Коши-Римана принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}; \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}.$$

3 лекция

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА КОШИ

Введем в рассмотрение функции, называемые *элементарными функциями* комплексного переменного.

1. Многочлен n-ой степени $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$, $n \in \mathbb{N}$; $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – комплексные числа, $a_0 \neq 0$, n – степень многочлена. Функция $P(z) \in A(\mathbb{C})$,

$$P'(z) = a_0nz^{n-1} + a_1(n-1)z^{n-2} + \ldots + a_{n-1}.$$

2. Рациональная функция

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0z^m + b_1z^{m-1} + \ldots + b_m},$$

$P(z)$, $Q(z)$ – многочлены, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, $P(z)$ и $Q(z)$ не имеют общих множителей. Если $Q(z) = b_0(z-z_1)^{k_1}\ldots(z-z_p)^{k_p}$, $z_i \neq z_j$, $i \neq j$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = m$, то функция $R(z) \in A(\mathbb{C}\backslash\{z_1, \ldots z_p\})$. Порядком рациональной функции называют $\max(n, m)$.

3. Функция $e^z = \exp(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$, если $z = x + iy$. Функция $e^z \in A(\mathbb{C})$, $(e^z)' = e^z$.

4. Гиперболический косинус $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$.

Функция $\operatorname{ch} z \in A(\mathbb{C})$, $(\operatorname{ch} z)' = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$.

5. Гиперболический синус $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$.

Функция $\operatorname{sh} z \in A(\mathbb{C})$, $(\operatorname{sh} z)' = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z$.

6. Тригонометрический синус $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

Функция $\sin z \in A(\mathbb{C})$, $(\sin z)' = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

7. Тригонометрический косинус $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Функция $\cos z \in A(\mathbb{C})$, $(\cos z)' = -\sin z$.

8. Функция $tg\ z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $(\operatorname{tg} z)' = \dfrac{1}{\cos^2 z}$,
$z \neq \dfrac{\pi}{2}\,(2n+1)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Функция $\operatorname{tg} z \in A(\mathbb{C} \backslash \{\pi/2 \cdot (2n+1),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\})$.

9. Функция $ctg\ z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$, $(\operatorname{ctg} z)' = -\dfrac{1}{\sin^2 z}$,
$z \neq \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Функция $\operatorname{ctg} z \in A(\mathbb{C} \backslash \{\pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\})$.

10. Гиперболический тангенс $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$.
Функция $\operatorname{th} z \in A(\mathbb{C} \setminus \{i(\pi/2 + k\pi),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\})$.

11. Гиперболический котангенс $\operatorname{cth} z = \dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$.
Функция $\operatorname{cth} z \in A(\mathbb{C} \setminus \{ik\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\})$.

Функция, аналитическая на всей комплексной плоскости, называется *целой*. Такими функциями являются многочлены, синус, косинус, $\exp z$, гиперболический синус, гиперболический косинус. Теория целых функций, в частности, разложение в ряд по целым функциям, получила широкое применение в дифференциальных уравнениях, уравнениях в частных производных, в функциональном анализе. Более подробно с теорией целых функций можно ознакомиться, например в монографии А.Ф. Леонтьева [2].

Интегрирование функций комплексного переменного

Рассмотрим спрямляемую кривую $\breve{AB}$ (рис. 7) без точек самопересечения и самоналегания. Разобьем кривую на n частей с помощью точек $z_0 = A,\ z_1,\ \dots\ z_n = B$ в порядке следования по кривой от точки A к B. Выберем на дуге $\overset{\smile}{z_{i-1}, z_i}$ точку z_i'. Обозначим через $l(\overset{\smile}{z_{i-1}, z_i})$ длину дуги $\overset{\smile}{z_{i-1}, z_i}$. Пусть на кривой $\breve{AB}$ задана функция $f(z)$.

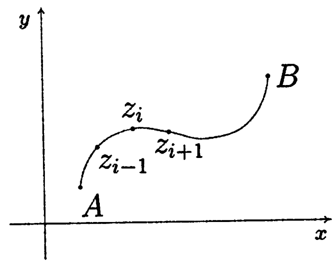

Рис. 7

Составим интегральные суммы

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i')l(\overset{\smile}{z_{i-1}, z_i}), \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i')(z_i - z_{i-1}). \tag{2}$$

Обозначим за $\Delta = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |z_{i-1} - z_i|$ – диаметр данного разбиения. Если существует предел интегральных сумм (1) при $\Delta \to 0$, не зависящий от способа разбиения кривой точками $z_1, z_2, \dots, z_n$ и не зависящий от выбора точек z_i' на дуге $\overset{\smile}{z_{i-1}, z_i}$, то говорят, что функция $f(z)$ *интегрируема на кривой* AB и обозначают

$$\int\limits_{AB} f(z)|dz| = \lim_{\Delta\to 0}\Bigl(\sum_{i=1}^{n} f(z_i')l(\overset{\smile}{z_{i-1}, z_i})\Bigr).$$

Интеграл $\int\limits_{AB} f(z)|dz|$ называют *интегралом первого рода.*

Если существует предел интегральных сумм (2) при $\Delta \to 0$, не зависящий от способа разбиения кривой точками $z_1, z_2, \dots, z_n$ и не зависящий от выбора точек z_i' на дуге $\smile{z_{i-1}, z_i}$, то говорят, что существует *интеграл второго рода* от функции $f(z)$ по кривой AB и обозначают

$$\int\limits_{AB} f(z)dz = \lim_{\Delta\to 0}\Big(\sum_{i=1}^{n} f(z_i')(z_i - z_{i-1})\Big).$$

Пусть функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$, $z_i = x_i + iy_i$, $z_i' = x_i' + iy_i'$. Тогда интегральная сумма (2) будет равна

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} f(z_i')(z_i - z_{i-1})\\
&\qquad = \sum_{i=1}^{n}[u(x_i', y_i') + iv(x_i', y_i')][(x_i - x_{i-1}) + i(y_i - y_{i-1})]\\
&\qquad = \sum_{i=1}^{n}[u(x_i', y_i')(x_i - x_{i-1}) - v(x_i', y_i')(y_i - y_{i-1})]\\
&\qquad\quad + i\sum_{i=1}^{n}[u(x_i', y_i')(x_i - x_{i-1}) + v(x_i', y_i')(y_i - y_{i-1})].
\end{aligned}$$

Поэтому, если существует $\int\limits_{AB} f(z)dz$, то существуют интегралы $\int\limits_{AB}(u(x,y)dx - v(x,y)dy)$, $\int\limits_{AB}(u(x,y)dx + v(x,y)dy)$ и справедливо равенство

$$\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{AB} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_{AB} u(x,y)dx + v(x,y)dy.$$

Заметим, что в правой части также участвуют интегралы второго рода.

Аналогично показывается, что если существует интеграл первого рода $\int\limits_{AB} f(z)\,|dz|$, то существуют интегралы первого рода $\int\limits_{AB} u(x,y)\,dl$, $\int\limits_{AB} v(x,y)\,dl$, dl – дифференциал дуги AB, и справедливо равенство

$$\int\limits_{AB} f(z)\,|dz| = \int\limits_{AB} u(x,y)\,dl + i\int\limits_{AB} v(x,y)\,dl.$$

Свойства интегрируемых функций

Так как интеграл от функции комплексного переменного, как мы показали, связан с интегралами от функций действительных переменных, то понятно, как свойства интегралов от действительных функций действительных переменных переносятся на свойства интегралов от комплексной функции комплексного переменного. Необходимое условие существования интеграла $\int\limits_{AB} f(z)dz$ – модуль функции $f(z)$ ограничен на дуге $\breve{AB}$.

1. Линейное свойство. Пусть существуют интегралы $\int\limits_{AB} f(z)dz$, $\int\limits_{AB} g(z)dz$; тогда существует интеграл

$$\int\limits_{AB} (\alpha f(z) + \beta g(z))\,dz = \alpha\int\limits_{AB} f(z)\,dz + \beta\int\limits_{AB} g(z)\,dz, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}.$$

2. Аддитивность интеграла. Пусть кривая $\breve{AB} = \breve{AC}\bigcup\breve{CB}$, где дуги $\breve{AC}$ и $\breve{CB}$ имеют единственную общую точку C, и пусть

существует интеграл $\int\limits_{AB} f(z)\,dz$; тогда будут существовать интегралы $\int\limits_{AC} f(z)\,dz$, $\int\limits_{CB} f(z)\,dz$ и будет справедливо равенство

$$\int\limits_{AB} f(z)\,dz = \int\limits_{AC} f(z)\,dz + \int\limits_{CB} f(z)\,dz.$$

И, наоборот, из существования интегралов $\int\limits_{AC} f(z)dz$, $\int\limits_{CB} f(z)dz$ следует существование интеграла $\int\limits_{AB} f(z)\,dz$ и выполнение приведенного выше равенства.

3. $\int\limits_{AB} f(z)\,dz = -\int\limits_{BA} f(z)\,dz.$

4. Если l – длина кривой $\breve{AB}$, а $|f(z)| \leqslant M$, $z \in \breve{AB}$, то

$$\left|\int\limits_{AB} f(z)\,dz\right| \leqslant Ml.$$

Классы интегрируемых функций

1. Класс непрерывных функций.

2. Класс ограниченных по модулю функций, имеющих на кривой конечное число точек разрыва.

3. Класс функций, обладающих I-свойством. Под этим классом понимают класс ограниченных по модулю функций и обладающих следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечное число спрямляемых дуг, принадлежащих данной кривой AB, таких, что сумма длин этих дуг меньше ε. Все точки разрыва функции $f(z)$ лежат на этих дугах.

Пусть кривая $\breve{AB}$ задана параметрически:

$z = x + iy$, $x = \lambda_1(t)$, $y = \lambda_2(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, $z = \lambda(t) = \lambda_1(t) + i\lambda_2(t)$,

t – действительный параметр, и существует $\lambda'(t) \in C([\alpha, \beta])$, $\lambda'(t) \neq 0$; тогда

$$\int\limits_{AB} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\lambda(t)]\lambda'(t)\,dt,$$

$$\int\limits_{AB} f(z)\,|dz| = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\lambda(t)]|\lambda'(t)|\,dt.$$

Но не нужно думать, что все свойства и теоремы, присущие, например, определенному интегралу Римана, переносятся на интеграл от функции комплексного переменного.

Рассмотрим пример. Пусть $\smile{AB} = [0,1]$, $f(z) = e^{2\pi i z}$; тогда

$$\int\limits_{[0,1]} f(z)\,dz = \int\limits_{[0,1]} e^{2\pi i z}\,dz = \int\limits_{0}^{1} \cos(2\pi z)\,dz + i\int\limits_{0}^{1} \sin(2\pi z)\,dz = 0.$$

Так как $g(z) = e^z \neq 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$, то если бы была справедлива теорема о среднем, то $\int\limits_{[0,1]} f(z)\,dz$ был бы равен $f(\tilde{z}) \neq 0$, $\tilde{z} \in [0,1]$, что противоречит тому, что $\int\limits_{[0,1]} f(z)\,dz = 0$.

Интегральная теорема Коши

Пусть кривая $\smile{AB}$ задана параметрически $z = \lambda(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, и пусть функция $\lambda(t) \in C([\alpha, \beta])$ осуществляет взаимно-однозначное отображение отрезка $[\alpha, \beta]$ на свой образ – кривую $\smile{AB}$. Если это требование выполняется кроме концевых точек и при этом $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta)$, то будем говорить, что кривая $\smile{AB}$ замкнута. В первом случае кривую назовем незамкнутой жордановой кривой, во втором – замкнутой жордановой кривой.

Теорема Жордана *(без доказательства). Замкнутая жорданова (жорданова) кривая* Γ *разбивает комплексную плоскость* $\overline{\mathbb{C}}$ *на две области. Одна область* $D_\Gamma = int\Gamma$ *- ограниченная область и ее границей является* Γ, *вторая область* $\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{D_\Gamma}$ *- неограниченная, содержит* ∞ *и ее границей также является кривая* Γ.

Определение. Область $D \subset \mathbb{C}$ называется *односвязной областью*, если ее граница ∂D – замкнутое, связное множество. Область D называется *конечно-связной* или *n-связной*, $n \in \mathbb{N}, n > 1$, если ее граница состоит из конечного (из n) числа замкнутых связных компонент. В любом другом случае область D – бесконечно-связная.

Из теоремы Жордана следует, что если область D – односвязная и $\Gamma \subset D$, Γ – замкнутая, жорданова кривая, то $D_\Gamma \subset D$ (без доказательства).

Казалось бы, этот факт, как и сама теорема Жордана, очевиден, если в качестве Γ брать непрерывную кривую, а не кривую Жордана. Но для просто непрерывных кривых Γ это не так. Смотри, например [3], где строится пример непрерывной кривой, заполняющей собой квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$.

В дальнейшем будем рассматривать гладкие или кусочно-гладкие кривые Жордана. Замкнутые, кусочно-гладкие , жордановые кривые будем называть *контуром*. Под положительным направлением обхода по границе ∂D области D будем понимать такой обход, при котором область остается слева.

Интегральная теорема Коши. *Пусть* D *– односвязная область и пусть* $f(z) \in A(D)$. *Тогда для любого контура* $\Gamma \subset D$

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Доказательство. Так как $f(z) \in A(D)$, то $f'(z) \in C(D)$ и, следовательно, $u(x,y)$, $v(x,y) \in C^1(D)$ $(f(z) = u(x,y) + iv(x,y))$. Имеем $\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = \int\limits_\Gamma u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\int\limits_\Gamma u(x,y)dy + v(x,y)\,dx$. Для интегралов, стоящих справа в этом равенстве, применим формулу Грина (доказательство формулы Грина можно найти, например, в книге В.А. Ильина [4]).

Итак,

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = \iint\limits_{D_\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x}(-v) - \frac{\partial}{\partial y}(u)\right] dxdy$$

$$+i\iint\limits_{D_\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x}(u) - \frac{\partial}{\partial y}(v)\right] dxdy.$$

Так как выполнены условия Коши-Римана: $u'_x = v'_y$; $u'_y = -v'_x$, то $\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = 0$.

Замечание. Мы уже говорили о том, что условие $f'(z) \in C(D)$ – лишнее условие. Единственное место, где мы использовали непрерывность производной – это применение формулы Грина. Если же требовать только существования производной функции $f(z)$, $z \in D$, то сначала теорема Коши доказывается для треугольника, потом для многоугольника и в конце, аппроксимируя контур Г многоугольниками, в общем случае. Смотри, например, А.И. Маркушевич [5]. В качестве примера, подтверждающего, что условие односвязности в теореме Коши по существу, рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{1}{z}, \; D = \{z : 1 < |z| < 2\}, \; \Gamma = \{z : |z| = 3/2\}.$$

Вычислим $\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z}\,dz$. Так как $|z| = \frac{3}{2}$, то $z = re^{i\varphi}$, $r = \frac{3}{2}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z}\,dz = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{rie^{i\varphi}d\varphi}{re^{i\varphi}} = 2\pi i \neq 0.$$

Следствие из теоремы Коши. Пусть D – односвязная, ограниченная область, граница которой ∂D – контур и функция $f(z) \in A(\overline{D})$; тогда $\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 0$.

Обобщения теоремы Коши.

1. Пусть D – односвязная, ограниченная область, граница ∂D – контур, и функция $f(z) \in A(D) \bigcap C(\overline{D})$; тогда $\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz$ равен нулю (без доказательства).

2. Случай, когда D – конечно-связная область.

Пусть D – ограниченная, конечно-связная область, граница которой ∂D состоит из $(n + 1)$ связных компонент:

$$.\partial D = \Gamma \bigcup \gamma_1 \bigcup \gamma_2 \bigcup \ldots \bigcup \gamma_n,$$

где $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ – контуры, не пересекающиеся между собой, внутри Γ содержатся $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ $(\gamma_i \subset int\Gamma,\ \ i = 1 \ldots n)$. Тогда, если $f(z) \in A(\overline{D})$, то интеграл по всей границе ∂D области D

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 0,$$

направление обхода по границе положительное, или

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\gamma_i} f(z)\,dz,$$

в этой формуле направление обхода по кривым против часовой стрелки.

Доказательство следует из справедливости формулы Грина для конечно-связной области и для функций $u(x,y)$, $v(x,y) \in C^1(\overline{D})$. Смотри, например, [4].

3. Предыдущая теорема верна, если условие $f(z) \in A(\overline{D})$ заменить на условие $f(z) \in A(D) \bigcap C(\overline{D})$. (без доказательства).

Одно из применений интегральной теоремы Коши – это вычисление интегралов от действительных функций действительного переменного (как собственных, так и несобственных).

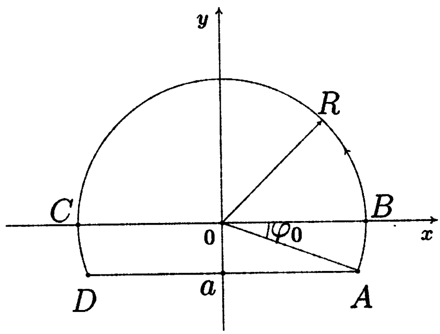

Рис. 8

При вычислении интегралов часто используется лемма Жордана.

Лемма Жордана. *Пусть* $\overline{D} = \{z : \operatorname{Im} z \geqslant a\}$ *(рис. 8),* $f(z) \in C(\overline{D} \bigcap \{|z| \geqslant R_0\})$, $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ z\in \overline{D}}} f(z) = 0$. *Тогда* $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} e^{imz} f(z)dz = 0$, *где* $m > 0$, $C_R = \overline{D} \bigcap \{z : |z| = R\}$.

Доказательство. Рассмотрим более общий случай: $a < 0$. (Если $a > 0$, то оценки нужно проводить только на дуге $\breve{CB}$ или части дуги $\breve{CB}$). Точки A, D – точки пересечения окружности $|z| = R$ с прямой $y = a$, точки B, C – точки пересечения окружности с действительной прямой, угол $\angle AOB = \varphi_0$. По условию $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\in D}} f(z) = 0$. Это значит, что

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta(\varepsilon) > 0:\ \forall z \in \overline{D}, |z| > \delta(\varepsilon)\ \to\ |f(z)| < \varepsilon.$$

Проведем оценку интеграла $\int\limits_{AB} e^{imz} f(z)dz$. Если $z \in \breve{AB}$, то $z = R\ e^{i\varphi}$, $dz = Rie^{i\varphi}d\varphi$, $|dz| = R\ d\varphi$, $e^{im\,z} = e^{im(R\cos\varphi+iR\sin\varphi)}$, $|e^{im\,z}| = e^{-mR\sin\varphi}$,

$$\left|\int\limits_{AB} e^{im\,z} f(z)\,dz\right| \leqslant \int\limits_{AB} |e^{im\,z}|\cdot|f(z)|\cdot|dz|$$

$$= \int\limits_{\varphi_0}^{0} e^{-mR\sin\varphi}|f(Re^{i\varphi})|R\,d\varphi \leqslant \max_{z\in\breve{AB}}|f(z)|e^{-mR\sin\varphi_0}R|\varphi_0|.$$

Так как $\sin\varphi_0 = \dfrac{a}{R}$, то $\varphi_0 \sim \dfrac{a}{R}$ при $R\to+\infty$.

Итак,

$$\left|\int\limits_{AB} e^{im\,z} f(z)\,dz\right| \leqslant \max_{z\in\breve{AB}}|f(z)|e^{-ma}(|a|+1), \qquad R\geqslant R_1,$$

т. е. $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{AB} e^{im\,z} f(z)\,dz = 0$.

Аналогичная оценка интеграла $\int\limits_{CD} e^{im\,z} f(z)dz$ дает $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{CD} e^{im\,z} f(z)dz = 0$.

Теперь проведем оценку интеграла $\int\limits_{BC} e^{im\,z} f(z)dz$. Имеем

$$\left|\int\limits_{BC} e^{imz} f(z)\,dz\right| \leqslant \int\limits_{0}^{\pi} e^{-mR\sin\varphi}R|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi$$

$$\leqslant \max_{z\in\breve{BC}}|f(z)|\int\limits_{0}^{\pi} e^{-mR\sin\varphi}R\,d\varphi = 2\max_{z\in\breve{BC}}|f(z)|\int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-mR\sin\varphi}\,d\varphi.$$

Используя оценку: $\frac{2}{\pi}\varphi \leqslant \sin\varphi$ при $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, получим

$$\left|\int\limits_{BC} e^{imz} f(z)\,dz\right| \leqslant 2\max_{z\in \breve{BC}} |f(z)| \int\limits_0^{\pi/2} e^{-m\frac{2}{\pi}R\varphi} R\,d\varphi$$

$$= 2\max_{z\in \breve{BC}} |f(z)| \cdot \left.\frac{e^{-mR\varphi\frac{2}{\pi}}}{\frac{-2m}{\pi}}\right|_0^{\pi/2} = 2\max_{z\in \breve{BC}} |f(z)| \frac{\pi}{2m}[1 - e^{-mR}].$$

Окончательно, $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{BC} e^{im\,z} f(z)\,dz = 0$. Лемма доказана.

Пример. В качестве примера рассмотрим *интеграл Дирихле* – $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ и вычислим его, используя интегральную теорему Коши и лемму Жордана.

Интеграл Дирихле – несобственный, его можно представить в следующем виде:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to+\infty}} \left(\int\limits_{-R}^{-r} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int\limits_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx\right).$$

Рассмотрим область $D_{R,r}$ (рис. 9), границей которой является контур $\partial D_{R,r}$, состоящий из прямолинейных отрезков действительной прямой $[-R, -r]$, $[r, R]$ и двух дуг

$$C_r = \{z : |z| = r,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\},\ C_R = \{z :\ |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}:$$

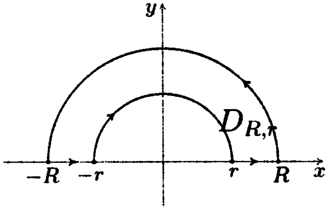

Рис. 9

Интеграл

$$\int\limits_{\partial D_{R,r}} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int\limits_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int\limits_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int\limits_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int\limits_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz.$$

С одной стороны,

$$\int\limits_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int\limits_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \int\limits_{-R}^{-r} \frac{\cos x + i\sin x}{x}\,dx + \int\limits_{r}^{R} \frac{\cos x + i\sin x}{x}\,dx$$

$$= 2i\int\limits_{r}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

С другой стороны, по лемме Жордана $\lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$, по интегральной теореме Коши $\int\limits_{\partial D_{R,r}} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0 \quad \left(\frac{e^{iz}}{z} \in A(\overline{D_{R,r}})\right)$.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$. Если $z \in C_r$, то $z = re^{i\varphi}$; тогда

$$\int\limits_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int\limits_{\pi}^{0} \frac{e^{ire^{i\varphi}}}{re^{i\varphi}} rie^{i\varphi}d\varphi$$

$$= i\int\limits_{\pi}^{0} e^{ir(\cos\varphi + i\sin\varphi)}d\varphi = i\int\limits_{\pi}^{0} e^{-r\sin\varphi + ir\cos\varphi}d\varphi$$

$$= i\int\limits_{\pi}^{0} e^{-r\sin\varphi}\cos(r\cos\varphi)\,d\varphi + i\int\limits_{\pi}^{0} e^{-r\sin\varphi}\sin(r\cos\varphi)\,d\varphi.$$

Так как подынтегральные функции в выражении справа непрерывны по r, φ, то, используя теорему о предельном переходе под знаком интеграла (действительный случай), получим $\lim\limits_{r\to+0} \int\limits_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = -\pi i$. Итак, $0 = -\pi i + 2i \lim\limits_{\substack{r\to+0\\ R\to+\infty}} \int\limits_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx$, т. е. интеграл Дирихле $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Задача 8. Как изменится формулировка леммы Жордана, если дугу C_R повернуть а) на угол $\frac{\pi}{2}$; б) на угол π; в) на угол $-\frac{\pi}{2}$. В каждом случае а)–в) доказать лемму Жордана.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ. ИНТЕГРАЛ ТИПА КОШИ. ТЕОРЕМА МОРЕРА

4

лекция

Теорема (интегральная формула Коши.) *Пусть D – область, функция $f(z) \in A(D)$, контур $\Gamma \subset D$, причем $int\ \Gamma(D_\Gamma)$ также принадлежит D. Тогда имеет место формула*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z_0}, \quad z_0 \in D_\Gamma .$$

Эта формула называется интегральной формулой Коши, а интеграл, стоящий справа – интеграл Коши.

Доказательство. Так как точка $z_0 \in D_\Gamma$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\overline{u_\varepsilon(z_0)} \subset D_\Gamma$ (рис. 10).

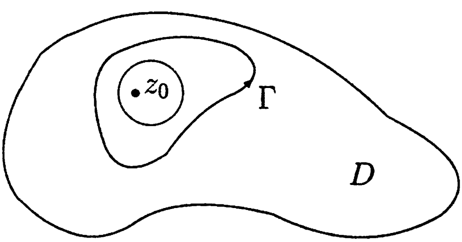

Рис. 10

Рассмотрим область $D_\varepsilon = D_\Gamma \backslash \{z : |z - z_0| \leqslant \varepsilon\}$. Область D_ε – двусвязная, по интегральной теореме Коши интеграл по границе D_ε равен нулю

$$\int\limits_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z_0} = 0$$

или

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z_0} = \int\limits_{|\xi - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z_0}\,.$$

В последнем интеграле сделаем замену: $\xi - z_0 = \varepsilon e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $d\xi = \varepsilon i e^{i\varphi} d\varphi$, тогда

$$\int\limits_{|\xi - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z_0} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi})}{\varepsilon e^{i\varphi}} \varepsilon i e^{i\varphi}\,d\varphi = i\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi})\,d\varphi\,.$$

Хотелось бы теперь воспользоваться теоремой о среднем и перейти к пределу под знаком интеграла при $\varepsilon \to 0$. Но мы ранее приводили пример, показывающий, что теорема о среднем для интеграла от функций комплексного переменного, вообще говоря, неверна. Поэтому мы перейдем от функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ к действительным функциям $u(x, y)$, $v(x, y)$ и теорему о среднем применим к ним. Имеем

$$i\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi})\,d\varphi = i\left[\int\limits_0^{2\pi} u(x_0 + \varepsilon\cos\varphi, y_0 + \varepsilon\sin\varphi)\,d\varphi \right.$$

$$\left. + i\int\limits_0^{2\pi} v(x_0 + \varepsilon\cos\varphi, y_0 + \varepsilon\sin\varphi)\,d\varphi\right].$$

Воспользуемся теоремой о среднем для каждого интеграла. Получим

$$i\int\limits_0^{2\pi} f(z_0+\varepsilon e^{i\varphi})\,d\varphi = 2\pi i[u(x_0+\varepsilon\cos\varphi_1, y_0+\varepsilon\sin\varphi_1)$$

$$+\,iv(x_0+\varepsilon\cos\varphi_2, y_0+\varepsilon\sin\varphi_2)],\qquad \varphi_1,\ \varphi_2\in[0,2\pi]$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$. Интеграл $\int\limits_\Gamma \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z_0}$ не зависит от ε, и окончательно будем иметь

$$\int\limits_\Gamma \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z_0} = i\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0+\varepsilon e^{i\varphi})\,d\varphi = 2\pi i\, f(z_0)$$

или

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z_0}.$$

Формула доказана.

В частности, если D – ограниченная, конечно-связная область, граница которой ∂D состоит из конечного числа контуров, и функция $f(z)\in A(D)\bigcap C(\overline{D})$, то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z},\qquad z\in D,$$

(обход по границе ∂D положительный). Доказательство следует из обобщенной теоремы Коши для конечно-связной области и аналогично доказательству, которое мы провели выше.

Задача 9. Пусть функция $f(z)\in C\{z : |z-z_0|\leqslant r\}$, $r>0$. Доказать, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0+\varepsilon e^{i\varphi})\,d\varphi = 2\pi i\, f(z_0)$.

Итак, пусть функция $f(z) \in A(\overline{D})$, D – односвязная, ограниченная область, граница которой ∂D – контур; тогда интеграл Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z_0} = \begin{cases} f(z_0), & z_0 \in D, \\ 0, & z_0 \notin \overline{D} \end{cases} .$$

Интеграл типа Коши

Пусть Γ – жорданова, кусочно-гладкая кривая, не обязательно замкнутая, и функция $f(z) \in C(\Gamma)$. Интеграл вида

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z}, \quad z \notin \Gamma$$

называется *интегралом типа Коши.*

Теорема. *Интеграл типа Коши – $F(z)$ – есть аналитическая функция, т. е. $F(z) \in A(\mathbb{C}\backslash\Gamma)$. При этом функция $F(z)$ имеет производную любого порядка, равную*

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Мы проведем доказательство методом математической индукции. Второй способ доказательства – рассматривать интеграл типа Коши как криволинейный интеграл, зависящий от параметра, но при этом нужно знать свойства интеграла, зависящего от параметра, когда подинтегральная функция – функция комплексного переменного. В курсе действительного анализа рассматривались собственные и несобственные интегралы по отрезку или лучу, включая всю прямую.

Доказательство. Докажем утверждение теоремы при $n = 1$. Пусть точка $z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$; тогда существует $\delta > 0$ такое, что $\overline{U_\delta(z)} \bigcap \Gamma = \varnothing$. Обозначим за $\rho = \rho(\Gamma, \overline{U_\delta(z)}) > 0$ и будем рассматривать приращение $\Delta z : |\Delta z| < \delta$. Распишем разность

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma f(\xi)\left[\left(\frac{1}{\xi - (z+\Delta z)} - \frac{1}{\xi - z}\right)\frac{1}{\Delta z} - \frac{1}{(\xi - z)^2}\right] d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma f(\xi)\left[\frac{1}{(\xi - z)(\xi - (z+\Delta z))} - \frac{1}{(\xi - z)^2}\right] d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\xi)\Delta z}{(\xi - z)^2(\xi - (z+\Delta z))}\, d\xi.$$

Отсюда следует, что

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)^2}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{Ml}{\rho^3}|\Delta z|,$$

где $M = \max\limits_{z\in\Gamma}|f(z)|$, $|\xi - z| \geqslant \rho$, $|\xi - (z+\Delta z)| \geqslant \rho$, l – длина кривой Γ. Переходя к пределу при $\Delta z \to 0$, получим

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)^2}.$$

Теперь предположим, что при $k = n$ равенство справедливо:

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}.$$

Докажем, что при $k = n + 1$ равенство также будет выполненным:

$$F^{(n+1)}(z) = \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)^{n+2}}.$$

Рассмотрим разность

$$\frac{F^{(n)}(z+\Delta z)-F^{(n)}(z)}{\Delta z}-\frac{(n+1)!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z)^{n+2}}$$

$$=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\Delta z}\left(\frac{1}{[\xi-(z+\Delta z)]^{n+1}}-\frac{1}{(\xi-z)^{n+1}}\right)d\xi$$

$$-\frac{(n+1)!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z)^{n+2}}$$

$$=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}f(\xi)\left[\frac{(\xi-z)^{n+1}-[\xi-(z+\Delta z)]^{n+1}}{(\xi-z)^{n+1}\Delta z[\xi-(z+\Delta z)]^{n+1}}-\frac{n+1}{(\xi-z)^{n+2}}\right]d\xi$$

$$=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}f(\xi)\frac{(\xi-z)\left[(\xi-z)^{n+1}-[(\xi-z)-\Delta z]^{n+1}\right]}{(\xi-z)^{n+2}\Delta z[\xi-(z+\Delta z)]^{n+1}}\,d\xi$$

$$-\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}f(\xi)\frac{(n+1)\Delta z\left[(\xi-z)-\Delta z\right]^{n+1}}{(\xi-z)^{n+2}\Delta z[\xi-(z+\Delta z)]^{n+1}}\,d\xi$$

$$=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)A(z,\xi,\Delta z)}{(\xi-z)^{n+2}\Delta z[\xi-(z+\Delta z)]^{n+1}}\,d\xi\,,$$

где

$$\begin{aligned}A(z,\xi,\Delta z)=(\xi-z)&\left[(\xi-z)^{n+1}-[(\xi-z)-\Delta z]^{n+1}\right]\\&-(n+1)\Delta z\left[(\xi-z)-\Delta z\right]^{n+1}.\end{aligned}$$

Преобразуем $A(z,\xi,\Delta z)$:

$$\begin{aligned}A(z,\xi,\Delta z)=(\xi-z)&\big((\xi-z)^{n+1}-(\xi-z)^{n+1}+(n+1)\Delta z(\xi-z)^{n}\\&-C_{n+1}^{2}(\Delta z)^2(\xi-z)^{n-1}-\ldots+\\+(-1)^n(\Delta z)^{n+1}\big)&-(n+1)\Delta z(\xi-z)^{n+1}+(n+1)(\Delta z)^2C_{n+1}^{1}(\xi-z)\\&-\ldots+(-1)^n(n+1)(\Delta z)^{n+2}=(\Delta z)^2\cdot B(z,\xi,\Delta z)\,,\end{aligned}$$

где $B(z,\xi,\Delta z)$ – многочлен фиксированной степени по z, ξ, Δz. При $|\Delta z|\leqslant\delta$ модуль $B(z,\xi,\Delta z)$ на кривой Γ ограничен:

$\max\limits_{|\Delta z| \leqslant \delta} |B(z, \xi, \Delta z)| \leqslant M_1$. Поэтому

$$\left| \frac{F^{(n)}(z+\Delta z) - F^{(n)}(z)}{\Delta z} - \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^{n+2}} \right| \leqslant \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M M_1 l}{\rho^{2n+3}} \cdot |\Delta z|.$$

Тем самым

$$F^{(n+1)}(z) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^{n+2}}\,.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим функцию $f(z) \in A(D)$. Пусть точка $z_0 \in D$; тогда существует $\overline{U_\delta(z_0)} \subset D$, $\delta > 0$. По интегральной формуле Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z_0 - \xi| = \delta} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z}\,, \qquad z \in U_\delta(z_0).$$

Так как интеграл Коши есть частный случай интеграла типа Коши, то по только что доказанной теореме получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z_0 - \xi| = \delta} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z} = f(z) \in A(U_\delta(z_0))\,,$$

при этом

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{|z_0 - \xi| = \delta} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}\,.$$

Так как точка $z_0 \in D$ – произвольная точка области, то отсюда следует, что *аналитическая функция $f(z)$ в области D есть бесконечно-диффиринцируемая функция в этой области.*

$\boxed{\text{Задача 10.}}$ Пусть Γ – кусочно-гладкая жорданова кривая, функция $f(z) \in C(\Gamma)$, точка $z_0 \in \Gamma$. Обозначим

$$\Gamma_\varepsilon = \Gamma \backslash \{z : |z - z_0| < \varepsilon\},\ \varepsilon > 0, F_\varepsilon(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z_0}.$$

По определению интегралом типа Коши в смысле главного значения называется $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(z_0)$. Обозначают этот предел, если он существует, так же, как и интеграл Коши: $F(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z_0}$. Доказать, что если функция $f(z)$ принадлежит классу Гёльдера порядка α, где $0 < \alpha \leqslant 1$, на кривой Γ, то существует интеграл типа Коши в смысле главного значения в любой точке кривой Γ.

