Теория функций комплексной переменной
IV семестр

Действительный и комплексный анализ, 4 семестр
Часть 2. ТФКП

1. Дифференцируемость функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана.
2. Свойства аналитических функций. Геометрический смысл производной.
3. Дробно-линейные функции: инвариантность двойного отношения, круговое свойство.
4. Сохранение симметрии. Примеры типовых дробно-линейных отображений.
5. Функция Жуковского и обратная к ней функция.
6. Показательная функция. Тригонометрические и гиперболические функции.
7. Выделение однозначных ветвей многозначных функций. Логарифмическая функция.
8. Интегральная теорема Коши и ее обобщения.
9. Неопределенный интеграл и теорема о первообразной.
10. Интегральная формула Коши.
11. Дифференцирование интеграла по параметру. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций.
12. Теоремы Морера и Лиувилля. Основная теорема высшей алгебры.
13. Равномерно и нормально сходящиеся ряды аналитических функций. Теоремы Вейерштрасса.
14. Аналитичность суммы степенного ряда. Теорема Тейлора.
15. Теорема единственности и ее следствия.
16. Ряды Лорана. Теорема Лорана.
17. Классификация изолированных особых точек. Устранимая особая точка. Полюс.
18. Существенно особая точка. Теорема Сохоцкого. Теорема Пикара (без доказательства).
19. Теоремы о вычетах и полной сумме вычетов. Вычет относительно полюса.
20. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.
21. Логарифмический вычет. Принцип аргумента. Теорема Руше.
22. Теорема об образе области. Принципы максимума и минимума модуля аналитической функции.
23. Преобразование Лапласа: существование и аналитичность.
24. Основные свойства преобразования Лапласа.
25. Определение оригинала по изображению. Формула Меллина.
26. Решение дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа.

I. Комплексные числа и комплексная плоскость

Опр. Комплексное число — упорядоченная пара вещественных чисел: $z = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$
Причем:
$a = \operatorname{Re} z$ — действительная часть
$b = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть

1. Комплексные числа и действия над ними

Опр. Два комплексных числа наз. равными, если
$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$

Бинарные операции:

1. сложение

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2)$$

2. умножение

$$w = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2,\ a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$\Rightarrow$ по отношению к этим операциям мн-во комплексных чисел есть поле, обозначаемое $\mathbb{C}$ (коммут., ассоц., дистр., обратные операции)

Если $z_1 = (a_1, 0)$, $z_2 = (a_2, 0)$, то а) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2,\ 0)$
б) $z_1 z_2 = (a_1 a_2,\ 0)$

$\Rightarrow$ операции с числами этого вида сводятся к одноименным операциям с их вещественными частями

$\Rightarrow$ Соглашение: $z = (a, 0) \equiv a$ (действительные — част. случай комп.)
$(0, 1) \equiv i$ — мнимая единица
$i^2 = (-1, 0) = -1$ (по введенным правилам)

$z = (0, b) = (0, 1)(b, 0) \equiv ib$

$\Rightarrow z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) \equiv a + ib$ — алгебраическая форма

Опр. Сопряженным к числу $z = a + ib$ наз. число $\bar{z} = a - ib$.
Свойства:
1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
2. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

Опр. Обратным к числу $z = a + ib$ наз. число $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$

Комплексная плоскость

Евклидову пл-ть называем комплексной, ось x — вещественной, ось y — мнимой $\Rightarrow$ a и b — координаты точки, соответствующ. числу $z = a + ib$

Можно ввести полярную систему координат $\Rightarrow$

$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ — модуль числа z

φ — аргумент, причем $\varphi \in [0, 2\pi)$ или $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$a = \rho \cos\varphi$, $b = \rho \sin\varphi$

Опр. Аргумент числа — это $\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Опр. Главное значение аргумента $\arg z$ — значение Arg, попадающее в основной интервал, т.е. $[0, 2\pi)$ или $(-\pi, \pi]$

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$

$\Rightarrow z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — тригонометрическая форма

Обозн. $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$\Rightarrow z = re^{i\varphi}$ — показательная форма

Умножение: $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i\varphi} = \rho_1\rho_2(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
где $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \pmod{2\pi}$

Формула Муавра: $z^n = \rho^n e^{in\varphi},\ n \in \mathbb{Z}$

Деление: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i\varphi} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
где $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \pmod{2\pi}$

Опр. Число $z_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$ наз. корнем n-ой степени из числа $z = \rho e^{i\varphi}$, если $z_0^n = z$

$\Rightarrow$ по ф-ле Муавра: $\rho_0^n e^{in\varphi_0} = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow \rho_0 = \sqrt[n]{\rho},\ \varphi_0 = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n},\ k \in \mathbb{Z}$

Операции сложения и вычитания позволяют интерпретировать комплексные числа как векторы на комплексной плоскости, причем и как связные, и как свободные

$|z - a| \leq r$ — замкнутый круг

$|z - a| = R$ — окружность

2. Предел последовательности

$K_\varepsilon(z_0)$ — открытый круг радиуса ε с центром в т. z_0 — иначе ε-окрестность т. z_0

Последовательность: $z_n = a_n + ib_n$

Опр. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) > 0 : \forall n \geqslant N\ |z_n - z_0| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ т.к. $z_0 = a_0 + ib_0$ $\sqrt{(a_n - a_0)^2 + (b_n - b_0)^2} < \varepsilon$

Теорема 1.1. $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0 \Leftrightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a_0,\ b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b_0$
Сходимость комплексной последовательности равносильна одновременной сходимости двух вещественных п-ей

Теорема 1.2. (Больцано – Вейерштрасса) Из всякой огр. п-ти комплексных чисел можно извлечь сходящуюся п/п-ть.

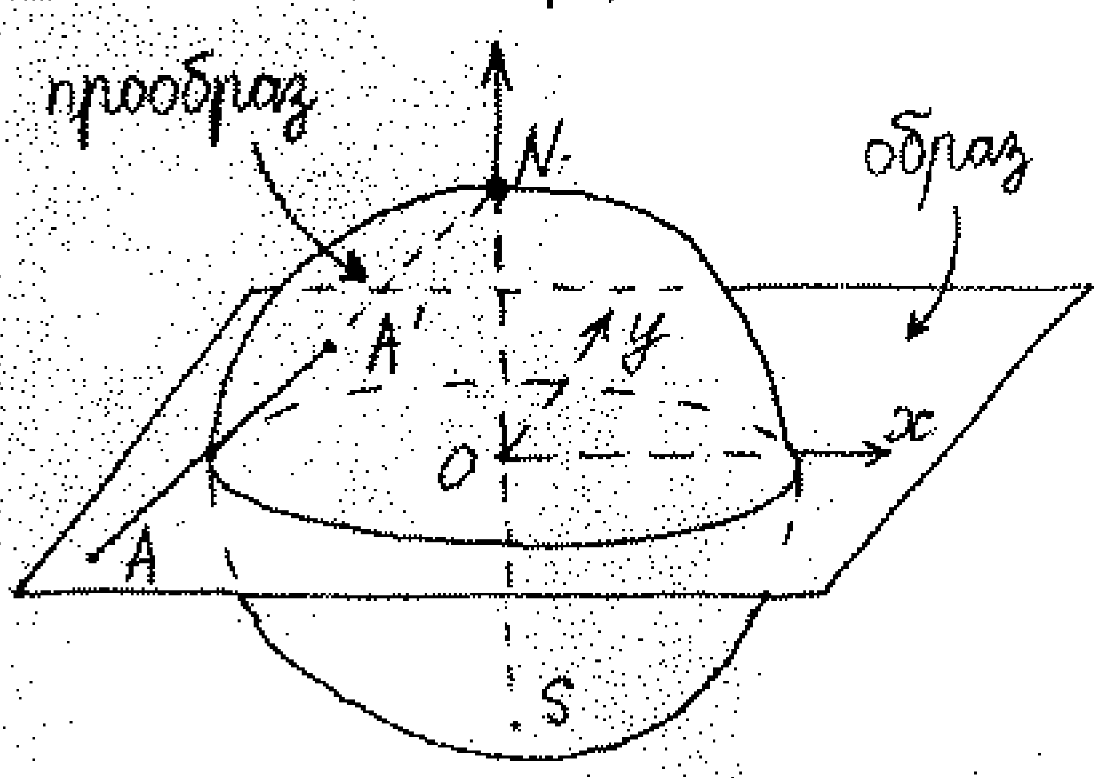
Теорема 1.3 (критерий Коши) П-ть $\{z_n\}$ – сходится $\Leftrightarrow$ $\{z_n\}$ – фундаментальна, т.е.
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) > 0 : \forall k, \ell \geqslant N\ |z_k - z_\ell| < \varepsilon$

$z = a + ib$ – конечные комплексные числа

∞ – число бесконечность.
св-ва:
1. $\infty \pm a = a \pm \infty = \infty$
2. $\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty$
3. $\frac{a}{\infty} = 0$
4. $\frac{\infty}{a} = \infty$
5. $\frac{a}{0} = \infty$
6. Лишены смысла операции $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$
7. ρ-окрестность бесконечно удаленной точки есть $|z| > \rho$

$\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ – мн-во комплексных чисел
$\overline{\mathbb{C}}$ – расширенное мн-во комп. чисел (дополненное до ∞)

Риманова сфера – модель мн-ва комплексных чисел



Соответствие – центральная проекция из N точек сферы

Опр. **Область** – открытое связное мн-во (точка входит с некоторой окрестностью)

Опр. **Расстояние** от т. z_0 до мн-ва M –
$$\rho(z_0, M) = \inf_{z\in M} |z - z_0|$$

Расширенная комп. плоскость – $\mathbb{C} + \infty$. Число есть стереографическая проекция точки на сфере.

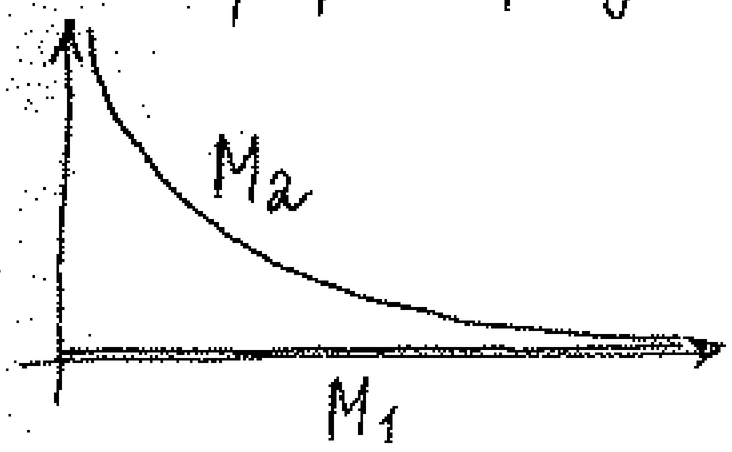
1. Если z_0 – предельная точка мн-ва M, то $\rho(z_0, M) = 0$
2. Если M – замкнуто, $z_0 \notin M$, то $\rho(z_0, M) > 0$

Опр. Расстояние между мн-ми M_1 и M_2 – это

$$\rho(M_1, M_2) = \inf_{\substack{z_1 \in M_1 \\ z_2 \in M_2}} |z_1 - z_2|$$

Теорема 1.4. Пусть мн-ва M_1 и M_2 замкнуты, не пересекаются и хотя бы одно из них ограничено. Тогда расстояние между этими мн-вами положительно

Контрпример для ограниченности:



$$\rho(M_1, M_2) = 0$$

Введем обозначения:

1. $\operatorname{dom} f$ (domain) – область определения
2. $\operatorname{im} f$ (image) – область значений

$f(E)$, $E \subset \operatorname{dom} f$

I. Функция комплексного переменного

Пусть E — произвольное подмножество комплексной плоскости и пусть каждому $z \in E$ поставлены в соответствие одно или *несколько* чисел w. В этом случае говорят, что на E задана функция комплексного переменного z и записывают этот факт символикой типа $w = f(z)$.

Примеры

Однозначные функции

$$\mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z, |z|, \arg z, \bar{z}, z^n \ (n \in \mathbf{N})$$

Многозначные функции

$$\sqrt[n]{z} \ (n \in \mathbf{N}), \mathrm{Arg}z$$

Положим $z = x + iy$, $w = u + iv$, где $x, y, u, v \in \mathbf{R}$. Тогда задание функции $w = f(z)$ на E равносильно заданию на E как подмножестве евклидовой плоскости двух вещественных функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$.

ля изображения
рафиков нужны два
кземпляра комплексной
лоскости: для аргумента
значения ф-ции. А
ожно привести к двум
ещественным ф-циям.

Пример

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy \longrightarrow$$

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy$$

1. Предел функции в точке

Пусть $E \subset \mathrm{dom}\, f$, и пусть z_0 — предельная точка для E. Запись

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A$$

означает: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(z) - A| < \varepsilon$ при $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$, $z \in E$.

Положим $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $f(z) = u + iv$, $A = B + iC$.

~~**Теорема 1**~~ *Комплексное соотношение*

Теорема 2.1

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A$$

равносильно двум вещественным предельным соотношениям

$$\lim_{x\to x_0,\ y\to y_0} u(x,y) = B, \qquad \lim_{x\to x_0,\ y\to y_0} v(x,y) = C.$$

Следствие 1 *Пусть $g(z)$ и $h(z)$ определены на одном и том же множестве E, причем*

$$\lim_{z\to z_0} g(z) = A_1, \qquad \lim_{z\to z_0} h(z) = A_2.$$

Тогда

$$\lim_{z\to z_0}[g(z) \pm h(z)] = A_1 \pm A_2, \qquad \lim_{z\to z_0}[g(z)\cdot h(z)] = A_1\cdot A_2.$$

Если $A_2 \neq 0$, то

$$\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{A_1}{A_2}.$$

2. Непрерывность

Пусть $E \subset \operatorname{dom} f$, и пусть $z_0 \in E$ есть предельная точка для E. Функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Если $f(z)$ непрерывна в каждой точке множества E, то говорят, что f непрерывна на E.

Теорема 2.2. ~~**Теорема 2**~~ *Функция $f(z) = u + iv$ тогда и только тогда непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, когда*

$$\lim_{x \to x_0,\ y \to y_0} u(x, y) = u(x_0, y_0), \qquad \lim_{x \to x_0,\ y \to y_0} v(x, y) = v(x_0, y_0).$$

Следствие 2 *Пусть $g(z)$ и $h(z)$ непрерывны в точке z_0. Тогда их сумма, разность и произведение также непрерывны в этой точке. Если $h(z_0) \neq 0$, то частное $g(z)/h(z)$ тоже непрерывно в z_0.*

Следствие 3 *Пусть функция $w = f(z)$ непрерывна на множестве E и $\operatorname{im} f \subset F$. Пусть на множестве F непрерывна функция $\zeta = g(w)$. Тогда сложная функция (суперпозиция) $\zeta = g[f(z)] \equiv G(z)$ непрерывна на E.*

Пусть функция $\boxed{w = f(z) \text{ непрерывна}}$ на ограниченном и замкнутом множестве E (компакте).

Следствие 4 (1-я теорема Вейерштрасса) *Функция $w = f(z)$ ограничена на E*, т.е. непрерывная ф-ия ограничена на компакте

Следствие 5 (комплексная версия 2-й теоремы Вейерштрасса)
Модуль функции $w = f(z)$ достигает на E своей верхней и нижней грани.

Из-за отсут-
ствия поня-
тия порядк
на компл.
плоскости
2-ая т.
Вейерштра
дается в
упрощенной
формулиров
— оперируем
модулем.

Следствие 6 (Теорема Кантора) *Функция $w = f(z)$ равномерно непрерывна на E.*

Определить равномерную непрерывность!

Важный частный случай функциональной зависимости

Пусть функция $z = \lambda(t)$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$. Говорят, что эта функция определяет *непрерывную кривую (линию, дугу)*, значения функции называют точками кривой, а уравнение $z = \lambda(t)$ — *параметрическим уравнением этой кривой.*

Пример

$$z = a\cos t + ib\sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Разделим вещественную и комплексную часть:

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t$$

3. Производная и дифференциал

Пусть $E \subset \operatorname{dom} f$, и пусть $z_0 \in E$ есть предельная точка для E. Функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, если существует предел

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

Он называется производной от $f(z)$ в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$ или $\frac{df}{dz}(z_0)$.

Положим $z - z_0 \equiv \Delta z = dz$ (дифференциал независимого переменного или приращение), $f(z) - f(z_0) \equiv \Delta f(z)$ (приращение функции).

Теорема 2.3 ~~**Теорема 3**~~ *Функция $f(z)$ тогда и только тогда дифференцируема в точке z_0, когда ее приращение в этой точке можно представить в виде*

$$\Delta f(z) = A \cdot \Delta z + \overbrace{\varepsilon(z_0, \Delta z)}^{\text{зависит от рассм. точки и } \Delta z} \cdot \Delta z,$$

бесконечно малая более высокого порядка, чем Δz

где A — константа, а $\varepsilon(z_0, \Delta z)$ — бесконечно малая при $z \to z_0$. Если такое представление возможно, то $\boxed{A = f'(z_0).}$

$\square$ $\Delta f(z) = A \cdot \Delta z + \varepsilon(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z$

$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = A + \varepsilon(z_0, \Delta z)$

При переходе к пределу получим A, ч.т.д.

Сложная ф-ия:

Формальные правила дифференцирования:

1) $E \subset \operatorname{dom} f \quad w = f(z) \in \operatorname{im} f$

$f'(z_0): w_0 = f(z_0)$ (просто обозначили), z_0 – предельная точка $\Rightarrow \exists f'(z_0)$

$\Rightarrow$ непрерывна в т. z_0 $\Rightarrow$ непрерывна в т. w_0

2) $w_0 \in F \subset \operatorname{dom} g$

$\xi = g(w) \quad \exists g'(w_0)$

$\xi = g[f(z)] = G(z)$

$\Rightarrow G'(z_0) = f'(z_0) \cdot g'(w_0)$

Теорема 2.4 (условие Коши - Римана) (Даламбера-Эйлера.) $\exists\ w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $(z = x+iy)$ определена в обл. G.

$f(z)$ — дифференцируема в т. $z_0 = x_0 + iy_0 \Leftrightarrow$

ф-ии $u(x,y)$ и $v(x,y)$ диф-мы в т. (x_0, y_0) как ф-ии двух вещественных переменных и выполняются соотношения:

$$\left.\begin{aligned} u'_x(x_0,y_0) &= v'_y(x_0,y_0) \\ u'_y(x_0,y_0) &= -v'_x(x_0,y_0) \end{aligned}\right\} \text{ условия Коши-Римана (CR)}$$

□ Необходимость. По т. 2.3 (т.к. ф-ия - диф-ма) $\Rightarrow$ справедливо представление (*)

$\boxed{\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon \Delta z}$ (*) $\Rightarrow \Delta u + i\Delta v = (a+ib)(\Delta x + i\Delta y) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)(\Delta x + i\Delta y)$

$\underbrace{\Delta z = \Delta x + i\Delta y,\ \Delta f = \Delta u + i\Delta v,\ \varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2}_{\text{расписали что есть что}}$

$\boxed{f'(z_0) = a+ib}$ — представили в таком виде и хотим показать, что это искомые слагаемые

1) $\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \varepsilon_1\Delta x - \varepsilon_2\Delta y$ — выделили из рамочки без i

приращение ф-ии в т. (x_0,y_0) представлено в виде 4-ех слагаемых, причем первые два линейно зависят от приращения, а вторые два — имеют порядок малости, меньший, чем $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \Rightarrow$ б/м $\Rightarrow \Delta u$ - диф-ма в т. (x_0,y_0)

2) $\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \varepsilon_2\Delta x + \varepsilon_1\Delta y$ — выделили из рамочки с i

аналогичный анализ, как в п. 1

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a &= u'_x(x_0,y_0), & b &= -u'_y(x_0,y_0) \\ a &= v'_y(x_0,y_0), & b &= v'_x(x_0,y_0) \end{aligned}\right\} \text{ искомые условия}$$

Достаточность. $\Delta u = a\Delta x - b\Delta y - \alpha|\Delta z|$

специально выбранные обозначения, т.е. частные производные u и v

$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \beta|\Delta z|$

коэффициенты получены из предыдущего шага и условий CR

$\alpha, \beta \to 0$, при $\Delta z \to 0$

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = \underbrace{(a+ib)}_{A}\underbrace{(\Delta x + i\Delta y)}_{\Delta z} + (\alpha + i\beta)|\Delta z| =$$

$$= A\Delta z + \varepsilon\Delta z, \text{ где } \varepsilon = \frac{(\alpha+i\beta)|\Delta z|}{\Delta z}, \text{ причем } |\varepsilon| = |\alpha + i\beta| \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0$$

$\Rightarrow$ по т. 2.3 $\exists'\ f'(z_0) = A$, чтд ■

Вывод: производную комплексной ф-ии можно вычислить через производные вещественных ф-ий (см. выражение A)

Следствие $f'(z_0) = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y = u'_x - iu'_y = v'_y + iv'_x$

4. Аналитические функции

Опр. Ф-ия $w = f(z)$ – **аналитическая в обл. G**, если она диф-ма в каждой точке из G (Маркушевич)

Опр. Ф-ия $w = f(z)$ – **аналитическая в обл. G**, если она диф-ма в каждой точке из G и <u>$f'(z)$ непрерывна в G.</u> (С-Т) $\longleftarrow$ проще доказывать

В дальнейшем придерживаемся второго определения.