$\boxed{\text{Задача 11.}}$ Пусть функция $f(z) \in A(D)$, D – односвязная область, контур $\Gamma \subset D$, $int\,\Gamma \subset D$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z} = \begin{cases} f(z),\ z \in int\,\Gamma, \\ 0,\ z \in \mathbb{C} \backslash \overline{D_\Gamma}, \\ \frac{1}{2} f(z),\ z \in \Gamma. \end{cases}$$

Понятие первообразной функции

Пусть D – односвязная область и функция $f(z) \in A(D)$ (рис. 11). Зафиксируем точку $z_0 \in D$ и рассмотрим интеграл по жордановой кусочно-гладкой кривой с началом в точке z_0 и концом в точке z. Функция $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi$ определена корректно, так как ее значения не зависят от пути интегрирования, а зависят от начала и конца пути, поэтому мы не указываем саму кривую в интеграле, а только точки z_0 и z.

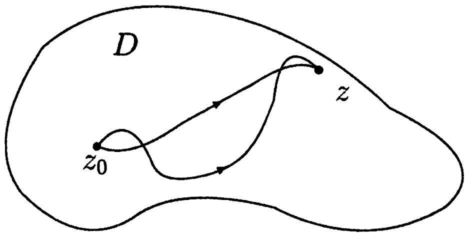

Рис. 11

Докажем, что функция $F(z) \in A(D)$ и что ее производная $F'(z) = f(z)$. Рассмотрим разность

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{\int\limits_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi)\,d\xi - \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi}{\Delta z} - f(z)$$

$$= \frac{\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)\,d\xi - \Delta z f(z)}{\Delta z} = \int\limits_{z}^{z+\Delta z} \frac{f(\xi) - f(z)}{\Delta z}\,d\xi\,.$$

Поэтому

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| \leqslant \frac{\int\limits_{z}^{z+\Delta z} |f(\xi) - f(z)|\,|d\xi|}{|\Delta z|}$$

$$\leqslant \max_{\xi\in[z,z+\Delta z]} |f(\xi) - f(z)|\,.$$

В силу аналитичности $f(z)$ при $\Delta z \to 0$ имеет место $\max\limits_{\xi\in[z,z+\Delta z]} |f(\xi) - f(z)| \to 0$. Итак, $F'(z) = f(z)$. Следовательно, $F(z) \in A(D)$.

Определение. Функция $\Phi(z)$ называется *первообразной функцией* для $f(z)$, если $\Phi(z)$ – аналитическая функция в области D и $\Phi'(z) = f(z)$.

Пусть $\Phi(z)$ – первообразная функция для функции $f(z)$. По доказанному, функция $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$ тоже первообразная. Покажем, что $F(z) - \Phi(z)$ есть константа.

Функцию $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$ в дальнейшем будем называть *неопределенным интегралом.* Итак, пусть $F(z) - \Phi(z) = \varphi(z) \in A(D)$, тогда $\varphi'(z) = F'(z) - \Phi'(z) = 0$. Покажем, что тогда $\varphi(z)$ есть константа. Если $\varphi(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то из условий Коши-Римана следует $u'_x = u'_y = v'_y = v'_x = 0$, т.е. $u(x,y) \equiv c_1$, $v(x,y) \equiv c_2$, $\varphi(z) = c_1 + ic_2 \equiv c$ – константа. Поэтому $\Phi(z) = F(z) + c = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi + c$, $\Phi(z_0) = c$ или $\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi = \Phi(z) - \Phi(z_0)$. Эта формула есть формула Ньютона-Лейбница, известная ранее для действительного случая.

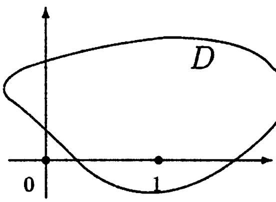

Рис. 12

Пусть D – односвязная область, $0 \notin D$, $1 \in D$ (рис. 12). Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{1}{z} \in A(D)$. Тогда неопределенный интеграл $\displaystyle\int\limits_{1}^{z} \frac{d\xi}{\xi}$ есть первообразная для $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Назовем этот интеграл малым логарифмом z или главным значением логарифма: $\ln z = \int\limits_1^z \frac{d\xi}{\xi}$, тогда $(\ln z)' = \frac{1}{z}$. Заметим, что при $z = x > 0$ интеграл $\int\limits_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$.

$\boxed{\text{Задача 12.}}$ Показать, что $\ln z = \ln|z| + i\arg z$, $-\pi < \arg z \leqslant \pi$.

Пусть D – односвязная область, $0 \in D$; $i, -i \notin D$.

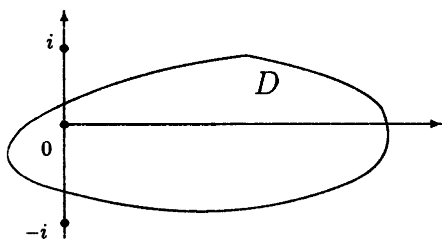

Рис. 13

Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{1}{1+z^2} \in A(D)$ (рис. 13). Тогда неопределенный интеграл $\int\limits_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^2}$ есть первообразная для $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Назовем этот интеграл $\int\limits_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^2}$ малым арктангенсом z, $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^2}$, $(\operatorname{arctg} z)' = \frac{1}{1+z^2}$. Заметим, что $\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x$ при $z = x$.

$\boxed{\text{Задача 13.}}$ Показать, что $\operatorname{arctg} z = \dfrac{1}{2i}\ln\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)$.

Ранее мы доказали интегральную теорему Коши для аналитической функции $f(z)$ в односвязной области D. Можно поставить задачу, в каком-то смысле обратную данной. Если в односвязной области задана функция $f(z)$, для которой интеграл $\int\limits_{\Gamma} f(\xi)\,d\xi = 0$ по любому контуру $\Gamma \subset D$, то можно ли утверждать, что $f(z) \in A(D)$? Ответ положительный, если потребовать, что $f(z) \in C(D)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема Морера. *Пусть D – односвязная область и $f(z) \in C(D)$. Если для любого контура $\Gamma \subset D$*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0,$$

то $f(z) \in A(D)$.

Доказательство. Введем функцию

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi,$$

z_0 – фиксированная точка, $z_0 \in D$, $z \in D$. В силу условия теоремы определение функции $F(z)$ корректно, так как значение функции $F(z)$ не зависит от выбора кривой, а зависит только от начальной и конечной точек.

Рассмотрим разность

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{\int\limits_{z}^{z+\Delta z} (f(\xi) - f(z))\,d\xi}{\Delta z}.$$

Тогда

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| \leqslant \max_{[z,z+\Delta z]} |f(\xi)-f(z)|\,.$$

Тем самым производная $F'(z) = f(z)$. Так как $f(z) \in C(D)$, то $F'(z) \in C(D)$ и, таким образом, $F(z)$ – аналитическая функция в области D. Но аналитическая функция имеет бесконечно много производных, отсюда следует, что $f(z) \in A(D)$. Теорема доказана.

5 лекция

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ПРИНЦИП МАКСИМУМА МОДУЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим функцию $f(z) \in A(D)$. По доказанному ранее следует, что $f(z)$ – бесконечно дифференцируемая функция. Если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ также являются бесконечно дифференцируемыми функциями. Из условий Коши-Римана вытекает, что

$$u''_{xx} = v''_{xy} = v''_{yx} = -u''_{yy},$$

т. е. $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$. Аналогично $v''_{xx} + v''_{yy} = 0$. Введем в рассмотрение оператор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

который называется *оператором Лапласа.*

Определение. Функция $u(x, y)$, дважды непрерывно дифференцируемая в области D (обозначение – $u(x, y) \in C^2(D)$) и удовлетворяющая условию $\Delta u = 0$, называется *гармонической.*

Мы показали, что если $f(z) \in A(D)$, то $\operatorname{Re} f(z)$ и $\operatorname{Im} f(z)$ есть гармонические функции в области D.

Предположим, что в области D задана гармоническая функция $u(x, y)$. Возникает вопрос – можно ли по данной гармонической функции построить аналитическую функцию

$f(z)$ такую, что $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$. Покажем, что если область D – односвязная, то вопрос решается положительно.

Пусть D – односвязная область и $u(x, y)$ – гармоническая функция в D. Введем функцию

$$v(x, y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u'_y\,dx + u'_x\,dy\,,$$

где точки (x_0, y_0), $(x, y) \in D$. Определение функции $v(x, y)$ корректно, так как интеграл, стоящий справа, не зависит от выбора пути интегрирования. Если Г – контур (замкнутая, кусочно-гладкая жорданова кривая), то

$$\int\limits_{\Gamma} -u'_y\,dx + u'_x\,dy = \iint\limits_{D_\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x}(u'_x) - \frac{\partial}{\partial y}(-u'_y)\right] dxdy = 0$$

(использовали условие $\Delta u = 0$).

Дифференциал функции $v(x, y)$ есть $dv = -u'_y\,dx + u'_x\,dy$. Поэтому $v'_x = -u'_y$, $v'_y = u'_x$ и $\Delta v = 0$, т.е. $v(x, y)$ – гармоническая функция в области D, функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ связаны условиями Коши-Римана и функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в D.

Функция $v(x, y)$ определяется по функции $u(x, y)$ с точностью до константы.

Пусть функция $u(x, y)$ гармонична в D и точка $z_0 \in D$; тогда существует окрестность $U_\varepsilon(z_0) \subset D$, $\varepsilon > 0$. Так как $U_\varepsilon(z_0)$ – односвязная область, то существует функция $f(z) \in A(U_\varepsilon(z_0))$ такая, что $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$ по доказанному ранее. Но $\operatorname{Re} f(z)$ есть функция бесконечно-дифференцируемая, поэтому $u(x, y)$ бесконечно-дифференцируема в $U_\varepsilon(z_0)$. Так как z_0 – произвольная точка области D, то отсюда следует, что гармоническая функция $u(x, y)$ – бесконечно-дифференцируема, обозначение $u(x, y) \in C^\infty(D)$.

Рассмотрим функцию $f(z) \in A(D)$ и круг $\{z : |z - z_0| \leqslant r\} \subset D$, $z_0 \in D$, $r > 0$. По формуле Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}.$$

Сделаем замену переменного:

$$z = z_0 + re^{i\varphi},\ \varphi \in [0, 2\pi], dz = rie^{i\varphi}\,d\varphi.$$

Имеем

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}} rie^{i\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})\,d\varphi.$$

Формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})\,d\varphi$$

носит название формулы *среднего значения*.

Если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то отделяя действительную и мнимую части в формуле, будем иметь

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)\,d\varphi,$$

т. е. формула среднего значения справедлива и для гармонических функций.

Формула среднего значения для аналитической функции, также как и формула среднего значения для гармонической функции, используется для доказательства принципа максимума модуля аналитической функции или для доказательства принципа максимума гармонической функции.

Принцип максимума модуля аналитической функции

Теорема. *Пусть* $f(z) \in A(D)$, $M = \sup\limits_{z \in D} |f(z)|$, $f(z) \not\equiv const$; *тогда для любой точки* $z \in D$ *следует* $|f(z)| < M$.

Эта теорема и носит название *принципа максимума модуля аналитической функции.*

Доказательство. Если $M = 0$, то $f(z) \equiv 0$; если $M = +\infty$, то неравенство $|f(z)| < M$ справедливо всегда. Поэтому будем считать, что $0 < M < +\infty$. Доказательство проведем от противного: пусть существует точка $z_0 \in D$ такая, что $|f(z_0)| = M$. Покажем, что на любой окружности $\{z : |z - z_0| = r\} \subset D, r > 0$ модуль функции $|f(z)| = M$. Предположим, что это не так, т.е. что на окружности $|z - z_0| = r$ существует точка $z = z_0 + re^{i\varphi_1}$, в которой $|f(z_0 + re^{i\varphi_1})| < M$. Так как $|f(z_0 + re^{i\varphi})|$ функция непрерывная, то существует или правая, или левая, или полная δ-окрестность, $\delta > 0$, точки φ_1 такая, что для всех φ из этой окрестности неравенство $|f(z_0 + re^{i\varphi})| < M$ сохраняется. Предположим, что для $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1 + \delta$ это так. По формуле среднего значения для аналитической функции можем написать

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})\, d\varphi,$$

тогда

$$|f(z_0)| = M \leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_0^{\varphi_1} |f(z_0 + re^{i\varphi})|\,d\varphi + \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_1+\delta} |f(z_0 + re^{i\varphi})|\,d\varphi + \int\limits_{\varphi_1+\delta}^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|\,d\varphi\right)$$

или

$$|f(z_0)| < \frac{1}{2\pi}\left[M\varphi_1 + \delta M + M(2\pi - \varphi_1 - \delta)\right] = M.$$

Пришли к противоречию, предположив, что на некоторой окружности $\{|z - z_0| = r\} \subset D$ существует точка $z = z_0 + re^{i\varphi_1}$, в которой $|f(z_0 + re^{i\varphi_1})| < M$. Следовательно, на любой окружности $\{|z - z_0| = r\} \subset D$ справедливо равенство $|f(z)| = M$; тем самым в максимальном круге, который можно вписать в область D, с центром в точке z_0, равенство $|f(z)| = M$ сохраняется.

Теперь докажем, что для любой точки $z \in D$ $|f(z)| = M$. Так как область D – открытое и связное множество, то существует непрерывная кривая $\Gamma \subset D$, соединяющая точки z_0 и z. Непрерывная кривая Γ – компакт. Пусть $\delta = \rho(\Gamma, \partial D) = \inf\limits_{\substack{z_1 \in \Gamma_1 \\ z_2 \in \Gamma_2}} \rho(z_1, z_2) > 0$. Если $\delta = +\infty$, то в качестве δ можно взять любое положительное число. По лемме Гейне-Бореля из любого открытого покрытия компакта можно выбрать конечное подпокрытие. Устроим открытое покрытие таким образом: каждую точку кривой Γ покроем открытым кругом радиуса $\delta/3$ с центром в этой точке. Из этого открытого покрытия по лемме Гейне-Бореля выберем конечное число кругов, образующих также покрытие кривой Γ. Пусть центры этих кругов суть

$z_1, z_2, \ldots, z_n$, нумерация точек в направлении от точки z_0 к точке z, при этом $\{z : |z - z_i| \leqslant \delta/3\} \cap \{z : |z - z_{i+1} \leqslant \delta/3|\} \neq \varnothing$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Рассмотрим круг радиуса δ с центром в точке z_0. Точка z_1 лежит в этом круге и по доказанному ранее в этом круге $|f(z)| = M$, следовательно, $|f(z_1)| = M$. Далее рассмотрим круг радиуса δ с центром в точке z_1. В этом круге лежит точка z_2 и в этом круге $|f(z)| = M$. Следовательно, $|f(z_2)| = M$. Процесс рассмотрения кругов будем повторять и через конечное число шагов придем к кругу с центром в точке z_n и радиусом δ. В этом круге модуль функции равен M, но точка z лежит в этом круге, следовательно, $|f(z)| = M$. Итак, для любой точки $z \in D$ $|f(z)| = M$. Покажем, что отсюда следует равенство $f(z) \equiv const$. Так как $|f(z)| \equiv M$, то $|f(z)|^2 = u^2(x,y) + v^2(x,y) \equiv M^2$. Имеем

$$\begin{cases} u \cdot u'_x + v \cdot v'_x = 0 \\ u \cdot u'_y - v \cdot v'_y = 0 \end{cases},$$

в силу условий Коши-Римана систему уравнений перепишем в виде

$$\begin{cases} u \cdot u'_x - v \cdot u'_y = 0 \\ v \cdot u'_x + u \cdot u'_y = 0 \end{cases}.$$

Так как $u^2 + v^2 = M^2 > 0$, то решение однородной системы есть $u'_x = u'_y = 0$, т. е. $u(x,y) \equiv const$. Аналогично, $v(x,y) \equiv const$ и $f(z) \equiv const$, что противоречит условию теоремы. Тем самым теорема доказана.

По ходу доказательства мы решили следующую задачу.

Задача 14. Пусть функция $f(z) \in A(D)$ и $|f(z)| \equiv const$ в области D. Доказать, что $f(z)$ есть константа.

Следствие 1. Пусть область D – ограниченная область и $f(z) \in A(D) \cap C(\overline{D})$. Тогда $|f(z)|$ достигает максимума на границе области.

Следствие 2. Пусть область D – ограниченная область, функции $f_1(z) \in A(D) \cap C(\overline{D})$, $f_2(z) \in A(D) \cap C(\overline{D})$ и на границе области $f_1(z) = f_2(z)$. Тогда $f_1(z) \equiv f_2(z)$, $z \in \overline{D}$.

Следствие 3. Пусть D – ограниченная область; $f(z) \in A(D) \cap C(\overline{D})$, $f(z) \neq 0, \forall z \in (\overline{D})$. Тогда минимум $|f(z)|$ достигается на границе области D.

Задача 15. Верно ли следствие 2, если условие ограниченности области D снять?

Принцип максимума гармонической функции

Теорема. *Пусть функция $u(x,y)$ гармонична в области D, $u(x,y) \not\equiv const$ и пусть $M = \sup\limits_D u(x,y)$, $m = \inf\limits_D u(x,y)$. Тогда для любой точки $(x,y) \in D$ справедливы неравенства*

$$m < u(x,y) < M.$$

Эта теорема носит название *принцип максимума гармонической функции.*

Так как для гармонической функции справедлива формула среднего значения

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)\,d\varphi\,,$$

то, повторяя дословно доказательство теоремы о принципе максимума модуля для аналитической функции, где используется аналогичная формула среднего значения, получим доказательство данной теоремы.

Следствие 1. Пусть D – ограниченная область, а функция $u(x,y) \in C(\overline{D})$ и гармонична в D. Тогда максимум и минимум функции $u(x,y)$ достигается на границе области D.

Следствие 2. Пусть D – ограниченная область, функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ гармоничны в области D, при этом $u_1(x,y) \in C(\overline{D})$, $u_2(x,y) \in C(\overline{D})$, $u_1(x,y) = u_2(x,y)$, $(x,y) \in \partial D$. Тогда $u_1(x,y) \equiv u_2(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}$.

Задача 16. Верно ли следствие 2, если условие ограниченности области D снять?

Сформулируем задачу Дирихле для оператора Лапласа.

Задача Дирихле. *Дана область D и на границе области задана непрерывная функция $\varphi(x,y)$. Построить гармоническую функцию $u(x,y)$ в области D, непрерывную в $\overline{D}$ и такую, что $u(x,y) = \varphi(x,y)$ на границе.*

Задача Дирихле разрешима не для любой области. Позже для областей специального вида мы в явном виде получим решение. Сейчас же мы можем сказать, что если решение существует и область ограничена, то решение задачи Дирихле единственно. Это следует из следствия 2.

Итак, если функция $f(z) \in A(D)$ и отлична от константы, то ни в одной внутренней точке области ее модуль не может принимать максимального значения. Если же функция $f(z) \in A(\mathbb{C})$, т. е. есть целая функция, то, зная оценку модуля функции сверху, можно говорить о ее виде, иначе говоря справедлива

Теорема Лиувилля. *Пусть $f(z) \in A(\mathbb{C})$ и существуют $\alpha > 0, M > 0$ такие, что $\forall z \in \mathbb{C} \to |f(z)| \leqslant M|z|^{\alpha}$. Тогда $f(z)$ – многочлен, степень которого не превышает $[\alpha]$ – целой части числа α.*

Доказательство. Представим α в виде $\alpha = m + r, 0 \leqslant r < 1$, $[\alpha] = m$. Возьмем точку z_0 и $R > 0$; тогда по интегральной формуле Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = R} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z_0},$$

$$f^{([\alpha]+1)}(z_0) = \frac{([\alpha]+1)!}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = R} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{[\alpha]+2}}.$$

Оценим $f^{([\alpha]+1)}(z_0)$:

$$\left|f^{([\alpha]+1)}(z_0)\right| \leqslant \frac{([\alpha]+1)!}{2\pi} \cdot \frac{2\pi R(R+|z_0|)^\alpha}{R^{[\alpha]+2}} = \frac{([\alpha]+1)!\left(1+\dfrac{|z_0|}{R}\right)^\alpha}{R^{[\alpha]+1-\alpha}}.$$

Так как $f(z)$ – целая, то при $R \to +\infty$ получим $f^{([\alpha]+1)}(z_0) = 0$. Так как z_0 – произвольная точка комплексной плоскости, то $f^{([\alpha]+1)}(z_0) \equiv 0$, т. е. функция $f(z)$ есть многочлен, степень которого не превосходит $[\alpha]$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $f(z) \in A(\mathbb{C})$ и существует $M > 0 : \forall z \in \mathbb{C} \to |f(z)| \leqslant M$. Тогда $f(z) \equiv const$.

Задача 17. Доказать лемму Шварца: Пусть $f(z) \in A(|z| < 1) \cap C(|z| \leqslant 1)$, $f(0) = 0$. Если $|f(z)| \leqslant 1$, для $|z| \leqslant 1$, то $|f(z)| \leqslant |z|$, $|z| \leqslant 1$. Причем, если существует $z_0 : |z_0| < 1$, $|f(z_0)| = |z_0|$, то

$$f(z) = e^{i\alpha} z\,,$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, α – фиксированное число.

Задача 18. Пусть действительная функция $u(x, y)$ гармонична на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и ограничена сверху (ограничена снизу), т. е. существует $M : \forall z \in \mathbb{C}\ u(z) = u(x, y) < M\ (> M)$. Доказать, что тогда $u(x, y) \equiv const$.

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

6

лекция

Пусть $\{z_n\}$ – последовательность комплексных чисел. Выражение $z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$ называется рядом из комплексных чисел и обозначается как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$. Введем частичную сумму ряда $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i$. Ряд называется *сходящимся* и имеет сумму, равную числу S, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Обозначим $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$. Тем самым по определению $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, если

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon),\ \forall n \geqslant N(\varepsilon) :\ |S - \sum_{k=1}^{n} z_k| < \varepsilon.$$

Так как $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k + i\sum\limits_{k=1}^{n} y_k$, при $z_n = x_n + iy_n$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$. Таким образом, для рядов из комплексных чисел справедлив критерий Коши, аналогичный критерию Коши для рядов из действительных чисел.

Критерий Коши. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *сходится тогда и только тогда,* *когда*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon),\ \forall n \geqslant N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}:$$
$$|S_{n+p} - S_n| = |z_{n+1} + \ldots + z_{n+p}| < \varepsilon\,.$$

Необходимое условие сходимости ряда: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$. Из абсолютной сходимости следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$. Так как $|z_n| \geqslant 0$, то все признаки абсолютной сходимости ряда с комплексными числами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ справедливы как признаки сходимости рядов с неотрицательными членами. Смотри, например, [4].

Пусть множество $E \subset \mathbb{C}$ и на E задана последовательность функций $\{f_n(z)\}$, $z \in E$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ называется *функциональным рядом*. Сходимость функционального ряда на множестве E может быть поточечной и равномерной. Поточечная сходимость – сходимость в каждой точке множества E как сходимость числового ряда.

Определение. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *сходится равномерно на множестве* E к функции $f(z)$, если

$$\forall\varepsilon > 0,\ \ \exists N(\varepsilon) > 0,\ \ \forall n \geqslant N(\varepsilon),\ \ \forall z \in E: \left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z) \right| < \varepsilon.$$

Критерий Коши равномерной сходимости. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *сходится на множестве E равномерно тогда и только тогда,* *когда*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N(\varepsilon),\ \forall n\geqslant N(\varepsilon),\ \forall p\in\mathbb{N},\ \ \forall z\in E:$$

$$|f_{n+1}(z)+\ldots+f_{n+p}(z)|<\varepsilon\,.$$

Пусть $f_n(z)=u_n(x,y)+iv_n(x,y)$.

Теорема. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ *сходится равномерно на* E *тогда и только тогда, когда равномерно на* E *сходятся два ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n(x,y)$.

Доказательство следует из справедливости неравенств:

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}f_i(z)\right|\leqslant\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}u_i(x,y)\right|+\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}v_i(x,y)\right|;$$

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}u_i(x,y)\right|\leqslant\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}f_i(z)\right|,\qquad\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}v_i(x,y)\right|\leqslant\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}f_i(z)\right|.$$

Отметим некоторые свойства равномерно сходящихся рядов, которые нам понадобятся в дальнейшем.

1. Пусть для любого $n\in\mathbb{N}$ $\ f_n(z)\in C(E)$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ сходится равномерно на E к функции $f(z)$. Тогда $f(z)\in C(E)$.

2. Пусть для любого $n\in\mathbb{N}$ существует интеграл $\int\limits_{\Gamma}f_n(z)\,dz$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ сходится равномерно на кривой Γ к функции $f(z)$. Тогда существует интеграл $\int\limits_{\Gamma}f(z)\,dz$, при этом

$$\int\limits_{\Gamma}f(z)\,dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\Gamma}f_n(z)\,dz.$$

Доказательство этих свойств следует из предыдущей теоремы и аналогичных свойств действительных рядов. Смотри, например, [4].

Определение. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *сходится равномерно внутри области* D, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно на любом компакте $K \subset D$.

Заметим, что условие равномерной сходимости внутри – более слабое условие, чем условие равномерной сходимости.

Первая теорема Вейерштрасса. *Пусть* $f_n(z) \in A(D)$ *для любого* $n \in N$ *и для любого компакта* $K \subset D$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *сходится равномерно к* $f(z)$ *на* K. *Тогда*

1) $f(z) \in A(D)$;

2) $f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$, $z \in D$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ *сходится равномерно внутри области* D.

Доказательство. Для любого $z_0 \in D$ существует замкнутая окрестность $\overline{U}_\delta(z_0) = \{z : |z - z_0| \leqslant \delta\} \subset D$, $\delta > 0$. По интегральной формуле Коши

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \delta} \frac{f_n(\xi)\, d\xi}{\xi - z}, \quad z \in U_\delta(z_0).$$

Так как множество $|\xi - z_0| = \delta$ – компакт и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(\xi)$ сходится равномерно на $|\xi - z_0| = \delta$, то

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \delta} \frac{f_n(\xi)\, d\xi}{\xi - z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \delta} \frac{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(\xi)\right) d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \delta} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z}.$$

Из равномерной сходимости ряда на $|\xi - z_0| = \delta$ следует, что $f(\xi) \in C(|\xi - z_0| = \delta)$; тогда интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \delta} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z}$ есть интеграл типа Коши, который является аналитической функцией внутри $U_\delta(z_0)$, т. е. функция $f(z) \in A(U_\delta(z_0))$. Так как точка z_0 – произвольная, $z_0 \in D$, то $f(z) \in A(D)$.

Докажем справедливость второго утверждения. Для любого $k \in \mathbb{N}$

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \delta} \frac{f_n(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^{k+1}}, \qquad z \in U_\delta(z_0).$$

Из равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(\xi)$ на множестве $|\xi - z_0| = \delta$ следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \delta} \frac{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(\xi)\right) d\xi}{(\xi - z)^{k+1}}$$

$$= \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \delta} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^{k+1}} = f^{(k)}(z).$$

Осталось доказать равномерную сходимость внутри области D ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$. Напомним, что равномерная сходимость внутри области D есть равномерная сходимость на любом компакте $K \subset D$. Покажем, что это условие эквивалентно равномерной сходимости на любом круге, лежащем в области D. Действительно, если есть равномерная сходимость на любом компакте, то будет равномерная сходимость и на любом круге, лежащем в области D, так как круг – компакт. Обратно, пусть есть равномерная сходимость на любом круге, лежащем в области D. Возьмем компакт $K \subset D$ (рис. 14). В силу леммы Гейне-Бореля существует конечное число кругов, покрывающих компакт K, поэтому можно взять круги таким образом, что замкнутые круги целиком принадлежат области D. Так как число этих кругов конечно, то из равномерной сходимости ряда на этих кругах будет следовать его равномерная сходимость на самом компакте $K \subset D$. Итак, будем доказывать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ на любом круге $K \subset D$.

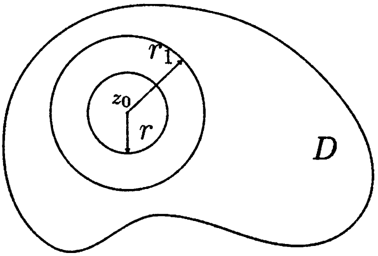

Рис. 14

Пусть $K = \{z : |z - z_0| \leqslant r\} \subset D$. Существует круг большего радиуса $(0 < r < r_1)$ – $\{|z - z_0| \leqslant r_1\} \subset D$. Пусть $z \in K$, т. е. $|z - z_0| \leqslant r$; имеем

$$f^{(k)}(z) - \sum_{i=1}^{n} f_i^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r_1} \frac{\left(f(\xi) - \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(\xi)\right) d\xi}{(\xi - z)^{k+1}}$$

или

$$\left| f^{(k)}(z) - \sum_{i=1}^{n} f_i^{(k)}(z) \right| \leqslant \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{2\pi \cdot r_1}{(r_1 - r)^{k+1}} \cdot \max_{|\xi - z_0| = r_1} \left| f(\xi) - \sum_{i=1}^{n} f_i(\xi) \right| .$$

В силу равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(\xi)$ на любом компакте следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i^{(k)}(z)$ к $f^{(k)}(z)$ на круге $K = \{z : |z - z_0| \leqslant r\}$. Так как круг – произвольный, лежащий в области D, то отсюда следует равномерная сходимость внутри области D ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i^{(k)}(z)$. Теорема Вейерштрасса доказана.

Вторая теорема Вейерштрасса. *Пусть D – ограниченная область, для любого $n \in \mathbb{N}$ $f_n(z) \in A(D) \cap C(\overline{D})$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно на границе ∂D области D. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно в $(\overline{D})$ к некоторой функции $f(z) \in A(D) \cap C(\overline{D})$.*

Доказательство. Из равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ на ∂D следует

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N(\varepsilon), \ \forall n \geqslant N(\varepsilon), \ \forall p \in \mathbb{N}, \ \forall z \in \partial D : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \varepsilon,$$

но $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \in A(D) \cap C(\overline{D})$, поэтому в силу принципа максимума модуля аналитической функции следует

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \varepsilon, \quad z \in \overline{D},$$

т. е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ сходится равномерно на $\overline{D}$ и, поэтому, $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z) \in C(\overline{D})$, а по первой теореме Вейерштрасса $f(z) \in A(D)$. Теорема доказана.

Все, что было сказано для функциональных рядов, можно перенести на функциональные последовательности. Если задана функциональная последовательность $\{f_n(z)\}$, то можно составить ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(f_{k+1}(z) - f_k(z))$, при этом частичные суммы $S_{n-1}(z) = f_n(z) - f_1(z)$. И, наоборот, по функциональному ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ можно рассмотреть последовательность частичных сумм $S_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$.

Рассмотрим частный случай функциональных рядов – *степенные ряды*. Ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ называется степенным рядом с центром разложения в точке z_0, где $\{a_n\}$ – фиксированная последовательность комплексных чисел.

Первая теорема Абеля. *Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ сходится в точке $z_1 \neq z_0$, то он сходится в точке $z : |z - z_0| < |z_1 - z_0|$, причем абсолютно.*

Доказательство. Имеем $|a_n(z-z_0)^n| = |a_n(z_1-z_0)^n|\cdot\left|\dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^n$.

Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$ сходится, то существует $M > 0$, такое, что $|a_n(z_1 - z_0)^n| \leqslant M$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда общий член ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ удовлетворяет неравенству

$$|a_n(z - z_0)^n| \leqslant M \cdot q^n, \quad \text{где } q = \left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right| < 1,$$

и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ сходится абсолютно.

Введем радиус сходимости степенного ряда $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$.
В курсе математического анализа доказывается теорема Коши-Адамара (см., например, [4]).

Теорема Коши-Адамара. *Если $R=0$ (т. е. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$), то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ сходится только в точке z_0. Если $R=\infty$ (т. е. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$), то ряд сходится абсолютно во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и равномерно внутри $\mathbb{C}$. Если $0<R<\infty$, то ряд сходится абсолютно внутри круга $|z-z_0|<R$, равномерно внутри круга; вне замкнутого круга ряд расходится.*

Пусть $0<R$. Так как общий член ряда $a_n(z-z_0)^n \in A(\mathbb{C})$, то по первой теореме Вейерштрасса $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ есть аналитическая функция внутри круга $|z-z_0|<R$, при этом

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)\dots(n-k+1)(z-z_0)^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)\dots(n-k+1)(z-z_0)^{n-k}.$$

Положим $z=z_0$, тогда

$$f^{(k)}(z_0) = k!a_k, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Тем самым, если $0<R$, то сумма степенного ряда имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k, \quad z \in \{z \,:\, |z-z_0|<R\}.$$

Фигурирующий здесь ряд носит название *ряда Тейлора* для функции $f(z)$.

Возьмем $0 < \rho < R$ и обозначим $M(\rho) = \max\limits_{|z-z_0|=\rho} |f(z)|$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Так как $f(z) \in A(|z-z_0| < R)$, то

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0|=\rho} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}$$

и

$$\left|f^{(k)}(z_0)\right| = \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{M(\rho)}{\rho^{k+1}} \cdot 2\pi\rho = \frac{M(\rho)}{\rho^k} \cdot k!$$

– неравенство Коши для производных функции $f(z)$, $k \in \mathbb{N}$.

Для коэффициентов степенного ряда имеем неравенства

$$|a_k| \leqslant \frac{M(\rho)}{\rho^k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

– неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда.

Теорема Тейлора. *Пусть функция $f(z) \in A(D)$ и точка $z_0 \in D$. Пусть $\rho = \rho(z_0, \partial D) > 0$ (ρ может равняться ∞). Тогда функцию $f(z)$ можно разложить в степенной ряд*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \;\; z \in \{z : \, |z - z_0| < \rho\},$$

который сходится равномерно внутри круга, при этом $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Из вида коэффициентов a_n следует, что разложение функции $f(z)$ в степенной ряд единственно.

Доказательство. Возьмем круг с центром в точке z_0 и радиусом ρ_1, $0 < \rho_1 < \rho$ (рис. 15). Круг $|z - z_0| \leqslant \rho_1$ целиком принадлежит D. Возьмем также круг с центром в точке z_0 и радиусом $\rho_2 : 0 < \rho_2 < \rho_1$.

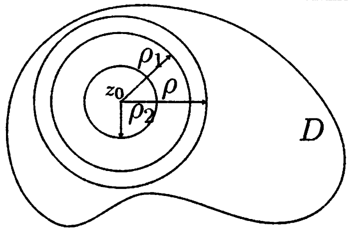

Рис. 15

Рассмотрим точки $z : |z - z_0| \leqslant \rho_2$; для таких z имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \rho_1} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z}.$$

Функцию $\dfrac{1}{\xi - z}$ (часто называемую *ядром интеграла*) разложим в ряд:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)}$$

$$= \frac{1}{(\xi - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n.$$

Так как $\left|\dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| \leqslant \dfrac{\rho_2}{\rho_1} < 1$, то рассматриваемый ряд сходится равномерно по $\xi : |\xi - z_0| = \rho_1$ при $z \in \{z : |z - z_0| \leqslant \rho_2\}$. Поэтому

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \rho_1} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \rho_1} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}\right) (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \rho_1} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Так как ρ_1 и ρ_2 были любые, $\rho_1 < \rho$, $\rho_2 < \rho$, то разложение в степенной ряд справедливо в круге $|z - z_0| < \rho$ – максимальный круг с центром в точке z_0, лежащий в области D. Ряд сходится равномерно внутри этого круга. Теорема доказана.

Рассмотрим функцию $f(z) \in A(\mathbb{C})$ (целая функция). По теореме Тейлора ее можно разложить на всей комплексной плоскости в ряд Тейлора с центром, например, в точке $z_0 = 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < \infty.$$

Для коэффициентов имеем оценку (*неравенство Коши*)

$$|a_k| \leqslant \frac{M(\rho)}{\rho^k}, \quad 0 < \rho < \infty.$$

Если $|f(z)| \leqslant const$, то при $\rho \to +\infty$ получим $a_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, т. е. $f(z) \equiv a_0$. Мы доказали следствие из теоремы Лиувилля, исходя из степенных рядов.

Выпишем для некоторых конкретных функций их разложение в ряды Тейлора:

1. $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty;$
2. $\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |z| < \infty;$
3. $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < \infty;$
4. $\operatorname{ch} z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < \infty;$
5. $\operatorname{sh} z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |z| < \infty.$

Задача 19. Привести пример функционального ряда, сходящегося равномерно внутри области D, но не сходящегося равномерно в области D.

$\boxed{\text{Задача 20.}}$ Доказать аналог теоремы Вейерштрасса для гармонических функций: если последовательность $\{u_n(z)\}$ гармонических функций в области D и непрерывных в $\overline{D}$ такова, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно на границе ∂D области D (область ограничена), то ряд сходится равномерно в $\overline{D}$ и его сумма есть гармоническая функция в D и непрерывная в $\overline{D}$.

$\boxed{\text{Задача 21.}}$ Доказать, что если последовательность $\{f_n(z)\}$ такова, что $f_n(z) \in A(D)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, D – область, и последовательность $\{\operatorname{Re} f_n(z)\}$ сходится равномерно внутри D, а последовательность $\{f_n(z_0)\}$ сходится в точке $z_0 \in D$, то последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится равномерно внутри области D.

$\boxed{\text{Задача 22.}}$ Пусть $\{u_n(z)\}$ – последовательность гармонических функций, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(z) = u(z)$, причем сходимость равномерна внутри области D. Показать, что тогда $u(z)$ – гармоническая функция в области D.

7
лекция

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. РАЗЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ

Пусть функция $f(z) \in A(U_\varepsilon(z_0))$, $\varepsilon > 0$.

Определение. Точка z_0 является *нулем кратности* k аналитической функции $f(z)$, если

$$f(z_0) = 0, \ f'(z_0) = 0, \ \dots, \ f^{(k-1)}(z_0) = 0, \ f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Если $k = 1$, то нуль z_0 называется *простым нулем* функции $f(z)$.

Из определения нуля кратности k следует, что в окрестности $U_\varepsilon(z_0)$ функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_k \neq 0, \ |z - z_0| < \varepsilon .$$

Тем самым $f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z)$, $\varphi \in A(U_\varepsilon(z_0))$, $\varphi(z_0) \neq 0$.

Теорема единственности. *Пусть даны функции $f(z), g(z) \in A(D)$, последовательность $\{z_n\} \in D, (\ z_i \neq z_j,\ i \neq j)$, такая, что существует предельная точка $z_0 \in D$. Тогда, если $f(z_k) = g(z_k)$ для любого $k \in N$, то $f(z) \equiv g(z)$, $z \in D$.*

Доказательство. Так как последовательность $\{z_n\}$ имеет предельную точку z_0, то существует подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$ последовательности $\{z_n\}$, сходящаяся к точке z_0. Будем эту подпоследовательность обозначать $\{z_n'\}$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n' = z_0$. Из того, что $z_0 \in D$, следует, что существует окрестность $U_\varepsilon(z_0) \subset D$, $\varepsilon > 0$. Разложим в этой окрестности функции $f(z)$ и $g(z)$ в степенные ряды:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < \varepsilon\,,$$

где $a_0 = f(z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n')$; $b_0 = g(z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} g(z_n')$. Из условия $f(z_n') = g(z_n')$ для любого $n \in \mathbb{N}$ вытекает, что $a_0 = b_0$. Представим функции $f(z)$ и $g(z)$ в виде $f(z) = a_0 + (z-z_0)f_1(z)$; $g(z) = b_0 + (z-z_0)g_1(z)$, где $f_1(z), g_1(z) \in A(U_\varepsilon(z_0))$, $f_1(z_n') = g_1(z_n')$. Повторяя предыдущее рассуждение, получим $f_1(z_0) = g_1(z_0)$ или $a_1 = b_1$. На $(n+1)$–м шаге, повторяя тот же процесс рассуждений, получим, что $a_n = b_n$, а тем самым $f(z) = g(z)$, $z \in U_\varepsilon(z_0)$.

Покажем, что $f(z) = g(z)$ для любой точки $z \in D$. Соединим точку z с точкой z_0 непрерывной кривой $\Gamma \subset D$. Кривая Γ – компакт. А теперь проведем доказательство, аналогичное доказательству принципа максимума модуля аналитической функции, а именно: устроим открытое покрытие компакта Γ кругами радиуса $\delta/3$, где $\delta = \rho(\Gamma, \partial D)$, с центрами на кривой Γ. По лемме Гейне-Бореля существует конечное число кругов из этого открытого покрытия, также покрывающих кривую Γ. Соседние круги пересекаются и, следуя из точки z_0 в точку z, последовательно будем получать равенство функций $f(z) = g(z)$ в этих кругах. Последний шаг приведет к кругу, в котором содержится данная точка z, следовательно $f(z) = g(z)$ для любой точки $z \in D$. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть функция $f(z) \in A(D)$, последовательность $\{z_n\} \in D$, $z_i \neq z_j$, $i \neq j$. Точка $z_0 \in D$ и z_0 – предельная точка $\{z_n\}$. Если $f(z_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, то $f(z) \equiv 0$, $z \in D$.

Следствие 2. Пусть функция $f(z) \in A(D)$, $f(z) \not\equiv 0$; тогда на любом компакте $K \subset D$ функция $f(z)$ имеет не более конечного числа нулей.

Следствие 3. Пусть функция $f(z) \in A(D)$. Тогда или $f(z) \equiv 0$, или в области D функция $f(z)$ имеет не более счетного числа нулей, которые могут накапливаться только к границе области.

Пример, подтверждающий, что предельная точка $z_0 \in D$ – по существу.

Пусть $D = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, функция $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right) \in A(D)$, $f(z_k) = 0$, $z_k = \dfrac{1}{\pi k}$, $k = 1, 2, \dots$. Точки $z_k \in D$, $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$. Предельная точка $z_0 = 0 \in \partial D$, $f(z_k) = 0$, но $f(z) \not\equiv 0$.

$\boxed{\text{Задача 23.}}$ Показать, что для любой области D существует последовательность компактов $\{K_n\}$ такая, что $K_n \subset K_{n+1}$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n = D$. Показать, что для любой области D существует последовательность ограниченных областей $\{D_n\}$ такая, что $\overline{D_n} \subset D_{n+1}$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n = D$.

$\boxed{\text{Задача 24.}}$ Привести пример функции $f(z) \in A(|z| < 1)$, $f(z) \not\equiv 0$, обращающейся на последовательности $\{z_n\}$ в нуль, $f(z_n) = 0$, $|z_n| < 1$ и множество предельных точек последовательности $\{z_n\}$ есть вся граница области – $|z| = 1$.

Теперь рассмотрим гармоническую функцию $u(x, y)$ в круге $|z - z_0| < R$, $R > 0$. Так как круг есть односвязная область, то существует функция $f(z) \in A(|z - z_0| < R)$ такая, что $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$. Разложим функцию $f(z)$ в степенной ряд в этом круге

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R.$$

Пусть точка $z \in \{z : |z - z_0| < R\}$, т.е. $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, $0 < \rho < R$, и пусть $a_n = \alpha_n + i\beta_n$. Имеем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha_n + i\beta_n)\rho^n e^{in\varphi} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha_n \rho^n \cos n\varphi - \beta_n \rho^n \sin n\varphi)$$

$$+ i \sum_{n=0}^{+\infty} (\beta_n \rho^n \cos n\varphi + \alpha_n \rho^n \sin n\varphi).$$

Введем обозначение $f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$, тогда

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha_n \rho^n \cos n\varphi - \beta_n \rho^n \sin n\varphi),$$

$$v(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\beta_n \rho^n \cos n\varphi + \alpha_n \rho^n \sin n\varphi).$$

Два тригонометрических ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$ и $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi)$ называются *сопряженными*, если их коэффициенты удовлетворяют соотношению: $a_n = d_n$, $b_n = -c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Мы получили, что комплексно-сопряженным функциям соответствуют сопряженные тригонометрические ряды. Итак, гармоническая функция $u(x, y)$ в круге $|z - z_0| < R$ разлагается в ряд, равномерно сходящийся внутри этого круга

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha_n \rho^n \cos n\varphi - \beta_n \rho^n \sin n\varphi), \quad \rho < R.$$

Покажем, что этот тригонометрический ряд есть ряд Фурье для функции $u(\rho, \varphi)$, т. е. коэффициенты этого ряда есть коэффициенты ряда Фурье. Рассмотрим коэффициенты разложения функции $f(z)$ в степенной ряд – коэффициенты a_n. Пусть $0 < r < R$. Имеем

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Сделаем замену $\xi = z_0 + re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, тогда

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{r^{n+1} e^{(n+1)\theta}} ire^{i\theta}\, d\theta = \frac{1}{r^n} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta.$$

Так как функция $f(z) \in A(|z - z_0| < R)$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} f(\xi)(\xi - z_0)^m\, d\xi = 0, \qquad m = 0, 1, 2, \dots,$$

или

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{in\theta}\, d\theta = 0, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Так как $a_n = \alpha_n + i\beta_n = \frac{1}{r^n} \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} [u(r, \theta) + iv(r, \theta)]\, e^{-in\theta}\, d\theta$, то

$$a_n + 0 = a_n + \frac{1}{r^n} \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} [u(r, \theta) + iv(r, \theta)]\, e^{in\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{r^n} \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} [u(r, \theta) + iv(r, \theta)] \cdot 2\cos n\theta\, d\theta.$$

Тем самым

$$\alpha_n = \frac{1}{r^n} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r,\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad \beta_n = \frac{1}{r^n} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(r,\theta) \cos n\theta \, d\theta.$$

С другой стороны, представим a_n в виде

$$a_n = a_n - 0 = a_n - \frac{1}{r^n} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(r,\theta) + iv(r,\theta)] \, e^{in\theta} \, d\theta$$

$$= \frac{1}{r^n} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(r,\theta) + iv(r,\theta)] \, (-ri \sin n\theta) \, d\theta.$$

Поэтому

$$\alpha_n = \frac{1}{r^n} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(r,\theta) \sin n\theta \, d\theta, \quad \beta_n = -\frac{1}{r^n} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r,\theta) \sin n\theta \, d\theta.$$

Так как $\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r,\theta) \, d\theta$, $\beta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(r,\theta) \, d\theta$, то получаем:

$$\begin{aligned} u(\rho,\varphi) = \alpha_0 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r,\theta) \cos n\theta \, d\theta \cdot \cos n\varphi \right. \\ &\left. + \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r,\theta) \sin n\theta \, d\theta \cdot \sin n\varphi \right), \\ v(\rho,\varphi) = \beta_0 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(r,\theta) \cos n\theta \, d\theta \cdot \cos n\varphi \right. \\ &\left. + \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(r,\theta) \sin n\theta \, d\theta \cdot \sin n\varphi \right), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\rho < R$, $0 < r < R$.

Как видно, коэффициенты соответствующих тригонометрических рядов есть коэффициенты Фурье функций $u(r,\theta)$ и $v(r,\theta)$. Заметим, что в разложении функций $u(\rho,\varphi)$ и $v(\rho,\varphi)$ в ряды Фурье параметры ρ и r не связаны между собой.

Задача 25. Доказать, что функция

$$u(r,\theta) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi)}$$

– гармоническая функция в круге $|z - z_0| < R$, $z = z_0 + re^{i\theta}$, $r < R$, φ – фиксировано. Ее разложение в ряд имеет вид

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi)} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\theta - \varphi).$$

Эта функция носит название *ядра Пуассона.*

Задача 26. Найти функцию, гармонически сопряженную к ядру Пуассона, и разложить ее в ряд Фурье.

МНОГОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

8 лекция

До сих пор мы рассматривали однозначные функции комплексного переменного. Переходя к многозначным функциям, встает вопрос о том, можно ли выделить соответствующие области, на которых многозначные функции можно было бы рассматривать как однозначные или разделить многозначные функции на так называемые однозначные ветви и применить к ним ту теорию функций комплексного переменного, которую мы до сих пор рассматривали. Все сказанное проиллюстрируем на примерах элементарных функций и обратным к ним.

1. Рассмотрим функцию $w^n = z$ и обратную к ней $w = \sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $w = w_1 + iw_2$, $z = x + iy$ (рис. 16).

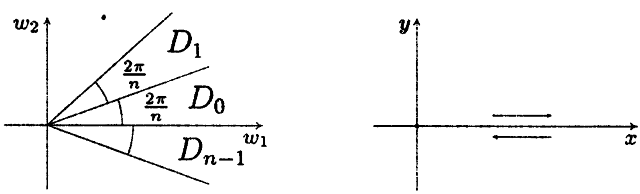

Рис. 16

Функция w^n на всей комплексной плоскости w не является однолистной, поэтому обратная к ней функция $\sqrt[n]{w}$ многозначная. Выделим на плоскости w области однолистности функции w^n (выделить области можно по-разному). Мы всю плоскость w разобъем на области D_k,

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, где $D_k = \left\{ w : \dfrac{2\pi k}{n} < \arg w < \dfrac{2\pi}{n}(k+1) \right\}$. На каждой области D_k функция w^n однолистна, область D_k она отображает на плоскость $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+ = \{x : 0 \leqslant x < +\infty\}$. При фиксированном k обратная функция $(\sqrt[n]{z})_k = |z|^{1/n}\left(\cos\left(\dfrac{\arg z + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{\arg z + 2\pi k}{n}\right)\right)$ – так называемая k-ветвь многозначной функции $\sqrt[n]{z}$, определена на $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ и однозначная – она переводит $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ на область D_k. Так как на области D_k функция w^n однолистна и аналитична, и $(w^n)' = nw^{n-1} \neq 0$, то по теореме об обратной функции функция $(\sqrt[n]{z})_{(k)}$ аналитична на $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ и $(\sqrt[n]{z})_k' = \dfrac{1}{nw^{n-1}} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{(\sqrt[n]{z})_k^{n-1}}$.

Тем самым к k-ой ветви многозначной функции $\sqrt[n]{z}$ можно применить ту теорию аналитических функций, которую мы рассматривали для однозначных аналитических функций.

Если на комплексной плоскости z обойти точку $z = 0$ или $z = \infty$ один раз, то $\arg z$ получит приращение 2π, и мы с одной ветви $\sqrt[n]{z}$ перейдем на следующую ветвь. Такие точки называются *точками ветвления* многозначной функции. Зафиксируем k-ю ветвь $(\sqrt[n]{z})_k$ и обойдем точку $z = 0$ (или $z = \infty$) n раз, тогда мы придем к той же ветви $(\sqrt[n]{z})_k$. Такая точка ветвления называется *алгебраической точкой ветвления* порядка $(n-1)$.

Итак, многозначная функция $\sqrt[n]{z}$ допускает выделение n различных однозначных ветвей, каждая из которых является аналитической функцией на $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$, точки 0 и ∞ являются точками ветвления $(n-1)$-го порядка.

2. Рассмотрим функцию $z = e^w$, $w = w_1 + iw_2$, $z = x + iy$ (рис. 17). Так как функция e^w имеет период $2\pi i$, то на всей плоскости w она неоднолистная. Разобъем плоскость w на области $D_k = \{w : -\pi + 2\pi k < \operatorname{Im} w < \pi + 2\pi k\}$, $k =$

$0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. На области D_k функция e^w однолистна, поэтому обратная к ней функция будет однозначной. Функция e^w отображает область D_k на область $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}^- = \{x : -\infty < x \leqslant 0\}$. Имеем $e^w = z$, поэтому $|z| = e^{w_1}$ и $w_1 = \ln|z|$. Тогда $z = |z|e^{i\varphi} = e^{w_1} \cdot e^{iw_2}$ и $w_2 = \varphi + 2k\pi$, т. е. $w = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

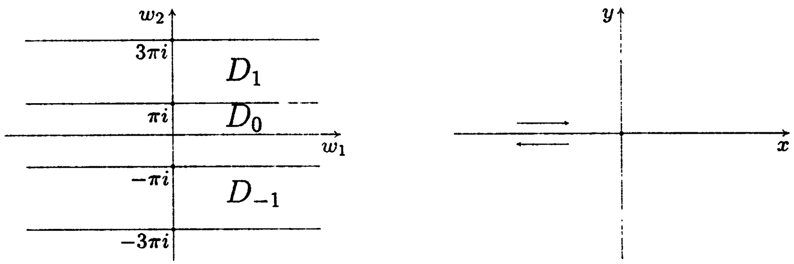

Рис. 17

Обратную функцию к функции e^z назовем $\operatorname{Ln} z$, тем самым $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – многозначная функция, но допускает выделение бесконечно много однозначных ветвей. При фиксированном k k-ая ветвь $(\operatorname{Ln} z)_k = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i$ отображает $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ на область D_k. Так как на области D_k функция $z = e^w$ однолистна и аналитична, при этом $(e^w)' = e^w \neq 0$, то обратная к ней функция k-ая ветвь $(\operatorname{Ln} z)_k$ есть однозначная и аналитическая функция на $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, $(\operatorname{Ln} z)'_k = \dfrac{1}{e^w} = \dfrac{1}{z}$.

Нулевую ветвь $\operatorname{Ln} z$ обозначают $\ln z$, $\ln z = \ln|z| + i\arg z$.

При $x > 0$ имеем $\ln|x| = \ln x$, и так как $\ln x = \displaystyle\int_1^z \frac{d\xi}{\xi}$ при $z = x > 0$ в области $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, то $\ln|z| + i\arg z = \ln z = \displaystyle\int_1^z \frac{d\xi}{\xi}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$. Нулевая ветвь $\operatorname{Ln} z$, т. е. $\ln z$, называется *главным* *значением* $\operatorname{Ln} z$. При обходе точки $z = 0$ или $z = \infty$ значение $\arg z$ получает приращение 2π и мы с одной ветви перейдем на другую ветвь $\operatorname{Ln} z$. Совершая обход многократно, уже не вернемся на прежнюю ветвь. Такая точка для многозначной функции называется *логарифмической точкой ветвления.*

Итак, функция $\operatorname{Ln} z$ – многозначная функция, допускающая выделение бесконечно много однозначных ветвей, каждая из которых является однозначной и аналитической функцией в $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, а точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются логарифмическими точками ветвления.

3. Определив функцию $\operatorname{Ln} z$, можно определить функцию z^α, $\alpha \in \mathbb{C}$. По определению

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}.$$

В зависимости от значения α функция z^α может быть однозначной или многозначной. Можно допустить выделение конечного или бесконечного числа однозначных аналитических ветвей. Так, при $\alpha = n \in \mathbb{N}$ функция z^α – однозначная, аналитическая функция; при рациональном $\alpha \neq 0$, $\alpha = \dfrac{m}{n}$ (m и n взаимно просты, $n > 1$) функция z^α – многозначная функция, имеет n различных ветвей. Если взять $\alpha = i$, то $z^i = e^{i \operatorname{Ln} z} = e^{i(\ln|z| + i \arg z + 2k\pi i)} = e^{-\arg z - 2k\pi} \cdot e^{i \ln |z|}$. Функция z^i имеет бесконечно много однозначных аналитических ветвей в $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, в частности,

$$i^i = e^{-\pi/2 - 2k\pi} \quad \text{(– вещественное число)}$$

имеет бесконечно много различных вещественных значений.

4. Рассмотрим функцию $\cos w = z$, $w = w_1 + iw_2$, $z = x + iy$ (рис. 18). Так как функция $\cos w$ – периодическая (с периодом $2\pi n$) и четная, то на плоскости w это неоднолистная функция.

Разобъем плоскость w на области $D_k = \{w : \pi k < \operatorname{Re} w < \pi + \pi k\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

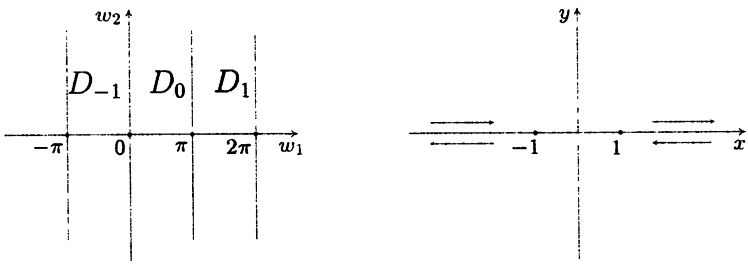

Рис. 18

Функция $\cos w$ область D_k переводит в область $\mathbb{C}\backslash\{x : (-\infty < x \leqslant -1) \cup (1 \leqslant x < +\infty)\}$. Мнимую ось – $w = iw_2$ функция $\cos w$ переводит в луч: $1 \leqslant x < +\infty$, обходящийся дважды

$$\cos iw_2 = \frac{e^{-w_2} + e^{w_2}}{2} = \operatorname{ch} w_2, \quad -\infty < w_2 < +\infty.$$

Второй участок границы D_0 (или D_k) переходит в луч: $-\infty < x \leqslant -1$, обходящийся дважды

$$w = \pi + iw_2 \to \cos(\pi + iw_2) = -\operatorname{ch} w_2.$$

Определим обратную функцию к функции

$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = \frac{t + t^{-1}}{2}, \quad \text{где } t = e^{iw}.$$

Тогда $t^2 - 2zt + 1 = 0$ и $t = z + \sqrt{z^2 - 1}$, поэтому $w = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$. Функцию, обратную к функции $\cos z$, называют арккосинус z и обозначают $\operatorname{Arccos} z$; тем самым

$$\operatorname{Arccos} z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

Функция $\operatorname{Arccos} z$ допускает выделение однозначных, аналитических ветвей (их бесконечно много) в области $\mathbb{C}\backslash\{x : (-\infty < x \leqslant -1) \cup (1 \leqslant x < +\infty)\}$.

$\boxed{\text{Задача 27.}}$ Доказать, что для многозначной функции $\operatorname{Arccos} z$ точки $z = \pm 1$, $z = \infty$ есть точки ветвления. Определить их характер.

5. Рассмотрим функцию $\operatorname{tg} w = z$, $w = w_1 + iw_2$, $z = x + iy$ (рис. 19).

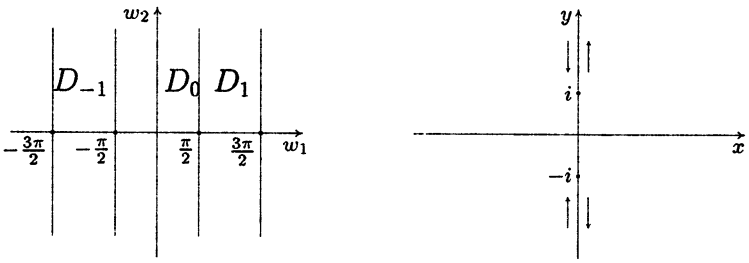

Рис. 19

Разобъем всю плоскость w на области $D_k = \{w : -\dfrac{\pi}{2} + \pi k < \operatorname{Re} w < \dfrac{\pi}{2} + \pi k\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. На каждой области D_k функция $\operatorname{tg} w$ – однозначная и аналитическая, поэтому обратная к ней функция является однозначной. Функция $\operatorname{tg} w$ область D_k переводит в область $\mathbb{C}\backslash\{y : (-\infty < y \leqslant -1) \cup (1 \leqslant y < +\infty)\}$. Так как $(\operatorname{tg} w)' = \dfrac{1}{\cos^2 w} \neq 0$, $w \in D_k$, то функция, обратная к функции $\operatorname{tg} w$, является однозначной и аналитической на $\mathbb{C}\backslash\{y : (-\infty < y \leqslant -1) \cup (1 \leqslant y < +\infty)\}$.

Определим функцию, обратную к функции $\operatorname{tg} w$: поскольку $z = \operatorname{tg} w = \dfrac{1}{i} \cdot \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} = \dfrac{1}{i} \cdot \dfrac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}}$, то $t^2 - 1 = iz(t^2 + 1)$ или $t^2 = \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$. Отсюда $w = \dfrac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(\dfrac{1 + iz}{1 - iz}\right)$.

Обратную функцию к функции $\operatorname{tg} z$ назовем арктангенсом и введем обозначение

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right).$$

$\operatorname{Arctg} z$ допускает выделение однозначных, аналитических ветвей в области $\mathbb{C} \setminus \{y : (-\infty < y \leqslant -1) \cup (1 \leqslant y < +\infty)\}$ – таких ветвей бесконечно много. В частности, та ветвь, которая отображает исходную область на область D_0, называется $\operatorname{arctg} z$; при $z = x$ $\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{d\xi}{1+\xi^2}$, поэтому при $z \in \mathbb{C} \setminus \{y : (-\infty < y \leqslant -1) \cup (1 \leqslant y < +\infty)\}$ имеем $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^2}$.

Задача 28. Доказать, что точки $z = \pm i$ являются точками ветвления для многозначной функции $\operatorname{Arctg} z$. Определить их характер.

Аналитическое продолжение

Многозначные функции могут быть получены за счет аналитического продолжения.

1. Аналитическое продолжение с действительной оси

На действительной оси рассмотрим множество $M = \{x : a < x < b\}$, a или b, а может быть и a, и b могут равняться ∞. Пусть на множестве M задана однозначная действительная функция $f(x)$ (функция, принимающая действительные значения). Скажем, что действительная функция $f(x)$ *аналитична* на M, если

$$\forall x_0 \in M \ \exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in U_\delta(x_0) \ \rightarrow \ f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k. \quad (1)$$

Скажем, что функция $F(z)$ – функция комплексного переменного – есть *аналитическое продолжение* функции $f(x)$ с множества M на область D, если

$$F(z) \in A(D), \ \ F(x) = f(x), \ \ x \in M.$$

Покажем, что если $f(x)$ есть действительная функция и аналитическая на множестве M, то она допускает аналитическое продолжение на некоторую область $D \subset \mathbb{C}$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$. По условию он сходится в $U_\delta(x_0)$, $\delta > 0$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-x_0)^k$ будет сходиться в области $|z-x_0| < \delta$ и определять в этом круге аналитическую функцию $F(z)$, причем для $z = x \in M$ функция $f(x) = F(x)$. Рассмотрим область $D = \bigcup\limits_{x_0 \in M} K_{x_0}$, где $K_{x_0} = \{z : |z-x_0| < \delta\}$. Функция $F(z) \in A(D)$ и при $x \in M$ совпадает с $f(x)$.

Так, функцию e^z можно рассматривать как аналитическое продолжение функции e^x с множества $M = \mathbb{R}$ – действительная прямая:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \ |x| < \infty, \qquad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \ \ |z| < \infty.$$

Функции $\sin z$, $\cos z$ как аналитические продолжения с вещественной оси функций $\sin x$, $\cos x$:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, |x| < \infty, \ \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ |z| < \infty;$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \ \ |x| < \infty, \ \cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \ \ |z| < \infty.$$

Функцию $\ln(1+z)$ можно рассматривать как аналитическое продолжение функции $\ln(1+x)$ с интервала $|x| < 1$ в круг $|z| < 1$, а именно

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},$$

$$|x| < 1, \quad \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}, \quad |z| < 1.$$

9 лекция

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ЧЕРЕЗ ГРАНИЦУ ОБЛАСТИ И ЧЕРЕЗ РАЗЛОЖЕНИЕ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. ПОНЯТИЕ ПОВЕРХНОСТИ РИМАНА

В предыдущей лекции было рассмотрено аналитическое продолжение функции, аналитической на интервале действительной оси, в комплексную область. Рассмотрим другой вид аналитического продолжения.

2. Аналитическое продолжение через границу области

Пусть заданы две области D_1 и D_2, так, что $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, и области имеют общий участок границы Γ, где Γ – жорданова, кусочно-гладкая кривая. Будем рассматривать кривую Γ без концевых точек. Справедлива следующая теорема.

Теорема (принцип непрерывности). *Пусть функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ таковы, что*

$$f_1(z) \in A(D_1) \cap C(D_1 \cup \Gamma),\ f_2(z) \in A(D_2) \cap C(D_2 \cup \Gamma),$$
$$f_1(z) = f_2(z),\ \ z \in \Gamma.$$

Тогда существует функция $f(z) \in A(D)$, $D = D_1 \cup D_2 \cup \Gamma$, имеющая вид

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1, \\ f_2(z), & z \in D_2, \\ f_1 = f_2, & z \in \Gamma. \end{cases}$$

При этом говорят, что функция $f_1(z)$ аналитически продолжается в область D_2 через границу Γ (рис. 20).

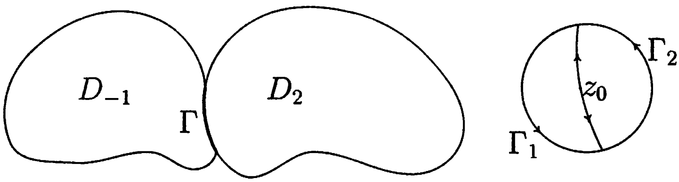

Рис. 20

Доказательство. Нужно показать, что функция $f(z) \in A(D)$. Так как из определения $f(z)$ следует, что $f(z) \in A(D_1 \cup D_2)$, то достаточно показать, что функция $f(z) \in A(\Gamma)$. Пусть точка $z_0 \in \Gamma$; существует $\delta > 0$, такое, что $\overline{U_\delta(z_0)} \subset D$. Обозначим за Γ_1 контур, состоящий из части кривой Γ, лежащей в круге $|z - z_0| \leqslant \delta$, и части окружности $|z - z_0| = \delta$, лежащей в области D_1. Через Γ_2 обозначим контур, состоящий из той же части кривой Γ, лежащей в круге $|z - z_0| \leqslant \delta$, и части окружности $|z - z_0| = \delta$, лежащей в области D_2. При положительном обходе кривых Γ_1 и Γ_2 общая часть кривой Γ будет обходиться дважды, но в разных направлениях, поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi - z_0| = \delta}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z}, \qquad z \in U_\delta(z_0).$$

Интеграл, стоящий справа, есть интеграл типа Коши, так как по условию $f(\xi) \in C(|\xi - z_0| = \delta)$, поэтому

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi - z_0| = \delta}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} \in A(U_\delta(z_0)).$$

А так как

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{f_1(\xi)\,d\xi}{\xi - z} = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \cap U_\delta(z_0), \\ 0, & z \in D_2 \cap U_\delta(z_0), \end{cases} \qquad \text{и}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{f_2(\xi)\,d\xi}{\xi - z} = \begin{cases} f_2(z), & z \in D_2 \cap U_\delta(z_0), \\ 0, & z \in D_1 \cap U_\delta(z_0), \end{cases}$$

то $f(z) = f_1(z),\ \ z \in D_1 \cap U_\delta(z_0),\ \ f(z) = f_2(z),\ \ z \in D_2 \cap U_\delta(z_0)$. Так как точка $z_0 \in \Gamma$ была произвольная, то отсюда следует, что функция $f(z) \in A(\Gamma)$. Окончательно, $f(z) \in A(D),\ \ D = D_1 \cup D_2 \cup \Gamma$.

Следствие. Пусть функция $f(z) \in A(D) \cap C(D \cup \Gamma)$, где $\Gamma \subset \partial D$ (граница области), Γ – кусочно-гладкая, жорданова кривая. Если $f(z) = 0,\ \ z \in \Gamma$, то $f(z) \equiv 0,\ \ z \in D$.

Достаточно функцию $f(z)$ продолжить через Γ нулем, тогда по внутренней теореме единственности $f(z) \equiv 0,\ \ z \in D$.

Возникает вопрос, можно ли условия, наложенные на функцию $f(z)$ в следствии, ослабить? Мы сформулируем в качестве задачи следствие из теоремы единственности И.И. Привалова [6].

Задача 29. Пусть функция $f(z) \in A(D) \cap C(D \cup \Gamma)$, где D – область, граница которой ∂D есть замкнутая, жорданова кусочно-гладкая кривая, $\Gamma \subset \partial D$. Кривая Γ – положительной меры (меры Лебега). Доказать, что если $f(z) = 0,\ \ z \in \Gamma$, то $f(z) \equiv 0,\ \ z \in D$.

При доказательстве принципа непрерывности предполагалось, что области D_1 и D_2 таковы, что $D_1 \cap D_2 = \varnothing$. В этом случае мы получаем однозначное аналитическое продолжение из области D_1 в область D_2. Если отказаться от этого, т. е. $D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$, то аналитическое продолжение может привести к многозначной функции.

Например, рассмотрим две функции $f_1(z) = \ln z = \ln|z| + i\arg z,\ z \in D_1 = \left\{z : -\dfrac{\pi}{2} < \arg z < \pi\right\}$ и $f_2(z) = (\mathrm{Ln}\, z)_1 = \ln|z| + i\arg z + 2\pi i,\ \ z \in D_2 = \left\{z : -\pi < \arg z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$. Функции $f_1(z) \in A\,(D_1) \cap C\,(D_1 \cup \Gamma),\ f_2\,(z) \in A\,(D_2) \cap C\,(D_2 \cup \Gamma)$, где $\Gamma = \{z : y = 0,\ -2 \leqslant x \leqslant -1\}$. Но так как $D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$, то аналитическое продолжение через Γ приводит к многозначной функции $\operatorname{Ln} z$.

3. Аналитическое продолжение через разложение в ряды

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ с радиусом сходимости $R > 0$. Тогда в области $|z - z_0| < R$ функция $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ есть аналитическая функция (рис. 21). Возьмем точку $z_1 \in \{z : |z - z_0| < R\}$. По теореме Тейлора функцию $f(z)$ можно разложить в ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n(z - z_1)^n$, сходящийся в некотором круге $|z - z_1| < R_1$, $R_1 > 0$.

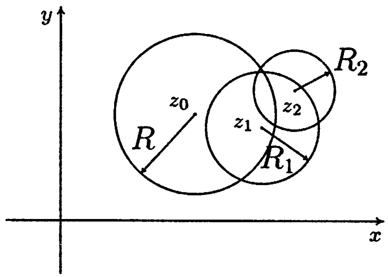

Рис. 21

Может случиться так, что круг $|z - z_1| < R_1$ не лежит целиком в первоначальном круге $|z - z_0| < R$, тем самым мы получили непосредственное аналитическое продолжение функции $f(z)$ в более широкую область, чем круг $|z - z_0| < R$. Взяв точку $z_2 \in \{z : |z - z_1| < R_1\}$, повторим разложение в степенной ряд и т. д. Через некоторое число шагов мы можем прийти к первоначальному кругу, но аналитическое продолжение может не совпасть с первоначальной функцией, и тогда аналитическое продолжение приводит к многозначной функции, в противном случае – к однозначной.

Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{1}{1 - z} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$, $|z| < 1$. Возьмем точку $z_1 \in \{|z| < 1\}$, тогда

$$f(z) = \frac{1}{1-z+z_1-z_1} = \frac{1}{(1-z_1)\left(1-\frac{z-z_1}{1-z_1}\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_1)^n}{(1-z_1)^{n+1}},$$

где $|z-z_1| < |1-z_1|$. Мы переразложили функцию $f(z)$ в ряд по степеням $z-z_1$, ряд сходится в круге $|z-z_1| < |1-z_1|$ и дает аналитическое продолжение суммы ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ (рис. 22).

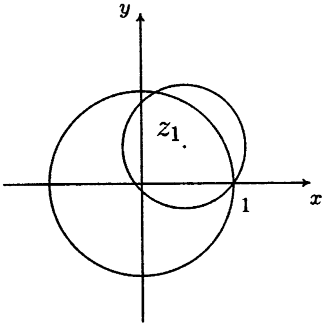

Рис. 22

Как бы мы ни раскладывали функцию $f(z)$ в ряд, точка $z=1$, лежащая на границе круга сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$, не будет входить в область сходимости. Эта точка является особой точкой для ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, область сходимости которого $|z-z_0| < R$, где $0 < R < \infty$.

Определение. Точка $\zeta \in \{|z-z_0| = R\}$ называется *правильной* или *регулярной* точкой для суммы ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, если существует функция $F(z) \in A(U_\delta(\zeta))$, $\delta > 0$, такая, что $f(z) = F(z)$, $z \in U_\delta(\zeta) \cap \{|z-z_0| < R\}$. В любом другом случае точка $\zeta \in \{|z-z_0| = R\}$ называется *особой* точкой, лежащей на границе круга сходимости степенного ряда.

Если мы вернемся к ряду $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$, то все точки, лежащие на границе круга сходимости $|z| = 1$, являются правильными, за исключением точки $z = 1$.

Справедлива

Теорема. *Пусть радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ конечен: $0 < R < \infty$; тогда на границе круга сходимости имеется по крайней мере одна особая точка.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть каждая точка границы $|z - z_0| = R$ есть правильная. Для каждой точки $z_1 : |z_1 - z_0| = R$ существует $\delta_1 > 0$ и $F(z) \in A(U_{\delta_1}(z_1))$ такая, что $F(z) = f(z),\ \ z \in U_{\delta_1}(z_1) \cap \{|z - z_0| = R\},\ \ f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$. Тем самым мы имеем открытое покрытие окружности $|z - z_0| = R$ кругами радиуса δ_1 с центром в точке z_1, $\delta_1 = \delta_1(z_1)$. Так как окружность – компакт, то по лемме Гейне-Бореля существует конечное число кругов, покрывающих окружность и попарно пересекающихся. По теореме единственности отсюда следует, что функция $F(z) \in A(D)$, где область D содержит круг $|z - z_0| \leqslant R$ и $F(z) = f(z),\ \ z \in \{|z - z_0| < R\}$. Тогда существует круг $|z - z_0| < R_1,\ \ R_1 > R$, и круг $\{|z - z_0| < R_1\} \subset D$. Разложим $F(z)$ в степенной ряд в круге $|z - z_0| < R_1$: $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n(z - z_0)^n$. В силу единственности разложения функции в степенной ряд, отсюда следует, что $a_n = b_n$ для любого $n = 0, 1, 2, \dots$, но a_n определяют радиус R, а b_n определяют радиус R_1, а так как $R \neq R_1$, то приходим к противоречию, предположив, что все точки границы круга сходимости правильные.

Задача 30. Пусть функция $f(z) \in A(\overline{D})$, где D – ограниченная область. Доказать, что тогда функция $f(z) \in A(D_1)$, где область $D \subset D_1$.

$\boxed{\text{Задача 31.}}$ Привести пример степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ с конечным радиусом сходимости R, $0 < R < \infty$, для которого каждая точка границы $|z-z_0| = R$ есть особая точка.

4. Общий случай аналитического продолжения

Пусть функция $f(z)$ задана на области D. Назовем элемент вида (f, D) парой, если функция $f(z) \in A(D)$. Скажем, что пара (f_1, D_1) является непосредственным аналитическим продолжением пары (f, D), если $D \cap D_1 \neq \varnothing$ и $f = f_1$ на $D \cap D_1$.

Назовем конечное число пар $(f_1, D_1), (f_2, D_2), \ldots, (f_n, D_n)$ *цепочкой*, если (f_{k+1}, D_{k+1}) является непосредственным аналитическим продолжением пары (f_k, D_k), $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Совокупность пар $\{(f, D)\}$ назовем *общей аналитической функцией*, если для любых пар $(f_1, D_1), (f_2, D_2)$ из этой совокупности существует цепочка из этой же совокупности такая, что с ее помощью можно перейти от (f_1, D_1) к (f_2, D_2). Общую аналитическую функцию назовем *полной аналитической функцией*, если она содержит все аналитические продолжения каждой пары. При этом полная аналитическая функция может быть многозначной. Например, если мы рассмотрим фиксированную ветвь $(\mathrm{Ln}\, z)_k$, $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^-$, то все аналитические продолжения этой функции приведут к многозначной функции $\mathrm{Ln}\, z$ (бесконечно-значной).

Для того, чтобы полную аналитическую функцию можно было рассматривать как однозначную, Риман ввел в рассмотрение так называемую *поверхность Римана*. Рассмотрим полную аналитическую функцию $\{(f_i, D_i)\}$ и рассмотрим область $G = \bigcup\limits_i D_i$, объединение областей D_i не более чем счетное. Возьмем листы плоскостей, изображающие области D_i (число листов соответствует числу индексов i). Два листа, соответствующие областям D_i и D_j, $i \neq j$, склеим по их общей части $D_i \cap D_j$, если эта общая часть не пуста и $f_i = f_j$ на $D_i \cap D_j$. Тогда мы получим, вообще говоря, многолистную поверхность. Эта поверхность и называется поверхностью Римана. На этой поверхности, соответствующей области G, полная аналитическая функция $\{(f_i, D_i)\}$ однозначна. Она осуществляет однозначное соответствие между поверхностью Римана и своей областью изменения.

Рассмотрим два примера.

1. Функция $\sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ – многозначная, имеет n различных аналитических ветвей на $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^+$.

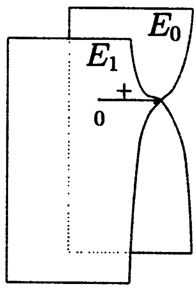

Рис. 23. Функция $\sqrt{z}$, два листа E_0, E_1.

Возьмем n листов плоскости с разрезом по положительному лучу $\mathbb{R}^+$. Для каждого k-го листа плоскости обозначим верхний берег разреза через Γ_k^+, нижний берег разреза – через Γ_k^-, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Все эти листы склеим следующим образом

$$\Gamma_0^+ = \Gamma_1^-, \quad \Gamma_1^+ = \Gamma_2^-, \quad \ldots, \quad \Gamma_{n-1}^+ = \Gamma_0^-.$$

Получили n-листную поверхность Римана, на которой $\sqrt[n]{z}$ – однозначная функция и аналитична, за исключением точек ветвления $z = 0$, $z = \infty$ (см. рис. 23):

2. Рассмотрим многозначную функцию $\operatorname{Ln} z$, имеющую бесконечно много однозначных ветвей $(\operatorname{Ln} z)_k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, аналитических на $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^-$, и возьмем счетное число листов плоскостей с разрезом по лучу $\mathbb{R}^-$. Склейку проведем следующим образом:

$$\Gamma_k^+ = \Gamma_{k+1}^-, \quad \ldots \quad , \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots ,$$

где Γ_k^+ – верхний берег разреза отрицательного луча $\mathbb{R}^-$, Γ_k^- – нижний берег разреза. На этой бесконечнолистной поверхности Римана функция $\operatorname{Ln} z$ – однозначная функция и аналитична, за исключением точек $z = 0$, $z = \infty$, которые являются точками ветвления.

РЯДЫ ЛОРАНА. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

10 лекция

Ряд вида $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$, где $\{a_n\}$ – последовательность комплексных чисел, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ – называется *рядом Лорана.* По определению ряд Лорана сходится в точке z, если одновременно сходятся два ряда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad \sum_{n=-\infty}^{n=-1} a_n(z - z_0)^n.$$

Область сходимости первого ряда есть открытый круг $|z - z_0| < R, \; R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Чтобы определить область сходимости второго ряда, сделаем замену $z - z_0 = \dfrac{1}{w}$, тогда

$$\sum_{n=-\infty}^{n=-1} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}w^n.$$

Последний ряд сходится в круге $|w| < r_1, \; r_1 = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{-n}|}}$, поэтому область сходимости ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ есть множество $|z - z_0| > r = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$.

Итак, ряд Лорана сходится в кольце $r < |z - z_0| < R$ при условии, что $r < R$. Если $r \geqslant R$, то у ряда Лорана нет открытой области сходимости. В частных случаях, когда $r = 0$ или $R = \infty$, областью сходимости ряда Лорана является или открытый круг с выколотой точкой, или внешность круга, или вся плоскость с выколотой точкой. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ называется *правильной частью* ряда Лорана, а ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{n=-1} a_n(z - z_0)^n$ называется *главной частью* ряда Лорана.

Так как ряд Лорана сходится равномерно на любом компакте, лежащем внутри кольца (следует из свойств степенных рядов), то сумма ряда Лорана есть аналитическая функция на области сходимости ряда Лорана – внутренности кольца $r < |z - z_0| < R$.

Верно и обратное утверждение, а именно, справедлива

Теорема Лорана. *Пусть функция $f(z) \in A(r < |z - z_0| < R)$; тогда функцию $f(z)$ можно разложить в ряд*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R,$$

который сходится равномерно внутри кольца. Разложение в ряд Лорана единственно, при этом

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad r < \rho < R.$$

Из вида коэффициентов a_n, определяющихся функцией $f(z)$, уже следует единственность разложения.

Доказательство. Возьмем точку $z \in \{z : r < |z - z_0| < R\}$ (рис. 24); тогда существуют ρ_1 и ρ_2 такие, что $r < \rho_1 < \rho_2 < R$, $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$.

По интегральной теореме Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \rho_2} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \rho_1} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z},$$

обход по кривым в первом и во втором интегралах производится против часовой стрелки. Ядро интегралов – функцию $\dfrac{1}{\xi - z}$ – разложим в ряд. В первом случае на кривой $|\xi - z_0| = \rho_2$ имеем

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{(\xi - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n.$$

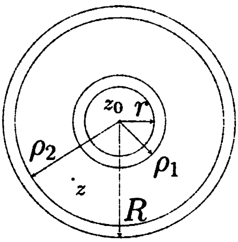

Рис. 24

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n$ на кривой $|\xi - z_0| = \rho_2$ сходится равномерно, так как $\left|\dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| \leqslant \dfrac{|z - z_0|}{\rho_2} < 1$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \rho_2} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \rho_2} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n.$$

На кривой $|\xi - z_0| = \rho_1$ ядро $\dfrac{1}{\xi - z}$ представим в виде

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}}$$
$$= -\frac{1}{z - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}$$
$$= -\sum_{n=-\infty}^{n=-1} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}.$$

Ряд $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=-1} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}$ сходится равномерно на кривой $|\xi - z_0| = \rho_1$, так как $\left|\dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| = \dfrac{|z - z_0|}{\rho_1} > 1$. Поэтому

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \rho_1} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z} = \sum_{n=-\infty}^{n=-1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \rho_1} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n.$$

Тем самым

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \; a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \; r < \rho < R.$$

Теорема доказана.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области $0 < |z - z_0| < r$, за исключением точки z_0. Такая точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$. Проведем классификацию изолированных особых точек, исходя из разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $0 < |z - z_0| < r$.

Итак, пусть $f(z) \in A(0 < |z - z_0| < r)$. По теореме Лорана функцию $f(z)$ в этом кольце можно представить рядом Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r.$$

Если $a_n = 0$, $n = -1, -2, \ldots$, то точка z_0 называется *устранимой особой точкой.* В этом случае имеем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r.$$

Так как ряд Тейлора $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ сходится в круге $|z-z_0| < r$, то его сумма есть аналитическая функция в круге $|z - z_0| < r$, включая точку z_0. Тем самым функцию $f(z)$ можно доопределить в точке z_0, положив $f(z_0) = a_0$, и она будет аналитична в круге $|z-z_0| < r$. Отсюда следует, что в некоторой окрестности точки $z_0 : 0 < |z-z_0| < \delta$ функция $f(z)$ по модулю ограничена. Справедливо обратное утверждение, а именно: пусть точка z_0 – изолированная особая точка $f(z)$ и $|f(z)|$ ограничен в некоторой окрестности точки $z_0 : 0 < |z - z_0| < \delta$. Отсюда следует, что точка z_0 – устранимая точка. Докажем это утверждение. По теореме Лорана

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi-z_0|=\rho} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \quad 0 < \rho < \delta.$$

Тогда $|a_n| \leqslant \dfrac{1}{2\pi} \cdot \dfrac{2\pi\rho}{\rho^{n+1}} \cdot M = \dfrac{M}{\rho^n}$, $|f(z)| \leqslant M$, $z \in \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$. Если $n < 0$, то $a_n = 0$ ($\lim\limits_{\rho\to+0} \dfrac{M}{\rho^n} = 0$, $n < 0$), то есть точка z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$.

Итак, мы доказали критерий устранимой особой точки z_0: точка z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда $|f(z)|$ ограничен в некоторой окрестности $0 < |z - z_0| < \delta$.

$\boxed{\text{Задача 32.}}$ Доказать следующий критерий устранимой особой точки z_0 функции $f(z)$: точка z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Если существует натуральное k такое, что $a_n = 0$, $n = -k-1, -k-2, \ldots$, но $a_{-k} \neq 0$, то точка z_0 называется *полюсом порядка* k. Пусть точка z_0 – полюс порядка k, тогда разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = a_{-k}(z - z_0)^{-k} + a_{-k+1}(z - z_0)^{-k+1} + \ldots$$
$$+ a_{-1}(z - z_0)^{-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r$$

или

$$f(z) \cdot (z - z_0)^k = a_{-k} + a_{-k+1}(z - z_0) + \ldots + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^{n+k}.$$

Ряд, стоящий справа, сходится в круге $|z - z_0| < r$ и представляет аналитическую функцию $\varphi(z)$, $\varphi(z_0) \neq 0$. Поэтому $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z - z_0)^k}$, $0 < |z - z_0| < r$, при этом $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$. Заметим, что функция $\dfrac{1}{f(z)} = \dfrac{(z - z_0)^k}{\varphi(z)}$ – аналитическая функция в $|z - z_0| < \delta$ $(\delta < r)$ и точка z_0 для нее является нулем кратности k.

Покажем обратное, а именно: если z_0 – изолированная особая точка функции $f(z)$ и при этом $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, то точка

z_0 есть полюс. Так как $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, то существует окрестность точки $z_0 : 0 < |z - z_0| < \delta$ $(0 < \delta < r)$ такая, что функция $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ аналитична в этой окрестности и $\lim\limits_{z\to z_0} \varphi(z) = 0$. Отсюда следует, что z_0 – устранимая особая точка для функции $\varphi(z)$ и ряд Лорана для $\varphi(z)$ имеет вид

$$\varphi(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad a_0 = 0, \quad k \geqslant 1, \quad a_k \neq 0.$$

Поэтому

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k}\left(\sum_{n=k}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{n-k}\right)^{-1} = \frac{1}{(z-z_0)^k}\left(\varphi_1(z)\right)^{-1},$$
$$\varphi_1(z) \in A(|z - z_0| < \delta_1), \quad \varphi_1(z_0) \neq 0, \quad 0 < \delta_1 < \delta$$

или

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \cdot \varphi_2(z), \quad \varphi_2(z) \in A(|z - z_0| < \delta_1), \quad \varphi_2(z_0) \neq 0.$$

Отсюда следует, что точка z_0 – полюс порядка k для функции $f(z)$. Итак, мы доказали критерий полюса для функции $f(z)$: точка z_0 является полюсом функции $f(z)$ порядка k тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$ и функция $\dfrac{1}{f(z)}$ имеет точку z_0 нулем кратности k.

Изолированная особая точка, не являющаяся ни устранимой, ни полюсом, называется *существенной особой точкой* функции. Это значит, что в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r$$

существует бесконечно много коэффициентов вида a_{-n_k}, $n_k \in \mathbb{N}$, отличных от нуля. Если точка z_0 – существенно особая точка для функции $f(z)$, то не существует ни конечного, ни бесконечного предела $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Рассмотрим поведение функции $f(z)$ в окрестности существенно особой точки. Пусть E_δ – множество значений функции $f(z)$ в окрестности $0 < |z - z_0| < \delta < r$. Справедлива теорема

Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса. *Пусть точка z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$; тогда*

$$\overline{E_\delta} = \overline{\mathbb{C}}.$$

Доказательство. Проведем доказательство от противного, т. е. предположим, что существует $A \in \overline{\mathbb{C}}$, но $A \notin \overline{E_\delta}$. Если $A = \infty$, то это означает, что $\infty \notin \overline{E_\delta}$, и, тем самым, существует $\delta > 0$ такое, что в окрестности $0 < |z - z_0| < \delta$ модуль $|f(z)|$ ограничен, а тогда точка z_0 – устранимая, что противоречит условию. Рассмотрим $A \in \mathbb{C}$ такое, что $A \notin \overline{E_\delta}$. Это означает, что существует $\rho > 0$ такое, что для всех $z\ :\ 0 < |z - z_0| < \delta$ следует $|f(z)-A| > \rho > 0$. Тем самым $\dfrac{1}{|f(z) - A|} < \dfrac{1}{\rho}$ или функция $\psi(z) = \dfrac{1}{f(z) - A}$ аналитична в окрестности $0 < |z - z_0| < \delta$ и ограничена по модулю. Точка z_0 является для нее устранимой, поэтому существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} \psi(z) = A_0$. Если $A_0 = 0$, то $\lim\limits_{z\to z_0}(f(z) - A) = \infty$, а тогда $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$ и точка z_0 является полюсом функции $f(z)$, что противоречит условию. Если $A_0 \neq 0$, то $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A + \dfrac{1}{A_0}$, т. е. z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$, что также противоречит условию. Итак, предположив, что $\overline{E_\delta} \neq \overline{\mathbb{C}}$, мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Приведем формулировку **большой теоремы Пикара** (без доказательства). Пусть z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$. Тогда для любого комплексного числа A, за исключением, быть может, одного, существует последовательность $\{z_n\} : z_n \in \{z : 0 < |z - z_0| < r\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, такая, что $f(z_n) = A$.

Пример. Пусть $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $e^{\frac{1}{z}} \in A(\mathbb{C}\setminus\{0\})$, точка $z_0 = 0$ является для нее существенно особой точкой; ряд Лорана имеет вид

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!z^n}, \quad 0 < |z| < \infty.$$

Для этой функции существует исключительное значение $A = 0$, так как $e^{\frac{1}{z}} \neq 0$ для любых $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Будем говорить, что функция $f(z)$ аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки, если функция $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ аналитична в окрестности точки $z = 0$. Пусть

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad |z| < r,$$

тогда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^n}, \quad |z| > \frac{1}{r}.$$

Тем самым, если функция $f(z)$ аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки, то она представима рядом Лорана в окрестности ∞ по отрицательным степеням z.

Пусть функция $f(z) \in A(r < |z| < \infty)$; тогда ее ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \quad r < |z| < \infty.$$

Будем считать, что $z_0 = \infty$ – устранимая особая точка для $f(z)$, если $a_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$; $z_0 = \infty$ – полюс порядка k, если $a_k \neq 0$, $a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots = 0$; $z_0 = \infty$ – существенно особая точка в любом другом случае, т. е. существует последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ такая, что $a_{n_k} \neq 0$.

Многочлен $P(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i z^i$, $a_n \neq 0$, имеет $z_0 = \infty$ полюсом порядка n.

Точка $z_0 = \infty$ является существенно особой для функций e^z, $\cos z$, $\sin z$.

Для рациональной функции

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i z^i}{\sum\limits_{i=0}^{m} b_i z^i},$$

$a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, точка $z_0 = \infty$ является полюсом порядка $n - m$, если $n - m > 0$. При $n - m \leqslant 0$ точка $z_0 = \infty$ является устранимой особой точкой. Для функции $e^{\frac{1}{z}}$ точка $z_0 = 0$ – существенно особая точка, $z_0 = \infty$ есть устранимая особая точка.

Определение. Функция $f(z)$ называется *мероморфной* в области D, если она в этой области имеет только изолированные особые точки, являющиеся полюсами.

Так функции $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ – мероморфные функции в $\mathbb{C}$, точка $z_0 = \infty$ для этих функций является неизолированной особой точкой, полюсы функций $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ накапливаются к бесконечно удаленной точке.

Задача 33. Пусть $f(z)$ – целая функция, и $z_0 = \infty$ – устранимая особая точка. Доказать, что $f(z) \equiv const$.

Задача 34. Пусть функция $f(z)$ – мероморфна в $\overline{\mathbb{C}}$. Доказать, что $f(z)$ – рациональная функция.

Продолжение "гамма-функции" Эйлера с положительного луча в комплексную плоскость

"Гамма-функция" Эйлера при $x > 0$ имеет вид

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Представим $\Gamma(x)$ в виде

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int\limits_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$:

$$\int\limits_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt = \int\limits_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} \right) t^{x-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{t^{n+x}}{n+x} \Bigg|_0^1$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{n+x}.$$

Мы воспользовались равномерной сходимостью ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n t^n}{n!}$ на отрезке $[0, 1]$.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!} \cdot \dfrac{1}{n+x}$ с положительного луча $x > 0$ продолжим в комплексную плоскость и рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!} \cdot$

$\dfrac{1}{n+z}$, сходящийся в $\mathbb{C}\backslash\{0,1,2,\ldots\}$ и представляющий аналитическую в $\mathbb{C}\backslash\{0,1,2,\ldots\}$ функцию. Эта функция есть мероморфная функция в $\mathbb{C}$ и точки $z=0,1,2,\ldots$ являются полюсами первого порядка.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = \int\limits_1^{+\infty} e^{-t}e^{(x-1)\ln t}dt$, $x>0$. Продолжив эту функцию с положительного луча $x>0$ в комплексную плоскость, будем иметь

$$\int\limits_1^{+\infty} e^{-t}e^{(z-1)\ln t}dt.$$

Этот интеграл есть целая функция (аналитичная в $\mathbb{C}$). Итак, $\Gamma(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}\cdot\dfrac{1}{n+z} + \int\limits_1^{+\infty} e^{-t}e^{(z-1)\ln t}dt$ есть аналитическое продолжение $\Gamma(x)$ с положительного луча $x>0$ в область $\mathbb{C}\backslash\{0,1,2,\ldots\}$. Функция $\Gamma(z)$ мероморфна в $\mathbb{C}$ и точки $z=0,1,2,\ldots$ – полюсы первого порядка.

Задача 35. Доказать, что функция $F(z) = \dfrac{1}{\Gamma(z)}$ есть целая функция и $F(z) = e^{cz}\cdot z\prod\limits_{m=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{z}{m}\right)e^{-\frac{z}{m}}$, где c – постоянная Эйлера.

11
лекция

ВЫЧЕТ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ. ТЕОРЕМА О ВЫЧЕТАХ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ О ВЫЧЕТАХ

Пусть $z_0 \neq \infty$ – изолированная особая точка функции $f(z)$, т. е. $f(z) \in A(0 < |z - z_0| < r)$. Пусть также Γ – любой жорданов, кусочно-гладкий, замкнутый контур, лежащий в области $0 < |z - z_0| < r$ и содержащий точку z_0 внутри.

Определение. *Вычетом* функции $f(z)$ в точке z_0 называется интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma f(\xi)\,d\xi$ и обозначается $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)$ или $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z)$ (*Residue*):

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma f(\xi)\,d\xi.$$

Из теоремы Коши следует, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi - z_0| = \varepsilon} f(\xi)\,d\xi.$$

Пусть $z_0 = \infty$ – изолированная особая точка функции $f(z)$, т.е. $f(z) \in A(|z| > R_0)$, R_0 – достаточно большое. По определению

$$\operatorname*{Res}_{z_0=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^-} f(\xi)\,d\xi,$$

где контур Γ лежит в области $|z| > R_0$ и содержит точку 0 внутри. Обход по контуру Γ совершается по часовой стрелке, или область D_Γ, содержащая точку z_0, остается слева при обходе по контуру Γ. По теореме Коши для всех $R > R_0$

$$\operatorname*{Res}_{z_0=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=R} f(\xi)\, d\xi \quad \text{(обход против часовой стрелки)}.$$

Как вычислить вычет $f(z)$?

Пусть $z_0 \neq \infty$. По теореме Лорана в области $0 < |z - z_0| < r$ функцию $f(z)$ можно разложить в ряд Лорана, равномерно сходящийся на любом компакте, принадлежащем этой области, поэтому

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0|=\varepsilon} f(\xi)\, d\xi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0|=\varepsilon} (\xi - z_0)^n\, d\xi = a_{-1}.$$

Таким образом, $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}$.

Пусть $z_0 = \infty$. Проводя аналогичные рассуждения, получим

$$\operatorname*{Res}_{z_0=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=R} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \xi^n \right) d\xi = -a_{-1}.$$

Пусть $z_0 \neq \infty$ и z_0 – полюс порядка m для функции $f(z)$. Тогда ряд Лорана в области $0 < |z - z_0| < r$ имеет вид

$$f(z) = a_{-m}(z - z_0)^{-m} + a_{-m+1}(z - z_0)^{-m+1} + \ldots$$
$$+ a_{-1}(z - z_0)^{-1} + \sum_{i=0}^{+\infty} a_i (z - z_0)^i$$

или

$$f(z)(z-z_0)^m = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \dots$$
$$+ a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \sum_{i=0}^{+\infty} a_i(z-z_0)^{i+m}.$$

Возьмем производную $(m-1)$-го порядка от правой и левой частей:

$$[f(z)(z-z_0)^m]^{(m-1)} = (m-1)!a_{-1} +$$
$$\sum_{i=0}^{+\infty}(i+m)(i+m-1)\dots(i+2)a_i(z-z_0)^{i+1}.$$

Тогда $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)(z-z_0)^m]^{(m-1)} = (m-1)!\,a_{-1}$. Итак,

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}[f(z)(z-z_0)^m]^{(m-1)}.$$

Пусть $m=1$ и функция $f(z)$ имеет вид: $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$, где $f_1(z_0) \neq 0$, а функция $f_2(z)$ имеет точку z_0 нулем кратности 1. В этом случае

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{f_1(z)(z-z_0)}{f_2(z)} = f_1(z_0)\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\frac{f_2(z)}{z-z_0}} = \frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}.$$

Теорема о вычетах. *Пусть ограниченная область D с границей ∂D, являющейся контуром, такова, что точки $z_1, z_2, \dots, z_n \in D$ – изолированные особые точки функции $f(z)$ и $f(z) \in A(D\backslash\{z_1, z_2, \dots, z_n\}) \cap C(\partial D)$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} f(\xi)\,d\xi = \sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Доказательство. Около каждой точки z_k опишем окружность $|z - z_k| = \delta_k$ так, чтобы круг $|z - z_k| \leqslant \delta_k$ целиком лежал в области D и круги не пересекались (рис. 25).