<u>Пример.</u> $w = f(z) = e^x(\cos y + i \sin y) = u + iv$ проверка на аналитичность

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= e^x \cos y \\ v(x,y) &= e^x \sin y \end{aligned}\right\} \text{ непрерывны на } \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$$

1) Для использования т. 2.4. Необходимо проверить условия CR

$u'_x = e^x \cos y \qquad u'_y = -e^x \sin y$

$v'_x = e^x \sin y \qquad v'_y = e^x \cos y$

$\Rightarrow$ по т. 2.4 $f(z)$ – диф-ма в $\mathbb{C}$

2) Проверим непрерывность производной

$f'(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y = f(z) \Rightarrow f'(z) = f(z)$ (как у e)

$\Rightarrow f(z) \in A(\mathbb{C})$ – <u>аналитическая</u> в области $\mathbb{C}$

Т.к. $f'(z) = f(z) \Rightarrow w = e^x(\cos y + i \sin y)$ – показательная функция от z

Опр. Если $f(z)$ – аналитична во всей $\mathbb{C}$, то она называется **целой аналитической ф-ией**

$f(z) \in C(\mathcal{D})$ – непрерывность

5. Свойства аналитических функций

① $\exists\ f(z),\ g(z) \in A(G)$. Тогда $f(z) \underset{*}{\pm} g(z) \in A(G)$.

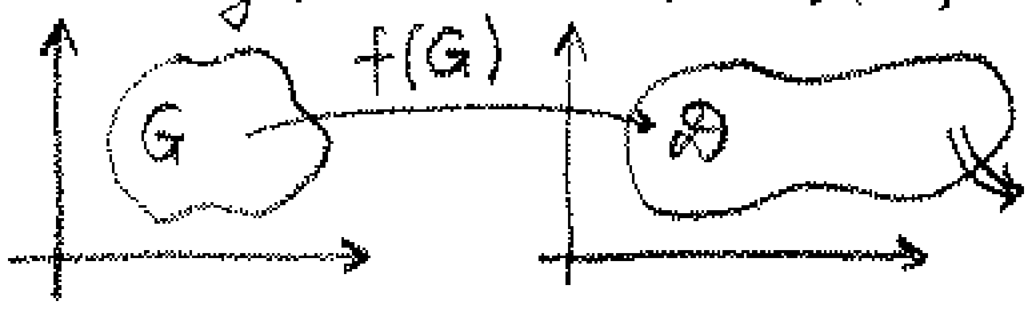
Если $g(z) \neq 0\ \ \forall z \in G$, то $\dfrac{f(z)}{g(z)} \in A(G)$

□ вытекает из свойств дифференцируемости

② (Теорема об образе области – open mapping theorem).

$\exists\ W = f(z) \in A(G)$, $f(z) \neq const$. Тогда мн-во $\mathcal{D} = f(G)$ также является областью

□ док-во в конце курса



$f(G)$ – аналит. область?

③ (Аналитичность сложной ф-ии) $f \neq const$

$\exists\ W = f(z) \in A(\mathbb{C})$, $F = f(G)$ (– область из пункта 2), $\zeta = g(w) \in A(F)$,

тогда $\zeta = g[f(z)] = H(z) \in A(G)$ $\qquad$ $w \in A(G)$ – аналитична в G

④ (Аналитичность обратной ф-ии)

$W = f(z) \in A(G)$, $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in G$, $\exists\ W_0 = f(z_0)$

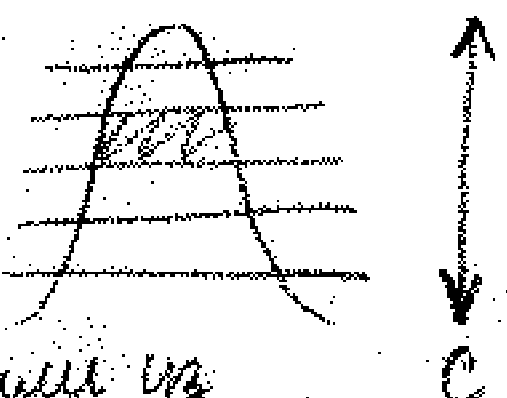
Тогда $\exists\ K_\varepsilon(W_0)$, $z = \varphi(W)$:

1. $z = \varphi(W)$ обратна к f в окрестности $K_\varepsilon(W_0)$, т.е. $\forall W \in K_\varepsilon(W_0)$ $f(\varphi W) = W$

   обратное отображение
2. $\varphi(W) \in A(K_\varepsilon(W_0))$ – аналитична в ε-окр.
3. $\varphi'(W_0) = \dfrac{1}{f'(z_0)}$ – обратные производные т.е. формула для вычислений

□ Без док-ва

⑤ (Ортогональность линий уровня)

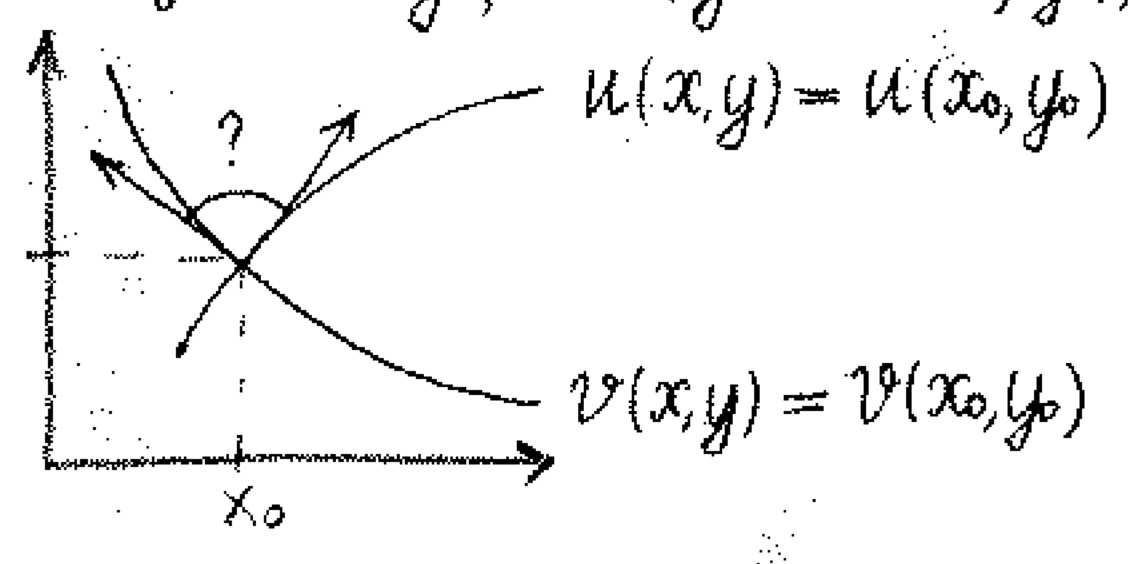


все возм. значения

$W = f(z) \in A(G)$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $f \neq const$

$z = x + iy$, $u(x,y) = C$, $v(x,y) = K$ – линии уровня

$z_0 = x_0 + iy_0$, $u(x,y) = u(x_0, y_0)$, $v(x,y) = v(x_0, y_0)$ – выбрали из семейства, проход. через т.



$\vec{n}_1 = \mathrm{grad}\, u = \{u'_x,\ u'_y\}$

$\vec{n}_2 = \mathrm{grad}\, v = \{v'_x,\ v'_y\}$

$\cos(\vec{n}_1 \hat{,} \vec{n}_2) = \dfrac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

Угол между касательными = углу между нормалями $\Rightarrow$ рассм. нормали – а это градиенты

$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = u'_x v'_x + u'_y v'_y = \{\text{Коши – Римана}\} = u'_x v'_x - v'_x u'_x = 0$

$\Rightarrow \widehat{\vec{n}_1 \vec{n}_2} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ линии ортогональны, ч.т.д.

$\exists\ w = f(z),\ \exists f'(z_0) \neq 0,\ f$ — непр. в окр-ти т. z_0; $\arg f'(z_0)$

$\Downarrow$

аргумент не определен $\Rightarrow$ не интересует
(в противном случае)

6. Геометрический смысл аргумента производной

17

Пусть L — непрерывная кривая с параметрическим уравнением $z = \lambda(t)$, где $t \in E = [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$. В каком случае функция λ имеет производную в точке $t_0 \in E$?

Положим $\lambda(t) = x(t) + iy(t)$ и составим разностное отношение

$$\frac{\lambda(t) - \lambda(t_0)}{t - t_0} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + i\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}.$$

предел левой части $\exists \Leftrightarrow$ $\exists$ два предела правой части

При $t \to t_0,\ t \in E$ получаем:

Производная $\lambda'(t_0)$ существует тогда и только тогда, когда существуют обе вещественные производные $x'(t_0)$ и $y'(t_0)$. При этом

$$\lambda'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0).$$

— факт существования производных

$x'(t_0)=0$ ←
$y'(t_0)=0$

Значение параметра t_0 и точка $z_0 = \lambda(t_0)$ называются **регулярными**, если производная $\lambda'(t_0)$ существует и не равна нулю.

Если t_0 — регулярное значение параметра, то для всех $t \in E$, достаточно близких к t_0 и отличных от t_0, точка $z = \lambda(t)$ на кривой L отлична от $z_0 = \lambda(t_0)$. Число

$$0 \neq \frac{\lambda(t) - \lambda(t_0)}{t - t_0} = \frac{z - z_0}{t - t_0},$$

при делении линия действия сохраняется (делим на число)

рассматриваемое как вектор на комплексной плоскости, лежит на прямой, соединяющей точки z_0 и z, т.е. на секущей. Угол, под которым эта секущая наклонена к действительной оси, равен

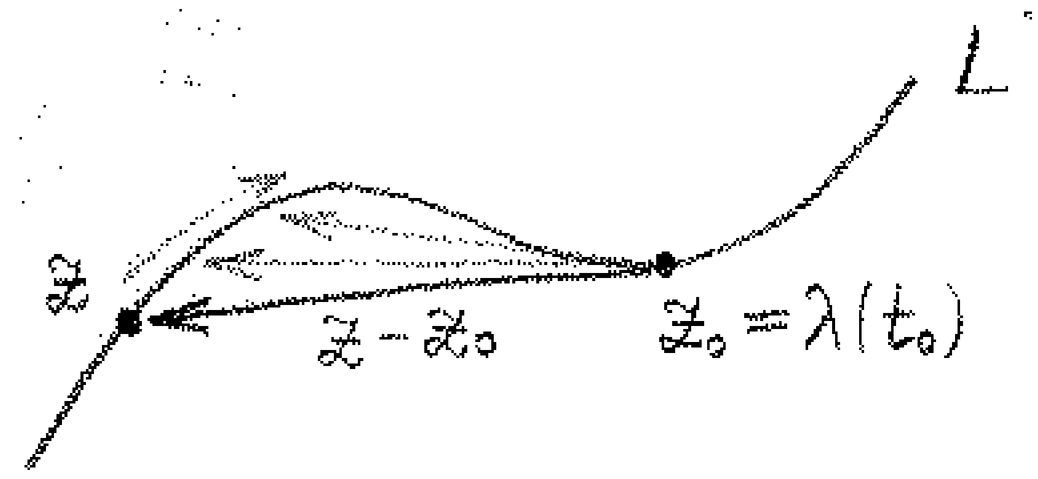
$$\mathrm{Arg}\frac{z - z_0}{t - t_0}.$$

В пределе при $t \to t_0$, $t \in E$, получим

$$\mathrm{Arg}\lambda'(t_0).$$

Вывод

Таким образом, если при $t = t_0$ функция $z = \lambda(t)$ имеет ненулевую производную $\lambda'(t_0)$, то секущая кривой L, проходящая через точки z_0 и z, имеет предельное положение при $t \to t_0$. Это предельное положение есть касательная к кривой L в ее точке z_0. Она наклонена к действительной оси под углом $\mathrm{Arg}\lambda'(t_0)$.



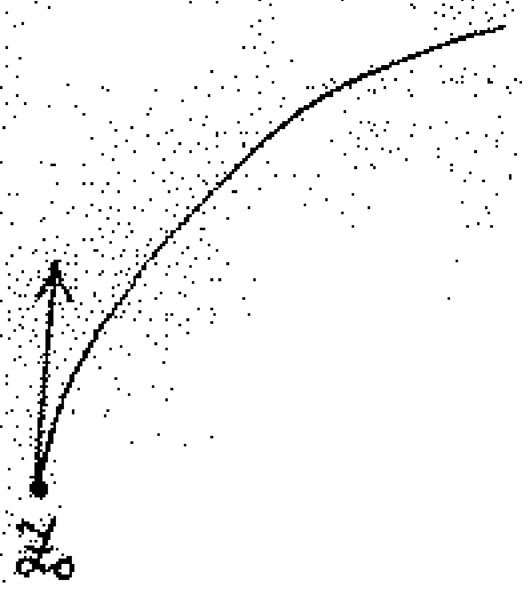
(причем $z \neq z_0$) $t \to t_0$, $z \to z_0$

$\frac{z-z_0}{t-t_0} \xrightarrow[t\to t_0]{} \lambda'(t_0)$ — определение производной в точке

„Аргументируем":

$Arg\,\frac{z-z_0}{t-t_0} \xrightarrow[t\to t_0]{} Arg\,\lambda'(t_0)$

⇒ Вывод: 1) есть предельное положение касательной
2) угол наклона = $Arg\,\lambda'(t_0)$



$z = \lambda(t)$

$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$

$z_0 = \lambda(\alpha)$

$\lambda'(\alpha) \neq 0$

$W_0 = f(z_0)$

$W = f[\lambda(t)] = \mu(t)$

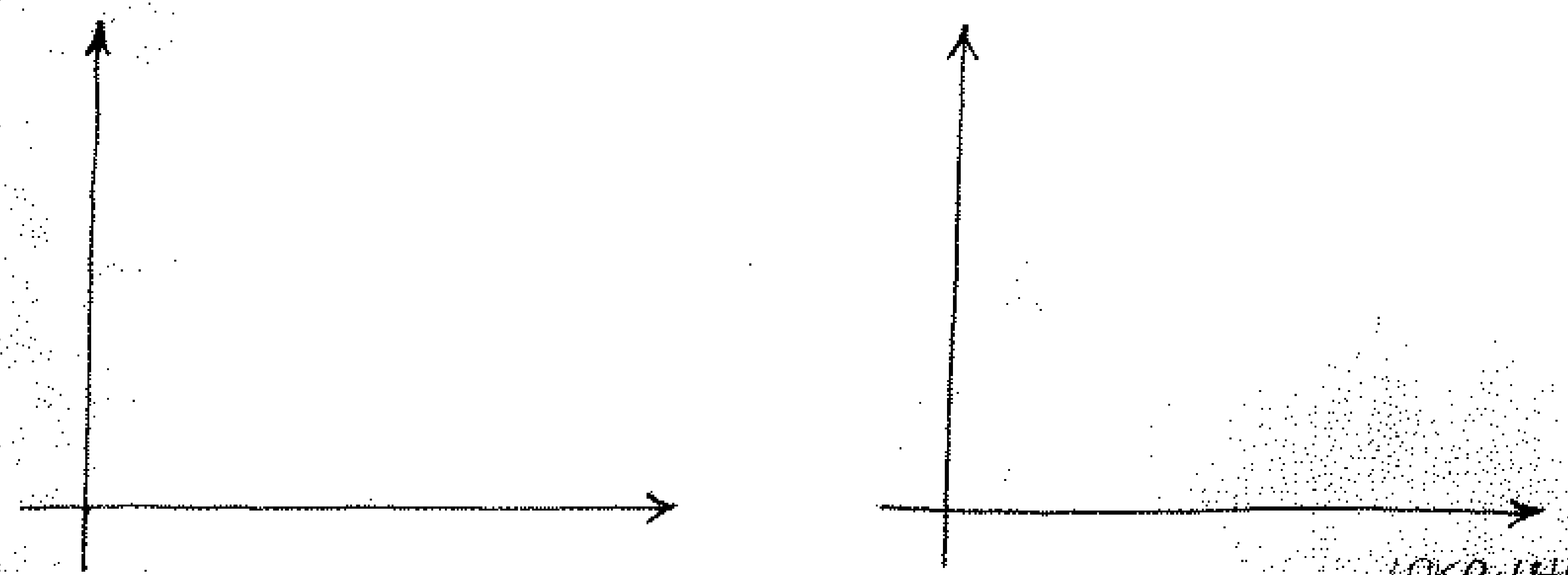
$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$

$W_0 = f[\underbrace{\lambda(\alpha)}_{z_0}] = \mu(\alpha)$ производная сложной ф-ш

$\mu'(\alpha) = \lambda'(\alpha) \cdot f'(z_0) \neq 0$ аргумент произведения равен сумме аргументо

$\mathrm{Arg}\, \mu'(\alpha) = \mathrm{Arg}\, \lambda'(\alpha) + \mathrm{Arg}\, f'(z_0)$

$$\boxed{\mathrm{Arg}\, \mu'(\alpha) - \mathrm{Arg}\, \lambda'(\alpha) = \arg f'(z_0)}$$



перерисовать

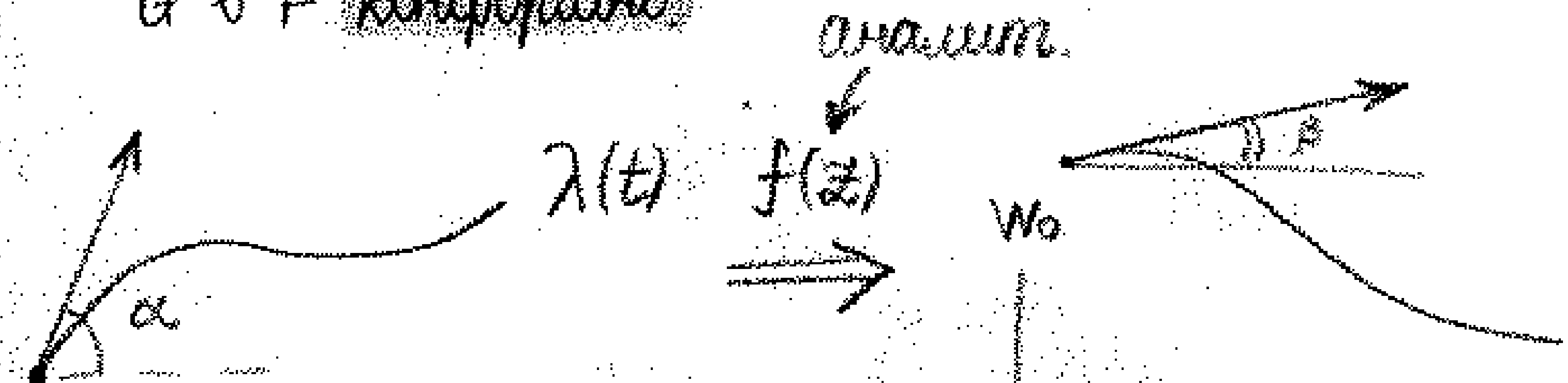
[redacted]

Опр. Отображение, задаваемое непрерывной ф-ией $f(z)$, локально конформно в т. z_0, если оно сохраняет углы между гладкими кривыми, проходящими через z_0. (критерий конформности)

Теорема 2.5 Отображение $w = f(z)$ конформно в каждой т. z_0, где $f'(z_0) \neq 0$, т.е. $\mathrm{Arg}\, \mu'(\alpha) - \mathrm{Arg}\, \lambda'(\alpha) = \arg f'(z_0)$.