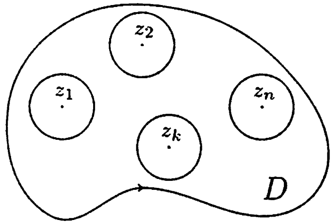

Рис. 25

По теореме Коши для многосвязной области справедливо равенство

$$\int\limits_{\partial D} f(\xi)\, d\xi = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|\xi - z_k| = \delta_k} f(\xi)\, d\xi = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Теорема доказана.

Следствие. Пусть $f(z) \in A(\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\})$, где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – особые изолированные точки $f(z)$, и $z_0 = \infty$ – также особая изолированная точка; тогда

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = 0.$$

Доказательство. Возьмем R достаточно большое, так, чтобы внутри области $|z| < R$ содержались все точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$. По теореме о вычетах будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi| = R} f(\xi)\, d\xi = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = - \operatorname*{Res}_{z_0=\infty} f(z),$$

или, что то же самое, $\sum\limits_{k=0}^{n} \operatorname*{Res}\limits_{z=z_k} f(z) = 0.$

Вычисление интегралов с помощью теоремы о вычетах

I. Рассмотрим I класс интегралов – интегралы вида

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta,$$

где $R(x, y)$ – рациональная функция двух аргументов x, y, а функция $R(\sin\theta, \cos\theta)$ непрерывна на $[0, 2\pi]$.

Если $\theta \in [0, 2\pi]$, то множество точек $z = e^{i\theta}$ принадлежит единичной окружности $|z| = 1$. Сделаем замену $z = e^{i\theta}$; тогда $dz = ie^{i\theta}d\theta$, $d\theta = -i\dfrac{dz}{z}$. Так как $z = \cos\theta + i\sin\theta$, то $\overline{z} = \cos\theta - i\sin\theta$, $\sin\theta = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$, $\cos\theta = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$. Если $|z| = 1$, то $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ и $\sin\theta = \dfrac{z-\frac{1}{z}}{2i}$, $\cos\theta = \dfrac{z+\frac{1}{z}}{2}$. Тем самым

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta = -i\int_{|z|=1} \frac{R\left(\frac{z-1/z}{2i}, \frac{z+1/z}{2}\right)dz}{z} = \int_{|z|=1} R_1(z)\, dz,$$

где $R_1(z)$ – рациональная функция, непрерывная на $|z| = 1$. Отсюда по теореме о вычетах следует:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} R_1(z),$$

где z_k – полюсы рациональной функции $R_1(z)$, лежащие в области $|z| < 1$.

II. Рассмотрим II класс интегралов – интегралы вида (v. p. – от value principal)

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \quad \text{(главное значение в смысле Коши)}.$$

Напомним, что $\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx$.

Пусть функция $f(z) \in A(\{\operatorname{Im} z > 0\}\backslash\{z_1, z_2, \dots, z_n\}) \cap C(\operatorname{Im} z = 0)$, $z_1, z_2, \dots, z_n$ – особые изолированные точки $f(z)$, лежащие в области $\operatorname{Im} z > 0$. Пусть также $f(z) = \overline{o}(1/z)$, $z \to \infty$, $\operatorname{Im} z > 0$. Тогда

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Пусть C_R – верхняя полуокружность: $\{|z| = R\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $\Gamma_R = C_R \cup [-R, R]$, где R достаточно большое, так что точки $z_1, z_2, \dots, z_n$ лежат внутри Γ_R (рис. 26).

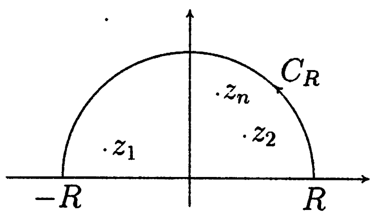

Рис. 26

По теореме о вычетах имеем

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int\limits_{C_R} f(z)\,dz.$$

Оценим интеграл $\int\limits_{C_R} f(z)\,dz$:

$$\left|\int\limits_{C_R} f(z)\,dz\right| \leqslant \max_{z\in C_R}|f(z)|\cdot\pi R = \bar{o}(1/R)\cdot\pi R \to 0 \quad \text{при} \quad R\to+\infty.$$

Итак, $\lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}\limits_{z=z_k} f(z)$.

III. Рассмотрим III класс интегралов – интегралы вида

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}f(x)\,dx = \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos(ax)\cdot f(x)\,dx + i\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin(ax)\cdot f(x)\,dx.$$

Пусть $a>0$ и функция $f(z)\in A(\{\operatorname{Im} z>0\}\setminus\{z_1,z_2,\ldots,z_n\})\cap C(\operatorname{Im} z=0)$, где точки $z_1,z_2,\ldots,z_n$ – особые изолированные точки $f(z)$, лежащие в области $\operatorname{Im} z>0$, и $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ \operatorname{Im} z>0}} f(z)=0$. Тогда интеграл в смысле главного значения Коши

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\left(e^{iaz}f(z)\right).$$

Пусть C_R и Γ_R – кривые, введенные в предыдущем II классе. По теореме о вычетах

$$\int\limits_{\Gamma_R} e^{iaz}f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\left(e^{iaz}f(z)\right).$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{\Gamma_R} e^{iaz}f(z)\,dz = \int\limits_{-R}^{R} e^{iax}f(x)\,dx + \int\limits_{C_R} e^{iaz}f(z)\,dz.$$

Ранее мы доказали лемму Жордана, по которой

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{C_R} e^{iaz} f(z)\,dz = 0,$$

если $a > 0$. Окончательно получим

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\left(e^{iaz} f(z)\right).$$

IV. Рассмотрим IV класс интегралов – интегралы вида

$$\int\limits_{0}^{+\infty} x^{\alpha-1} f(x)\,dx, \quad 0<\alpha<1.$$

Наложим следующие условия на функцию $f(z)$:

1. $f(z) \in A(\{\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+\}\backslash\{z_1, z_2, \dots, z_n\}) \cap C(\mathbb{R}^+\backslash\{0\})$, точки $z_1, z_2, \dots, z_n$ – особые изолированные точки, лежащие в $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$;
2. $|f(z)| \leqslant C_\delta |z|^{-\delta}$ при $z\to 0$, $\delta>0$ – сколь угодно малое;
3. $|f(z)| \leqslant C_{\delta_1} |z|^{-1+\delta_1}$ при $z\to\infty$, $\delta_1>0$ – сколь угодно малое.

Если функция $f(z)$ удовлетворяет этим трем условиям, то

$$J = \int\limits_{0}^{+\infty} x^{\alpha-1} f(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\left(z^{\alpha-1} f(z)\right).$$

Доказательство. Рассмотрим область $D_{r,R}$, границей которой являются окружности $C_R = \{|z| = R\}$, $C_r = \{|z| = r\}$ и отрезок $[r, R]$, обходящийся дважды в разных направлениях (рис. 27).

Функция $g(z) = z^{\alpha-1}$ – многозначная, но в области $D_{r,R}$ допускает выделение однозначных ветвей. По определению

$$z^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\operatorname{Ln} z} = e^{(\alpha-1)(\ln|z|+i\arg z+i\cdot 2\pi k)}.$$

Возьмем ветвь при $k = 0$, т. е. когда мы находимся на верхнем берегу отрезка $[r, R]$ – в этом случае $z^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}$, $x > 0$. Если мы находимся на нижнем берегу отрезка $[r, R]$, то $\arg z$ имеет приращение 2π и $z^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}e^{(\alpha-1)2\pi i} = e^{2\pi\alpha i}x^{\alpha-1}$.

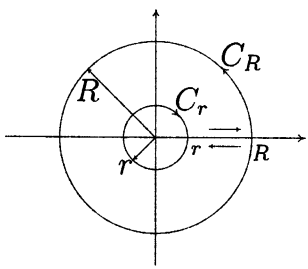

Рис. 27

Рассмотрим интеграл по полной границе и применим теорему о вычетах:

$$\int\limits_{\partial D_{r,R}} z^{\alpha-1}f(z)\,dz = \int\limits_r^R x^{\alpha-1}f(x)\,dx + \int\limits_{C_R} z^{\alpha-1}f(z)\,dz$$

$$+\int\limits_R^r x^{\alpha-1}e^{2\pi i\alpha}f(x)\,dx + \int\limits_{C_r} z^{\alpha-1}f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\left(z^{\alpha-1}f(z)\right).$$

Обход по границе положительный. Оценим интеграл

$\int\limits_{C_r} z^{\alpha-1} f(z)\, dz$:

$$\left| \int\limits_{C_r} z^{\alpha-1} f(z)\, dz \right| \leqslant \max_{|z|=r} \left(|z|^{\alpha-1} |f(z)|\right) \cdot 2\pi r$$
$$\leqslant r^{\alpha-1} \cdot 2\pi r \cdot C_\delta r^{-\delta} = 2\pi C_\delta \cdot r^{\alpha-\delta}.$$

Если взять $0 < \delta < \alpha$, то при $r \to 0$ интеграл $\int\limits_{C_r} z^{\alpha-1} f(z)\, dz \to 0$.

Оценим интеграл $\int\limits_{C_R} z^{\alpha-1} f(z)\, dz$:

$$\left| \int\limits_{C_R} z^{\alpha-1} f(z)\, dz \right| \leqslant \max_{|z|=R} \left(|z|^{\alpha-1} |f(z)|\right) \cdot 2\pi R$$
$$\leqslant 2\pi \cdot R^{\alpha} \cdot C_{\delta_1} \cdot R^{-1+\delta_1}.$$

Если взять $0 < \delta_1 < 1 - \alpha$, то при $R \to +\infty$ интеграл $\int\limits_{C_R} z^{\alpha-1} f(z)\, dz \to 0$.

Таким образом,

$$2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \left(z^{\alpha-1} f(z)\right) = J\left(1 - e^{2\pi i \alpha}\right)$$

или

$$J = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \left(z^{\alpha-1} f(z)\right).$$

Рассмотрим интеграл

$$J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\, dx}{x + \lambda}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \lambda > 0.$$

Преобразуем этот интеграл: $J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\lambda^{\alpha-1}t^{\alpha-1}\,dt}{1+t}$, затем сделаем замену $y = \frac{1}{1+t}$; тогда

$$J = \lambda^{\alpha-1}\int\limits_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^{-\alpha}dy = \lambda^{\alpha-1}B(\alpha,1-\alpha) = \lambda^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha),$$

где $B(x,y)$, $\Gamma(x)$ – эйлеровы интегралы.

Функция $f(z) = \frac{1}{z+\lambda}$ удовлетворяет всем трем условиям, перечисленным выше, поэтому

$$J = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\operatorname*{Res}_{z=-\lambda}\left(z^{\alpha-1}\cdot\frac{1}{z+\lambda}\right) = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\lambda^{\alpha-1}e^{(\alpha-1)i\pi}$$
$$= \lambda^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha).$$

Тем самым получаем

$$\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha) = \frac{2\pi i e^{(\alpha-1)i\pi}}{1-e^{2\pi i\alpha}} = \frac{2\pi i e^{\alpha i\pi}}{e^{2\pi i\alpha}-1} = \frac{2\pi i}{e^{\pi\alpha i}-e^{-\pi\alpha i}} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

Итак, мы получили для Гамма-функции Эйлера формулу дополнения:

$$\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}, \quad 0<\alpha<1.$$

Формула дополнения $\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$ справедлива для всех $z \notin \mathbb{Z}$ (множество целых чисел).

Задача 36. Доказать, что функция $\Gamma(z)$, $z \neq 0,-1,-2,\dots$ не имеет нулей.

12 лекция

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ВЫЧЕТ. ПРИНЦИП АРГУМЕНТА. ТЕОРЕМА РУШЕ

Пусть Γ – жорданов, замкнутый, кусочно-гладкий контур, ограничивающий область D_Γ (ограниченная область). Функция $f(z) \in A(\overline{D_\Gamma}$ “ $\{b_1, b_2, \dots, b_m\})$, где $b_1, b_2, \dots, b_m$ – полюсы порядка $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ функции $f(z)$ соответственно, $b_1, b_2, \dots, b_m \in D_\Gamma$. Пусть также $f(z) \neq 0$, $z \in \Gamma$, но внутри области D_Γ функция $f(z)$ имеет нули $a_1, a_2, \dots, a_n$ кратности $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ соответственно. Рассмотрим функцию $\psi(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$. Функция $\psi(z)$ аналитична в области D_Γ, за исключением точек $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_m$.

В достаточно малой окрестности точки a_i: $U_{\varepsilon_i}(a_i) = \{z : |z - a_i| < \varepsilon_i\}$, $\varepsilon_i > 0$, функцию $f(z)$ разложим в ряд Тейлора. Разложение имеет вид

$$f(z) = (z - a_i)^{\alpha_i} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^i (z - a_i)^k, \quad a_0^i \neq 0, \quad |z - a_i| < \varepsilon_i.$$

Тогда

$$f'(z) = \alpha_i (z - a_i)^{\alpha_i - 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^i (z - a_i)^k + (z - a_i)^{\alpha_i} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^i \cdot k (z - a_i)^{k-1}.$$

Тем самым

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z-a_i)^{\alpha_i-1}}{(z-a_i)^{\alpha_i}} \cdot \frac{\left[\alpha_i \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^i (z-a_i)^k + (z-a_i) \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^i \cdot k(z-a_i)^{k-1}\right]}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^i (z-a_i)^k}$$

$$= \frac{1}{z-a_i} \cdot F(z).$$

Функция $F(z) \in A(U_{\varepsilon_i}(a_i))$, $F(a_i) = \alpha_i$, поэтому $\operatorname*{Res}\limits_{z=a_i} \dfrac{f'(z)}{f(z)} = \alpha_i$.

Рассмотрим функцию $\psi(z)$ в достаточно малой окрестности точки b_i : $0 < |z - b_i| < \delta_i$. Из условий, наложенных на функцию $f(z)$, ее разложение в ряд Лорана в указанной окрестности имеет вид

$$f(z) = (z-b_i)^{-\beta_i} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^i (z-b_i)^k, \quad c_0^i \neq 0,$$

тогда

$$f'(z) = -\beta_i (z-b_i)^{-\beta_i-1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^i (z-b_i)^k + (z-b_i)^{-\beta_i} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^i \cdot k(z-b_i)^{k-1}.$$

Тем самым

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z-b_i)^{-\beta_i}\left[-\beta_i(z-b_i)^{-1} \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^i (z-b_i)^k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^i \cdot k(z-b_i)^{k-1}\right]}{(z-b_i)^{-\beta_i} \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^i (z-b_i)^k}.$$

Окончательно, $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \dfrac{-\beta_i}{z-b_i} + F_1(z)$, где функция $F_1(z) \in A(|z-b_i| < \delta_i)$. Тогда $\operatorname*{Res}\limits_{z=b_i} \dfrac{f'(z)}{f(z)} = -\beta_i$.

По теореме о вычетах интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\,d\xi=\sum_{\substack{i=1,n\\ j=1,m}}\operatorname*{Res}_{\substack{z=a_i\\ z=b_i}}\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Обозначим через $N=N_f$ полное число нулей функции $f(z)$ внутри D_Γ, через $P=P_f$ – полное число полюсов соответственно с учетом кратности нулей и полюсов. Интеграл $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\,d\xi$ называется *логарифмическим вычетом* функции $f(z)$ по кривой Γ (относительно контура Γ). Тем самым мы доказали теорему:

Теорема. *Логарифмический вычет функции $f(z)$ по кривой Γ равен разности между числом нулей и числом полюсов функции $f(z)$, содержащихся внутри области D_Γ, т. е.*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\,d\xi=N_f-P_f.$$

По условию $f(z)\neq 0$, $z\in\Gamma$; тогда $\dfrac{f'(z)}{f(z)}=(\operatorname{Ln}f(z))'_{(k)}$, $z\in\Gamma$, где $(\operatorname{Ln}f(z))_{(k)}$ – k-я ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}f(z)$. Напомним, что $(\operatorname{Ln}f(z))_{(k)}=\ln|f(z)|+i\arg f(z)+2\pi ki$.

Пусть точка $z_0\in\Gamma$ и $\Phi_0=\arg f(z)$ в точке z_0, а $\Phi_1=\arg f(z)$ в точке z_0 после однократного обхода по кривой Γ из точки z_0 в z_0. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\,d\xi=\frac{\Phi_1-\Phi_0}{2\pi}=\left.\frac{\operatorname{Var}\arg f(z)}{2\pi}\right|_{\Gamma}.$$

Приращение аргумента $\Phi_1-\Phi_0$ функции $f(z)$ называют вариацией аргумента функции при обходе по кривой Γ и обозначают $\operatorname{Var}\arg f(z)\Big|_{\Gamma}=\Phi_1-\Phi_0$.

В терминах вариации аргумента функции $f(z)$ данная теорема носит название *принцип аргумента.*

Теорема (принцип аргумента). *Пусть функция* $f(z) \in A(\overline{D_\Gamma}$ " $\{b_1, b_2, \dots, b_m\})$, *где* $b_1, b_2, \dots, b_m \in D_\Gamma$, $b_1, b_2, \dots, b_m$ – *полюсы функции* $f(z)$, P_f – *полное число полюсов с учетом кратности. Пусть также Функция* $f(z) \neq 0$, $z \in \Gamma$, *точки* $a_1, a_2, \dots, a_n \in D_\Gamma$ *являются нулями* $f(z)$, N_f – *полное число нулей. Тогда логарифмический вычет равен*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\,d\xi = \left.\frac{\operatorname{Var}\arg f(z)}{2\pi}\right|_\Gamma.$$

Применим принцип аргумента при доказательстве следующей теоремы.

Теорема Руше. *Пусть функции* $f(z) \in A(\overline{D})$, $\varphi(z) \in A(\overline{D})$, *область* D – *ограниченная область, граница* ∂D – *контур. На границе* ∂D *справедливо неравенство*

$$|f(z)| > |\varphi(z)|, \quad z \in \partial D;$$

тогда $N_{f+\varphi} = N_f$ *(*$N_{f+\varphi}$ *и* N_f – *полное число нулей функций внутри области* D*).*

Доказательство. Так как при $z \in \partial D$ справедливо неравенство $|f(z)| > |\varphi(z)|$, то $|f(z)| > 0$, $z \in \partial D$ и $|f(z) + \varphi(z)| \geqslant \big||f(z)| - |\varphi(z)|\big| > 0$. Применим принцип аргумента к функциям $f(z) + \varphi(z)$ и $f(z)$. Имеем

$$N_{f+\varphi} = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}\arg(f+\varphi)\Big|_{\partial D}, \qquad N_f = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}\arg f\Big|_{\partial D}.$$

Рассмотрим разность $N_{f+\varphi} - N_f$:

$$N_{f+\varphi} - N_f = \frac{1}{2\pi}\left[\operatorname{Var}\arg(f+\varphi) - \operatorname{Var}\arg f\right] = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}\arg\left(\frac{f+\varphi}{f}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}\arg\left(1 + \frac{\varphi}{f}\right).$$

Пусть вектор $w(z)$ равен $1+\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$; тогда $|w(z)-1| = \left|\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}\right| < 1$, если $z \in \partial D$. Следовательно, когда вектор z описывает кривую ∂D, вектор $w(z)$ описывает замкнутую кривую γ (которая, вообще говоря, может быть и одной точкой), целиком лежащую внутри окружности единичного радиуса с центром в точке 1 (рис. 28).

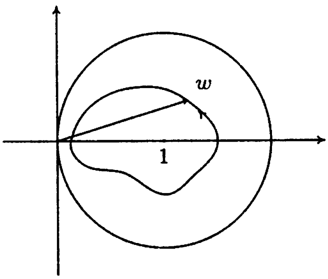

Рис. 28

Поэтому вектор $w(z)$ не обходит точку 0, т. е. $\operatorname{Var}\arg w\big|_\gamma = 0$, тем самым $N_{f+\varphi} = N_f$. Теорема доказана.

Следствие 1 (основная теорема алгебры). На комплексной плоскости любой многочлен $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0 \neq 0$, имеет ровно n нулей.

Доказательство. Взяв достаточно большое $R > 0$, будем иметь, что на окружности $|z| = R$ справедливо неравенство

$$|a_0 z^n| > |a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n|.$$

Применяя теорему Руше к функциям $a_0 z^n$ и $P(z)$, получим, что функции $a_0 z^n$ и $P(z)$ имеют одно и то же число нулей в области $|z| > R$, но функция $a_0 z^n$ имеет n нулей с учетом кратности.

$\boxed{\text{Задача 37.}}$ Доказать, что уравнение

$$a_0 + a_1\cos\varphi + a_2\cos 2\varphi + \ldots + a_n\cos n\varphi = 0,\ 0 < a_0 < a_1 < \ldots < a_n,$$

имеет $2n$ различных нулей в интервале $0 < \varphi < 2\pi$.

Следствие 2. Пусть функция $f(z) \in A(D)$ и однолистна, тогда $f'(z) \neq 0$ для любой точки $z \in D$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. что существует точка $z_0 \in D$ такая, что $f'(z_0) = 0$. Существует окрестность $U_\delta(z_0)$, $\delta > 0$, такая, что $f'(z) \neq 0$, $z \in U_\delta(z_0)$, $z \neq z_0$ (рис. 29).

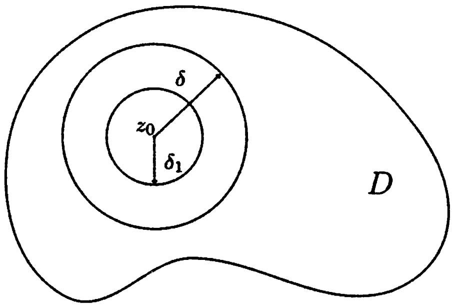

Рис. 29

Если бы нельзя было выбрать такую окрестность, то существовала бы последовательность точек $\{z_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, $z_i \neq z_j$, $f'(z_n) = 0$. По теореме единственности для аналитических функций отсюда следовало бы, что $f'(z) \equiv 0$, $z \in U_\delta(z_0)$. Это противоречит однолистности функции $f(z)$.

Разложим функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в $U_\delta(z_0)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

$k \geqslant 2$, $a_k \neq 0$, $a_1 = 0 = f'(z_0)$. Введем функцию $\varphi(z) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Можно выбрать окрестность $U_{\delta_1}(z_0)$, $0 < \delta_1 < \delta$, такую, что $\varphi(z) \neq 0$, $z \in \overline{U_{\delta_1}(z_0)}$, $z \neq z_0$. Доказательство этого факта аналогично предыдущему. Обозначим $\min\limits_{|z-z_0|=\delta_1} |\varphi(z)| = m > 0$. Пусть $0 < |\alpha| < m$. Рассмотрим в $U_{\delta_1}(z_0)$ две функции $\varphi(z)$ и $\varphi(z) + \alpha$. На границе $|z - z_0| = \delta_1$ справедливо неравенство $|\varphi(z)| > |\alpha|$, поэтому по теореме Руше функции $\varphi(z)$ и $\varphi(z) + \alpha$ имеют одинаковое число нулей в окрестности $U_{\delta_1}(z_0)$. Функция $\varphi(z)$ имеет, по крайней мере, два нуля с учетом кратности в точке z_0, поэтому функция $\varphi(z) + \alpha$ в окрестности $U_{\delta_1}(z_0)$ имеет не менее двух нулей z_1 и z_2. Покажем, что z_1 и z_2 различны и $z_1 \neq z_0$, $z_2 \neq z_0$. Если бы z_1 или z_2 совпадали с z_0, то $\alpha = 0$, но это не так. Предположим, что точка z_1 – нуль кратности большей или равной двум. Тогда в окрестности точки z_1 функция $\varphi(z) + \alpha = (z - z_1)^2\psi(z)$, где функция $\psi(z) \in A(U_\varepsilon(z_1))$, $\varepsilon > 0$. Следовательно, для функции $f(z)$ справедливо представление $f(z) = a_0 - \alpha + (z - z_1)^2\psi(z)$, а тогда $f'(z_1) = 0$, но точка $z_1 \in U_{\delta_1}(z_0) \subset U_\delta(z_0)$, в окрестности $U_\delta(z_0)$ $f'(z) \neq 0$, $z \neq z_0$. Итак, существуют по крайней мере две точки $z_1 \neq z_2$ такие, что $\varphi(z_1) + \alpha = \varphi(z_2) + \alpha = 0$, а тогда $f(z_1) = f(z_2)$, что противоречит однолистности функции $f(z)$. Следствие доказано.

Следствие 3 (теорема Гурвица). Пусть задана последовательность функций $\{f_n(z)\}$, $f_n(z) \in A(D)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, и пусть последовательность внутри области равномерно сходится к функции $f(z) \not\equiv 0$, $z \in D$. Тогда для любого контура $\Gamma \subset D$, $D_\Gamma \subset D$, и не проходящего через нули $f(z)$, существует число $n_0 = n_0(\Gamma)$ такое, что для любого $n \geqslant n_0(\Gamma)$ число нулей $N_{f_n} = N_f$ в D_Γ.

Доказательство. Пусть $m = \min\limits_{z\in\Gamma} |f(z)| > 0$ и $0 < \mu < m$. В силу равномерной сходимости внутри области D (Γ - компакт) последовательности $\{f_n(z)\}$ существует число $n_0 = n_0(\Gamma)$ такое, что для любого $n \geqslant n_0(\Gamma)$ справедливо неравенство

$$\left|f_n(z) - f(z)\right|_\Gamma < \mu.$$

По теореме Руше отсюда следует, что $N_f = N_{f+(f_n-f)} = N_{f_n}$ (число нулей внутри D_Γ). Теорема доказана.

Пример на теорему Руше.

Рассмотрим многочлен $P(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$. Пусть $f(z) = -4z^5$, $\varphi(z) = z^8 + z^2 - 1$. На окружности $|z| = 1$ справедливы неравенства $|\varphi(z)| \leqslant 3$, $|f(z)| = 4$. По теореме Руше функции $f(z)$ и $f(z) + \varphi(z) = P(z)$ имеют внутри единичного круга $|z| < 1$ одинаковое число нулей, а именно 5.

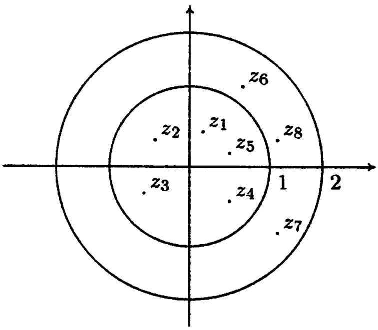

Рис. 30

Положим $f(z) = z^8$, $\varphi(z) = -4z^5 + z^2 - 1$. На окружности $|z| = 2$ справедливы неравенства

$$|\varphi(z)| \leqslant 1 + 2^2 + 2^7 < 2^8, \quad |f(z)| = 2^8.$$

По теореме Руше многочлен $P(z)$ имеет внутри круга $|z| < 2$ ровно 8 нулей. Тем самым в области $1 \leqslant |z| < 2$ у многочлена $P(z)$ три нуля (рис. 30).

13 лекция

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Ранее, рассматривая дифференцируемость функции $f(z)$ в точке z_0, мы дали определение конформного отображения в точке z_0, а именно: непрерывное отображение $f(z)$ является конформным в точке z_0, если оно сохраняет углы по величине и по направлению между любыми двумя гладкими кривыми, проходящими через эту точку. Было показано, что если функция $f(z)$ аналитична в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то в этой точке функция $f(z)$ осуществляет конформное отображение.

Рассмотрим функцию $f(z)$, аналитическую в точке z_0. Из аналитичности функции $f(z)$ в точке следует ее аналитичность в некоторой окрестности $U_\varepsilon(z_0) = \{|z - z_0| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Пусть $f'(z_0) \neq 0$. Покажем, что тогда функция $f(z)$ некоторое открытое множество, содержащее точку z_0, переводит в некоторую окрестность точки $w_0 = f(z_0)$, причем отображение взаимно-однозначное. Таким образом, справедливо

Утверждение. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в точке z_0, $f'(z_0) \neq 0$; тогда функция $f(z)$ локально однолистна и некоторое открытое множество, содержащее точку z_0, отображает на некоторую окрестность точки $w_0 = f(z_0)$.*

Докажем это утверждение. Так как функция $f(z)$ аналитична в $U_\varepsilon(z_0)$, $\varepsilon > 0$, то ее можно разложить в ряд Тейлора в этой окрестности

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \ |z - z_0| < \varepsilon,$$

$$a_0 = f(z_0) = w_0, \ a_1 = f'(z_0) \neq 0.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = (z-z_0)\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-1}$. Так как $a_1 \neq 0$, то существует $\delta : 0 < \delta < \varepsilon$ такое, что при $|z - z_0| \leqslant \delta$ функция $\varphi(z) \neq 0$, кроме точки $z = z_0$, причем z_0 – нуль 1 порядка.

Пусть $m = \min\limits_{|z-z_0|=\delta} |\varphi(z)| > 0$, а α – любое комплексное число, такое, что $0 < |\alpha| < m$. По теореме Руше функция $\varphi(z)+\alpha$ имеет столько же нулей в области $|z-z_0| < \delta$, сколько и функция $\varphi(z)$. То есть функция $\varphi(z) + \alpha$ имеет один нуль $z_1 \neq z_0$, $|z_1 - z_0| < \delta$. Тогда $f(z_1) = \varphi(z_1)+a_0 = a_0 - \alpha = w_0 - \alpha$. Тем самым мы показали, что для любого $\alpha : 0 < |\alpha| < m$ существует прообраз точки $z_1 : f(z_1) = w_0-\alpha$. Или, что то же самое, окрестность точки $w_0 : |w - w_0| < |m|$ имеет прообраз в окрестности $|z - z_0| < \delta$, отображение взаимно-однозначное. В силу аналитичности функции $f(z)$ в области $|z - z_0| < \delta$ прообраз открытого множества есть открытое множество. Утверждение доказано.

Отсюда как следствие вытекает

Теорема. *Пусть функция $f(z) \in A(D)$, D - область, $f'(z) \neq 0$, $z \in D$. Тогда функция $f(z)$ область D переводит в область $G = f(D)$ - образ D.*

В самом деле, мы показали, что $f(D)$ – множество открытое, а связность $f(D)$ следует из того, что аналитическая функция переводит непрерывную кривую в непрерывную кривую.

Не нужно думать, что взаимно-однозначное соответствие сохраняется, если во всей области D $f'(z) \neq 0$. Например, рассмотрим $f(z) = z^2$, $D = \{-\pi/4 < \arg z < \pi\}$ (рис. 31).

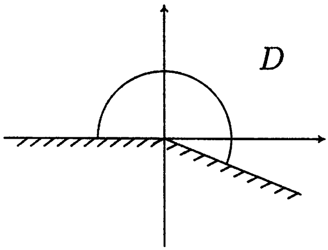

Рис. 31

В этой области $f'(z) = 2z \neq 0$, $z \in D$, но функция $f(z)$ не является однолистной:

$$f\left(e^{-i\frac{\pi}{8}}\right) = f\left(e^{-i\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)}\right).$$

Мы показали, что если $f'(z) \neq 0$, $z \in D$, то взаимно-однозначное соответствие – локальное свойство. Поэтому, в дальнейшем, мы под *конформным отображением области D на областъ G* будем понимать взаимно-однозначное непрерывное отображение, сохраняющее углы по величине и по направлению.

В 1936 году Д.Е. Меньшов [7] доказал теорему, что если функция $f(z)$ осуществляет конформное отображение области D на область G, то $f(z) \in A(D)$ (теорема без доказательства).

С другой стороны, мы получим, что если $f(z) \in A(D)$ и однолистна, то $f'(z) \neq 0$, т. е. она осуществляет конформное отображение области на область.

Итак:

I. Функция $f(z)$ дает конформное отображение области D на область G тогда и только тогда, когда $f(z) \in A(D)$ и однолистна.

II. Однолистная аналитическая функция $w = f(z)$ отображает область D на область $G = f(D)$ конформно, при этом обратная функция $z = f^{-1}(w) \in A(G)$ и также дает конформное отображение области G на область D.

В теории топологических пространств показывается, что *гомеоморфное отображение* (взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное) отображает n-связную область на n-связную область расширенной комплексной плоскости. В частности, конформное отображение односвязную область переводит в односвязную. Например, нельзя конформно отобразить круг на кольцо.

Возникает вопрос, а всегда ли есть конформное отображение области на область с сохранением связности. В случае, когда область односвязная, ответ дает теорема Римана.

Теорема Римана *(без доказательства). Пусть D – односвязная область расширенной комплексной плоскости, граница которой состоит более чем из одной точки. Тогда существует конформное отображение области D на внутренность единичного круга.*

Требование, чтобы граница области состояла более чем из одной точки, по существу. Например, рассмотрим область $D = \mathbb{C}$ – комплексная плоскость. Как область в расширенной комплексной плоскости она имеет единственную граничную точку $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$. Не существует конформного отображения $\mathbb{C}$ на внутренность единичного круга $|w| < 1$. Если бы это было так, то аналитическая функция $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, была бы на всей плоскости $\mathbb{C}$ ограниченной по модулю. По теореме Лиувилля она должна быть константой. Получили противоречие. Второй пример: пусть область $D = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Область D как область в $\overline{\mathbb{C}}$ имеет две граничные точки, а как область в $\mathbb{C}$ имеет одну граничную точку. Не существует конформного отображения, переводящего область D на $|w| < 1$. Если бы это было так, то существовала бы аналитическая функция $f(z)$, для которой точка z_0 – изолированная особая точка. Так как функция $f(z)$ ограничена по модулю, то z_0 – устранимая точка, но тогда $f(z) \equiv const$. Опять пришли к противоречию.

Возникает второй вопрос: сколько существует различных конформных отображений области на область с сохранением связности. Вообще говоря, бесконечно много. Тем не менее, справедлива теорема единственности:

Теорема единственности Римана *(без доказательства). Существует единственная функция $f(z)$, конформно отображающая односвязную область D, граница которой имеет более одной точки, на внутренность единичного круга. При этом*

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) > 0, \quad z_0 \in D.$$

$\boxed{\text{Задача 38.}}$ Можно ли конформно отобразить произвольное кольцо $0 < r_1 < |z| < r_2$ на произвольное кольцо $0 < R_1 < |z| < R_2$?

$\boxed{\text{Задача 39.}}$ При каких условиях на r_1, r_2, R_1, R_2 существует конформное отображение кольца $0 < r_1 < |z| < r_2$ на кольцо $0 < R_1 < |z| < R_2$? Определить вид функции, дающей такое отображение.

Основные принципы конформых отображений

Принцип соответствия границ. Пусть ограниченные области D и G ограничены замкнутыми жордановыми кусочно-гладкими контурами ∂D и ∂G соответственно. Пусть функция $f(z) \in A(D) \cap C(\overline{D})$ и отображает взаимно-однозначно границу ∂D на границу ∂G с сохранением обхода по границе ∂D; тогда функция $f(z)$ конформно отображает область D на область G (рис. 32).

Доказательство. Пусть $w_1 \in G$, $w_2 \notin \overline{G}$. Рассмотрим две функции $F_1(z) = f(z) - w_1$, $F_2(z) = f(z) - w_2$. Когда z пробегает границу ∂D в данном направлении, вектор $f(z) - w_1$ обходит границу ∂G один раз в том же направлении, вектор $f(z) - w_1$ повернется на угол 2π. Аналогично, вектор $f(z) - w_2$ обойдет границу ∂G один раз, но аргумент вектора приращения не получит, поэтому

$$\left.\frac{\operatorname{Var}\arg F_1(z)}{2\pi}\right|_{\partial D} = 1, \qquad \left.\frac{\operatorname{Var}\arg F_2(z)}{2\pi}\right|_{\partial D} = 0.$$

Так как функции $F_1(z)$,$F_2(z) \in A(D) \cap C(\overline{D})$,$F_1(z) \neq 0$,$F_2(z) \neq 0$, $z \in \partial D$, то в силу принципа аргумента функция $F_1(z)$ имеет внутри области D один нуль, функция $F_2(z)$ внутри области D в нуль не обращается. Это означает, что уравнение $f(z) = w_1$ имеет единственное решение, $f(z) = w_2$ решений не имеет. Тем самым область D отображается на область G и при этом отображение конформное.

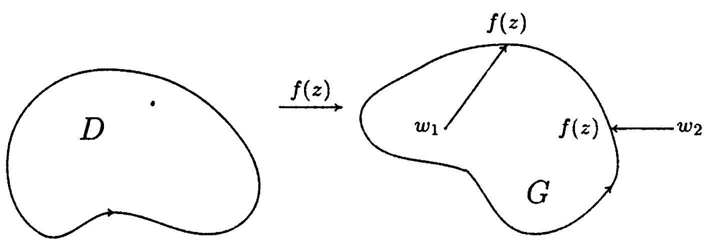

Рис. 32

Теорема *(без доказательства.) Пусть ограниченная область D с границей ∂D (контур) отображается конформно на ограниченную область G с границей ∂G (контур). Тогда $f(z) \in C(\partial D)$ и осуществляет взаимно-однозначное отображение ∂D на ∂G с сохранением направления обхода по границам.*

Эта теорема в каком-то смысле обратная предыдущей.

Принцип симметрии Римана-Шварца

Пусть область D такова, что интервал γ действительной оси входит в границу области D, и функция $f(z) \in A(D) \cap C(\gamma)$. Пусть также D^* – область, симметричная с D относительно γ, $D \cap D^* = \varnothing$. Если $f(\gamma)$ принадлежит отрезку действительной оси, то функция $f(z)$ аналитически продолжаема в область D^* через γ. Таким образом, существует функция (см. рис. 33)

$$F(z) \in A(D \cup \gamma \cup D^*), \quad F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \cup \gamma, \\ \overline{f(\overline{z})}, & z \in D^*. \end{cases}$$

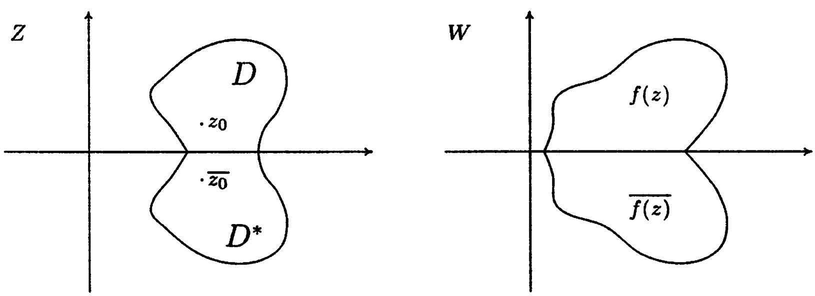

Рис. 33

Замечание. Условие $D \cap D^* = \varnothing$ дает однозначное аналитическое продолжение. В ином случае аналитическое продолжение может быть многозначным.

Доказательство. Пусть точка $z_0 \in D$; тогда существует окрестность $U_\varepsilon(z_0)$, $\varepsilon > 0$, такая, что в ней функцию $f(z)$ можно разложить в ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < \varepsilon.$$

Введем функцию $\widehat{f}(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \overline{a}_n (z - \overline{z}_0)^n$. Так как ряд сходится в $U_\varepsilon(\overline{z}_0)$, то $\widehat{f}(z)$ аналитична в $U_\varepsilon(\overline{z}_0)$, а так как точка z_0 – любая из области D, то $\widehat{f}(z) \in A(D^*)$. Очевидно

$$\widehat{f}(\overline{z}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a}_n (\overline{z} - \overline{z}_0)^n = \overline{f(z)}.$$

При $z = x \in \gamma$ имеем $\overline{f(x)} = \widehat{f}(x) = f(x)$. Таким образом, на интервале γ функции $f(z)$ и $\widehat{f}(z)$ совпадают. Можем применить принцип непрерывности, из которого следует, что $\widehat{f}(z)$ есть аналитическое продолжение $f(z)$ в область D через γ.

14 лекция

ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЕ НЕВЫРОЖДЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА

Будем рассматривать расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$. Скажем, что две кривые Γ_1 и Γ_2 в бесконечно удаленной точке (∞) пересекаются под углом α, если при преобразовании $\frac{1}{z}$ образы кривых Γ_1' и Γ_2' пересекаются в точке 0 под углом α.

Дробно-линейной функцией или *дробно-линейным отображением* называется функция $w(z)$ вида

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

Если $ad - bc \neq 0$, то отображение называется невырожденным. Так как $w'(z) = \dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$, $z \neq -\dfrac{d}{c}$, $z \neq \infty$, то условие $ad - bc \neq 0$ необходимо, если мы рассматриваем конформное отображение. В дальнейшем будем рассматривать невырожденные дробно-линейные отображения.

Свойства дробно-линейных невырожденных функций

Свойство 1. Дробно-линейное невырожденное отображение конформно отображает расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ на себя.

1-й случай: $c = 0$; тогда по условию $a \neq 0$, $d \neq 0$ и

$w(z) = \dfrac{az}{d} + \dfrac{b}{d}$, $z = \left(w - \dfrac{b}{d}\right)\dfrac{d}{a}$. Таким образом, для любого $w \in \mathbb{C}$ существует единственное $z \in \mathbb{C}$ такое, что $w(z) = w$, т. е. отображение $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}$ взаимно-однозначное, при этом $z = \infty$ переходит в $w = \infty$, $w(z) \in A(\mathbb{C})$ и $w(z)$ – конформное отображение на $\mathbb{C}$. Покажем, что оно конформно на $\overline{\mathbb{C}}$. Так как $z = \infty$ переходит в $w = \infty$, то сделаем преобразование $z = \dfrac{1}{\xi}$, $w_1 = \dfrac{1}{w}$; тогда $w_1(\xi) = \dfrac{d\xi}{a + \xi b}$, но оно конформно в точке $\xi = 0$, следовательно, отображение $w(z)$ конформно в $\overline{\mathbb{C}}$.

2-й случай: $c \neq 0$, $w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ и $z = \dfrac{wd-b}{a-wc}$, $w \neq \dfrac{a}{c}$, $z \neq -\dfrac{d}{c}$. Если $z = \infty$, то $w = \dfrac{a}{c}$; если $z = -\dfrac{d}{c}$, то $w = \infty$. Отсюда следует, что отображение $w(z)$ – отображение взаимно-однозначное на $\overline{\mathbb{C}}$, $\overline{\mathbb{C}}$ переходит в $\overline{\mathbb{C}}$, $w(z) \in A(\mathbb{C} \setminus \{-d/c\})$. Покажем, что конформность сохраняется в точке $z = -\dfrac{d}{c}$, $z = \infty$. Если $z = -\dfrac{d}{c}$, то $w = \infty$. Сделаем преобразование $w_1 = \dfrac{1}{w}$, тогда $w_1 = \dfrac{cz+d}{az+b}$, но в точке $z = -\dfrac{d}{c}$ это преобразование конформно. Если $z = \infty$, то сделаем преобразование $z = \dfrac{1}{\xi}$; тогда $w = \dfrac{a+\xi b}{c+\xi d}$ – это преобразование в точке $\xi = 0$ конформно. Итак, первое свойство доказано.

Свойство 2. Образы трех различных точек, при условии, что образы различны, единственным образом определяют дробно-линейное невырожденное преобразование.

Пусть $z_i \neq z_j$, $w_i \neq w_j$, $i, j = 1, 2, 3$, где $w_i = w(z_i)$,

$w(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$. Распишем $\dfrac{w-w_1}{w-w_2}$:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}=\frac{\dfrac{az+b}{cz+d}-\dfrac{az_1+b}{cz_1+d}}{\dfrac{az+b}{cz+d}-\dfrac{az_2+b}{cz_2+d}}=\frac{ad(z-z_1)}{ad(z-z_2)}\cdot\frac{cz_2+d}{cz_1+d}.$$

Поэтому

$$\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\cdot\frac{cz_2+d}{cz_1+d}.$$

Окончательно

$$\boxed{\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}}.$$

Это соотношение называется *ангармоническим соотношением* (ангармоническое отношение).

Если $z_3=\infty$ или $w_3=\infty$, то полагают $\dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=1$ или $\dfrac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=1$.

Из ангармонического отношения следует, что отображение по трем различным прообразам и трем различным образам определено однозначно.

Свойство 3. При дробно-линейном невырожденном преобразовании прямые и окружности переходят либо в прямые, либо в окружности.

Уравнение прямой или окружности можно записать в виде

$$A(x^2+y^2)+2Bx+2Cy+D=0,$$

при этом, если $A=0$, то это уравнение прямой, если $A\neq 0$ и $B^2+C^2-AD>0$, то уравнение окружности.

Покажем, что при преобразовании $w(z) = \dfrac{1}{z}$, $z = x + iy$, утверждение справедливо. Перепишем уравнение в переменных z, $\overline{z}$:

$$
\begin{aligned}
&A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D \\
&= Az \cdot \overline{z} + 2B\left(\frac{z + \overline{z}}{2}\right) + 2C\left(\frac{z - \overline{z}}{2i}\right) + D \\
&= Az \cdot \overline{z} + \left(B + \frac{C}{i}\right)z + \left(B - \frac{C}{i}\right)\overline{z} + D = 0,
\end{aligned}
$$

коэффициенты при z и $\overline{z}$ взаимно сопряженные. В переменных w и $\overline{w}$ уравнение примет вид

$$
A\frac{1}{w \cdot \overline{w}} + \left(B + \frac{C}{i}\right)\frac{1}{w} + \left(B - \frac{C}{i}\right)\frac{1}{\overline{w}} + D = 0
$$

или

$$
Dw \cdot \overline{w} + \left(B - \frac{C}{i}\right)w + \left(B + \frac{C}{i}\right)\overline{w} + A = 0.
$$

Таким образом, если $D = 0$, то это уравнение прямой, если $D \neq 0$, то это уравнение окружности.

В общем случае, представив преобразование $w(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ как суперпозицию преобразований $w(z) = \dfrac{a}{c} - \dfrac{ad - bc}{c(cz + d)}$ и учитывая, что преобразование $\dfrac{1}{z}$ сохраняет рассмотренное выше свойство 3, и что умножение на константу и сдвиг на константу сохраняет это свойство, получим, что преобразование $w(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ также сохраняет указанное свойство.

Свойство 4. Симметричные точки относительно прямой или окружности при дробно-линейном невырожденном преобразовании переходят в симметричные точки.

Две точки z и z^* *симметричны относительно прямой* L, если эти точки лежат на прямой, перпендикулярной данной прямой L, и точки z, z^* равноудалены от L (понятие, хорошо известное из школьного курса планиметрии).

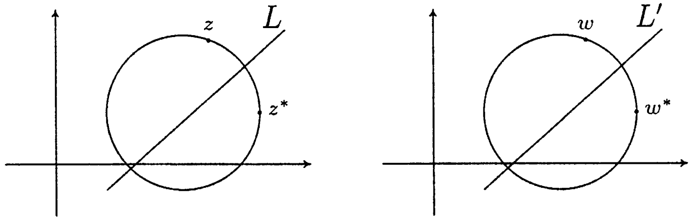

Рис. 34

Предположим, что прямая L с помощью преобразования $w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ переходит в прямую L', точка z переходит в точку w, точка z^* – в точку w^* (рис. 34). Точки w и w^* будут симметричными относительно L', так как в силу конформности отображения $w(z)$ прямые, проходящие через точки z и z^*, или любая окружность, проходящая через эти точки, ортогональны прямой L, и поэтому образы прямой и окружностей будут ортогональны L', а отсюда следует, что точки w и w^* симметричны относительно L'.

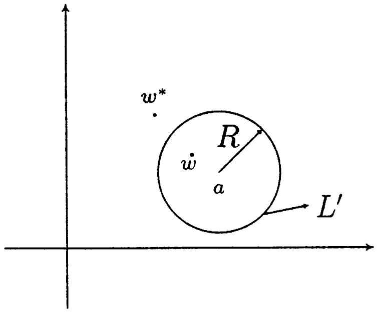

Рис. 35

Пусть теперь прямая L переходит в окружность L' при преобразовании $w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Тогда в силу конформности преобразования прямая или любая окружность, проходящая через точки z и z^*, имеют образы, ортогональные окружности L' и проходящие через точки w и w^* (рис. 35).

Определение. Точка w^* называется *симметричной точке* w *относительно окружности*, если прямая или любая окружность, проходящая через эти точки, ортогональна этой окружности.

Из определения следует, что точки, симметричные относительно прямой или окружности, переходят в симметричные точки относительно прямой или окружности. Покажем, что определение симметричных точек относительно окружности корректно, т. е. для данной точки всегда существует ей симметричная и она единственна (рис. 36). Пусть есть окружность $|z-a| = R$, точка z_0 и симметричная ей точка z_0^*.

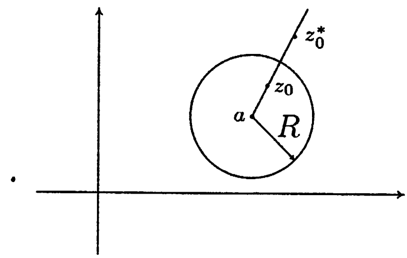

Рис. 36

Сделаем дробно-линейное невырожденное преобразование, при котором окружность перейдет в прямую $\operatorname{Im} w = 0$ – действительная прямая. Например, рассмотрим преобразование

$$z = a + R \cdot \frac{1+iw}{1-iw}.$$

При таком преобразовании точка $w = -1$ соответствует точке $z = a - iR$, точка $w = 1$ соответствует точке $z = a + iR$, точка

$w = 0$ соответствует точке $z = a + R$, т. е., на самом деле, преобразование $z = a + R \cdot \dfrac{1 + iw}{1 - iw}$ переводит окружность $|z - a| = R$ в действительную прямую $\operatorname{Im} w = 0$.

Пусть точка z_0 соответствует точке w_0; тогда z_0^* соответствует w_0^* – точке, симметричной с w_0 относительно прямой $\operatorname{Im} w = 0$, т. е. $w_0^* = \overline{w_0}$. Имеем

$$z_0 = a + R \cdot \frac{1 + iw_0}{1 - iw_0}, \quad z_0^* = a + R \cdot \frac{1 + i\overline{w_0}}{1 - i\overline{w_0}},$$

или

$$\overline{(z_0 - a)}(z_0^* - a) = R \cdot \frac{1 - i\overline{w_0}}{1 + i\overline{w_0}} \cdot R \cdot \frac{1 + i\overline{w_0}}{1 - i\overline{w_0}} = R^2.$$

Таким образом,

$$z_0^* = a + \frac{R^2}{\overline{z_0 - a}}.$$

Итак, симметричные точки определяются единственным образом по исходной точке, радиусу и центру данной окружности.

Из представления симметричной точки следует, что если точка z_0 лежит внутри круга, то точка z_0^* лежит вне круга.

Пусть $z_0 - a = e^{i\varphi}|z_0 - a|$; тогда $z_0^* - a = \dfrac{R^2 e^{i\varphi}}{|z_0 - a|}$, т. е. симметричая точка z_0^* расположена на том же луче, исходящем из центра, что и точка z_0. Точки, лежащие на окружности, симметричны себе, а бесконечно удаленная точка симметрична центру окружности.

Итак, дробно-линейное отображение симметричные точки переводит в симметричные.

Рассмотрим отображение $w(z) = a + \dfrac{R^2}{\overline{z - a}}$, которое называется *инверсией* относительно данной окружности $|z - a| = R$, т. е. отображение, переводящее точку в симметричную ей относительно окружности точку. В частности, если положить $R = 1$, $a = 0$, то отображение $w(z) = \dfrac{1}{\bar{z}} = \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}$ называется *инверсией* относительно единичной окружности, при этом внутренность окружности переходит во внешность.

Рассмотрим два примера дробно-линейных невырожденных преобразований, на которые мы дальше будем ссылаться.

Пример 1 (рис. 37). Найдем общий вид дробно-линейного отображения, переводящего верхнюю полуплоскость на внутренность круга $|w| < R$.

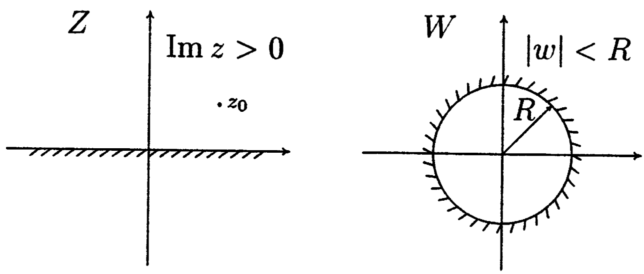

Рис. 37

Пусть точка z_0 переходит в точку $w_0 = 0$; тогда $\overline{z_0}$ перейдет в $w_0^* = \infty$, поэтому преобразование имеет вид $w(z) = \lambda \cdot \dfrac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}$. Воспользуется тем, что граница области при конформном преобразовании перейдет в границу, т. е. при $z = x$, $|w(z)| = R$. Имеем

$$R = |\lambda| \cdot \left|\frac{x - z_0}{x - \overline{z_0}}\right| = |\lambda|, \quad \lambda = Re^{i\varphi}, \quad w(z) = Re^{i\varphi} \cdot \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}$$

– общий вид дробно-линейного преобразования.

Пример 2. Найдем общий вид дробно-линейного отображения, переводящего круг $|z| < R$ в круг $|w| < R$ (рис. 38).

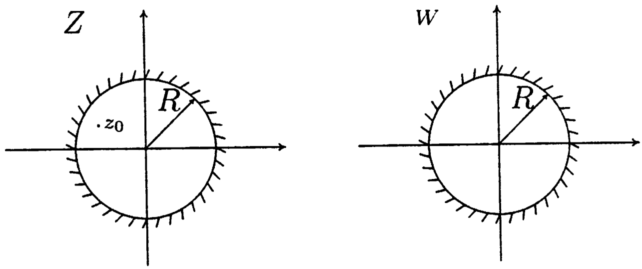

Рис. 38

Пусть точка z_0 переходит в центр круга $w_0 = 0$, тогда точка z_0^* перейдет в точку $w_0^* = \infty$. Преобразование будет иметь вид

$$w(z) = \lambda \cdot \frac{z - z_0}{z - z_0^*} = \lambda \cdot \frac{z - z_0}{z - \dfrac{R^2}{\overline{z_0}}} = \frac{z - z_0}{R^2 - z \cdot \overline{z_0}} \cdot \lambda_1, \qquad \lambda_1 = -\lambda \cdot \overline{z_0}.$$

Так как граница $|z| = R$ переходит в границу $|w| = R$, то

$$\left|w(Re^{i\varphi})\right| = R = |\lambda_1| \cdot \left|\frac{Re^{i\varphi} - z_0}{R^2 - Re^{i\varphi}\overline{z_0}}\right| = \frac{|\lambda_1|}{R} \cdot \left|\frac{Re^{i\varphi} - z_0}{Re^{-i\varphi} - \overline{z_0}}\right| = \frac{|\lambda_1|}{R}.$$

Поэтому

$$|\lambda_1| = R^2, \quad \lambda_1 = R^2 e^{i\theta}, \quad w(z) = e^{i\theta} \cdot R^2 \cdot \frac{z - z_0}{R^2 - z \cdot \overline{z_0}}$$

– общий вид дробно-линейного преобразования, переводящего круг $|z| < R$ в круг $|w| < R$.

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, ОСУЩЕСТВЛЯЕМЫЕ ФУНКЦИЕЙ ЖУКОВСКОГО, ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ (Z^N, E^Z, $\cos Z$, $\operatorname{tg} Z$)

15
лекция

Функция $w(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ называется *функцией Жуковского.* Н. Е. Жуковский подробно изучал свойства этой функции в задачах аэромеханики и гидродинамики.

Так как $w(z) = w(1/z)$, то на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функция $w(z)$ не однолистна, $w(z_1) = w(z_2)$, если $z_1 \cdot z_2 = 1$. Поэтому в области $|z| < 1$ или в области $|z| > 1$ функция $w(z)$ однолистна и образ этих областей одинаков. Границу круга $|z| < 1$ — $|z| = 1$ функция Жуковского отображает на отрезок $[-1, 1]$ действительной оси, обходящийся дважды (рис. 39)

$$|z| = 1, \quad z = e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad w(e^{i\varphi}) = \cos\varphi.$$

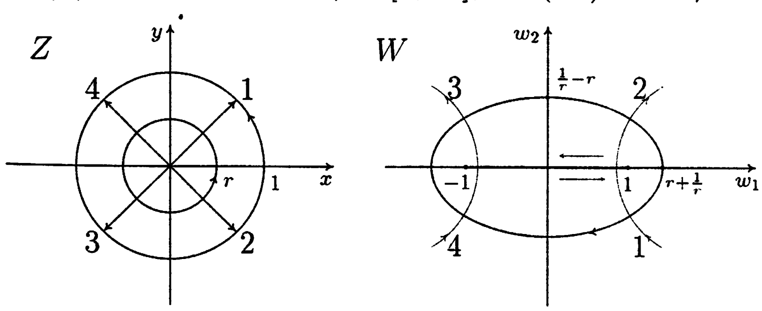

Рис. 39

Пусть $z = x + iy$, $w = w_1 + iw_2$. Внутренность единичного круга $|z| < 1$ переходит на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с выброшенным отрезком $[-1, 1]$:

$$|z| < 1 \to \mathbb{C} \setminus [-1, 1].$$

Рассмотрим окружность $|z| = r$, $0 < r < 1$, и найдем ее образ при отображении $w(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$. Если $|z| = r$, то $z = re^{i\varphi}$ и

$$\begin{aligned} w(re^{i\varphi}) &= \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{e^{-i\varphi}}{r}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(r\cos\varphi + \frac{1}{r}\cos\varphi\right) + i\frac{1}{2}\left(r\sin\varphi - \frac{1}{r}\sin\varphi\right) \end{aligned}$$

или

$$w_1 = \frac{1}{2}\cos\varphi\left(r + \frac{1}{r}\right), \quad w_2 = \frac{1}{2}\sin\varphi\left(r - \frac{1}{r}\right).$$

Когда точка z пробегает окружность $|z| = r$, ее образ $w(z)$ пробегает эллипс

$$\left(\frac{w_1}{\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)}\right)^2 + \left(\frac{w_2}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - r\right)}\right)^2 = 1$$

с фокусами в точках ± 1 и полуосями $\dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)$ и $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r} - r\right)$.

Рассмотрим точки, лежащие на радиусе единичной окружности, и их образ. Пусть $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$; тогда $z = re^{i\varphi}$, φ – фиксировано, $0 < r \leqslant 1$. Образ этого радиуса есть часть гиперболы

$$\left(\frac{w_1}{\cos\varphi}\right)^2 - \left(\frac{w_2}{\sin\varphi}\right)^2 = 1, \quad w_2 < 0,\ w_1 > 0.$$

Если рассмотреть радиус при $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < 0$, то его образ есть часть гиперболы, $w_1 > 0$, $w_2 > 0$. Аналогично, образ радиуса при $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ есть часть гиперболы, $w_1 < 0$, $w_2 < 0$, и образ радиуса при $-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$ есть часть гиперболы, $w_1 < 0$, $w_2 > 0$.

Таким образом, ортогональная сетка на плоскости z, состоящая из окружностей и радиусов, центры окружностей в начале координат, переходит в ортогональную сетку на плоскости w, состоящую из эллипсов и гипербол.

Отметим два часто рассматриваемых отображения областей.

1. Отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ с помощью функции Жуковского.

Это отображение переводит полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на всю комплексную плоскость с двумя выброшенными лучами: $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$ (рис. 40).

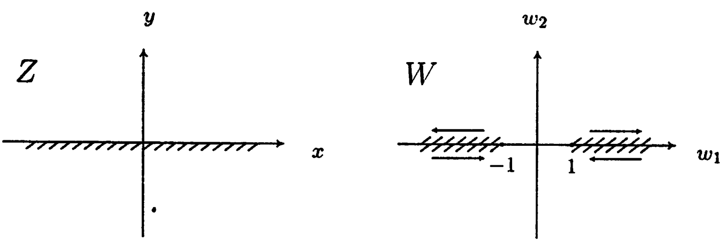

Рис. 40

При этом обратная функция $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$, имеющая две однозначные ветви, переводит область $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$ на две полуплоскости: одна ветвь переводит эту область на $\operatorname{Im} z > 0$, а другая ветвь – на $\operatorname{Im} z < 0$.

2. Отображение нижнего полукруга $\{|z| < 1\} \cap \{\operatorname{Im} z < 0\}$ с помощью функции Жуковского.

Отображение переводит полукруг на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. 41).

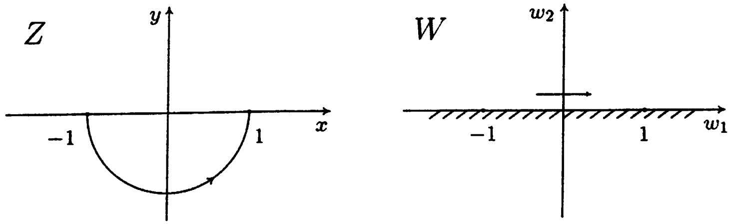

Рис. 41

Рассмотрим функцию $w(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. На всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функция не является однолистной, но можно разбить плоскость $\mathbb{C}$ на n областей однолистности функции z^n, например: область $D_k = \left\{z : \dfrac{2\pi}{n}(k-1) < \arg z < \dfrac{2\pi}{n}k\right\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ (рис. 42).

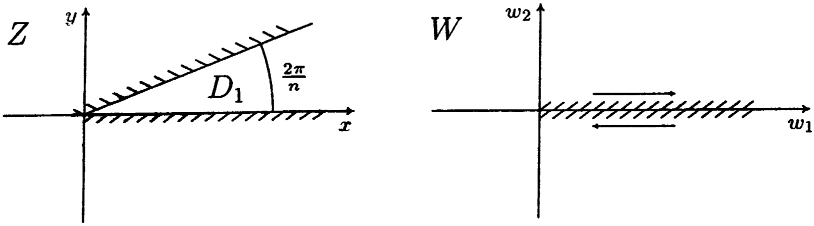

Рис. 42

Область D_k функция z^n конформно переводит на всю комплексную плоскость с выброшенным положительным лучем: $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. Если мы рассмотрим область $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{n}$, то функция z^n эту область переводит на верхнюю полуплоскость.

Перейдем к функции $w(z) = e^z$. Так как эта функция $2\pi i$ периодична, то на всей плоскости $\mathbb{C}$ она не однолистна. Комплексную плоскость $\mathbb{C}$ можно разбить на счетное число областей $D_k = \{z : 2\pi(k-1) < \operatorname{Im} z < 2\pi k\}$, $k \in \mathbb{Z}$ (множество целых чисел), на каждой из которых функция e^z однолистна.

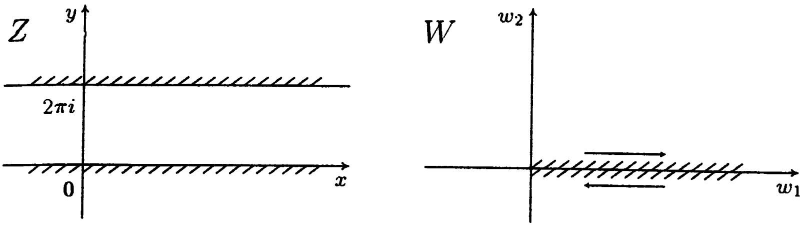

Рис. 43

Область D_k переводится на всю комплексную область с выброшенным положительным лучом – $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ (рис. 43). Если рассмотреть горизонтальную полосу: $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, то образ этой полосы есть верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Определим образы горизонтальных и вертикальных прямых, т. е. образы ортогональной сетки на плоскости $\mathbb{C}$. Горизонтальная прямая $y = c$ имеет образ $w = e^{x+ic} = e^x \cdot e^{ic}$. Образ этой прямой есть луч, образующий угол c с положительным лучом (рис. 44).

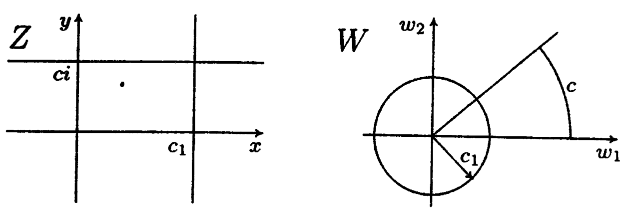

Рис. 44

Вертикальная прямая $x = c_1$ имеет образ $w = e^{c_1+iy}$, $|w| = e^{c_1}$ – окружность радиуса e^{c_1}. Когда y пробегает все значения из $(-\infty, +\infty)$, окружность пробегается счетное число раз. Рассмотрим прямоугольник со сторонами, параллельными осям x и y. Пусть $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$, при этом $0 < c < d < 2\pi$ (рис. 45).

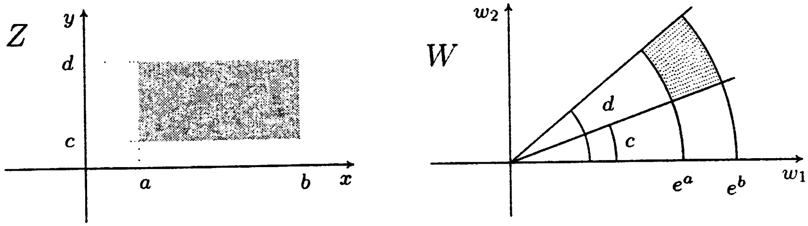

Рис. 45

При преобразовании e^z такой прямоугольник переходит в область, ограниченную двумя лучами: $\arg z = c$, $\arg z = d$ и двумя окружностями $|z| = e^a$, $|z| = e^b$. В частности, когда $c = 0$, $d = 2\pi$, то образ есть кольцо с разрезом по отрезку действительной оси $e^a \leqslant x \leqslant e^b$.

Рассмотрим функцию $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Так как мы рассмотрели функцию Жуковского и функцию e^z, то функцию $\cos z$ можно рассматривать как суперпозицию этих функций, и в соответствии с этим рассматривать отображение, осуществляемое функцией $\cos z$.