Опр. $\exists$ $w = f(z)$ отображает обл. G в обл. F. Если соответствие между точками этих областей взаимнооднозначно и отображение f конформно в каждой точке из G, то говорят, что f отображает G в F конформно.

1. $f(z)$ – взаимноод
2. $\forall z$ – конформно



$z_0 = \lambda(t_0)$

α – аргумент z_0

действие сложной ф-ии:

$f(\lambda(\alpha)) = \mu(\alpha)$

III. Элементарные аналитические функции и задаваемые ими конформные отображения

1. Целая линейная функция

(Маркушевич, гл. II, раздел 10)

$$w = L(z) = \alpha z + \beta, \qquad \alpha \neq 0,$$

$$\operatorname{dom} L = \mathbf{C}, \qquad \operatorname{im} L = \mathbf{C},$$ ← область определения и область значения ①

так как при любом w уравнение $w = \alpha z + \beta$ разрешимо относительно z, т.е. всякое $w \in \mathbf{C}$ имеет прообраз z.

③ является ли отображение конформным

② является ли функция аналитичной ⟶ $L'(z) = \alpha \neq 0 \qquad \forall z.$

Согласно достаточному условию конформности (теорема 2.5) отображение $w = L(z)$ конформно в каждой точке $z \in \mathbf{C}$. Так как при этом L действует взаимно однозначно, то имеет место и глобальная конформность, т.е. L конформно отображает конечную комплексную плоскость $\mathbf{C}$ на себя.

Утв. Справедливо и обратное утверждение: если аналитическая функция $w = f(z)$ конформно отображает комплексную плоскость $\mathbf{C}$ на себя, то f является целой линейной функцией.

Выясним геометрический смысл линейной ф-ии:

Какое именно отображение осуществляет линейная функция?

Если $\alpha = 1$, т.е. если $w = z + \beta$, то происходит сдвиг комплексной плоскости как целого. В качестве вектора сдвига выступает число β, интерпретируемое как свободный вектор.

При $\alpha \neq 1$ отображение $w = L(z)$ имеет **неподвижную точку** γ, описываемую условием

$$L(\gamma) = \gamma,$$

т.е.

$$\gamma = \alpha\gamma + \beta, \tag{1}$$

или

$$\gamma = \frac{\beta}{1-\alpha}.$$ — получили единственную неподвижную точку

Вычитая из

$$w = \alpha z + \beta$$

равенство (1), получаем:

$$\overbrace{w-\gamma} = \alpha(\overbrace{z-\gamma}).$$

рассм. разность векторов в одной комплексной области

Будем рассматривать разности $z - \gamma$ и $w - \gamma$ как векторы, приложенные началом к точке γ. Записывая α в показательной форме

$$\alpha = re^{i\phi},$$

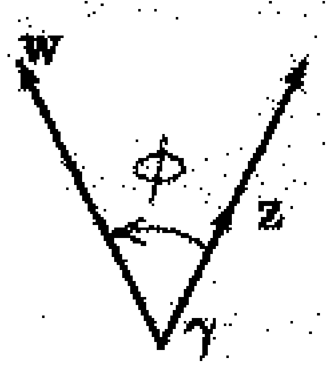
совершим переход от первого вектора ко второму в два этапа, а именно

1) сначала умножим на r:

$$z - \gamma \longrightarrow r(z-\gamma),$$

2) а затем на $e^{i\phi}$.

разобрать



Таким образом, при $\alpha \neq 1$ линейная функция задает гомотетию с коэффициентом r относительно точки γ, сопровождаемую поворотом комплексной плоскости на угол ϕ вокруг той же точки. Эти преобразования можно выполнить и в обратном порядке: сначала поворот, а потом гомотетию.

Геометрический смысл отображения линейной ф-ии.

1. гомотетия отн. т. γ
2. поворот на угол φ отн. т. γ

Расси на $\mathbb{C}$, теперь хотим $\overline{\mathbb{C}}$
$\Rightarrow$ нужно ввести бесконечность

При $z \to \infty$ имеем $L(z) \to \infty$. Если нужно распространить определение линейной функции на $\overline{\mathbf{C}}$, то естественно положить

расширенная комплексная плоскость

$$L(\infty) = \infty.$$

Это приводит к появлению у L второй неподвижной точки (бесконечно удаленной). Если $\alpha = 1$, то ∞ является единственной неподвижной точкой, но в этом случае ее можно считать двойной.

Доопределенная линейная функция по-прежнему отображает $\overline{\mathbf{C}}$ на себя взаимно однозначно. Остается ли это отображение конформным? Что означает конформность в бесконечно удаленной точке?

необходимо свести беск. удал. точки к обычным локальным

Выполним в плоскостях переменных z и w замены переменных

$$z = \frac{1}{\xi}, \qquad w = \frac{1}{\zeta},$$

преобразующие бесконечно удаленные точки этих плоскостей соответственно в $\xi_0 = 0$ и $\zeta_0 = 0$. В новых переменных функция $w = L(z)$ запишется как

$w = \alpha z + \beta$

$\Rightarrow \frac{1}{\zeta} = \frac{\alpha}{\xi} + \beta$

$$\Longrightarrow \qquad \zeta = \frac{1}{\frac{\alpha}{\xi} + \beta} = \frac{\xi}{\beta\xi + \alpha}.$$

Производная этой функции равна

$$\zeta' = \frac{\alpha}{(\beta\xi + \alpha)^2}.$$

по 2.5.

Она не обращается в нуль нигде, в том числе и при $\xi_0 = 0$. Следовательно, преобразованная функция конформна в точке $\xi_0 = 0$. В этом случае исходная функция $w = L(z)$ считается конформной в бесконечно удаленной точке.

локально конформна

Вывод: $\Rightarrow$ доопределенная ф-ия сохраняет конформность

Сохраняет ли замена конформность?

Конформность в т. ∞:

1. замена
2. выражение ф-ии
3. производная ф-ии
4. ее равенство нулю

2. Дробно-линейная функция

(Маркушевич, гл. II, раздел 10; гл. III, раздел 4)

$$w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}. \qquad (*)$$

При этом не должно быть равно нулю число

$$\Delta = ad - bc = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

в противном случае числитель и знаменатель пропорциональны $\Rightarrow$ $w = C$ – плохо

называемое **определителем функции L.**

При $c = 0$ дробно-линейная функция превращается в целую линейную функцию.

Умножая на число $\lambda \neq 0$ числитель и знаменатель дроби в формуле (*), получим новое представление функции L:

$$w = L(z) = \frac{(\lambda a)z + \lambda b}{(\lambda c)z + \lambda d}. \qquad (**)$$

за счет изменения представл.

Определитель этого представления равен

$$\tilde{\Delta} = \lambda^2 \Delta. \qquad (***)$$

Следствие. Для всякой дробно-линейной функции можно выбрать представление с определителем 1. Достаточно взять в (***) $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$. – любой из корней

подумать!

Хотим понять как соотносятся коэффициенты

Есть ли в задании дробно-линейной функции еще какая-либо свобода помимо возможности умножения числителя и знаменателя на произвольное ненулевое число?

Предположим, что

$$L_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \equiv L_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}.$$

Равенство двух функций означает совпадение их значений при всех значениях аргумента из общей области определения. Отсюда получаем

$$(a_1 z + b_1)(c_2 z + d_2) = (c_1 z + d_1)(a_2 z + b_2) \quad \forall z.$$

Из равенства квадратных многочленов выводим

$$(1)\ a_1 c_2 = a_2 c_1, \qquad b_1 d_2 = b_2 d_1,\ (2)$$

$$a_1 d_2 + b_1 c_2 = a_2 d_1 + b_2 c_1.$$

Задание. Показать, что эти соотношения равносильны равенствам

$$\overbrace{\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}}^{(1)} = \overbrace{\frac{d_1}{d_2} = \frac{b_1}{b_2}}^{(2)}.$$

Вывод: Итак, в задании функции L дробью никакой другой свободы кроме возможности умножения числителя и знаменателя на произвольное ненулевое число нет.

Разобрать

3. Групповые свойства дробно-линейных преобразований

Рассмотрим суперпозицию дробно-линейных функций

$$L_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \quad \text{и} \quad L_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}.$$

Ее называют также **произведением** или **композицией** функций L_1 и L_2 и обозначают $L = L_2 L_1$.

$$w = L(z) = L_2[L_1(z)] =$$

$$\frac{a_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} = \frac{a_3 z + b_3}{c_3 z + d_3}.$$

Здесь

$$a_3 = a_2 a_1 + b_2 c_1, \qquad b_3 = a_2 b_1 + b_2 d_1, \qquad (x)$$

$$c_3 = c_2 a_1 + d_2 c_1, \qquad d_3 = c_2 b_1 + d_2 d_1. \qquad (xx)$$

Сопоставим функциям L_1, L_2 и L матрицы:

$$L_1 \longrightarrow A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \qquad L_2 \longrightarrow A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix},$$

$$L \longrightarrow A_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}.$$

Формулы (x) и (xx) означают, что композиции дробно-линейных функций L_1 и L_2 соответствует матрица A_3, являющаяся **произведением** $A_2 A_1$ матриц A_1 и A_2. Так как $\Delta_3 = \Delta_1 \Delta_2 \neq 0$, то $L_2 L_1$ — также дробно-линейная функция.

Вывод. Операция композиции на множестве дробно-линейных функций не выводит за пределы этого множества.

Свойства композиции

- Композиция любых (необязательно дробно-линейных) функций обладает свойством ассоциативности.

- Существует линейная функция

$$I(z) \equiv z,$$

композиция с которой не меняет никакую дробно-линейную функцию:

$$LI = IL = L \quad \forall L.$$

Записав эту функцию как

$$I(z) = \frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1},$$

видим, что ей соответствует единичная матрица

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

дробно

- Для всякой линейной функции L существует обратная функция L^{-1}, т.е.

$$LL^{-1} = L^{-1}L = I. \qquad (+)$$

Возьмем для L представление

$$L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

с определителем 1. Построим L^{-1} как функцию, матрица которой обратна матрице

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

т.е.

$$L^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}.$$

Соотношения (+) вытекают из матричных равенств

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_2.$$

Резюме. Множество дробно-линейных функций является (некоммутативной) группой относительно операции композиции. Эта группа изоморфна группе $SL_2(\mathbf{C})$ комплексных матриц 2-го порядка с определителями, равными единице (специальная линейная группа порядка 2 над полем $\mathbf{C}$).

$W(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

4. Конформность

Пусть $w = L(z)$ — **нецелая** линейная функция, т.е.

$$c \neq 0.$$

Тогда

$$\operatorname{dom} L = \{z \neq \delta = -\frac{d}{c}\}.$$

ак описать
бласть значений?
ак область
пределения
братной ф-ии

Точка δ называется **особой точкой** преобразования (функции) L.

Так как $w = L(z)$ обладает обратной функцией

$$z = L^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a},$$

то

$$\operatorname{im} L = \operatorname{dom} L^{-1} = \{w \neq \frac{a}{c}\}.$$

аими dom L и
m L ⇒
налитичность?
онформность

Производная функции L в каждой точке $z \in \operatorname{dom} L$ существует и равна

$$\frac{ad - bc}{(cz+d)^2} = \frac{\Delta}{(cz+d)^2},$$

⇒ т.к. существует и непрерывна
то есть аналитичность

т.е. нигде не обращается в нуль. Локальная конформность в каждой точке и наличие обратной функции означают: Вывод

сутствие
ращения в
ль производной
ет локальную
онформность

Всякая дробно-линейная функция отображает свою область определения на область значений конформно.

Разобрать?

При $z \to \delta = -\frac{d}{c}$ имеем $L(z) \to \infty$. Если $z \to \infty$, то $L(z) \to \frac{a}{c}$. Если нужно распространить определение линейной функции на всю плоскость $\overline{\mathbf{C}}$, то естественно положить

$$L(\delta) = \infty, \qquad L(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Теперь $w = L(z)$ отображает расширенную комплексную плоскость на себя и это отображение по-прежнему взаимно однозначно. Остается ли это отображение конформным?

Задание. Проверить, что доопределенная функция L обладает локальной конформностью в обеих точках δ и ∞:

- При исследовании поведения L в окрестности точки δ выполнить в плоскости w замену переменного $\zeta = \frac{1}{w}$. Убедиться, что полученная функция
$$\zeta = \frac{cz+d}{az+b} \Big\} \text{ дробно-линейная функция}$$
особая точка изменилась
имеет ненулевую производную в точке $z = \delta$.

- При исследовании поведения L в окрестности точки ∞ выполнить в плоскости z замену переменного $\xi = \frac{1}{z}$. Убедиться, что полученная функция
$$w = \frac{b\xi + a}{d\xi + c}$$
имеет ненулевую производную в точке $\xi = 0$.

Утв. **Вывод.** L конформно отображает расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbf{C}}$ на себя.

Утв. Справедливо и обратное утверждение: если аналитическая функция $w = f(z)$ конформно отображает расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbf{C}}$ на себя, то f является дробно-линейной функцией.

Конформность: 1) Взаимная однозначность — обратная ф-ия
$$L \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow L^{-1} \to \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \frac{1}{\Delta}$$
(или выразить по-тупому z через w)
$$z(a - cw) = dw - b$$
$$z = \frac{dw - b}{-cw + a} \Rightarrow \text{всё хорошо}$$

Неподвижные точки дробно-линейного преобразования

Пусть

$$w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

т.е. не вырождается в целую

где $c \neq 0$. Неподвижные точки преобразования $w = L(z)$ определяются условием

$$z = L(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

т.е. квадратным уравнением

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0.$$

Т.к. $c\neq 0$, то $\exists$ два корня квадратного уравнения.

Учитывая то, что известно о неподвижных точках целых линейных функций, приходим к следующему выводу:

Утв. **Всякая дробно-линейная функция имеет не более двух неподвижных точек. Единственным исключением является тождественная функция $I(z) = z$, для которой все точки из $z \in \overline{\mathbb{C}}$ являются неподвижными.**

Теорема 3.1 $\exists\ L(z),\ \Lambda(z)$ — дробно-линейные ф-ии такие, что

$$L(z_i)=\Lambda(z_i),\quad i=1,2,3 \qquad (3.1)$$

для трех попарно различных точек z_1, z_2, z_3. Тогда

$$L(z)\equiv\Lambda(z)$$

(т.е. дробно-линейная ф-ия однозначно определяется значениями в трех попарно различных точках).

□ Умножим обе части в (3.1) на Λ^{-1} и положим $U=\Lambda^{-1}L$:

$\Lambda^{-1}L(z_i)=z_i$, $i=1,2,3$ $\Rightarrow$ $U(z_1)=z_1$ — тождественное преобр.

$\Rightarrow$ ф-ия имеет 3 неподвижные точки z_1, z_2, z_3 $\Rightarrow$ U — тождеств. ф-ия $\Lambda^{-1}L=I \sim L=\Lambda$ ■

5. Инвариантность двойного отношения

Задача 3.1 Пусть заданы z_1, z_2, z_3 — конечные и попарно различ. числа и w_1, w_2, w_3 — конечные и попарно различные числа. Построить дробно-линейную ф-ию $w = L(z)$ такую, что
$L(z_i) = w_i \ , \ i = 1, 2, 3 \quad (3.2)$

□ Построить возможно — результат — неявное уравнение:

$$\frac{w_1 - w}{w_2 - w} : \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} = \frac{z_1 - z}{z_2 - z} : \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \quad (3.3)$$

задание w от z единственная, т.к. для трех точек однозн.

— это дробно-линейная ф-ия

Является искомой ф-ией, поскольку при подстановке трех точек (z_1, w_1), (z_2, w_2), (z_3, w_3) уравнение обращается в тождество. ■

Опр. ∃ a, b, c, d — конечные попарно различные числа. Число $\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$ наз. двойным отношением чисел a, b, c, d и обозначается символом (a, b, c, d) — инвариант дробно-линейных преобразований

В таком случае результат задачи 3.1. можно переписать в виде:
$(w_1, w_2, w_3, w) = (z_1, z_2, z_3, z)$ — равенство двойных отношений

Теорема 3.2: Двойное отношение есть инвариант ∀ дробно-линейного преобразования,
или
∃ $w = L(z)$ — произвольная дробно-линейная ф-ия,
a, b, c, d — произвольная четверка конечных попарно разл. чисел,
$A = L(a)$, $B = L(b)$, $C = L(c)$, $D = L(d)$
$\Rightarrow (a, b, c, d) = (A, B, C, D) \quad (*) \Rightarrow$ дробно-линейные ф-ии сохраняют двойные отношения

□ Будем рассм. L как решение задачи 3.1 для троек (a, b, d) и (A, B, D). Тогда L задается неявным уравнением (по задаче 3.1):

$$\frac{w - A}{w - B} : \frac{D - A}{D - B} = \frac{z - a}{z - b} : \frac{d - a}{d - b}$$

Используем последнее соотношение: т.к. $L(c) = C$, то пара (c, C) должна удовлетворять этому уравнению. После подстановки этой пары получим равенство $(*)$. ■

Рассм. ослабленные требования, т.е. допустим возможность стремления точек к бесконечности, например $z_1 \to \infty$. Тогда отношение (3.3) упростится, поскольку один из множителей превратится в единицу.

В задаче 3.1. в каждой из троек может содержаться число $z_i = \infty$ или/и $w_j = \infty$. Тогда формула (3.3) по-прежнему решает задачу 3.1., если в ней заменить единицами разности, содержащие z_i или/и w_j

6. Круговое свойство

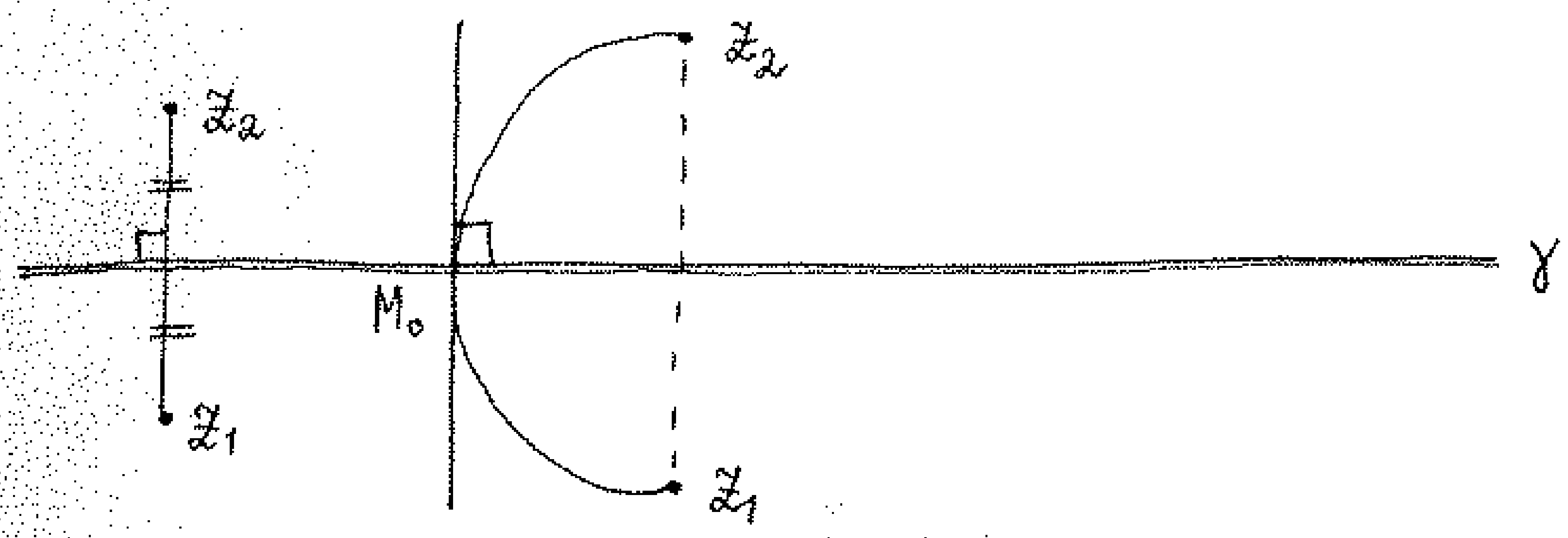
Теорема 3.3: Образом прямой или окружности под действием дробно-линейной ф-ии является снова прямая или окружность.

□ См. стр. 35 ■

7. Сохранение симметрии

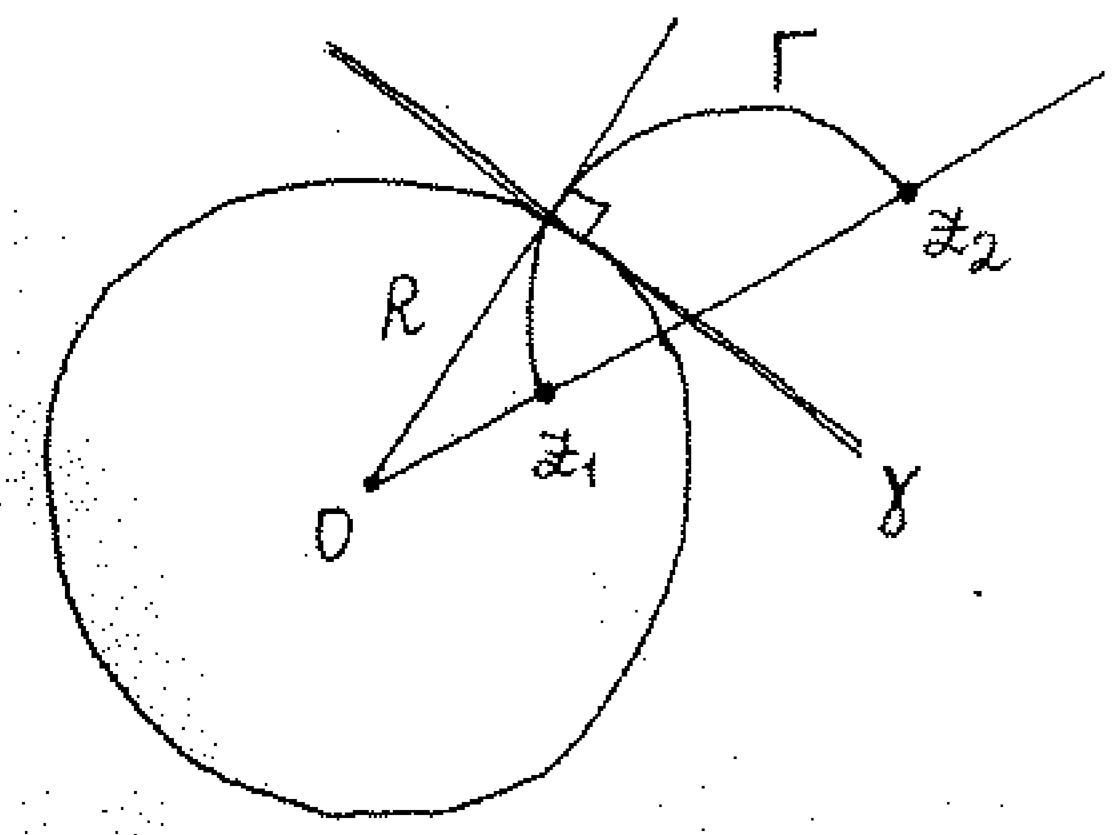
Теорема 3.4: Пусть γ – произвольная прямая или окружность на пл-ти z, $w = L(z)$ – произв. д/л ф-ия. Если т. z_1 и z_2 симметричны отн. γ, то их образы $w_1 = L(z_1)$ и $w_2 = L(z_2)$ симметричны отн. линии $\Gamma = L(\gamma)$

Симметрия отн. прямой:



Точки z_1 и z_2 наз. **симметричными отн. γ**, если:
1. прямая, соединяющая z_1 и z_2, перпендикулярна γ и делится пополам точкой пересечения;
2. произвольная окружность, проведенная через z_1 и z_2, пересекает γ под прямым углом

Симметрия отн. окружности:



$\Rightarrow$ 1. z_1 – находится внутри окружности, z_2 – вне окружности

2. $Oz_1 \cdot Oz_2 = R^2$ (по т. о касательной к окружности)

3. z_1 и z_2 лежат на прямой, проходящей через центр окруж.

$$\Rightarrow \gamma: |z - a| = R$$

$$z_2 = a + \frac{R^2}{\overline{z_1 - a}}$$

$$(z_2 - a)\overline{(z_1 - a)} = R^2$$

□ Уравнение, описывающее и прямые, и окружности:

$A(x^2+y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0$ (3.4)

а именно: $A = 0,\ B^2 + C^2 \neq 0$ – прямая
$A \neq 0,\ B^2 + C^2 - AD > 0$ – окружность

Покажем справедливость (3.4) для окружности:

$$\left(x^2 + 2\frac{B}{A}x + \frac{B^2}{A^2}\right) + \left(y^2 + 2\frac{C}{A}y + \frac{C^2}{A^2}\right) = \frac{B^2}{A^2} + \frac{C^2}{A^2} - \frac{D}{A} = \frac{B^2 + C^2 - AD}{A^2} = R^2$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{A}\right)^2 = R^2$$

Перейдем к плоскости комплексного переменного z через замены:
$x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
и введем обозначение $E = B + iC$

Перепишем (3.4) через введенные переменные:
$A z\bar{z} + \bar{E} z + E\bar{z} + D = 0$ (3.5)

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = 0,\ E \neq 0 - \text{прямая} \\ A \neq 0,\ |E|^2 - AD > 0 - \text{окружность} \end{array}\right\} (*)$$

Перейдем к непосредственному док-ву теоремы 3.3.

Покажем вначале, что круговое св-во выполнено для инверсии $w = \frac{1}{z}$.
$\exists\ \gamma$ — произвольная прямая или ок-ть на пл-ти z, Γ — её образ под действием инверсии.
Зададим γ ур-ием вида (3.5). Тогда Γ описывается уравнением:
$A\frac{1}{w\bar{w}} + \bar{E}\frac{1}{w} + E\frac{1}{\bar{w}} + D = 0 \sim D w\bar{w} + Ew + \bar{E}\bar{w} + A = 0$ (3.6)
Осталось разобраться, какую линию описывает ур-ие. Возможны несколько случаев:

$D = 0$:
- $A = 0,\ E \neq 0 \Rightarrow$ прямая
- $A \neq 0$, по (3.5) $|E|^2 - AD = |E|^2 > 0 \sim E \neq 0 \Rightarrow$ прямая

$D \neq 0$:
- $A = 0,\ E \neq 0 \Rightarrow |E|^2 - AD = |E|^2 > 0 \Rightarrow$ окружность
- $A \neq 0,\ |E|^2 - AD > 0 \Rightarrow$ окружность

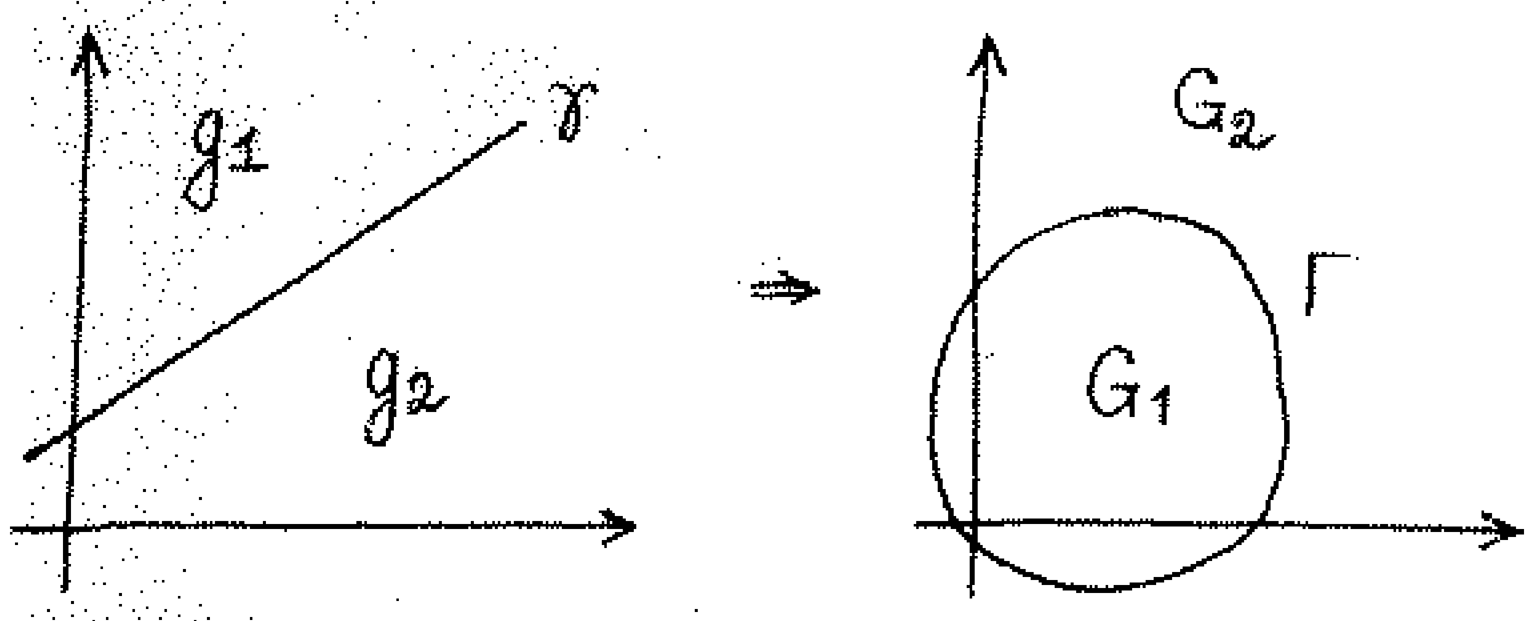
(Для вывода пользовались парностью из (*)).

Сведем все остальные случаи к доказанному.
$\exists\ w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ — произвольная д/л (нецелая) ф-ия, где $c \neq 0$
Преобразуем $L(z)$ как композицию трех преобразований: $z \to z_1 \to z_2 \to w$
$L(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}$ (заметим, что $bc - ad = -\Delta$)
Искомые три преобразования:
1. $z_1 = L_1(z) = cz + d$
2. $z_2 = 1/z_1 = \Lambda(z_1)$
3. $w = \frac{a}{c} - \frac{\Delta\ (\text{определитель})}{c}$; $z_2 = L_2(z_2)$

$\Rightarrow L(z) = L_2 \Lambda L_1$
L_2 и L_1 — не меняют типа кривой γ
Λ (инверсия) — доказано выше ■

Замечание 1.
Всякая прямая или окружность, проходящая через особую точку, под действием ф-ии L переходит в прямую

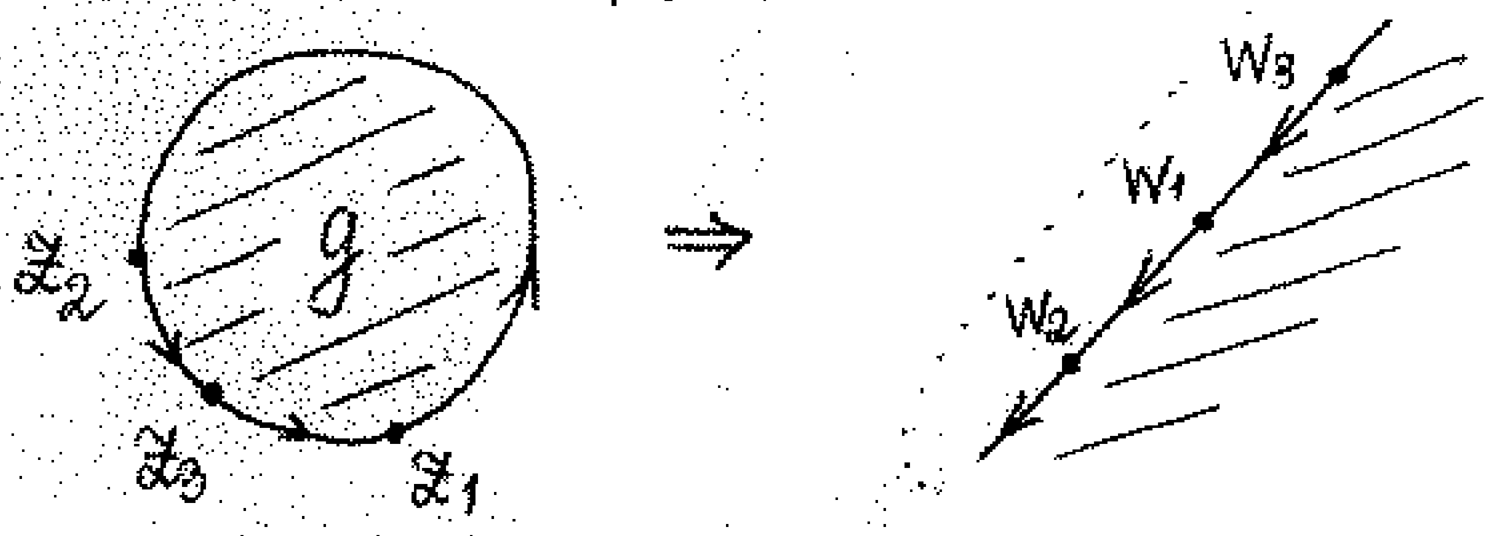
Замечание 2.



две разные полуплоскости
⇒ какая куда перейдет
при отображении?

Это можно узнать через нахождение образов точек из g_1 и g_2, т.е. $L(x_1)$, $L(x_2)$, $x_1 \in g_1$, $x_2 \in g_2$ и выяснение местоположения отн. окружности.

Существует другой способ — отображение областей



Возьмем три точки z_1, z_2, z_3 так, чтобы при проходе по границе от z_1 к z_3 мы прошли бы через z_2. Двух точек недостаточно! Мы хотим получить область g ⇒ когда идем от z_1 к z_3 область находится слева. Далее найдем образы этих точек и пойдем от z_1 к z_3 через z_2. Область, которая окажется слева — искомая.

Вернемся к симметричности:

Точная запись для точек z_1 и z_2, симметричных отн. окружности:
$$z_2 = a + \frac{R^2}{\overline{z_1 - a}}$$

Докажем т. 3.4:

□ Проведем через w_1 и w_2 прямую или окружность, которую обозн. Δ. Тогда линия $\delta = L^{-1}(\Delta)$ — образ Δ под действием обратной ф-ии, проходит через т. z_1 и z_2 и явл. прямой или окружностью. Т.к. z_1 и z_2 симм. отн. γ, то $\delta \perp \gamma$. В силу конформности образы пересекаются под прямыми углами, т.е. $\Delta \perp \Gamma$ ⇒ т. W_1 и W_2 симм. отн. Γ.

Пример. Построить дробно-линейное преобразование, которое отображает круг $K_R: |z|<R$ в круг $K_R: |w|<R$ так, чтобы заданная точка $\alpha \in K_R$ перешла в т. $w_0=0$

Введем обозн. $\gamma_R: |z|=R$, $\Gamma_R: |w|=R$

Рассм. два случая:

① $\alpha=0$ $\quad 0\to 0$, т.е. α совпадает с центром исх. круга
$\infty \quad \infty\to\infty$ — неподвижная точка д/и ф-ии

Но только линейные ф-ии оставляют ∞ неподвижной (обычно переводят в т. $1/c$)

$\Rightarrow L(z)=\alpha z+\beta$

Т.к. $L(0)=0 \Rightarrow \beta=0 \Rightarrow L(z)=\alpha z$

Поскольку $|z|=R \to |w|=R \Rightarrow |\alpha|=1 \Rightarrow \alpha=e^{i\varphi}$

$\Rightarrow \boxed{L(z)=e^{i\varphi}z}$

② $\alpha\neq 0$ $\quad \alpha\to 0$, т.е. α не совпадает с центром исх. круга

$\alpha^*=\dfrac{R^2}{\bar\alpha}$ $\quad \alpha^*\to\infty$

Эти условия с точностью до константы определяют вид ф-ии:

$$L(z)=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{неизвестный}\\ \text{множитель}}}{\lambda}\frac{z-\alpha}{z-\alpha^*}=\left\{\begin{matrix}\text{подставим}\\ \text{в-ия для } \alpha^*\end{matrix}\right\}=\lambda\frac{z-\alpha}{z-\frac{R^2}{\bar\alpha}}=$$

$$=\underbrace{-\lambda\bar\alpha}_{\mu}\frac{z-\alpha}{R^2-\bar\alpha z}=\mu\frac{z-\alpha}{R^2-\bar\alpha z}$$ возьмем модуль

Подставим в формулу $|w|=|\mu|\dfrac{|z-\alpha|}{|R^2-\bar\alpha z|}$ $\quad z=Re^{i\psi}\in\gamma$ — точка на исходной окружности

$$|w|=|\mu|\frac{|Re^{i\psi}-\alpha|}{|R^2-\bar\alpha Re^{i\psi}|}=\frac{|\mu|}{R}\cdot\frac{|R-\alpha e^{-i\psi}|}{|R-\bar\alpha e^{i\psi}|}=\frac{|\mu|}{R}=R,\quad |\mu|=R^2$$

Ответ в общем виде: $\boxed{L(z)=R^2e^{i\varphi}\dfrac{z-\alpha}{R^2-\bar\alpha z}}$

Чтобы избавиться от неоднозначности необходимо: $L'(\alpha)\in\mathbb{R}^+$ — значение производной в т. α есть действительное положит. число $\Rightarrow$ аргумент равен $0 \Rightarrow$ кривые не должны поворачиваться.

8. Функция Жуковского

Опр. Функцией Жуковского наз. $w = \lambda(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

Исследуем ее по плану.

$\operatorname{dom} \lambda = \{z \neq 0\}$ $\quad \operatorname{im} \lambda = \mathbb{C}$

w – произв. $z^2 - 2wz + 1 = 0$ $\begin{cases} w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \mid \cdot 2z \\ 2zw = z^2 + 1 \end{cases}$ $\Rightarrow z_1 z_2 = 1$
$\Downarrow$
если один прообраз лежит внутри круга, то другой вне

$\lambda'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) \Rightarrow \lambda(z) \in A(\operatorname{dom} \lambda)$

Исследуем на (локальную) конформность.