В силу периодичности функции $\cos z$, она не является однолистной на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Можно разбить комплексную плоскость $\mathbb{C}$ на счетное число областей D_k – вертикальные полосы: $\pi k < \operatorname{Re} z < \pi + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (рис. 46).

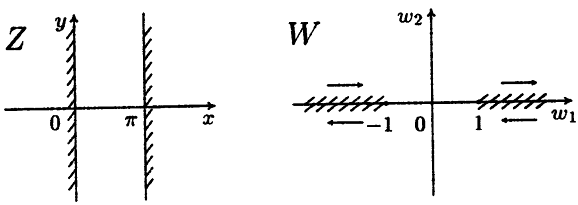

Рис. 46

Функция $\cos z$ каждую область D_k переводит на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с двумя выброшенными лучами:

$$D_k \to \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}.$$

Если рассмотреть нижнюю полуполосу – $\{(\operatorname{Im} z < 0), x \in (0, \pi)\}$, то функция $\cos z$ переводит ее на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Рассмотрим функцию $w(z) = \operatorname{tg} z$. В силу периодичности этой функции, рассмотрим функцию в вертикальной полосе – $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$ (рис. 47).

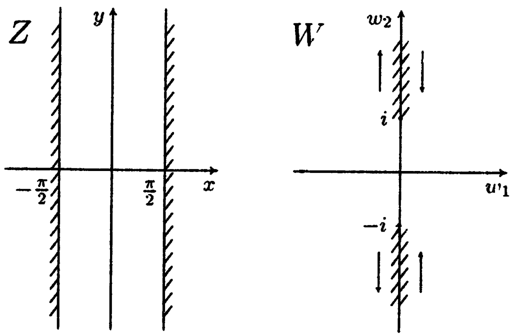

Рис. 47

Так как $\operatorname{tg} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \cdot \frac{1}{i}$, то правая часть границы полосы $z = \frac{\pi}{2} + iy$ переходит в $w = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + iy\right) = i \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}}$. Когда y пробегает все значения от $-\infty$ до $+\infty$, образ пробегает множество, лежащее на мнимой оси – два луча: $w_2 \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Таким образом, вертикальная полоса переходит на всю плоскость $\mathbb{C}$ с двумя выброшенными лучами — $\mathbb{C} \setminus \{w : w_2 \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$.

Если рассмотреть верхнюю полуплоскость – $\left\{\operatorname{Im} z > 0, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$, то функция $\cos z$ переводит ее на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ с выброшенным лучом $w_2 \in [1, +\infty)$ (рис. 48).

В заключение рассмотрим задачу о конформном отображении, где используем принцип симметрии Римана-Шварца.

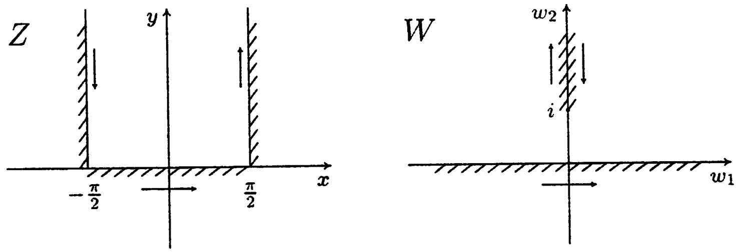

Рис. 48

Задача. Отобразить конформно область, так называемую внешность креста, $\mathbb{C} \setminus \{y = 0,\ x \in [-1, 1];\ y \in [-1, 1],\ x = 0\}$, на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. 49).

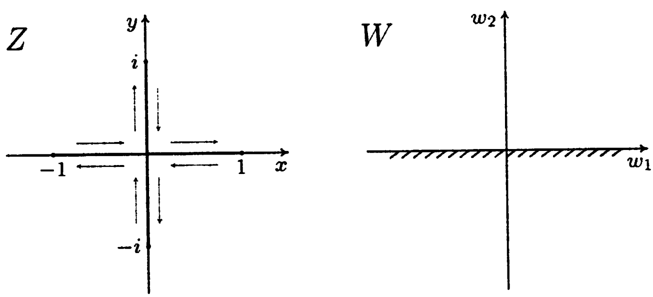

Рис. 49

Так как исходная область симметрична относительно действительной оси, и граница области должна перейти на действительную ось, то применим принцип симметрии Римана-Шварца. Рассмотрим область D_1, границей которой является действительная ось и отрезок по мнимой оси: $y \in [0, 1]$, $x = 0$. Применим к этой области последовательно преобразования: $w_1 = z^2$, $w_2 = w_1 + 1 = z^2 + 1$, $w_3 = \sqrt{w_2} = \sqrt{z^2 + 1}$ и возьмем ту ветвь, которая переводит образ на верхнюю полуплоскость. Итак, преобразование $w_3 = \sqrt{z^2 + 1}$ переводит область D_1 на верхнюю полуплоскость, а тогда исходная область – внешность креста – перейдет во всю плоскость с выброшенным отрезком $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ по действительной оси (рис. 50).

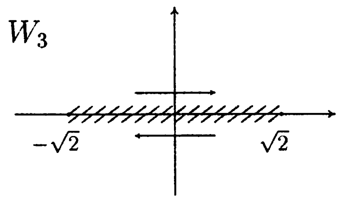

Рис. 50

Теперь, применив дробно-линейное преобразование $w_4 = \dfrac{\sqrt{2} - w_3}{\sqrt{2} + w_3}$, получим всю плоскость с выброшенным положительным лучом. И последнее преобразование $w = \sqrt{w_4}$ (берем ту ветвь, которая переводит всю плоскость с выброшенным лучем на верхнюю полуплоскость) дает нам окончательно преобразование (рис. 51)

$$w(z) = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{z^2+1}}{\sqrt{2} + \sqrt{z^2+1}}}.$$

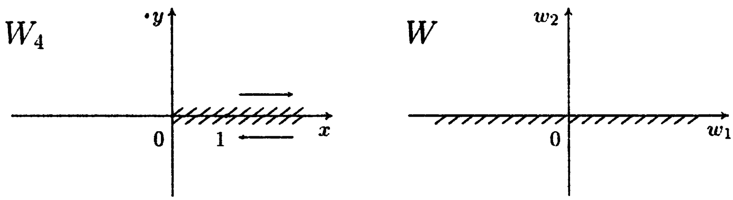

Рис. 51

16
лекция

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

О задаче Дирихле для оператора Лапласа мы уже говорили, когда рассматривали одно из следствий из принципа максимума модуля аналитической функции. Было показано, что если решение задачи Дирихле существует, то оно единственно. Сейчас пойдет речь о самом существовании решения.

Напомним постановку задачи: найти гармоническую функцию в области D, принимающую на границе области ∂D заданные непрерывные значения $h(\xi)$, $\xi \in \partial D$, или, что то же самое, найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую системе

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad u(x,y) = u(z), \quad z \in D, \\ u\big|_{\partial D} = h(\xi), \quad \xi \in \partial D, \quad h(\xi) \in C(\partial D). \end{cases}$$

Для произвольной области D задача Дирихле, вообще говоря, может и не иметь решения. В случае, когда D – односвязная, ограниченная область, граница которой ∂D – замкнутая, кусочно-гладкая, жорданова кривая, решение задачи Дирихле всегда существует. Для области $D = \{|z - a| < R\}$ (для круга) мы сейчас получим решение в явном виде.

Сначала покажем, что если есть гармоническая функция $u(x, y) = u(z)$ в замкнутом круге $|z - a| \leqslant R$, то ее можно восстановить внутри круга по значениям на его границе, $|z - a| = R$. Введем обозначения: $\xi = a + Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\xi \in \partial D =$

$\{|\xi - a| = R\}$, $z = x + iy = a + re^{i\theta}$, $0 \leqslant r < R$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $a = a_1 + ia_2$. Тогда

$$u(z) = u(x, y) = u(a_1 + r\cos\theta, a_2 + r\sin\theta) = u(r, \theta),$$
$$u(\xi) = u(a_1 + R\cos\varphi, a_2 + R\sin\varphi) = u(R, \varphi).$$

Так как круг – область односвязная, то по гармонической функции $u(z)$ в замкнутом круге $|z - a| \leqslant R$ можно построить аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $f(z) \in A(|z - a| \leqslant R)$.

Пусть z^* – точка, симметричная с точкой $z \in D$ относительно окружности $|\xi - a| = R$. Имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - a| = R} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - a| = R} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z^*}$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - a| = R} \frac{f(\xi)(z - z^*)\,d\xi}{(\xi - z)(\xi - z^*)}.$$

Мы применили интегральную формулу Коши для точки $z \in D$, а так как точка $z^* \notin \overline{D}$, то интеграл $\int\limits_{|\xi - a| = R} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z^*} = 0$.

Преобразуем выражение $\frac{z - z^*}{(\xi - z)(\xi - z^*)}$:

$$\frac{z - z^*}{(\xi - z)(\xi - z^*)} = \frac{z - a - \frac{R^2}{z - a}}{(\xi - z)(\xi - a - \frac{R^2}{z - a})}$$
$$= \frac{r^2 - R^2}{re^{-i\theta}\left(Re^{i\varphi} - re^{i\theta}\right)\left(Re^{i\varphi} - \frac{R^2}{r}e^{i\theta}\right)}$$
$$= \frac{R^2 - r^2}{Re^{i\varphi}\left(Re^{i(\varphi - \theta)} - r\right)\left(-r^2 + Re^{i(\theta - \varphi)}\right)}$$
$$= \frac{R^2 - r^2}{Re^{i\varphi}\left(R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi)\right)}.$$

Таким образом, выражение для $f(z)$ примет вид

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{Re^{i\varphi} i(R^2 - r^2) f(a + Re^{i\varphi})\,d\varphi}{Re^{i\varphi}\,(R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi))}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) f(a + Re^{i\varphi})\,d\varphi}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi)}\,.$$

Интеграл, стоящий справа, носит название *интеграл Пуассона*, а выражение $\dfrac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi)}$ называется *ядром интеграла Пуассона*. Так же, как и интеграл Коши, интеграл Пуассона дает выражение аналитической функции внутри области через значение функции на границе области. Но в отличие от интеграла Коши, множитель при $f(R, \varphi)$ есть действительная функция – ядро Пуассона.

Воспользуемся этим и отделим действительную и мнимую части функции $f(z)$. Таким образом,

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) u(R, \varphi)\,d\varphi}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi)}\,.$$

Отметим некоторые свойства ядра Пуассона.

1. При $0 \leqslant r < R$

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi)} > 0,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)\,d\varphi}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi)} = 1.$$

2.

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi)} = \operatorname{Re} \frac{Re^{i\varphi} + z - a}{Re^{i\varphi} - (z - a)}.$$

Так как функция $\dfrac{Re^{i\varphi} + z - a}{Re^{i\varphi} - (z - a)} \in A(|z - a| < R)$, то ядро Пуассона есть гармоническая функция внутри круга $|z-a| < R$, т. е. при фиксированных R, φ и в переменных r, θ оператор Лапласа

$$\Delta\left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi)}\right) = 0.$$

Переходим к задаче Дирихле для круга: найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую системе уравнений:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & z \in \{|\xi - a| < R\}, \\ u\big|_{\partial D} = h(\xi), & \xi \in \partial D, \quad h(\xi) \in C(|\xi - a| = R). \end{cases}$$

Замечание. Условие $u\big|_{\partial D} = h(\xi)$ подразумевает, что функция $u(x, y) = u(z) \in C(\overline{D})$, $\lim\limits_{\substack{r \to R \\ \theta \to \varphi}} u(r, \theta) = h(R, \varphi)$.

Полученное нами представление гармонической функции через интеграл Пуассона, подсказывает, что решение задачи Дирихле следует искать в виде

$$u(z) = u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) h(R, \varphi)\, d\varphi}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi)}, \qquad 0 \leqslant r < R.$$

В самом деле, покажем, что интеграл справа дает решение задачи Дирихле, т. е. нужно показать, что $u(r, \theta)$ гармонична внутри круга и $\lim\limits_{\substack{r \to R \\ \theta \to \varphi}} u(r, \theta) = h(R, \varphi)$.

Доказательство. Так как под знаком интеграла стоит функция $\dfrac{(R^2-r^2)h(R,\varphi)}{R^2+r^2-2rR\cos(\theta-\varphi)}$, непрерывная по φ и дважды непрерывно-дифференцируемая по r и θ, $0 \leqslant r < R$, $\theta \in [0, 2\pi]$, то функция $u(r,\theta)$ дважды непрерывно-дифференцируема и ее производные можно вычислять как интегралы от производных (см., например, [4]). Оператор Лапласа в переменных x, y или в переменных r, θ имеет вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Отсюда

$$\Delta u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta\left(\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2rR\cos(\theta-\varphi)}\right) h(R,\varphi)\,d\varphi = 0.$$

Тем самым, функция $u(r,\theta)$ гармонична внутри круга $|z-a| < R$.

Покажем, что $\lim\limits_{\substack{r\to R\\ \theta\to\varphi_0}} u(r,\theta) = h(R,\varphi_0)$, $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$. Из свойств ядра Пуассона следует, что

$$h(R,\varphi_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2rR\cos(\theta-\varphi)} h(R,\varphi_0)\,d\varphi.$$

Рассмотрим разность $h(R,\varphi_0) - u(r,\theta)$:

$$h(R,\varphi_0) - u(r,\theta)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2rR\cos(\theta-\varphi)} \left[h(R,\varphi_0) - h(R,\varphi)\right] d\varphi.$$

Оценим интеграл, стоящий справа. Так как функция $h(R, \varphi) \in C([0, 2\pi])$, то

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_1 > 0, \forall \varphi \in [0, 2\pi] :$$
$$|\varphi - \varphi_0| < \delta_1 \to |h(R, \varphi_0) - h(R, \varphi)| < \varepsilon/2.$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, 1)$ и

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\varphi-\varphi_0| \leqslant \delta} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi)} [h(R, \varphi_0) - h(R, \varphi)]\, d\varphi.$$

Имеем

$$|J_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\varphi-\varphi_0| \leqslant \delta} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi)}\, d\varphi$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi)}\, d\varphi = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оценим интеграл

$$J_2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\varphi-\varphi_0| > \delta} \frac{(R^2 - r^2)\,[h(R, \varphi_0) - h(R, \varphi)]}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi)}\, d\varphi.$$

Так как $\theta \to \varphi_0$, то рассмотрим $\theta : |\theta - \varphi_0| < \dfrac{\delta}{2}$; тогда θ и φ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} |\theta - \varphi| \geqslant \dfrac{\delta}{2}, \\ |\varphi - \varphi_0| > \delta > 0, \end{cases}$$

т. е. $\dfrac{\delta}{2} \leqslant |\theta - \varphi| \leqslant 2\pi - \dfrac{\delta}{2}$ или $\cos(\theta - \varphi) \leqslant \cos\dfrac{\delta}{2} < 1$. Пусть $M = \max\limits_{\varphi \in [0, 2\pi]} |h(R, \varphi)|$, тогда

$$|J_2| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\varphi - \varphi_0| > \delta} \frac{(R^2 - r^2) \cdot 2M}{R^2 + r^2 - 2rR\cos\delta/2} \, d\varphi$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2M \cdot 2\pi \cdot (R^2 - r^2)}{R^2 + r^2 - 2rR\cos\delta/2}.$$

Так как $r \to R$, то

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta'(\varepsilon, \delta) > 0, \ \forall r : |r - R| < \delta' : |J_2| < \varepsilon/2.$$

Тем самым $\lim\limits_{\substack{r \to R \\ \theta \to \varphi_0}} u(r, \theta) = h(R, \varphi_0)$.

Итак, для случая круга решение задачи Дирихле имеет вид

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) h(R, \varphi) \, d\varphi}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi)}.$$

Рассмотрим случай полуплоскости. Предварительно докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть $u(x, y) = u(z)$ гармоническая функция в односвязной области D и функция $w = f(z)$ конформно отображает область D в область G; тогда функция $u\left[f^{-1}(w)\right]$ есть гармоническая функция в области G. Иначе, конформное отображение областей сохраняет такое свойство функций, как гармоничность.*

Доказательство. Так как область D – односвязная, то существует аналитическая функция $\Phi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $\Phi(z) \in A(D)$. Но так как функция $f(z)$ конформно отображает область D на область G, то функция $f^{-1}(w) \in A(G)$. Поэтому суперпозиция функций $\Phi\left[f^{-1}(w)\right]$ аналитична в области G, а ее действительная часть $\operatorname{Re}\Phi\left[f^{-1}(w)\right] = u\left[f^{-1}(w)\right]$ есть гармоническая функция в G, что и требовалось доказать.

Задача Дирихле для полуплоскости: найти гармоническую функцию $u(x, y) = u(z)$ в области $\{\operatorname{Im} z > 0\}$, принимающую на действительной оси $\operatorname{Im} z = 0$ заданные непрерывные значения $\alpha(x)$, т. е.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & z \in \{\operatorname{Im} z > 0\}, \\ u(x) = \alpha(x), & \alpha(x) \in C(\operatorname{Im} z = 0). \end{cases}$$

Замечание. Непрерывность функции на неограниченном множестве D подразумевает, что существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = C_0$, а также $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ z\in D}} u(z) = C_0$. Таким образом, функция $\alpha(x)$ ограничена: $|\alpha(x)| < C$, $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = C_0$, функция $u(z)$ непрерывна в $\overline{D}$ (рис. 52).

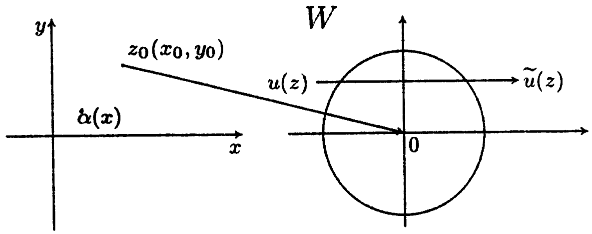

Рис. 52

Отобразим конформно верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на внутренность единичного круга $|w| < 1$, так что точка $z_0 = x_0 + iy_0$, $z_0 \in \{\operatorname{Im} z > 0\}$ перейдет в точку $w_0 = 0$. Например, отображение $w(z) = \dfrac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}$ удовлетворяет этим условиям. При этом отображении непрерывная функция $\alpha(x)$ перейдет в непрерывную функцию $h(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. По доказанному ранее гармоническая функция $\widetilde{u}(r,\theta)$ в круге $|w|<1$ и принимающая значения $h(\varphi)$ на границе круга есть функция вида

$$\widetilde{u}(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}h(\varphi)\,d\varphi,\quad 0\leqslant r<1.$$

При $r=0$ функция $\widetilde{u}(0)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}h(\varphi)\,d\varphi$.

Сделав обратное преобразование, перейдем с единичной окружности на действительную прямую; тогда

$$w=e^{i\varphi}=\frac{x-z_0}{x-\overline{z_0}},\quad de^{i\varphi}=ie^{i\varphi}d\varphi=\frac{x-\overline{z_0}-(x-z_0)}{(x-\overline{z_0})^2}dx,$$

или

$$d\varphi=\frac{1}{i}\cdot\frac{x-\overline{z_0}}{x-z_0}\cdot\frac{z_0-\overline{z_0}}{(x-\overline{z_0})^2}dx$$

$$=\frac{z_0-\overline{z_0}}{(x-z_0)(x-\overline{z_0})}dx=\frac{2y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}dx.$$

Учитывая, что при конформном отображении гармоничность сохраняется, будем иметь

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi}y_0\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha(x)\,dx}{(x-x_0)^2+y_0^2}$$

– решение задачи Дирихле для полуплоскости.

Рассмотрим общий случай.

Определение. Функция $G(z,\xi)$, $z,\xi\in D$ (область) является *функцией источника* для первой краевой задачи для уравнения Лапласа или *функцией Грина* для области D, если

1. $G(z,\xi) = \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|z-\xi|} + g(z,\xi),\ z,\xi \in D,$

где функция $g(z,\xi)$ является гармонической в области D по z при фиксированном ξ, т. е. $\Delta_z g(z,\xi) = 0$,

2. $G(z,\xi)\big|_{z\in\partial D} = 0$.

Если существует функция Грина для области D, то решение задачи Дирихле имеет вид

$$u(z) = \int\limits_{\partial D} \frac{\partial G(z,\xi)}{\partial n}\cdot h(\xi)\,d\sigma,$$

где $z \in D$, $\xi \in \partial D$, $d\sigma$ – дифференциал длины дуги, а производная берется по внутренней нормали. Этот факт мы не будем доказывать, как и рассматривать вопрос, для каких областей существует функция Грина. В случае, если область D – односвязная с границей ∂D – замкнутой, кусочно-гладкой, жордановой кривой, функция Грина всегда существует. Рассмотрим связь между существованием функции Грина для области D и ее конформным отображением на внутренность единичного круга.

Рассмотрим односвязную область D, граница которой содержит более одной точки. По теореме Римана такую область можно конформно отобразить на внутренность единичного круга $|w| < 1$: $D \to |w| < 1$, так, что точка $\xi \in D$ переходит в точку $w = 0$. Пусть это отображение задает функция $W(z,\xi) : W(\xi,\xi) = 0$, $\big|W(z,\xi)\big|_{z\in\partial D} = 1$, $|W(z,\xi)| \leqslant 1$. Поэтому эта функция имеет вид

$$W(z,\xi) = (z-\xi)\varphi(z,\xi), \quad \varphi(z,\xi) \in A(D), \quad \varphi(z,\xi) \neq 0, \quad z \in D.$$

Так как $\varphi(z,\xi) \neq 0$, то $\ln\varphi(z,\xi) \in A(D)$ и действительная часть $\operatorname{Re}\ln\varphi(z,\xi) = \ln|\varphi(z,\xi)|$ есть гармоничная функция в D. Итак,

$$\ln|W(z,\xi)| = \ln|z-\xi| + \ln|\varphi(z,\xi)|$$

или

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|W(z,\xi)|} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|z-\xi||\varphi(z,\xi)|}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|z-\xi|} - \frac{1}{2\pi}\ln|\varphi(z,\xi)| = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|z-\xi|} + g(z,\xi),$$

$g(z,\xi)$ есть гармоническая функция по z в D при фиксированном ξ. Так как $|W(z,\xi)|\big|_{z\in\partial D} = 1$, то $\left.\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|W(z,\xi)|}\right|_{z\in\partial D} = 0$ и, тем самым, функция $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|W(z,\xi)|}$ есть функция Грина или функция источника для области D.

Поэтому, решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в области D, или найти конформное отображение области на внутренность единичного круга, или найти функцию Грина для области – задачи эквивалентные. В случае, когда область D – круг или верхняя полуплоскость, мы в явном виде нашли решение задачи Дирихле.

Задача 40. Пусть в области D задана действительная функция $u(x,y) \in C(D)$. Доказать, что если для функции $u(x,y)$ справедлива теорема о среднем: для любой точки $z_0 \in D$ найдется $\overline{U_\delta(z_0)} \subset D$, $\delta > 0$, $u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(z_0+\delta e^{i\varphi})\,d\varphi$, $z_0 = x_0 + iy_0$, то функция $u(x,y)$ гармонична в области D.

Задача 41. Доказать, что если последовательность функций $\{u_n(x,y)\}$, гармонических в области D, сходится в некоторой точке $(x_0,y_0) \in D$, при этом $u_n(x,y) \leqslant u_{n-1}(x,y)$, $(x,y) \in D$, то эта последовательность $\{u_n(x,y)\}$ сходится равномерно внутри области D.

Задача 42. Доказать следующую *теорему Гарнака*. Если ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x,y)$ сходится в точке $(x_0, y_0) \in D$, где функции $u_n(x,y)$ гармоничны в области D и неотрицательны, то ряд сходится равномерно внутри области D.

В заключение отметим следствие из решения задачи Дирихле для круга, относящееся к рядам Фурье.

Следствие. Пусть задана функция $f(\alpha) \in C([0,2\pi]), f(0) = f(2\pi)$. Для такой функции определены коэффициенты Фурье. Запишем формальный ряд Фурье, соответствующий этой функции:

$$f(\alpha) \sim \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt\right)\cos n\alpha \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt\right)\sin n\alpha\right].$$

Используя решение задачи Дирихле для круга, например, единичного, будем иметь гармоническую функцию $u(r,\alpha)$, $r < 1$, так что $\lim\limits_{r\to 1} u(r,\alpha) = f(\alpha)$, причем сходимость будет равномерная по α, $\alpha \in [0,2\pi]$.

С другой стороны, гармоническую функцию $u(r,\alpha)$ можно разложить в ряд (см. лекцию 7, разложение (1))

$$u(r,\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt\right)\cos n\alpha \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt\right)\sin n\alpha\right] r^n,$$

равномерно сходящийся по α, $\alpha \in [0,2\pi]$.

Итак, сам ряд Фурье непрерывной функции $f(\alpha)$ может расходиться в некоторой точке α (примеры таких функций смотри, например, в книге Натансона [8]), но ряд для функции $u(r,\alpha)$ сходится равномерно по α, $\alpha \in [0,2\pi]$. Тем самым по заданному ряду Фурье, который может и расходиться, мы получили способ определения функции $f(\alpha)$. Иначе говоря, мы просуммировали ряд Фурье *методом Пуассона-Абеля.* Отсюда можно получить теорему:

Теорема Вейерштрасса. *Для любой непрерывной функции* $f(\alpha)$, $f(\alpha) \in C([0,2\pi]), f(0) = f(2\pi)$, *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует тригонометрический многочлен* $T(\alpha)$, *такой, что*

$$|f(\alpha) - T(\alpha)| < \varepsilon, \quad \forall \alpha \in [0,2\pi],$$

т. е. любую непрерывную функцию на $[0,2\pi]$ *можно равномерно приблизить тригонометрическими многочленами, при условии, что* $f(0) = f(2\pi)$.

Замечание. О методах суммирования расходящихся рядов, в частности, о методе Пуассона-Абеля, можно прочесть в книге [4].

ИНТЕГРАЛ ЛАПЛАСА И ЕГО ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

17 лекция

Пусть ℓ – луч: $\arg z = \varphi_0$, и $\varphi(z)$ – функция, интегрируемая на ℓ. Если существует предел $\lim\limits_{\substack{A\to\infty \\ A\in\ell}} \int\limits_0^A \varphi(z)\,dz$, то он называется *несобственным интегралом* по ℓ и обозначается

$$\int\limits_0^{\infty e^{i\varphi_0}} \varphi(z)\,dz.$$

Интеграл вида

$$F(p) = \int\limits_0^{\infty e^{i\varphi_0}} \varphi(z)e^{-zp}\,dz,$$

при условии, что он существует, называется *интегралом Лапласа* или *преобразованием Лапласа функции* $\varphi(z)$. Мы будем рассматривать частный случай преобразования Лапласа, когда луч ℓ есть положительный луч $\mathbb{R}^+$ действительной оси; более общий случай рассматривается, например, в книге А.Ф. Леонтьева [2].

Определим класс функций $f(t)$, на котором введем интеграл Лапласа. Функции $f(t)$ из этого класса, вообще говоря, могут принимать комплексные значения. Будем считать, что при $t < 0$ функции $f(t) = 0$, $f(t)$ – непрерывны на луче $\mathbb{R}^+$. Также будем считать, что для любой функции $f(t)$ существуют константы $M(f) > 0$ и $a(f)$ такие, что $|f(t)| \leqslant M(f)e^{a(f)t}$ – оценка роста функции $f(t)$ при $t \to +\infty$. Назовем показателем степени роста функции $f(t)$ величину $\inf a(f) = a_0$, тем самым

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists M_\varepsilon \ : \ |f(t)| \leqslant M_\varepsilon e^{(a_0+\varepsilon)t}, \ \ t \in \mathbb{R}^+.$$

Интеграл Лапласа $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$ называют изображением функции $f(t)$, а саму функцию $f(t)$ – оригиналом, при этом соответствие между $f(t)$ и $F(p)$ будем обозначать

$$f(t) \doteqdot F(p), \qquad F(p) \doteqdot f(t).$$

Укажем некоторые свойства преобразования Лапласа.

Свойство 1. Интеграл Лапласа сходится равномерно по p в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant a_1 > a_0$. На самом деле справедлива оценка

$$\left|e^{-pt}f(t)\right| \leqslant e^{-\operatorname{Re} p\cdot t}|f(t)| \leqslant M_\varepsilon e^{-a_1 t+(a_0+\varepsilon)t} = M_\varepsilon e^{-t[a_1-(a_0+\varepsilon)]},$$

где $a_0 + \varepsilon < a_1$, $\varepsilon > 0$.

Функция $e^{-t[a_1-(a_0+\varepsilon)]}$ – мажоранта для функции $e^{-pt}f(t)$. По признаку Вейерштрасса интеграл Лапласа будет сходиться равномерно в $\operatorname{Re} p \geqslant a_1$, так как сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t[a_1-(a_0+\varepsilon)]}\,dt$, при этом справедлива оценка

$$|F(p)| \leqslant M_\varepsilon \cdot \frac{1}{\operatorname{Re} p - (a_0+\varepsilon)},$$

отсюда $\lim\limits_{\operatorname{Re} p\to+\infty} F(p) = 0$, поэтому будем считать, что $F(\infty) = 0$.

Замечание. Если функция $f(t)$ имеет показатель степени роста a_0, то функция $t^n \cdot f(t)$, $n \in \mathbb{N}$ имеет тот же показатель степени роста. Отсюда следует, что интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-pt}\right)_p^{(n)} f(t)\,dt = \int\limits_0^{+\infty} (-t)^n e^{-pt} f(t)\,dt$$

сходится равномерно в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant a_1 > a_0$.

Теорема. *Пусть функция* $\Psi(p,t) \in A(D)$ *по* p *при фиксированном* $t \in [0,+\infty)$, $p \in D$, *функция* $f(t)$ *непрерывна на* $[0,+\infty)$. *Пусть также существуют интегралы* $\int\limits_0^{+\infty} \Psi(p,t) f(t)\,dt$, $\int\limits_0^{+\infty} \Psi'_p(p,t) f(t)\,dt$, $p \in D$, *причем последний интеграл сходится равномерно по* $p \in D$. *Тогда* $\int\limits_0^{+\infty} \Psi(p,t) f(t)\,dt \in A(D)$ *и*

$$\left(\int\limits_0^{+\infty} \Psi(p,t) f(t)\,dt\right)'_p = \int\limits_0^{+\infty} \Psi'_p(p,t) f(t)\,dt.$$

Доказательство. Пусть $\Psi(p,t) = u(x,y,t) + iv(x,y,t)$, $p = x + iy$. Так как функция $\Psi(p,t) \in A(D)$, то функции $u(x,y,t)$ и $v(x,y,t)$ – дифференцируемы по x и y и выполняются условия Коши-Римана: $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$, при этом

$$\Psi'_p(p,t) = u'_x(x,y,t) + iv'_x(x,y,t).$$

Так как интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \Psi'_p(p,t) f(t)\,dt$ сходится равномерно, то сходятся равномерно интегралы

$$\int\limits_0^{+\infty} u'_x(x,y,t)f(t)dt, \quad \int\limits_0^{+\infty} v'_x(x,y,t)f(t)dt,$$
$$\int\limits_0^{+\infty} u'_y(x,y,t)f(t)dt, \quad \int\limits_0^{+\infty} v'_y(x,y,t)f(t)dt.$$

Поэтому справедлива теорема о дифференцировании под знаком интеграла (теорема из курса математического анализа, см., например, [4]). Будем иметь

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{+\infty} \Psi'_p(p,t)f(t)\,dt &= \int\limits_0^{+\infty} (u'_x + iv'_x)f(t)\,dt \\ &= \left(\int\limits_0^{+\infty} u(x,y,t)f(t)dt\right)'_x + i\left(\int\limits_0^{+\infty} v(x,y,t)f(t)dt\right)'_x \\ &= \left(\mathrm{Re}\int\limits_0^{+\infty} \Psi(p,t)f(t)dt\right)'_x + i\left(\mathrm{Im}\int\limits_0^{+\infty} \Psi(p,t)f(t)dt\right)'_x \\ &= \left(\int\limits_0^{+\infty} \Psi(p,t)f(t)dt\right)'_p.\end{aligned}$$

Итак,

$$\int\limits_0^{+\infty} \Psi'_p(p,t)f(t)\,dt = \left(\int\limits_0^{+\infty} \Psi(p,t)f(t)dt\right)'_p,$$

функция $\int\limits_0^{+\infty} \Psi(p,t)f(t)\,dt \in A(D)$, $p \in D$. Теорема доказана.

Применим эту теорему к функции $\Psi(p,t) = e^{-pt}$; тогда

$$F'(p) = \int\limits_0^{+\infty} -te^{-pt}f(t)\,dt$$

Учитывая замечание, сделанное перед этим, получим, что

$$F(p) \in A(\operatorname{Re} p > a_0), \quad -tf(t) = F'(p).$$

Свойство 2. Интеграл Лапласа $F(p)$ имеет производную n-го порядка $F^n(p) \risingdotseq (-t)^n f(t)$, $F(p) \in A(\operatorname{Re} p > a_0)$.