$z = \pm 1$ $\quad$ Если $z \neq \pm 1$, то $\lambda(z)$ – локально конформна

Опр. Ф-ия $w = f(z) \in A(G)$, такая, что из $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$, наз. однолистной (т.е. каждое свое значение ф-ия принимает один раз), в противном случае – многолистной. Если f многолистна во всей об-ти G, но однолистна в подобласти $g \subset G$, то g наз. областью однолистности ф-ии f.

Применим к ф-ии Жуковского.

$\lambda(z)$, рассм. на всей области определения, двулистна – т.е. принимает одно значение в двух точках.
Поскольку $z_1 z_2 = 1$, то
$\left.\begin{matrix} |z| < 1 \\ |z| > 1 \end{matrix}\right\}$ области однолистности для $\lambda(z)$.

Другой областью однолистности является:
$\left.\begin{matrix} \operatorname{Im} z > 0 \\ \operatorname{Im} z < 0 \end{matrix}\right\}$

Исследуем, куда переходят об-ти однолистности. Но для начала распространим ф-ию Жуковского на всю комплексную область расширенную, т.е. $\lambda(0) = \infty = \lambda(\infty)$

Разобьем окружность на окр-ти с центром в исходной но с разными радиусами $\Rightarrow$ найдем образы $\Rightarrow$ просуммируем $\Rightarrow$ получим искомое (окружность = единичный круг)

$\gamma_r : |z| = r$
$\quad z = r(\cos t + i \sin t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$

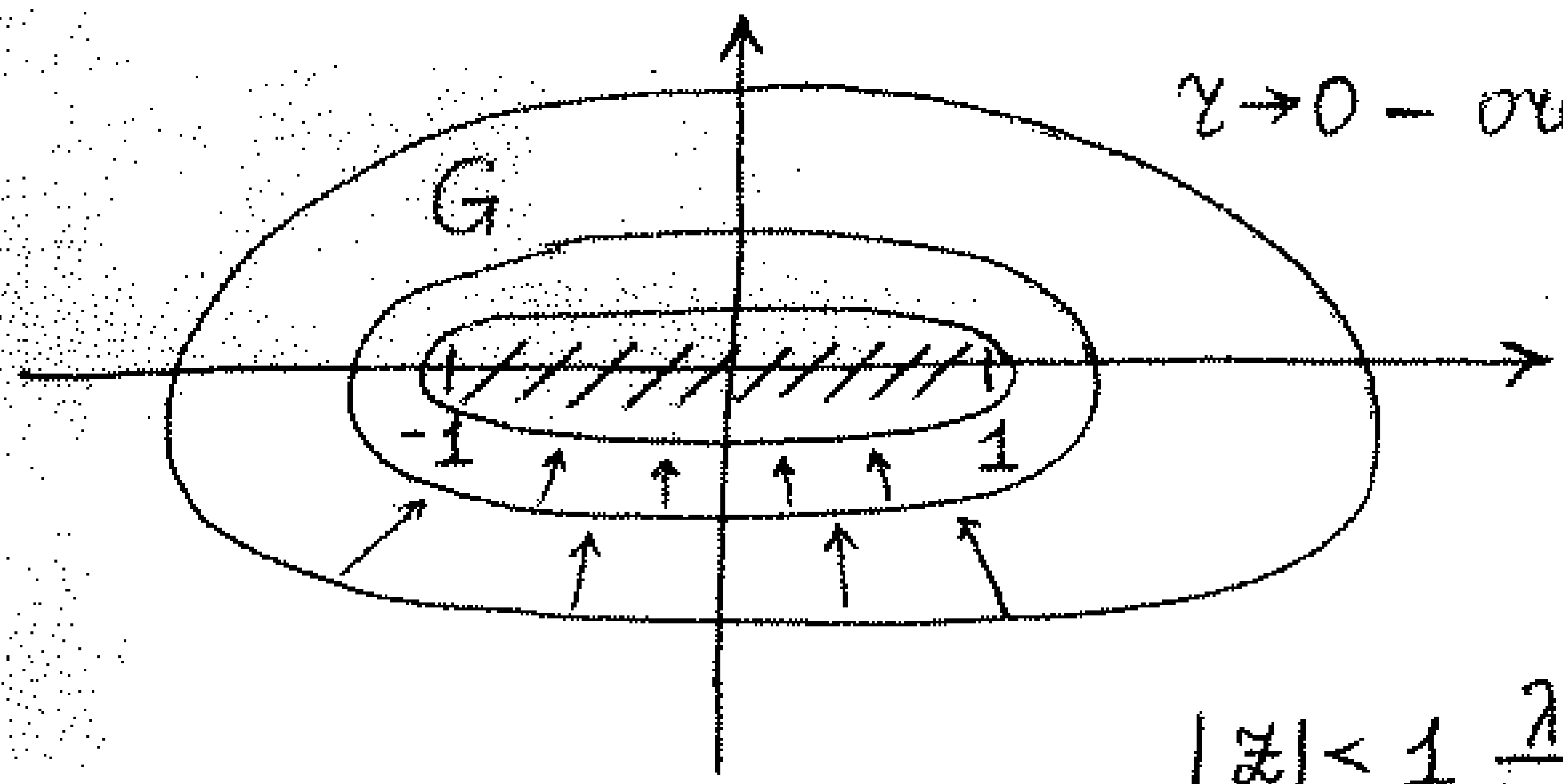
$\Gamma_r : w = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + r\right)}_{a} \cos t - \underbrace{i\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - r\right)}_{b} \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$w = u + iv \qquad u = a \cos t,\ v = -b \sin t$

Получим эллипс. Найдем фокусы:

$c=\sqrt{a^2-b^2}=1 \Rightarrow$ фокусы $w_1=-1,\ w_2=1$

$\Rightarrow$ эллипсы софокусны



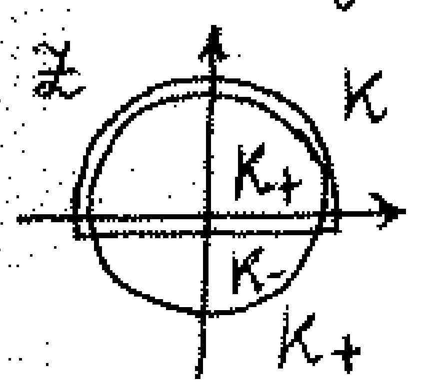
$r\to 0$ – очень большой эллипс

$r\to 1 \quad a\to 1$

G получается из компл. об-ти вырезом отрезка от -1 до 1

$$|z|<1 \xrightarrow[\text{конф.}]{\lambda(z)} G=\{w\notin[-1,1]\}$$

Рассм. единичную окружность как сумму двух полуокружностей:



$$\Rightarrow |z|<1,\ \mathrm{Im}\,z>0 \xrightarrow[\text{конформ.}]{\lambda(z)} \mathrm{Im}\,w<0$$

$$|z|<1,\ \mathrm{Im}\,z<0 \xrightarrow[\text{конформ}]{\lambda(z)} \mathrm{Im}\,w>0$$

$$|z|>1,\ \mathrm{Im}\,z<0 \xrightarrow[\text{конформн}]{\lambda(z)} \mathrm{Im}\,w<0$$

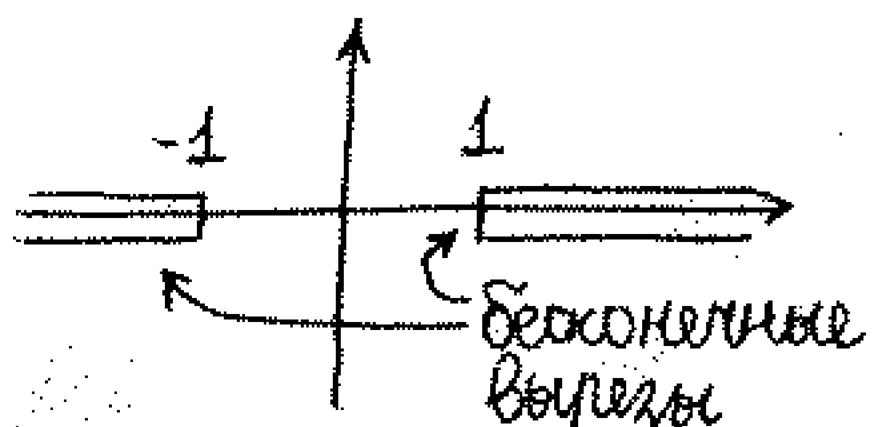
$$|z|>1,\ \mathrm{Im}\,z>0 \xrightarrow[\text{конформ}]{\lambda(z)} \mathrm{Im}\,w>0$$

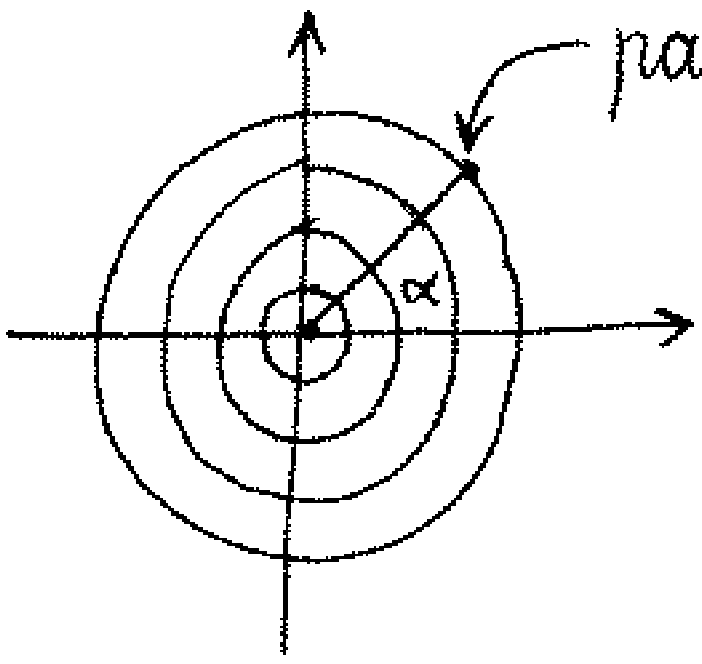
$\{\mathrm{Im}\,z>0\}=K_+\cup K_-\cup\tilde{\gamma}$ ← верхняя окружность без граничных точек

$K_+\to \mathrm{Im}\,w<0$

$K_-\to \mathrm{Im}\,w>0 \quad \Rightarrow \mathrm{Im}\,z>0 \xrightarrow[\text{конф.}]{\lambda(z)} \mathcal{D}$

$\tilde{\gamma}\to(-1,1)$





рассм. радиус в первой ч-ти

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$\gamma_\alpha:\ z=t(\cos\alpha+i\sin\alpha),\ 0<t<1$

$R_\alpha:\ w=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+t\right)\cos\alpha-i\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-t\right)\sin\alpha$

$w=u+iv,\quad u=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+t\right)\cos\alpha,\ v=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-t\right)\sin\alpha,$
$0<t<1$

в результате:

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}+t\right)^2 \qquad \frac{v^2}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}-t\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{u^2}{\cos^2\alpha}-\frac{v^2}{\sin^2\alpha}=1}$$

каноническое ур-ие гиперболы с полуосями $|\cos\alpha|,\ |\sin\alpha|$

фокусное расстояние $c^2=a^2+b^2=1$ не зав. от $\alpha \Rightarrow$ софокусны

9. Показательная функция $e^{z} = \exp z = e^{x}(\cos y + i\sin y)$

Эта ф-ия получила название exp, потому что производная во всех точках совпадает с самой ф-ией:

$(e^{z})' = e^{z}$

Кроме того ф-ия аналитична во всех точках, т.е. целостная.

Добавим другие сведения:

$\operatorname{dom} e^{z} = \mathbb{C}$

$\operatorname{im} e^{z} = \{z \neq 0\}$

□ $\forall\, W \neq 0 \quad W = e^{z},\ |W| = e^{x} \Rightarrow x = \ln|W|$

$\operatorname{Arg} w \ni y$

$\Rightarrow$ можем разрешить уравнение, причем решений бесконечно много

$\boxed{z = \ln|W| + i\operatorname{Arg} W}$ – натуральные логарифмы числа $W = \operatorname{Ln} W$

$\Rightarrow \forall\, w \neq 0$ мы найдем праобразы ■

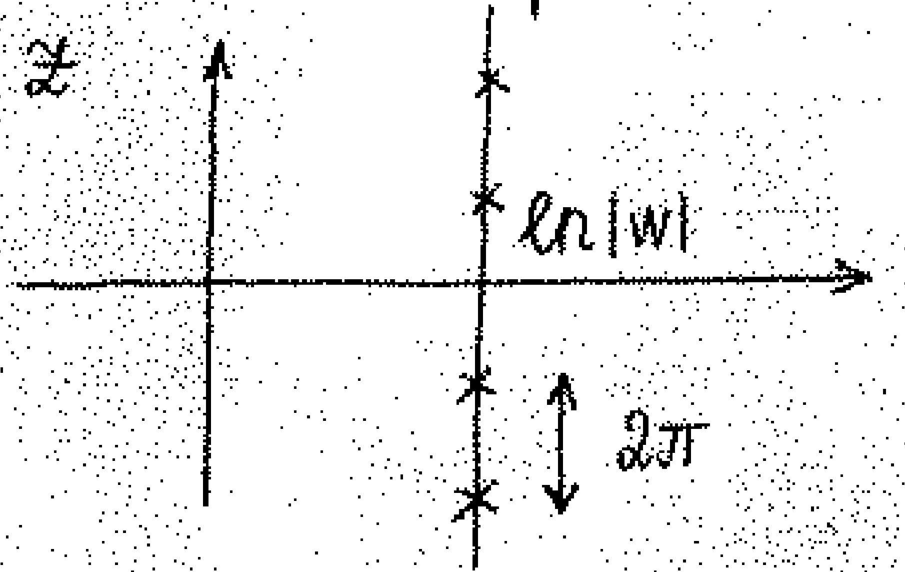
Каждое значение w ф-ия z принимает на счетном множестве $\Rightarrow$ e^{z} – счетнолистная ф-ия

Комплексная экспонента является периодической ф-ией:

$e^{z+2\pi i} = e^{x}(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)) = e^{z}$

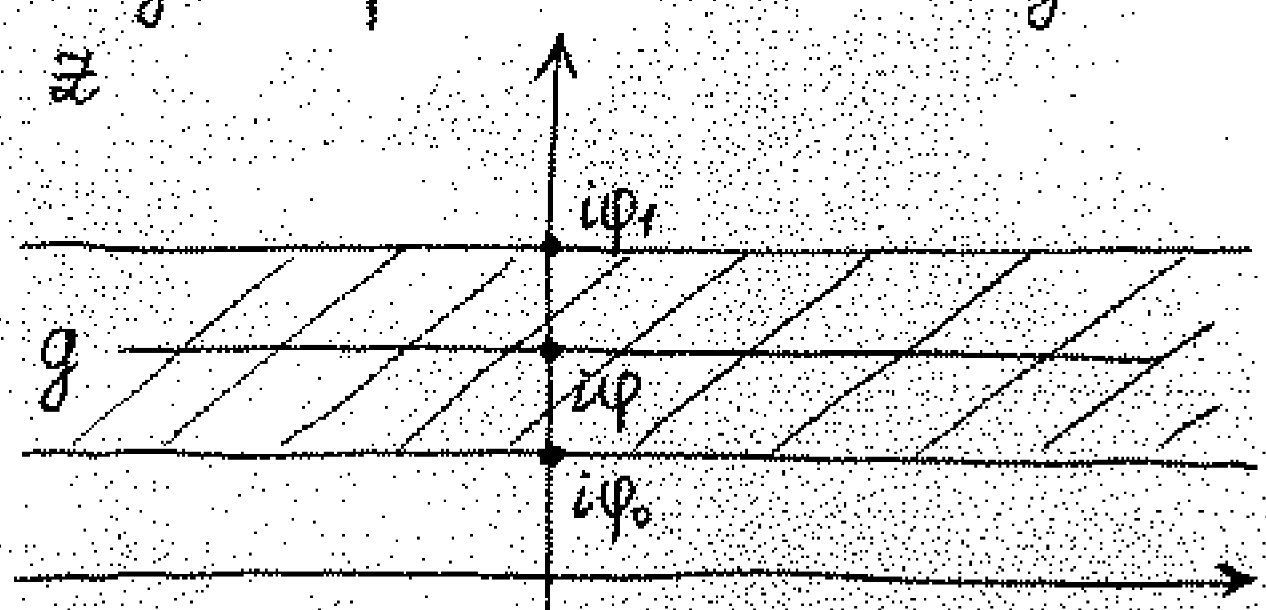
$x \quad i(y+2\pi)$

Расположение решений



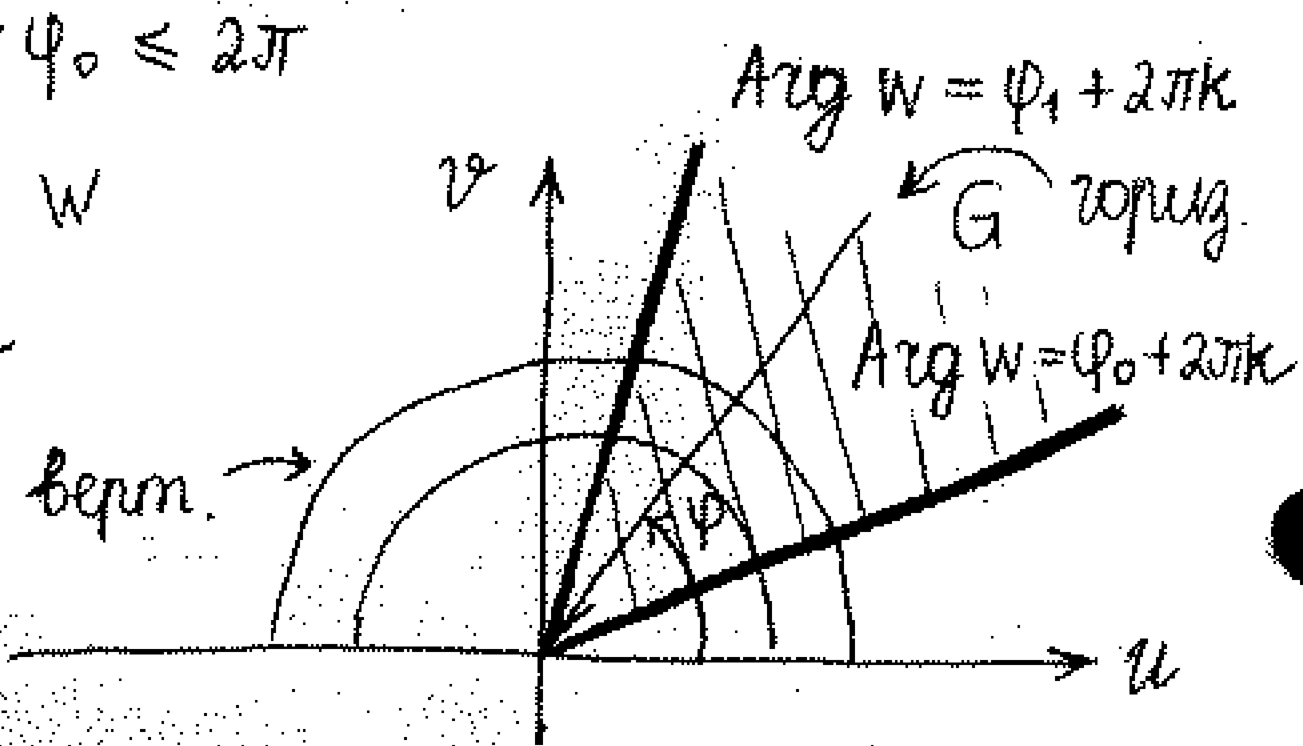
Присутствует периодичность по вертикали

Найдем простые области однолистности:



Никакие два значения не попадут в полосу $\Rightarrow$ полосу можно считать областью однолистности, т.е. обл. g

$\varphi_1 - \varphi_0 \leq 2\pi$



$\boxed{\begin{array}{l} \text{Рассм. } \varphi_0 < \varphi < \varphi_1 \\ l:\ z = t + i\varphi,\ -\infty < t < +\infty \end{array}}$ – горизонтальные прямые

$e^{z} = e^{t}(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ -\infty < t < +\infty$

– описывает множество точек лучей с углом наклона φ, не включая точку 0

$\Rightarrow$ в итоге полоса g переходит в сектор с границами $\varphi_0 + 2\pi k$ и $\varphi_1 + 2\pi k$ (наличие $+2\pi k$ – важно), т.е.

$$g \xrightarrow[\text{конф}]{e^z} G$$

Теперь рассм. вертикальные линии:

$z = c + it, \ -\infty < t < \infty$

$w = e^z = e^c(\cos t + i\sin t)$

Два ортогональных семейства, т.е. вертикальные и горизонтальные прямые, переходят под действием показательной ф-ии в концентрические окружности с центром в $(0,0)$ и лучи, т.е. остаются ортогональными – проявление конформности.

Во что переходят прямые, не параллельные координатным осям? В логарифмические кривые с уравнением:

$\rho = Ce^{k\varphi}$, c, k – константы, $c > 0$

10. Тригонометрические и гиперболические ф-ии

$\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$; $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

$\operatorname{ch} z = \dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}$; $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}$

} верхний ряд – л/к экспонент ⇒ наследуют св-во аналитичности, т.е. целые.

$\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$

$\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$, $\operatorname{cth} z = \dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$

} нижний ряд

Кроме аналитичности верхний ряд наследует периодичность, причем период $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$ — $2\pi i$, а у $\cos z$ и $\sin z$ — 2π.

Проверим для косинуса совпадение на вещ. прямой с вещ. косинусом:

$z = x \quad e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$

$\cos z = \cos x$

⇒ сохраняются нули:

$z = \frac{\pi}{2} + \pi k$ — нули $\cos z$ для $z \in \mathbb{R}$

Как ведут себя ф-ии вне комплексной прямой?

Показать: $z = x + iy$

$|\cos z| =_{+} \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$

$|\sin z| =_{+} \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x}$

Воспользуемся рав-ми для оценки модуля снизу вне вещественной прямой

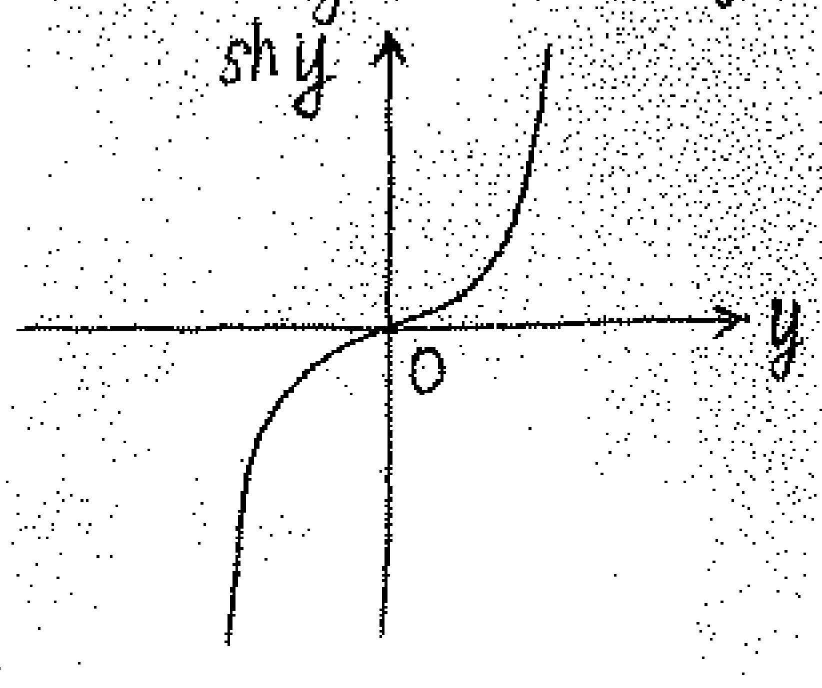
Оценка сверху: $|\cos z| \leq \operatorname{ch}$

Оценка снизу: $|\cos z| \geq_{+} \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1} = |\operatorname{sh} y|$ — по осн. тригонометр. тождеству $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$

Оценка сверху: $|\sin z| \leq \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1} = \operatorname{ch} y$ (ОТТ) — задали $\sin x$ — max значение

Оценка снизу: $|\sin z| \geq |\operatorname{sh} y|$

Что показывают оценки? $\sin z$ и $\cos z$ — целые неограниченные ф-ии, в отличие от вещественных $\sin$ и $\cos$



Кроме того, нигде кроме вещественной оси функции в ноль не обращаются

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

Между тригонометрическими и гиперболическими ф-циями есть простая связь:

$ch\, z = \cos(iz)$

$sh\, z = -i\sin(iz)$

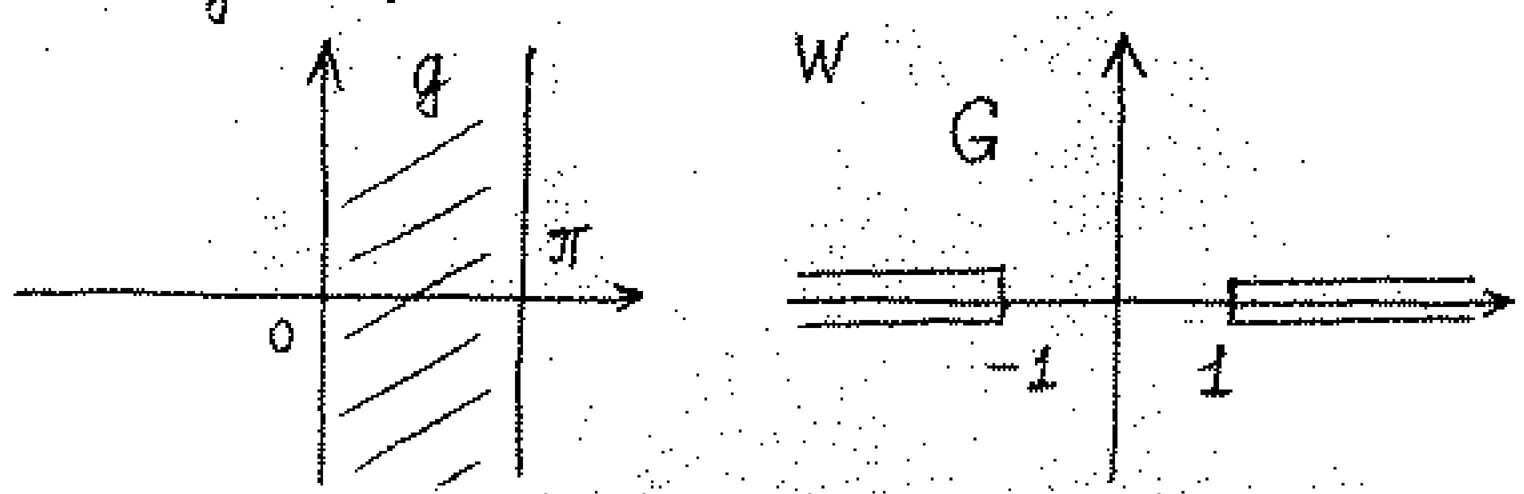
Теперь расcм. ф-ии нулевого ряда

Аналитические, периодические, однако период сокращается:
у $tg x$ и $ctg\, x - \pi$, $th z$ и $cth\, z - \pi i$
Нули только на вещественной (tg, ctg) и комплексной (th, cth) прямой

Формулы дифференцирования сохраняются:
$(\cos z)' = -\sin z$
$(\sin z)' = \cos z$

Все изучаемые ф-ии можно представить в виде композиции ранее изученных ф-ий: тригонометрическая, Жуковского, дробно-линейная.
Например: $\cos z = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$, где $t = e^{iz}$

Показать, что:



$g \xrightarrow[\text{конф}]{\cos z} G$

Не хватило времени, чтобы поговорить об обратных ф-иях.

Глава IV. Интегрирование ф-ий комплексного переменного

Примем соглашение: т.к. в дальнейшем будет процесс интегрирования, обычной непрерывности будет недостаточно $\Rightarrow$ требуем кусочную гладкость от кривой L.

1. Понятие интеграла

Пусть L — спрямляемая кривая с параметрическим уравнением

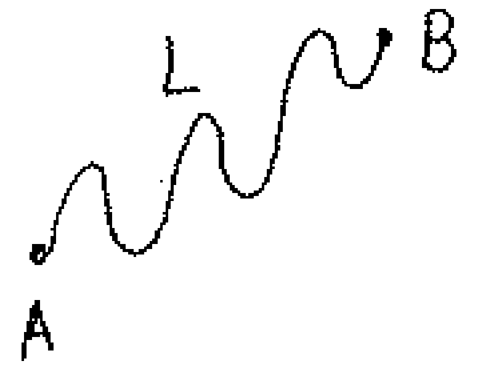
$$z = \lambda(t) = x(t) + iy(t), \qquad \alpha \le t \le \beta.$$

Достаточное условие спрямляемости: $\lambda(t)$ — кусочно-гладкая кривая, т.е. $x(t)$ и $y(t)$ — кусочно-гладкие функции.

Для определенности выберем на L направление, соответствующее возрастанию параметра. Тогда точку $z_0 = \lambda(\alpha)$ назовем началом кривой L, а точку $\lambda(\beta)$ — ее концом. Ту же кривую с противоположным направлением будем обозначать через $-L$.

$\lambda'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$

Не должно быть особых точек, т.е. $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$, $\lambda'(t_0) = 0$ — таких t_0 — нет!



$L = AB$ — в направлении возрастания параметра

$-L = BA$

Пусть

$$t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta \tag{1}$$

опр. разбиение

произвольное разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$,

$$\delta = \max_{1 \le k \le n} \{t_k - t_{k-1}\}$$

— диаметр этого разбиения. Разбиению (1) соответствует разбиение T кривой L на дуги

$$l_1, l_2, \dots, l_n.$$

Дуга l_k начинается в точке $z_{k-1} = \lambda(t_{k-1}) = x_{k-1} + iy_{k-1}$, а кончается в точке $z_k = \lambda(t_k)$.

□ $S(t_k,\tau_k)=\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta z_k=\sum_{k=1}^{n}(u_k+iv_k)(\Delta x_k+i\Delta y_k)=\sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta x_k-v_k\Delta y_k)\oplus$

$\tau_k=\xi_k+i\eta_k,$

$f(\tau_k)=u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)=u_k+iv_k$

$\oplus\, i\sum_{k=1}^{n}(v_k\Delta x_k+u_k\Delta y_k)\to I=\int_L u\,dx-v\,dy+i\int_L v\,dx+u\,dy,\ \delta\to 0$ ■

Пусть в точках кривой L определена функция $w=f(z)$. Выбрав в каждом сегменте $t_{k-1}\le t\le t_k$ произвольное значение τ_k, получим на дуге l_k точку $\zeta_k=\lambda(\tau_k)$. Положим $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$ и составим комплексную интегральную сумму

$$S(t_k,\tau_k)=\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k,\ \text{где}\ \Delta z_k=z_k-z_{k-1}=\Delta x_k+i\Delta y_k$$

соответствующую разбиению T.

Если существует предел сумм $S(t_k,\tau_k)$ при $\delta\to 0$, не зависящий от последовательности разбиений и выбора точек $\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n$ на дугах этого разбиения, то этот предел обозначается символом

$$S(t_k,\tau_k)\to I=\int_L f(z)dz$$

и называется интегралом от функции $f(z)$ вдоль кривой L (в выбранном направлении). В этом случае об f говорят, что она интегрируема по L.

Теорема 4.1. ~~**Теорема 1.**~~ *Пусть L — кусочно-гладкая кривая без особых точек. Если функция $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ определена и непрерывна вдоль L, то f интегрируема по L и*

$$\int_L f(z)dz=\int_L u(x,y)dx-v(x,y)dy+i\int_L v(x,y)dx+u(x,y)dy.$$

2. Интегральная теорема Коши

Кривая $L: z=\lambda(t),\ \alpha\le t\le\beta$, называется замкнутой, если ее начальная и конечная точки совпадают, т.е.

$$\lambda(\alpha)=\lambda(\beta).$$

Если точка $z_0\in L$ такова, что

значения отличаются от граничных

$$z_0=\lambda(t_1)=\lambda(t_2),\qquad \{t_1,t_2\}\ne\{\alpha,\beta\},$$

то z_0 называется кратной точкой кривой L.

Кривая, не имеющая кратных точек, называется простой или жордановой кривой.

Замкнутая жорданова кривая называется контуром. Интеграл от функции $f(z)$ по контуру Γ часто называют контурным интегралом и обозначают символом

$$\oint_\Gamma f(z).$$

Свойства

① $\int_L f\,dz=-\int_{-L} f\,dz$

② $L=L_1\cup L_2\quad \int_{L} f\,dz=\int_{L_1} f\,dz+\int_{L_2} f\,dz$

③ $\int_L (c_1f_1+c_2f_2)\,dz=c_1\int_L f_1\,dz+c_2\int_L f_2\,dz$

④ $\left|\int_L f\,dz\right|\le\int_L |f|\,d\sigma$

□ $|S(t_k,\tau_k)|\le\sum_{k=1}^{n}|f(\zeta_k)|\,|\Delta z_k|\le\sum_{k=1}^{n}|f(\zeta_k)|\sigma_k$

④ $\left|\int_L f(z)dz\right|\le M\cdot$ длина L

где $M=\max_{z\in L}|f(z)|$

⑤ $L: z=\lambda(t),\ \alpha\le t\le\beta,\ dz=\lambda'(t)dt$

$\int_L f(z)dz=\int_\alpha^\beta f[\lambda(t)]\lambda'(t)dt$

См. пример на стр. 49

Строго доказывается в курсах топологии

Теорема 2 (Жордан). *Всякая замкнутая жорданова кривая* Γ *делит плоскость* $\mathbf{C}$ *на две различные области, общей границей которых она является. При этом одна из областей ограничена. Она называется* **внутренностью** Γ *и обозначается* $\operatorname{int}\Gamma$ *(от interior). Вторая область не ограничена, называется* **внешностью** Γ *и обозначается* $\operatorname{ext}\Gamma$ *(от exterior).*

Положительным направлением обхода контура Γ считается то, при котором область $\operatorname{int}\Gamma$ остается слева от наблюдателя, движущегося по Γ. В этом случае для контурного интеграла используется обозначение

$$\oint_{\Gamma^+} f(z).$$

Если движение по Γ происходит в противоположном направлении, то пишут

$$\oint_{\Gamma^-} f(z).$$

Область G называется односвязной, если для любого контура γ, принадлежащего G, внутренность γ также принадлежит G. Если это условие не выполнено хотя бы для одного контура, то область G называется многосвязной.

Теорема 3 (Основная теорема). *Пусть область* D *ограничена контуром* C, *а функции* $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *непрерывны в замкнутой области* $\overline{D}$ *и имеют в* D *непрерывные частные производные* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial P}{\partial y}$. *Тогда справедлива формула Грина*

$$\oint_{C^-} Pdx + Qdy = \int\int_{\overline{D}} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx\, dy$$

при условии, что двойной интеграл в правой части существует хотя бы как несобственный.

Интегральная теорема Коши: $\exists\, f(z) \in A(G)$, контур $\Gamma \subset G$, $\operatorname{int} \Gamma \in G$. Тогда

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$$

□ Запишем ф-ию в алгебраической форме: $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$
Вспомним, что интеграл по $\forall$ кривой, в данном случае по Γ, тоже можно записать в алгебраической форме:

$$\oint_{\Gamma+} f(z)\,dz = \oint_{\Gamma+} \underbrace{u}_{P}dx - \underbrace{v}_{Q}dy + i \oint_{\Gamma+} \underbrace{v}_{P}dx + \underbrace{u}_{Q}dy$$

Контур со своей внутренностью лежит в области $\Rightarrow$ применим к каждому интегралу основную теорему, т.к. выполняются все условия, а именно формулу Грина. Обозначим $\bar{\mathscr{D}} = \operatorname{int}\Gamma \cup \Gamma$ — область + контур. Тогда (выбрали полож. направление — не влияет на результат)

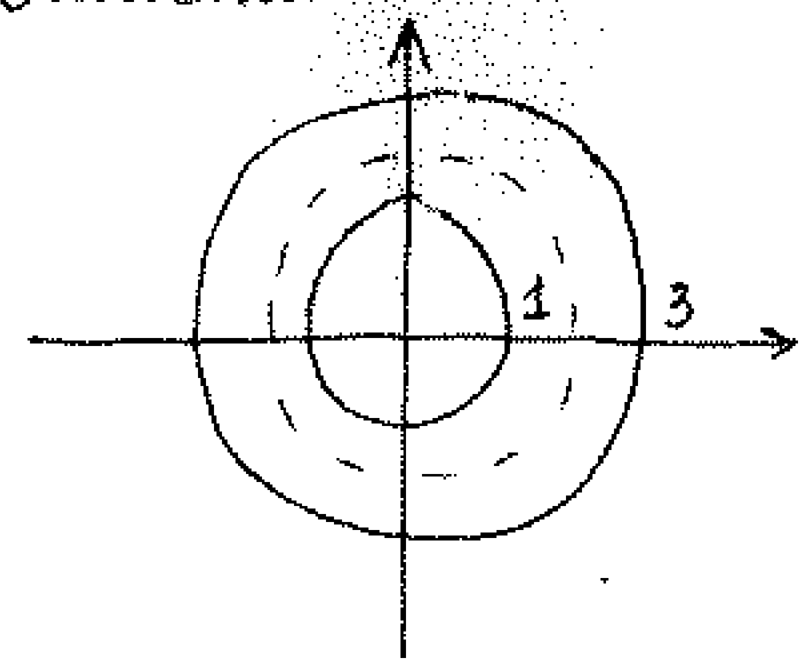
$$\oint_{\Gamma+} f(z)\,dz = \iint_{\bar{\mathscr{D}}} (-v'_x - u'_y)\,dxdy + i \iint_{\bar{\mathscr{D}}} (u'_x - v'_y)\,dxdy$$

Т.к. ф-ии аналитичны, то выполняется условие Коши-Римана, а именно:

$$-v'_x - u'_y = 0\ ;\ u'_x - v'_y = 0$$

Подынтегральные ф-ии равны нулю $\Rightarrow$ интегралы равны 0, ч.т.д. ■

__Пример.__ G — область с круговым кольцом в центре $(0,0)$. Пример покажет важность требования о принадлежности контура к области.



$G: 1 < |z| < 3$ — двусвязная область

$f(z) = \frac{1}{z}$

$\gamma: |z| = 2$

$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ (см. пример на стр.)