Свойство 3. Пусть функция $f(t)$ имеет n производных с показателем роста a_0; тогда

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n \left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right], \quad \operatorname{Re} p > a_0.$$

Докажем это утверждение методом математической индукции. При $n = 1$ имеем

$$f'(t) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)\, dt$$

$$= e^{-pt} f(t) \Big|_0^{+\infty} + p \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt = -f(0) + pF(p).$$

Поскольку $p \in \{\operatorname{Re} p > a_0\}$, то $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-pt} f(t) = 0$.

Предположим, что при $n = k$ утверждение верно; докажем, что оно будет верно и при $n = k + 1$:

$$f^{(k+1)}(t) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f^{(k+1)}(t)\, dt = e^{-pt} f^{(k)}(t) \Big|_0^{+\infty} + p \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f^{(k)}(t)\, dt$$

$$= -f^{(k)}(0) + p \left[p^k \left(F(p) - \frac{f(0)}{p} - \ldots - \frac{f^{(k-1)}(0)}{p^{k+1}} \right) \right]$$

$$= p^{k+1} \left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \ldots - \frac{f^{(k-1)}(0)}{p^k} - \frac{f^{(k)}(0)}{p^{k+1}} \right].$$

Тем самым формула доказана для любого $n \in \mathbb{N}$.

Свойство 4. Линейное свойство.

Пусть $F_1(p) \risingdotseq f_1(t)$, $\operatorname{Re} p > a_1$, $F_2(p) \risingdotseq f_2(t)$, $\operatorname{Re} p > a_2$, где a_1, a_2 – показатели степени роста функций $f_1(t)$, $f_2(t)$ соответственно. Тогда

$$\alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p) \risingdotseq \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t),$$
$$\operatorname{Re} p > \max(\alpha_1, \alpha_2), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}.$$

Доказательство следует из линейного свойства интегралов.

Свойство 5. Формула запаздывания.

Пусть функция $f_\tau(t)$ имеет вид

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \ \tau > 0, \\ f(t - \tau), & t \geqslant \tau. \end{cases}$$

Тогда $f_\tau(t) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f_\tau(t)\,dt = \int\limits_{-\tau}^{+\infty} e^{-p(u+\tau)} f(u)\,du$, $u = t - \tau$. Так как $f(t) = 0$, $t < 0$, то $f_\tau(t) \risingdotseq e^{-p\tau} \int\limits_0^{+\infty} e^{-pu} f(u)\,du = e^{-p\tau} F(p)$, т. е.

$$f_\tau(t) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p).$$

Свойство 6. Формула смещения.

Справедлива формула

$$e^{-\lambda t} f(t) \risingdotseq F(p + \lambda), \qquad \operatorname{Re}(p + \lambda) > a_0.$$

В самом деле,

$$e^{-\lambda t} f(t) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t - pt} f(t)\,dt = F(p + \lambda).$$

Свойство 7. Пусть $\alpha > 0$; тогда

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \operatorname{Re}\left(\frac{p}{\alpha}\right) > a_0.$$

Имеем

$$f(\alpha t) \risingdotseq \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(\alpha t)\, dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{\alpha} u} f(u)\, du = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Свойство 8. Изображение свертки.

Функция $\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau$ называется *сверткой* двух функций. Для свертки справедливо равенство

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau.$$

Пусть $F_1(p) \risingdotseq f_1(t)$, $\operatorname{Re} p > a_1$, $F_2(p) \risingdotseq f_2(t)$, $\operatorname{Re} p > a_2$; тогда свертке двух функций $\varphi(t)$ соответствует преобразование Лапласа $F(p) = F_1(p) \cdot F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > \max(a_1, a_2)$. Докажем это. Имеем:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &\risingdotseq \int_0^{+\infty} e^{-pt} \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau\right] dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \left[\int_0^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau\right] dt \\
&= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \left[\int_0^{+\infty} e^{-pt} f_2(t-\tau)\, dt\right] d\tau.
\end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что $f_1(t)$, $f_2(t) = 0$, $t < 0$, и справедлива перестановка интегрирования, так как в области $\operatorname{Re} p > \max(a_1, a_2)$ несобственный двойной интеграл сходится абсолютно. В последнем интеграле сделаем замену $t - \tau = u$, тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} f_1(\tau) \left[\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f_2(t-\tau)\,dt \right] d\tau$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} f_1(\tau) \left[\int\limits_{-\tau}^{+\infty} e^{-p(u+\tau)} f_2(u)\,du \right] d\tau$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} f_1(\tau) e^{-p\tau} \left[\int\limits_0^{+\infty} e^{-pu} f_2(u)\,du \right] d\tau$$

$$= F_2(p) \int\limits_0^{+\infty} f_1(\tau) e^{-p\tau}\,d\tau = F_1(p) \cdot F_2(p).$$

Свойство 9. Изображение интеграла.

Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то $\varphi(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \dfrac{F(p)}{p}$. Покажем это.

Пусть $\varphi(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot F_1(p)$; тогда по свойству 3 имеет место

$\varphi'(t) = f(t) \doteqdot pF_1(p) = F(p)$, т. е. $F_1(p) = \dfrac{F(p)}{p}$.

Свойство 10. Интегрирование изображения.

Пусть $f(t) \doteqdot F(p)$; тогда $\dfrac{f(t)}{t} \doteqdot \int\limits_p^{+\infty} F(q)\,dq$, при условии, что

функция $\dfrac{f(t)}{t}$ в точке 0 непрерывна или существует интеграл $\int\limits_0^a \dfrac{f(t)}{t}\,dt$, $a > 0$.

В самом деле, имеем

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{f(t)}{t}\,dt = F_1(p).$$

По свойству 2 $F_1'(p) = -\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\,dt = -F(p)$. Поэтому

$$F_1(p) = -\int_0^p F(q)\,dq + C, \quad F_1(\infty) = 0,$$

тогда

$$C = \int_0^{+\infty} F(q)\,dq, F_2(p) = -\int_0^p F(q)\,dq + \int_0^{+\infty} F(q)\,dq = \int_p^{+\infty} F(q)\,dq.$$

Изображение некоторых функций

1. Функция Хевисайда:

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geqslant 0. \end{cases}$$

$$\chi(t) \doteqdot \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0,$$

показатель степени роста $\chi(t)$ — $a_0 = 0$.

2. Функция $f(t) = e^{\alpha t}$, $a_0 = \operatorname{Re}\alpha$,

$$e^{\alpha t} \doteqdot \frac{1}{p-\alpha}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha.$$

3. Функция $f(t) = \cos wt = \dfrac{1}{2}\left(e^{iwt} + e^{-iwt}\right), \quad a_0 = |\operatorname{Im} w|$. Имеем

$$\cos wt \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-iw} + \frac{1}{p+iw}\right) = \frac{p}{p^2+w^2}, \qquad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} w|.$$

4. Функция $f(t) = \sin wt = \dfrac{1}{2i}\left(e^{iwt} - e^{-iwt}\right), \quad a_0 = |\operatorname{Im} w|$. Имеем

$$\sin wt \doteqdot \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-iw} - \frac{1}{p+iw}\right) = \frac{w}{p^2+w^2}, \qquad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} w|.$$

5. Функция $f(t) = t^\nu, \ \nu > -1, \ a_0 = 0$.

Замечание. При $-1 < \nu < 0$ функция t^ν не является непрерывной справа в точке 0, но интеграл $\int\limits_0^a t^\nu\,dt$ существует.

Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-xt} t^\nu\,dt = \frac{1}{x^{\nu+1}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-u} u^\nu\,du = \frac{\Gamma(\nu+1)}{x^{\nu+1}}, \qquad x > 0.$$

Так как функция $F(p) \in A(\operatorname{Re} p > 0)$, а свойства гамма-функции Эйлера $\Gamma(p)$ мы рассматривали ранее, то, пользуясь аналитическим продолжением с положительного луча $\mathbb{R}^+$ на полуплоскость $\operatorname{Re} p > 0$, получим:

$$F(p) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}, \qquad \operatorname{Re} p > 0,$$

где берется та ветвь функции $p^{\nu+1}$, что при $x = 0$ имеет место $x^{\nu+1} = p^{\nu+1}\Big|_{p=x>0}$. В частности, при $\nu = n \in \mathbb{N}$ получаем

$$t^n \doteqdot \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Возникает вопрос – всегда ли оригинал $f(t)$ можно восстановить по его изображению $F(p)$? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема. *Пусть функция $F(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > a$ является изображением кусочно-гладкой функции $f(t)$, a – показатель степени роста. Тогда*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp, \qquad x > a,$$

t – точка непрерывности $f(t)$, интегрирование ведется по вертикальной прямой, проходящей через точку x.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = e^{-xt} f(t)$, $x > a$. Тогда функция $\varphi(t)$ – кусочно-гладкая, $\varphi(t) \in L_1(-\infty, +\infty)$. В точках непрерывности функции $\varphi(t)$ (или, что то же самое, в точках непрерывности $f(t)$) представляется интегралом Фурье

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyt} \widehat{\varphi}(y)\, dy$$

($\widehat{\varphi}(y)$) – преобразование Фурье функции $\varphi(t)$,

$$\widehat{\varphi}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\lambda} \varphi(\lambda)\, d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\lambda} e^{-x\lambda} f(\lambda)\, d\lambda = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{iy\lambda - x\lambda} f(\lambda)\, d\lambda$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda(x-iy)} f(\lambda)\, d\lambda = F(x - iy), \qquad x > a,$$

(последнее равенство следует из условия теоремы). Отсюда

$$\varphi(t) = e^{-xt} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyt} F(x - iy)\, dy$$

или

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{t(x-iy)}F(x-iy)\,dy.$$

Если y пробегает действительную прямую, то $p=x-iy$ пробегает вертикальную прямую, проходящую через точку x:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi(-i)}\int\limits_{x+i\infty}^{x-i\infty} e^{pt}F(p)\,dp=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp.$$

Теорема доказана.

Спрашивается, любая ли функция $F(p)\in A(\operatorname{Re}p>a)$, $F(\infty)=0$ является изображением некоторого оригинала $f(t)$? Сформулируем достаточные условия существования оригинала в виде теоремы.

Теорема [без доказательства]. *Пусть* $F(p)\in A(\operatorname{Re}p>a)$, $\lim\limits_{\substack{p\to\infty\\ \operatorname{Re}p>a}} F(p)=0$. *Для любого* $x>a$ *существует интеграл* $\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty}|F(p)|\,dp$. *Тогда существует функция* $f(t)$, *для которой*

$$f(t)\doteqdot F(p),\qquad f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp,\qquad x>a.$$

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге А.Ф. Леонтьева [2].

$\boxed{\text{Задача 43.}}$ Пусть функция $F(p)\in A(U_\varepsilon(\infty))$, $\varepsilon>0$, и ее лорановское разложение в $U_\varepsilon(\infty)$ имеет вид

$$F(p)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{p^k}.$$

Тогда функция $\varphi(t) = \chi(t)f(t)$, где $\chi(t)$ – функция Хевисайда, а $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!}t^{k-1}$, является оригиналом функции $F(p) \doteqdot \chi(t)f(t)$. Доказать также, что $f(t)$ – целая функция.

$\boxed{\text{Задача 44.}}$ Пусть $f(t)$ – целая функция, удовлетворяющая неравенству $|f(t)| < Me^{a_0|t|}$. Показать, что тогда изображение $F(p) \doteqdot \chi(t)f(t)$ – аналитическая функция в $U_\varepsilon(\infty)$, $\varepsilon > 0$, и ее лорановское разложение имеет вид

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k}.$$

$\boxed{\text{Задача 45.}}$ Пусть изображение $F(p)$ – рациональная функция

$$F(p) = \frac{Q(p)}{Q_1(p)},$$

где $Q(p)$ и $Q_1(p)$ многочлены, не имеющие общих корней, степень числителя меньше степени знаменателя. Все корни знаменателя $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – простые. Доказать, что

$$\frac{Q(p)}{Q_1(p)} \doteqdot \sum_{i=1}^{n} \frac{Q(\alpha_i)}{Q_1'(\alpha_i)} e^{\alpha_i t} \text{ – оригинал.}$$

$\boxed{\text{Задача 46.}}$ Пусть выполнены условия предыдущей задачи и многочлены $Q(p)$ и $Q_1(p)$ – многочлены с действительными коэффициентами. Доказать, что оригинал $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{Q(\alpha_i)}{Q_1'(\alpha_i)} e^{\alpha_i t} + 2\mathrm{Re} \sum_{i=m+1}^{\frac{n+m}{2}} \frac{Q(\alpha_i)}{Q_1'(\alpha_i)} e^{\alpha_i t},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ – все действительные корни, $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_{\frac{n+m}{2}}$ – все комплексные корни с положительными мнимыми

18 лекция

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Рссмотрим *задачу Коши*: найти функцию $y(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t) = f(t)$$

и начальным данным

$$y(0) = y_0, \ y'(0) = y_1, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}.$$

Будем считать, что правая часть уравнения, функция $f(t)$, а также искомая функция $y(t)$ и ее производные до n-го порядка включительно принадлежат тому классу, на котором определено преобразование Лапласа. Пусть оригиналам $y(t)$ и $f(t)$ соответствуют изображения $Y(p)$ и $F(p)$:

$$y(t) \doteqdot Y(p), \quad f(t) \doteqdot F(p).$$

Перейдем к уравнению относительно $Y(p)$. Это уравнение часто называют *операционным уравнением*:

$$\begin{aligned} &a_0 \left[p^n \left(Y(p) - \frac{y_0}{p} - \ldots - \frac{y_{n-1}}{p^n}\right)\right] \\ &+ a_1 \left[p^{n-1} \left(Y(p) - \frac{y_0}{p} - \ldots - \frac{y_{n-2}}{p^{n-1}}\right)\right] + \ldots + a_n Y(p) = F(p). \end{aligned}$$

Тогда

$$Y(p)\left[a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n\right]$$
$$= F(p) + y_0(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2} + \ldots + a_{n-1})$$
$$+y_1(a_0p^{n-2}+a_1p^{n-3}+\ldots+a_{n-2})+\ldots+a_0y_{n-1} = F(p)+Q_{n-1}(p),$$

где $Q_{n-1}(p)$ – многочлен степени не выше $n-1$:

$$Q_{n-1}(p) = y_0(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2} + \ldots + a_{n-1})$$
$$+ y_1(a_0p^{n-2} + a_1p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) + \ldots + a_0y_{n-1}.$$

Многочлен $L(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n$ называется *характеристическим многочленом.* Таким образом, можно написать

$$Y(p) = \frac{F(p) + Q_{n-1}(p)}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n} = \frac{F(p) + Q_{n-1}(p)}{L(p)}.$$

Если начальные данные равны нулю, то $Q_{n-1}(p) = 0$ и $Y(p) = \dfrac{F(p)}{L(p)}$.

По теореме Меллина, зная изображение, восстановим оригинал $y(t)$; имеем:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}Y(p)\,dp, \quad x > \operatorname{Re}p > a_0,$$

a_0 – показатель степени роста функции.

Если $Y(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re}p \leqslant a_0$ имеет конечное число особых изолированных точек $p_1, p_2, \ldots, p_k$ и $\lim\limits_{p\to\infty} Y(p) = 0$, то

$$y(t) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname*{res}_{p=p_i}\left[e^{pt}Y(p)\right].$$

Докажем это утверждение. Рассмотрим контур Γ_R, образованный частью C_R окружности $|z| = R$, где $R \to +\infty$, и отрезком $\left[x - i\sqrt{R^2 - x^2}, x + i\sqrt{R^2 - x^2}\right]$, расположенным на вертикальной прямой, проходящей через точку $(x, 0)$, $x > a_0$ (рис. 53).

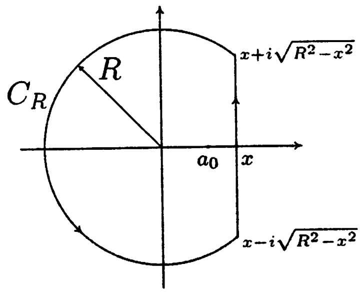

Рис. 53

Итак,

$$y(t) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\sqrt{R^2-x^2}}^{x+i\sqrt{R^2-x^2}} e^{pt} Y(p)\, dp$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} e^{pt} Y(p)\, dp - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} e^{pt} Y(p)\, dp \right].$$

По лемме Жордана $\lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{C_R} e^{pt} Y(p)\, dp = 0$, $t > 0$. Поэтому по теореме о вычетах

$$y(t) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname*{res}_{p=p_i} \left[e^{pt} Y(p) \right], \quad t > 0.$$

Утверждение доказано.

Рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Найти решение уравнения

$$\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = t^3 e^{-2t}, \\ y(0) = 1, \ \ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Перейдем к операционному уравнению

$$p^2 \left[Y(p) - \frac{1}{p} - \frac{2}{p^2} \right] + 4p \left[Y(p) - \frac{1}{p} \right] + 4Y(p) = F(p).$$

Учитывая начальные условия, будем иметь

$$Y(p) = \frac{F(p) + p + 2 + 4}{p^2 + 4p + 4}, \quad F(p) = \frac{3!}{(p+2)^4}$$

или

$$Y(p) = \frac{\dfrac{3!}{(p+2)^4} + p + 6}{(p+2)^2} = \frac{3!}{(p+2)^6} + \frac{1}{p+2} + \frac{4}{(p+2)^2}.$$

Используя свойства преобразования Лапласа конкретных функций, окончательно получим

$$y(t) = e^{-2t} \left(\frac{3!}{5!} t^5 + 4t + 1 \right).$$

Пример 2. Найти решение уравнения

$$\begin{cases} y^{(4)}(t) + 2y^{(2)}(t) + y(t) = \sin t, \\ y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = 0. \end{cases}$$

Изображение функции $y(t)$, т. е. $Y(p)$, имеет вид

$$Y(p) = \frac{\dfrac{1}{p^2+1}}{p^4 + 2p^2 + 1} = \frac{1}{(p^2+1)^3},$$

а оригинал

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} Y(p)\, dp.$$

Так как $Y(p)$ имеет на комплексной плоскости только конечное число полюсов, то

$$y(t) = \sum \operatorname*{res}_{\substack{p=i\\ p=-i}} \left[\frac{e^{pt}}{(p^2+1)^3}\right].$$

Покажем, что $\operatorname*{res}\limits_{p=i} \dfrac{e^{pt}}{(p^2+1)^3}$ комплексно сопряжен с $\operatorname*{res}\limits_{p=-i} \dfrac{e^{pt}}{(p^2+1)^3}$. Вообще, справедливо следующее утверждение.

Утверждение. *Пусть $P(p)$, $Q(p)$ – многочлены с действительными коэффициентами; тогда*

$$\operatorname*{res}_{p=a+ib} \left[e^{pt} \cdot \frac{P(p)}{Q(p)}\right] = \overline{\operatorname*{res}_{p=a-ib} \left[e^{pt} \cdot \frac{P(p)}{Q(p)}\right]},$$

где многочлены $P(p)$, $Q(p)$ не имеют общих корней, а точки $a \pm ib$ – нули многочлена $Q(p)$.

Доказательство. Разложим функцию $e^{pt} \cdot \dfrac{P(p)}{Q(p)}$ в ряд Лорана в окрестности точки $a+ib$:

$$e^{pt} \cdot \frac{P(p)}{Q(p)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n [p-(a+ib)]^n, \quad a_{-1} = \operatorname*{res}_{p=a+ib} \left[e^{pt} \cdot \frac{P(p)}{Q(p)}\right],$$

но так как

$$\overline{e^{pt}} = e^{\overline{p}t}, \quad \overline{\left(\frac{P(p)}{Q(p)}\right)} = \frac{P(\overline{p})}{Q(\overline{p})},$$

то

$$\overline{\left(e^{pt}\cdot\frac{P(p)}{Q(p)}\right)} = e^{\overline{p}t}\cdot\frac{P(\overline{p})}{Q(\overline{p})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\overline{a}_n[\overline{p}-(a-ib)]^n.$$

Это есть разложение функции $e^{pt}\cdot\dfrac{P(p)}{Q(p)}$ в ряд Лорана в окрестности точки $a-ib$, т.е. $\operatorname*{res}\limits_{p=a-ib}\left[e^{pt}\cdot\dfrac{P(p)}{Q(p)}\right] = \overline{a_{-1}}$.

Применим это утверждение к нашей задаче. Вычислим $\operatorname*{res}\limits_{p=i}\dfrac{e^{pt}}{(p^2+1)^3}$:

$$\operatorname*{res}_{p=i}\frac{e^{pt}}{(p^2+1)^3} = \frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{e^{pt}}{(p+i)^3}\right)\bigg|_{p=i}.$$

Нетрудно видеть, что $\operatorname*{res}\limits_{p=i}\dfrac{e^{pt}}{(p^2+1)^3} = \dfrac{e^{it}}{2^5\cdot i}(-4t^2-12ti+12)$. Используя свойства преобразования Лапласа, получаем

$$y(t) = \frac{\cos t}{2^5}(-12t) + \frac{\sin t}{2^5}(-4t^2+12) = -\frac{3}{8}t\cos t + \frac{\sin t}{8}(-t^2+3).$$

$\boxed{\text{Задача 47.}}$ Найти решение уравнения

$$\begin{cases} x''(t) + a^2x(t) = b\sin(at), \\ x(0) = x_0, \ \ x'(0) = x_1. \end{cases}$$

Пример 3. Решить уравнение

$$\begin{cases} tx''(t) + (1-n)x'(t) + x(t) = 0, \\ x(0) = x'(0) = 0, \quad n\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$. Перейдем к операционному уравнению:

$$x''(t) \risingdotseq p^2X(p), \quad tx'' \risingdotseq -2pX(p) - p^2X'(p),$$
$$-2pX(p) - p^2X'(p) + (1-n)pX(p) + X(p) = 0,$$

или

$$p^2X'(p) + [p(n+1) - 1]X(p) = 0.$$

Решая это дифференциальное уравнение, получим

$$X(p) = \frac{C \cdot e^{-\frac{1}{p}}}{p^{n+1}}.$$

Поэтому $x(t) = C \cdot t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t})$, где $J_n(z)$ – функция Бесселя n-го порядка или цилиндрическая функция 1 рода n-го порядка. Если рассмотреть так называемую *производящую функцию* $e^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})}$ для функций Бесселя n-го порядка, то функции Бесселя можно трактовать как коэффициенты в разложении функции $e^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})}$ в ряд Лорана:

$$e^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)w^n, \quad 0 < |w| < \infty.$$

Функции Бесселя можно представить и как решения дифференциального уравнения:

$$t^2x'' + tx' + (t^2 - \lambda^2)x(t) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Есть еще одно представление функций Бесселя, но уже через интеграл:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} \frac{e^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})}}{w^{n+1}}\,dw = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos(z\sin x - nx)\,dx.$$

Последний интеграл носит название *интеграл Бесселя*.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_0'(t) = -ax_0(t), \\ x_k'(t) + ax_k(t) = ax_{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \\ x_0(0) = 1, \; x_1(0) = \ldots = x_n(0) = 0. \end{cases}$$

Пусть оригиналы и изображения имеют соответствие

$$x_0(t) \risingdotseq X_0(p); \quad x_k(t) \risingdotseq X_k(p), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Операционная система имеет вид

$$\begin{cases} p\left[X_0(p) - \dfrac{1}{p}\right] = -aX_0(p), \\ pX_k(p) + aX_k(p) = aX_{k-1}(p), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} X_0(p) = \dfrac{1}{a+p}, \quad X_1(p) = \dfrac{a}{(a+p)^2}, \quad \ldots \quad , \\ X_i(p) = \dfrac{a^i}{(a+p)^{i+1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Переходим к оригиналам, которые и есть решения данной системы:

$$x_i(t) = e^{-at}\frac{a^i}{i!}t^i = \frac{(at)^i}{i!}e^{-at}, \; i = 0, 1, \ldots, n.$$

$\boxed{\text{Задача 48.}}$ Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) - y(t) = e^t, \\ y'(t) + 3x(t) - 2y(t) = 2e^t, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

Применим преобразование Лапласа к решению уравнений в частных производных. Рассмотрим *уравнение теплопроводности*

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \;\; u(x,0) = 0,$$

$$u(0,t) = u_0 = const, \;\; |u(x,t)| \leqslant M.$$

Функция $u(x,t)$ – распределение тепла в стержне $0 < x < +\infty$, боковая поверхность которого изолирована. Будем искать решение в классе функций, для которых определено преобразование Лапласа. Пусть оригинал и изображение связаны следующим образом:

$$u(x,t) \doteqdot F(x,p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-py} u(x,y)\,dy.$$

Переходим к операционному уравнению:

$$pF(x,p) = a^2 F''_{xx}(x,p).$$

Решение этого дифференциального уравнения есть функция

$$F(x,p) = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Константа $C_2 = 0$, так как по условию функция $u(x,t)$ ограничена, $|u(x,t)| \leqslant M$. Константа $C_1 = F(0,p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt = \dfrac{u_0}{p}$.

Итак, $F(x,p) = u_0 \cdot \dfrac{e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{p}$. Этой функции соответствует оригинал

$$u(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} u_0 \int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = u_0 \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right],$$

где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-y^2}\,dy$ – *интеграл вероятностей*.

Мы использовали тот факт, что изображению $\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p}$ соответствует оригинал $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-y^2}\,dy$.

Рассмотрим *задачу о колебании струны* – решить уравнение в частных производных

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \sin \pi x, \quad u_t\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Задачу можно трактовать как задачу о поперечных колебаниях струны, закрепленной на концах ($x = 0$, $x = 1$), функция $u(x,t)$ – отклонение струны от оси x, t – время. Процесс колебаний струны зависит от ее начальной формы и распределения скоростей ($t = 0$).

Решение, как и ранее, будем искать в классе функций, для которых определено преобразование Лапласа. Пусть

$$u(x,t) \risingdotseq F(x,p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-py} u(x,y)\,dy.$$

Операционное уравнение имеет вид

$$p^2 F(x,p) - p \sin \pi x = F''_{xx}(x,p).$$

В силу граничных условий однородное уравнение

$$p^2 F(x,p) = F''_{xx}(x,p)$$

имеет нулевое решение. Частное решение имеет вид

$$F(x,p) = \frac{p}{p^2+\pi^2}\sin\pi x.$$

Этой функции соответствует оригинал

$$u(x,t) = \sin(\pi x)\cdot\cos(\pi t).$$

В заключение хочется процитировать слова знаменитого ученого М.В. Келдыша [9], так много сделавшего в теории конформных отображений.

"Теория аналитических функций возникла в связи с задачей решения алгебраических уравнений. Она дала возможность пролить свет на основные классы функций, выдвинутые развитием анализа, механики, математической физики. Ряд центральных фактов анализа мог быть до конца понят только при выходе в комплексную область. Функции комплексного переменного получили непосредственно физическую интерпретацию как характеристики важнейших векторных полей гидродинамики и электродинамики. Обнаружились связи теории функций с задачами теории теплопроводности, теории упругости. Общие вопросы теории дифференциальных уравнений и специальные методы их решения широко опирались и опираются на теорию функций комплексного переменного. Аналитические функции естественно вошли в теорию интегральных уравнений и общую теорию линейних операторов. Обнаружились тесные связи теории аналитических функций с геометрией."

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Рекомендуемая литература

1. **Свешников А. Г., Тихонов А. Н.** Теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1979.

2. **Бицадзе А. В.** Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1969.

3. **Маркушевич А. И.** Теория аналитических функций. М.: Гостехиздат, 1950.

4. **Леонтьева Т. А., Панферов В. С., Серов В. С.** Задачи по теории функций комплексного переменного. М.: Издательство Московского университета, 1992.

Дополнительная литература

1. **Лейбниц Г.** Математическая энциклопедия. т.2, М.: "Советская энциклопедия", 1979.

2. **Леонтьев А. Ф.** Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983.

3. **Гелбаум Б., Олмстед Дж.** Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.

4. **Ильин В. А., Позняк Э. Г.** Основы математического анализа. М.: Наука, 1973.

5. **Маркушевич А. И.** Теория аналитических функций. т.1, т.2. М.: Наука, 1968.

6. **Привалов И. И.** Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977.

7. **Меньшов Д. Е.** Избранные труды. Математика. М.: Факториал, 1997.

8. **Натансон И. П.** Конструктивная теория функций. М.: Гостехиздат, 1949.

9. **Келдыш М. В.** Математика, ее содержание, методы и значение. М.: Издательство АН СССР, 1953.

БИОГРАФИЧЕСКИЕ СПРАВКИ

Абель Нильс Хенрик (*Abel Niels Henric*),
1802–1829, Норвегия.

Адамар Жак Саломон (*Hadamard Jacques Salomon*),
1865–1963, Франция.

Бессель Фридрих Вильгельм (*Bessel Friedrich Wilhelm*),
1784–1846, Германия.

Бицадзе Андрей Васильевич, 1916–1994, Грузия.

Больцано Бернард (*Bolzano Bernard*),
1781–1848, Чехия.

Борель Феликс Эдуард Жюстен Эмиль
(*Borel Felix Edouard Justin Emile*),
1871–1956, Франция.

Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм
(*Weierstraß Karl Theodor Wilhelm*),
1815–1897, Германия.

Гарнак (Харнак) Карл Густав Аксель (*Harnack Carl Gustav Axel*),
1811–1888, Германия.

Гейне (Хайне) Генрих Эдуард (*Heine Heinrich Eduard*),
1821–1881, Германия.

Грин Джордж (*Green George*),
1793–1841, Англия.

Гурвиц (Хурвиц) Адольф (*Hurwitz Adolf*),
1859–1919, Германия.

Даламбер (Д'Аламбер) Жан Лерон (*D'Alembert Jean Le Rond*),
1747–1783,– французский математик и философ.

Дирихле Петер Густав Леже (*Dirichlet Peter Gustav Lejeune*),
1805–1859,– немецкий математик.

Жордан Мари Энмон Камиль (*Jordan Marie Ennemond Camille*), 1838–1922, Франция.

Жуковский Николай Егорович, 1847–1921, Россия.

Ильин Владимир Александрович, род. 1928, Россия.

Кантор Георг (*Cantor Georg*), 1845–1919, Германия.

Келдыш Мстислав Всеволодович, 1911–1978, Россия.

Коши Огюстен Луи (*Cauchy Augustin Louis*), 1789–1857, – французский математик и философ.

Лаплас Пьер Симон (*Laplace Pierre Simon*), 1749–1827, Франция.

Лебег Анри Леон (*Lebesque Henri Leon*), 1875–1941, Франция.

Леонтьев Алексей Федорович, 1917–1987, Россия.

Лейбниц Готфрид Вильгельм (*Leibniz Gottfried Wilchelm*), 1646–1716, – немецкий философ, математик, физик, изобретатель, юрист, историк.

Лиувилль Жозеф (*Liouville Joseph*), 1809–1882, Франция.

Лоран Пьер Альфонс (*Laurent Pierre Alfonse*), 1813–1854, Франция.

Маркушевич Алексей Иванович, 1908–1979, Россия.

Меньшов Дмитрий Евгеньевич, 1892–1982, Россия.

Морéра Джачинто (*Morera Giacinto*), 1856–1909, Италия.

Муавр Абрахам де (*Moivre Abraham de*), 1667–1754, Англия.

Натансон Исидор Павлович, 1906–1964, Россия.

Ньютон Исаак (*Newton Isaac*),
1646–1716, – английский физик, математик и философ.

Пикар Шарль Эмиль (*Picard Charles Emile*),
1856–1941, Франция.

Позняк Эдуард Генрихович, род. 1923, Россия.

Привалов Иван Иванович, 1891–1941, Россия.

Пуассон Симеон Дени (*Poisson Simeon Denis*),
1781–1840, Франция.

Риман Георг Фридрих Бернхард (*Riemann Georg Friedrich Bernhard*),
1826–1866, Германия.

Свешников Алексей Георгиевич, род. 1924, Россия.

Сохоцкий Юлиан Васильевич, 1842–1927, Россия.

Тейлор Брук (*Teylor Brook*),
1685–1731, Англия.

Тихонов Андрей Николаевич, 1906–1993, Россия.

Фурье Жан Батист Жозеф (*Fourier Jean Baptiste Joseph*),
1768–1830, Франция.

Хевисайд (Хэвисайд) Оливер (*Heaviside Oliver*),
1850–1925, Англия.

Шварц Карл Герман Амандус (*Schwarz Karl Hermann Amandus*),
1843–1921, Германия.

Эйлер Леонард (*Euler Leonhard*), –1707, Базель, –1783, Петербург,
– швейцарский математик, механик и физик.

Предметный указатель

Учебное издание

Автор:
кандидат физ.-мат. наук, доцент
ЛЕОНТЬЕВА Татьяна Алексеевна

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

"Научный мир"
Тел./факс (007)(095)291-28-47. E-mail: naumir@ben.irex.ru
Internet: http://195.178.196.201/ N_M/n_m.htm
ЛР № 03221 от 10.11.2000

Подписано к печати 20.02.2004. Формат 60x90/16. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 13.5. Тираж 500 экз. Заказ 1974
Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО ПФ "Полиграфист".
160001 г. Вологда, ул. Челюскинцев 3, тел. (8172) 72-55-31, 72-61-75