Внутренность контура не вся принадлежит области ($1 > |z|$) $\Rightarrow$ теорема не работает

Следствие. $\exists\, G$ — односвязная область, $f(z) \in A(G)$, γ — произвольный контур из G. Тогда:

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$$

(говорить о принадлежности внутренности не нужно, потому что это обеспечивается односвязностью)

Пример. Вычислить $I = \int \frac{dz}{z-a} \ominus$

$f(z) = \frac{1}{z-a}$; $|z-a| = \rho$

$z = a + \rho e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

$dz = \rho e^{it} \cdot i dt$

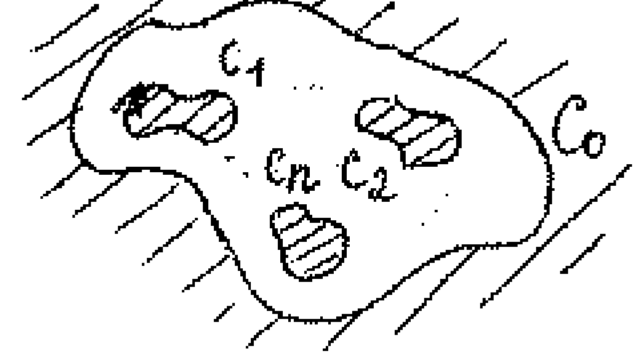
$\ominus \int_0^{2\pi} \frac{i\cancel{\rho e^{it}} dt}{\cancel{\rho e^{it}}} = 2\pi i$

Обобщенная теорема Коши $\exists$ G — односвязная область, ограниченная контуром C, $f(z) \in A(G) \cap C(\overline{G})$ (и аналит. и непрерывная). Тогда:

$$\oint_C f(z)\, dz = 0$$

□ Док-во как и в интегральной теореме Коши, но двойные интегралы нужно понимать как несобственные. ■

Опр. **Составной контур** — объединение контуров $C = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_n$, причем 1) $\forall$ $C_i \subset \operatorname{int} C_0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$;
2) $C_i \subset \operatorname{ext} C_j$ $(i, j > 0;\ i \neq j)$
т.е. не пересекаются и не лежат один в другом



Опр. Область G, границей которой является составной контур $C = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_n$, наз. **$(n+1)$-связной**

Опр. **Положительным направлением обхода составного контура** C, являющегося границей области G, считается тот, при котором наблюдатель, движущийся по C, видит G слева от себя

$$\Rightarrow \oint_{C^+} f dz = \oint_{\vec{C_0}} f dz + \oint_{C_1^-} f dz + \ldots + \oint_{C_n^-} f dz$$

Теорема о составном контуре $\exists$ G — область, ограниченная составным контуром $C = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_n$, $f(z) \in A(G) \cap C(\overline{G})$. Тогда:

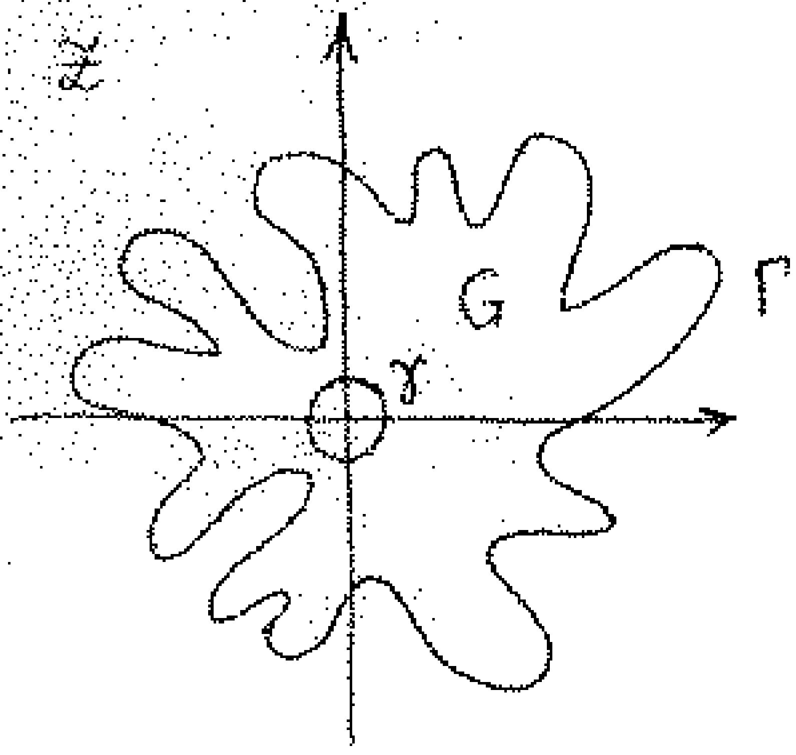
$$\oint_C f(z) dz = 0$$

□ Док-во остается прежним, т.к. основная теорема верна для областей с составной границей ■

$$\oint_{C^+} f dz = \oint_{C_0^+} f dz + \oint_{C_1^-} f dz + \ldots + \oint_{C_n^-} f dz = 0 \Rightarrow \text{сгруппируем слагаемые}$$

$$\boxed{\oint_{C_0^+} f dz = \oint_{C_1^+} f dz + \ldots + \oint_{C_n^+} f dz}$$

Пример. z



$$f(z) = \frac{1}{z}$$

$$\oint\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z} = ?$$

$$\oint\limits_{\Gamma^+} \frac{dz}{z} = \oint\limits_{\gamma^+} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

3. Первообразная и неопределенный интеграл

Опр. $\exists\ f(z) \in C(G)$. Ф-ия $F(z) \in A(G)$ наз. первообразной для $f(z)$, если $F'(z) = f(z)\ \forall z \in G$. Совокупность всех первообразных ф-ий $f(z)$ в обл. G наз. неопределенным интегралом этой ф-ии.

Условия независимости криволинейного интеграла от пути

Пусть G — область на декартовой плоскости переменных x и y, в которой непрерывны функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Следующие три условия эквивалентны:

- **Для любой замкнутой кривой $L \subset G$ справедливо**

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0.$$

- **Для любых точек $A, B \in G$ значение интеграла**

$$\int_L Pdx + Qdy$$

не зависит от (кусочно-гладкой) кривой $L \subset G$, соединяющей точки A и B.

- **Существует непрерывно дифференцируемая в G функция $U(x, y)$ такая, что**

$$dU = Pdx + Qdy,$$

откуда следует, что

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = U(B) - U(A).$$

$\boxed{\Phi(z) = F(z) + C \text{ — неопределенный интеграл}}$

Докажем, что всякая первообразная может быть получена из фиксированной:

$\exists\ \Phi(z), F(z)$ – две первообразных для $f(z)$ в G

$\omega(z) = \Phi(z) - F(z)$

$\omega'(z) = \Phi'(z) - F'(z) = f(z) - f(z) \equiv 0$ в G

$\omega(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$\omega'(z) \equiv 0 \Rightarrow u'_x = u'_y = v'_x = v'_y \equiv 0$ в G

$u(x,y) = C_1,\ v(x,y) = C_2 \quad \omega(z) = C = C_1 + iC_2 \Rightarrow \Phi(z) = F(z) + C$ ■

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_L u\,dx - v\,dy + i\int\limits_L v\,dx + u\,dy$

Следующие три условия эквивалентны:

1) (С-свойство) для $\forall$ замкнутой кривой L $\oint\limits_L f(z)\,dz = 0$, т.е. интеграл по замкнутой кривой равен 0

2) $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$ является функцией только от z
$z_0, z \in G$

потенциальные функции

3) $\exists$ $U(x,y)$, $V(x,y)$ — непр. дифф. в G и такие, что:
$dU = u\,dx - v\,dy$
$dV = v\,dx + u\,dy$

Теорема о первообразной Пусть $f(z) \in C(G)$ и обладает в G С-свойством. Тогда:
$\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = F(z) \in A(G)$
$F'(z) = f(z)$ $\forall z \in G$

□ Представим f в алгебраической форме: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$
$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} u\,d\xi - v\,d\eta + i\int\limits_{z_0}^{z} v\,d\xi + u\,d\eta$

С-свойство позволяет утверждать, что для $\forall$ диф. ур-ия найдется потенциал:
$U(x,y)$, $V(x,y)$
$dU = u\,dx - v\,dy$
$dV = v\,dx + u\,dy$ $\Rightarrow \int\limits_{z_0}^{z} u\,d\xi - v\,d\eta = U(x,y) - U(x_0,y_0)$

Выберем для обоих интегралов потенциалы $U(x,y)$ и $V(x,y)$ так, чтобы
$\int\limits_{z_0}^{z} u\,d\xi - v\,d\eta = U(x,y)$, $\int\limits_{z_0}^{z} v\,d\xi + u\,d\eta = V(x,y)$
$z = x + iy$
$\Rightarrow F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$, причем $U'_x = u$, $U'_y = -v$
$V'_x = v$, $V'_y = u$
$\Rightarrow$ выполняются условия Коши-Римана: $U'_x = V'_y$, $U'_y = -V'_x$
$F(z)$ имеет непр. частные производные, подчиняющиеся условиям (CR)
$\Rightarrow F(z) \in A(G)$
$F'(z) = U'_x + iV'_x = u + iv = f(z)$ $\forall z \in G$ ■

Замечание Условие теоремы о первообразной выполнены, в частности, если G — односвязная область и $f(z) \in A(G)$.

Вернемся к неопределенному интегралу:

$$\Phi(z) = F(z) + C = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta + C$$ (выражение из доказанной теоремы)

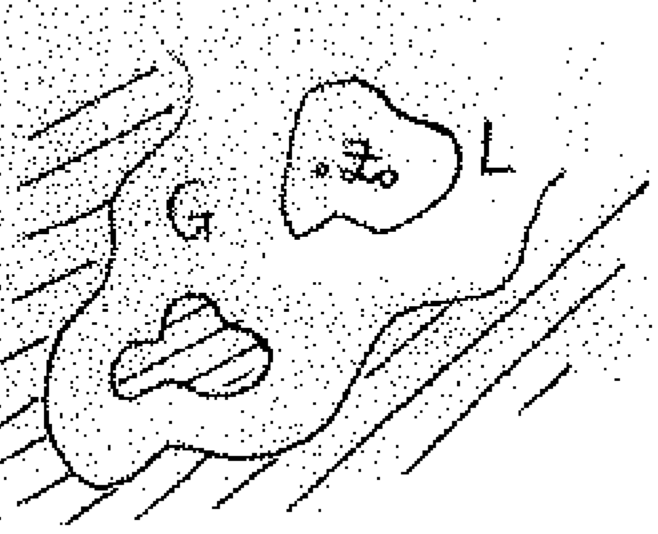
Выясним смысл константы.

Положим $z = z_0$:

$$\Phi(z_0) = \int_{z_0}^{z_0} f(\zeta)\, d\zeta + C = C$$

$$\boxed{\Phi(z) - \Phi(z_0) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta}$$ — комплексная версия формулы Ньютона - Лейбница

4. Интегральная формула Коши



$f(z) \in A(G)$

G – незамкнутая область

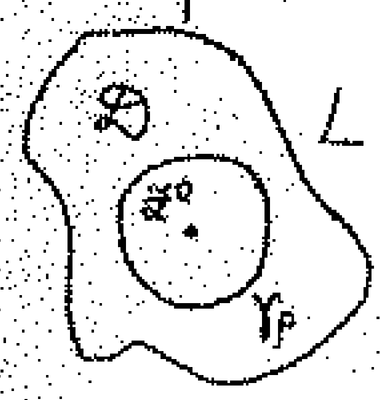
$L \subset G$, $\operatorname{int} L \subset G$

$$f(z_0) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz}_{\text{интеграл Коши}}$$

Знание аналитической ф-ии на контуре однозначно определяет ф-ию внутри контура.

Докажем ф-лу Коши:

□ Построим окружность $\gamma_\rho : |z-z_0| = \rho$ так, чтобы $\gamma_\rho \subset \operatorname{int} L$



Расcм. 2-связную область D, ограниченную составным контуром $L \cup \gamma_\rho$. По теореме о составном контуре:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

Как будет вести себя формула при $\rho \to 0$? Покажем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz - f(z_0) \longrightarrow 0 \text{ при } \rho \to 0$$

Преобразуем $\oint\limits_{\gamma_\rho^+} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i \Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\, dz$ (поделим на $2\pi i$ и умн. на $f(z_0)$)

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\, dz \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint\limits_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\, dz \right| \leqslant$$

Используем грубую оценку: $\left| \int\limits_L f(z)\, dz \right| \leqslant \max\limits_{z\in L} |f(z)| \cdot$ длина L

$$\leqslant \frac{1}{\cancel{2\pi}} \max_{z\in\gamma_\rho} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{\underbrace{|z-z_0|}_{=\cancel{\rho}}} \cancel{2\pi\rho} = \max_{z\in\gamma_\rho} |f(z)-f(z_0)| \longrightarrow 0,\ \rho \to 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz \xrightarrow[\rho\to 0]{} f(z_0) \quad ■$$

Замечание 1 $\exists\, G$ – односвязная обл., ограниченная простым контуром C, $f(z) \in A(G) \cap C(\overline{G})$.

Тогда для $\forall$ точки $z_0 \in G$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

Замечание 2 $\exists\, G$ – $(n+1)$-связная обл., огр. составным контуром $C = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_n$, $f(z) \in A(G) \cap C(\overline{G})$. Тогда: $z_0 \in G$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

Замечание 3: $\exists$ G есть круг $|z - z_0| < R$, $\gamma_R : |z - z_0| = R$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_R^+} \frac{f(z)}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi \cancel{i}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\varphi})}{\cancel{Re^{i\varphi}}} \cancel{Re^{i\varphi}} \cancel{i}\, d\varphi \ominus$$

$z = z_0 + Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$dz = Re^{i\varphi} i \cdot d\varphi$

$$\ominus \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi})\, d\varphi$$ — формула среднего значения

5. Интегралы, зависящие от параметра

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $\Pi = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ и имеет на нем непрерывную производную $f'_y(x,y)$. Тогда интеграл*

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

является дифференцируемой функцией от y на $[c,d]$ и его производная может быть вычислена по правилу Лейбница

обобщение теоремы 1

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx.$$

Теорема 2. *Пусть функция $f(x,y_1,\dots,y_m)$ непрерывна на параллелепипеде $\Pi_m = \{a \le x \le b,\ c_i \le y_i \le d_i\ (i=1,2,\dots,m)\}$ и имеет на нем непрерывные производные $f'_{y_i}(x,y_1,\dots,y_m)$, $i=1,2,\dots,m$. Тогда интеграл*

$$I(y_1,\dots,y_m) = \int_a^b f(x,y_1,\dots,y_m)dx$$

имеет непрерывные частные производные по переменным $y_1,\dots,y_m$ в области $c_i \le y_i \le d_i\ (i=1,2,\dots,m)$, которые могут быть вычислены по правилу Лейбница

$$I'_{y_i}(y_1,\dots,y_m) = \int_a^b f'_{y_i}(x,y_1,\dots,y_m)dx,\ \ i=1,2,\dots,m.$$

Теорема 3. *Пусть функции $P(x,y,z_1,\dots,z_m)$ и $Q(x,y,z_1,\dots,z_m)$ непрерывны на множестве $\{(x,y)\in L,\ \ c_i < z_i < d_i\ (i=1,2,\dots,m)\}$ и имеют на нем непрерывные производные $P'_{z_i}(x,y,z_1,\dots,z_m)$ и $Q'_{z_i}(x,y,z_1,\dots,z_m)$ $(i=1,2,\dots,m)$. Тогда криволинейный интеграл*

$$I(z_1,\dots,z_m) = \int_L Pdx + Qdy$$

имеет непрерывные частные производные по переменным $z_1,\dots,z_m$ в области $c_i < z_i < d_i\ (i=1,2,\dots,m)$, которые могут быть вычислены по правилу Лейбница

$$I'_{z_i}(z_1,\dots,z_m) = \int\limits_L P'_{z_i}(x,y,z_1,\dots,z_m)dx + Q'_{z_i}(x,y,z_1,\dots,z_m)dy,$$

$$i=1,2,\dots,m.$$

Свешников

$F(z)=\int_L f(z,\zeta)\,d\zeta$: (*)

1) $\zeta\in L$, $z\in$ обл. G на пл. z;

2) $\forall$ фикс. $\zeta\in L$ $f\in A(G)$;

3) $f(z,\zeta)$, $f'_z(z,\zeta)$ – непрерывны по совокупности переменных $\zeta\in L$, $z\in G$

В дальнейшем все интегралы подчиняются этим условиям.

Теорема об интеграле с параметром: $\exists$ интеграл (*) удовлетворяет условиям 1-3. Тогда:

1) $F(z)\in A(G)$

2) Производную $F'(z)$ можно вычислить по правилу Лейбница:

$$F'(z)=\int_L f'_z(z,\zeta)\,d\zeta \quad (**)$$

□ Все участвующие ф-ии запишем в алгебраической форме:

$z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$

$f(z,\zeta)=u(x,y,\xi,\eta)+iv(x,y,\xi,\eta)$

$F(z)=U(x,y)+iV(x,y)$

Комплексный интеграл есть сумма вещественных:

$$\underbrace{\int_L u\,d\xi-v\,d\eta}_{U(x,y)}+i\underbrace{\int v\,d\xi+u\,d\eta}_{V(x,y)}$$

$$U'_x=\int_L u'_x\,d\xi-v'_x\,d\eta \qquad V'_x=\int_L v'_x\,d\xi+u'_x\,d\eta=\int_L -u'_y\,d\xi+v'_y\,d\eta=-U'_y$$

$$U'_y=\int_L u'_y\,d\xi-v'_y\,d\eta \qquad V'_y=\int_L v'_y\,d\xi+u'_y\,d\eta=\int_L u'_x\,d\xi-v'_x\,d\eta=U'_x$$

Т.к. (z) – аналитична $\Rightarrow$ выполняются условия (CR)

$F(z)$ – непрерывна
$\exists$ производные, удовл. условиям (CR) } ди ффер-ну.
производные непрерывны, т.е. $F'(z)$ – непр. ф-ия от z } $\Rightarrow F(z)\in A(G)$
$\Rightarrow$ первое утв. доказано

Докажем правило Лейбница:

$$F'(z)=U'_x+iV'_x=\int_L u'_x\,d\xi-v'_x\,d\eta+i\int_L v'_x\,d\xi+u'_x\,d\eta \;\Big|\; f'_z(z,\zeta)=u'_x+iv'_x$$

$$\int_L f'_z(z,\zeta)\,d\zeta=\int_L(u'_x+iv'_x)(d\xi+i\,d\eta)=\int_L u'_x\,d\xi-v'_x\,d\eta+$$

$$+i\int_L v'_x\,d\xi+u'_x\,d\eta \Rightarrow \text{равенство } (**) \;\blacksquare$$

6. Теорема о бесконечной дифференцируемости аналитичной функции

$\exists\ f(z) \in A(\mathcal{D})$. Тогда в $\forall$ т. $z \in \mathcal{D}$ $f(z)$ имеет производные всех порядков

$\square$ Фикс. $\forall$ т. $z \in \mathcal{D}$. Построим контур L так, чтобы L, $\operatorname{int} L \subset \mathcal{D}$ и $z \in \operatorname{int} L$ (его всегда можно построить).

$f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L^+} \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ — интегральная формула Коши

Выполняются условия $(*)$:

1) $G = \operatorname{int} L$

2) "$f'(z)$" $= \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$

$\Rightarrow$ к интегралу Коши применима теорема об интеграле с параметром, откуда выводим:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \quad (**)$$

Применяя к $(**)$ теорему об интеграле с параметром, получим

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \oint\limits_{L^+} \frac{f(\xi)}{(\zeta - z)^3}\, d\zeta \quad (***)$$

Применяя снова эту теорему, имеем

$$f'''(z) = \frac{3!}{2\pi i} \oint\limits_{L^+} \frac{f(\xi)}{(\zeta - z)^4}\, d\zeta$$

$\Rightarrow$ по индукции:

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{L^+} \frac{f(z)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta} \ \blacksquare$$

7. Следствия теоремы о бесконечной дифференцируемости

① $f(z) \longrightarrow f'(z) \longrightarrow f''(z) \longrightarrow f'''(z)$

Производная ф-ии, аналитической в обл. G, сама является аналитической в G

② (Теорема Морера). $\exists\, f(z) \in C(G)$ и обладает в G C-свойством. Тогда $f(z) \in A(G)$

□ По т. о первообразной (условия в точности совпадают), существует первообразная:

$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi$ для $f(z)$: $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in G$.

По следствию 1, $f(z) \in A(G)$

③ (Теорема Лиувилля) Целая функция $f(z)$, ограниченная во всей $\mathbb{C}$, есть константа.

□ Фикс. произвольную т. $z_0 \in \mathbb{C}$. $\gamma_R : |z - z_0| = R$

Запишем интегралом типа Коши:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_R^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz$$

Используем оценку: $\exists M > 0 : |f(z)| \leq M$ $\forall z \in \mathbb{C}$

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{\cancel{2\pi}} \max_{z \in \gamma_R} \frac{|f(z)|}{\underset{R^2}{\underset{\parallel}{|z - z_0|^2}}} \cancel{2\pi} R \leq \frac{M}{R} \xrightarrow{R \to \infty} 0 \Rightarrow f'(z_0) = 0$$

В виду произвольности т. z_0, $f'(z) \equiv 0$ в $\mathbb{C}$ $\Rightarrow f(z) = const$ ■

④ (Основная теорема алгебры). Всякий многочлен $P_n(z)$ степени $n \geqslant 1$ имеет в $\mathbb{C}$ хотя бы один корень.

□ (От противного) Пусть $P_n(z)$ не имеет корней в $\mathbb{C}$. Тогда ф-ия $f(z) = \frac{1}{P_n(z)}$ определена и является аналитической во всей $\mathbb{C}$

$P_n(z) \to \infty$ при $z \to \infty \Rightarrow f(z) \to 0$ при $z \to \infty \Rightarrow f(z)$ огран. во всей $\mathbb{C}$ (важно, что ф-ия имеет конечный предел на бесконечности)

$\Rightarrow$ по т. Лиувилля (целостность + ограниченность) $f(z) = const$ — неверно, т.к. $P_n(z) \Rightarrow f(z)$.

Противоречие вызвано предположением об отсутствии корней у $P_n(z)$ ■

Глава V. Ряды аналитических функций

1. Общие утверждения относительно рядов

$\sum a_n = \sum b_n + i \sum c_n$

$a_n = b_n + i c_n$

Теоремы для рядов с постоянными членами справедливы и в нашем случае.

$\sum |a_n|$ — понятие абсолютной сходимости

Нас интересуют ряды с аналитическими ф-иями: $\sum u_n(z)$

Поточечная сходимость $\not\Rightarrow$ равномерная сходимость

Опр. Ряд из $u_n(z)$ сходится равномерно к ф-ии $f(z)$ на мн-ве $\{z\}$, т.е.

$\sum u_n(z) \underset{\{z\}}{\rightrightarrows} f(z)$,

если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon): \left| f(z) - \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(z) \right| < \varepsilon \ \ \forall n \geq N, \ \forall z \in \{z\}$

Критерий Коши:

$\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(z) \right| < \varepsilon$

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости:

$\sum u_n(z)$, $\sum c_n: \forall n \ \ c_n \geq 0$

$|u_n(z)| \leq c_n, \ n = 1, 2, \dots$

Если $\sum c_n$ – сход., то 1) $\sum u_n(z) \overset{\{z\}}{\rightrightarrows}$

2) $\sum |u_n(z)| \overset{\{z\}}{\rightrightarrows}$

Утв. $\exists \sum u_n(z) \overset{\{z\}}{\rightrightarrows}$, $\varphi(z)$ огр. на $\{z\}$. Тогда и ряд $\sum \varphi(z) u_n(z) \overset{\{z\}}{\rightrightarrows}$

Теорема 5.1. $\exists$ ф-ии $u_n(z) \in C(G)$ $(n = 1, 2, \dots)$ и $\sum u_n(z) \overset{G}{\rightrightarrows} f(z)$. Тогда:

1) $f(z) \in C(G)$;

2) Если $L \subset G$, то возможно почленное интегрирование по L, т.е.

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_L u_n(z)\,dz$$

□ Аналогично вещественному случаю ■

Опр. Говорят, что ряд $\sum u_n(z)$ сходится к ф-ии $f(z)$ нормально в области G, если $\sum u_n(z) \overset{K}{\rightrightarrows} f(z)$ на любом компакте $K \subset G$

1-ая т. Вейерштрасса (о рядах аналитических ф-ций). $\exists\ u_n(z) \in A(G)$ $(n=1,2,\dots)$ и $\sum u_n(z)$ сходится к $f(z)$ нормально в области G. Тогда:

1) $f(z) \in A(G)$;

2) ряд $\sum u_n(z)$ можно почленно дифф-ть в G любое число раз, т.е. $f^{(k)}(z) = \sum u_n^{(k)}(z),\ \forall k \in \mathbb{N}$

3) все продифференцированные ряды сходятся в G нормально (не понадобится — без док-ва)

$\square$ 1) Покажем, что $f(z)$ аналитична в окрестности всякой точки $z_0 \in G$. Построим круг так, чтобы $\overline{K} \subset G$, где $\overline{K}: |z-z_0| \le R$
$\overline{K}$ — простейший компакт из области G. Имеем, что

$\sum u_n(z) \overset{\overline{K}}{\rightrightarrows} f(z)$

По т. 5.1, $f(z) \in C(\overline{K})$.

Рассм. открытый круг, т.е. $\exists\ K: |z-z_0| < R$, и пусть L — произвольн. контур, принадлежащий G. По т. 5.1,

$\oint\limits_L f(z)dz = \sum \oint u_n(z) dz = 0$

$\Rightarrow f(z) \in C(K)$ и имеет C-свойство $\oint f(z)dz = 0 \Rightarrow$ по т. Морера $f(z) \in A(K) \Rightarrow$ в силу произвольности области доказан первый пункт.

2) Фикс. произв. т. $z_0 \in G$ и строим окр-ть $\gamma_\rho: |z - z_0| = \rho$. В точках этой окр-ти рассм. рав-во:

$f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z) \underset{\gamma_\rho}{\rightrightarrows} \quad (*)$

т.е. если z_0 не выходит из γ_ρ — простейшего компакта, то есть равномерная сходимость.

Фикс. $k \in \mathbb{N}$ и умножим обе части $(*)$ на $\varphi_k(z) = \dfrac{k!}{2\pi i (z-z_0)^{k+1}}$

$|\varphi_k(z)| = \dfrac{1}{2\pi\rho^{k+1}}$

Важно, что ф-ция ограничена (а не сколько сохранение знака) $\Rightarrow$ равн. сходимость сохраняется

$\varphi_k(z) f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_k(z) u_n(z) \underset{\gamma_\rho}{\rightrightarrows}$

Тогда по т. 5.1 возможно почленное интегрирование по γ_ρ:

$$\frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho^+} \frac{u_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$$

Интеграл в левой части есть значение k-ой производной ф-ции $f(z)$ в т. z_0:

$f^{(k)}(z_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z_0)$

Равенство означает возможность почленного дифф-ия любое число раз. $\blacksquare$

2. Степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad (*)$$

Какова область сходимости ряда?

Теорема 5.2. Пусть дан ряд $(*)$. Положим

$R = \dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$ – радиус сходимости – равенство Коши–Адамара (CH)

Если $R=0$, то ряд $(*)$ сходится только в т. z_0

Если $R>0$ (возможен случай $R=\infty$), то ряд $(*)$ сходится абсолютно для $|z-z_0|<R$ и расходится при $|z-z_0|>R$.

Обозн. $K_R : |z-z_0|<R$ – круг сходимости

Пусть имеем ряд $(*)$, известно $R>0$. Тогда во $\forall$ точках круга ряд $(*)$ определяет ф-ию:

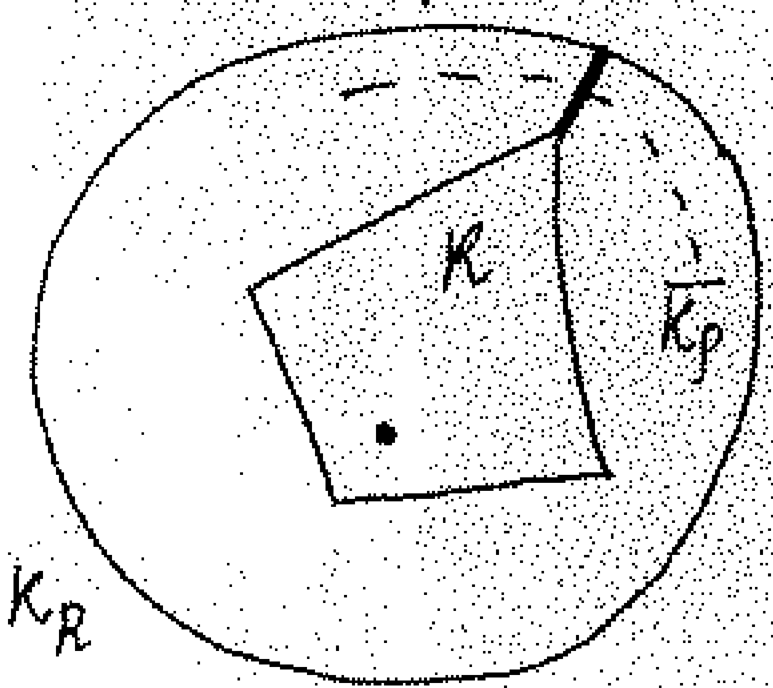
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad (**)$$

Докажем лемму, вспомогательную к док-вам других свойств $(**)$.

Лемма. $\rceil$ для ряда $(*)$ $R>0$. Тогда в круге K_R ряд $(*)$ сходится нормально.

□ $\rceil$ $K \subset K_R$ – произвольный компакт. Построим круг $\overline{K_\rho} : |z-z_0| \leqslant \rho$ так, чтобы сам круг содержался в круге сходимости, а с другой – содержал компакт K, т.е. $K \subset \overline{K_\rho} \subset K_R$. Почему такой круг можно построить? Если $R=\infty$, то ввиду ограниченности компакта K найдется число $\rho>0$ такое, что $\overline{K_\rho} \supset K$. Если $0<R<\infty$, то $\rho(K,\gamma_R)=\delta>0$, т.к. имеем два замкнутых непересекающихся мн-ва, и можно положить $\rho = R - \delta/2$.

Поясним картинкой:



В т. $z=z_0+\rho$ ряд $(*)$ сходится абсолютно, т.е. сходится неотрицательный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \rho^n$. Этот ряд служит мажорантой Вейерштрасса для ряда $(*)$, когда $z\in \overline{K_\rho}$ $\Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса ряд $(*) \underset{\overline{K_\rho}}{\rightrightarrows}$ $\Rightarrow$ ряд $(*) \underset{K}{\rightrightarrows}$ (т.к. $K\subset \overline{K_\rho}$) $\Rightarrow$ есть нормальная сходимость. ■

Следствие. По 1-ой т. Вейерштрасса:

1) $f(z) = A(K_\rho)$

2) $\forall k \in \mathbb{N}$ $f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} c_n \cdot n\cdot(n-1)\ldots(n-k+1)(z-z_0)^{n-k}$ $(***)$

Из ф-лы (CH) следует, что продифференцированные ряды имеют тот же радиус сходимости R, что и исходный ряд $(*)$.

Замечание о единственности. Ряд (*) с $R>0$ однозначно определяется своей суммой $f(z)$.

□ Положим $z=z_0$ в равенствах (**) и (***):

$c_0=f(z_0)$

$f^{(k)}(z_0)=c_k\cdot k!$

$c_k=\dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$, $k=1,2,\ldots$

$\Rightarrow$ коэффициенты однозначно определяются по формулам. ■

Опр. Ряд с коэффициентами $c_k=\dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ $(k=0,1,2,\ldots)$ наз. **рядом Тейлора** для $f(z)$.

Пример. Подсчет суммы ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n$$

Рассм. как степенной ряд с $c_n=1$ $\forall n$. $R=1$

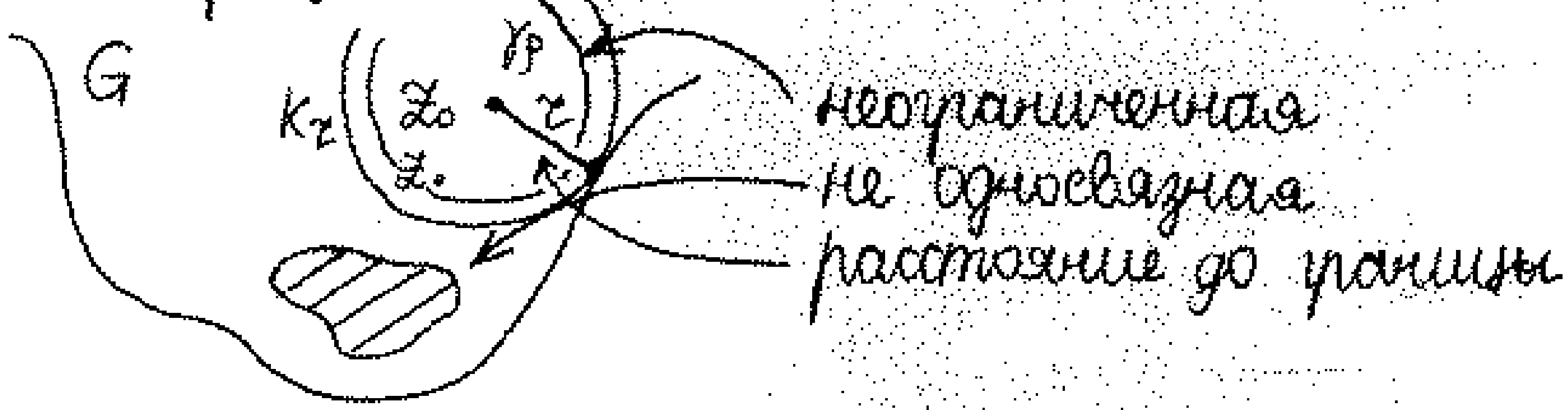
$\Rightarrow K_R: |z-z_0|<1$

$$S_n(z)=1+(z-z_0)+\ldots+(z-z_0)^n=\frac{1-(z-z_0)^{n+1}}{1-(z-z_0)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{1-(z-z_0)}$$

3. Теорема Тейлора

Теорема Тейлора $\exists\, f(z) \in A(G)$, z_0 — произв. т. из G, $r = \varphi(z_0, \partial G)$. Тогда в круге $K_r: |z - z_0| < r$ $f(z)$ может быть представлена как сумма ряда по степеням $z - z_0$, причем это представление единственно.

□ Иллюстрация:



1) Единственность. Если разложение $f(z)$ по степ. $z-z_0$ существует, то оно единственно согласно замечанию о единственности.

2) Существование. Покажем, что разложение $\exists$. Фикс. произвольную т. $z \in K_r$. Построим окружность:

$\gamma_\rho: |\zeta - z_0| = \rho$

так, чтобы $\gamma_\rho \subset K_r$ и $z \in \operatorname{int} \gamma_\rho$

По инт. ф-ле Коши:

$f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho} \dfrac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$ $(\zeta \in \gamma_\rho)$ Получим разложение дроби по степ.:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \left\{ \underbrace{\frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|}}_{\rho} < 1 \right\}$$

$$= \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \underset{\gamma_\rho}{\rightrightarrows}$$

Заметим, что ряд в правой части сходится равномерно на окр. γ_ρ, т.к. есть сходящийся мажорирующий ряд:

$$\max_{\zeta \in \gamma_\rho} |f(\zeta)| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z - z_0|^n}{\rho^{n+1}}$$

$\Rightarrow$ Почленно интегрируем по γ_ρ и умножаем обе части на $\frac{1}{2\pi i}$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}}_{C_n} (z - z_0)^n$$

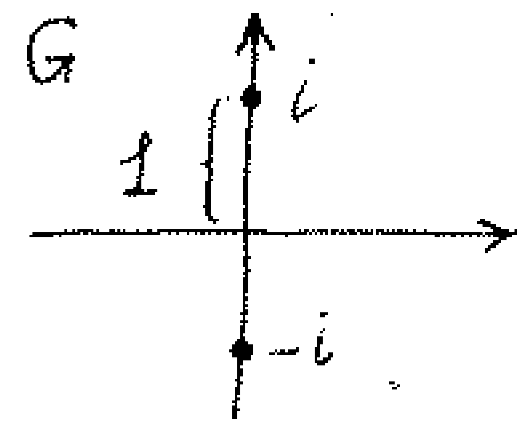
$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

$\boxed{f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n}$ — искомое степенное разложение

Доказывает возможность разложения ■

Пример. $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ разложить в ряд по степеням z и $z-1$

Где будет аналитична $f(z)$? Во всей комп. пл-ти, кроме $(0,i)$ и $(0,-i)$ — область аналитичности.



$|z|<1$ — сходится, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot z^{2n}$

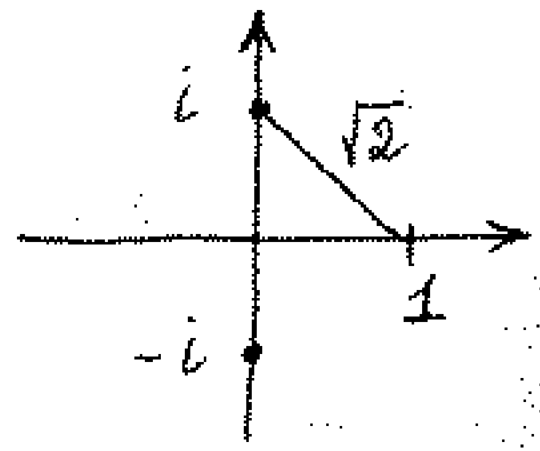
По Коши-Адамару $R=1$
Граница области аналитичности — 1.

Рассм. случай для $z-1$.
Разложим $f(z)$ на простые дроби:

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}\right\} \quad (*)$$

Разложим каждое из слагаемых по степеням:

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{z-1+1-i}=\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{1-i}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{(1-i)^{n+1}}$$



Необходимо потребовать $|z-1|<|1-i|=\sqrt{2}$

$$\frac{1}{z+i}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{(1+i)^{n+1}}$$

В данном случае требуем $|z-1|<|1+i|=\sqrt{2}$

Сходятся в одной области $|z-1|<\sqrt{2}$ ⇒ заменим в (*) разложенные слагаемые:

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}}-\frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right](z-1)^n, \quad |z-1|<\sqrt{2}$$

Если применить формулы: $1+i=\sqrt{2}e$

4. Теорема о единственности

Область G, в которой выделено подмножество E, имеющее пред. конечн. точку $z_0 \in G$

1-ая формулировка. Может существовать лишь одна ф-ия $f(z) \in A(G)$, принимающая значени на под-тве E

2-ая формулировка. Если ф-ия $\varphi(z) \in A(G)$ обращается в нуль во всех точках из E, то $\varphi(z) \equiv 0$ в G

Задача. Док-ть эквивалентность двух формулировок теоремы о единственности.

При док-ве будем исп-ть 2-ую формулировку.

□ Выделим в E послед-ть $\{z_k\}$ такую, что $z_k \to z_0$, $z_k \neq z_0$ $\forall k$

Пусть $\underbrace{r = \rho(z_0, \partial G)}_{\text{растояние от } z_0 \text{ до границы } \partial G}$. По т. Тейлора, в круге $|z - z_0| < r$ $\varphi(z)$ можно

представить степенным рядом $\varphi(z) = \overbrace{c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots}^{g(z)}$ (*)
Покажем по индукции, что все коэффициенты $c_n = 0$, т.е. $\varphi(z) \equiv 0$ в круге $|z - z_0| < r$

Подставляя в (*) $z = z_k$, имеем $0 = \varphi(z_k) = c_0 + c_1(z_k - z_0) + \ldots + c_n(z_k - z_0)^n -$

Перейдем к пределу $z_k \to z_0$, $k \to \infty$ $\Rightarrow$ $0 = c_0$ – база индукции.

Пусть уже доказано, что $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$. Покажем, что $c_n = 0$

$\varphi(z) = c_n(z - z_0)^n + c_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \ldots$ (**)

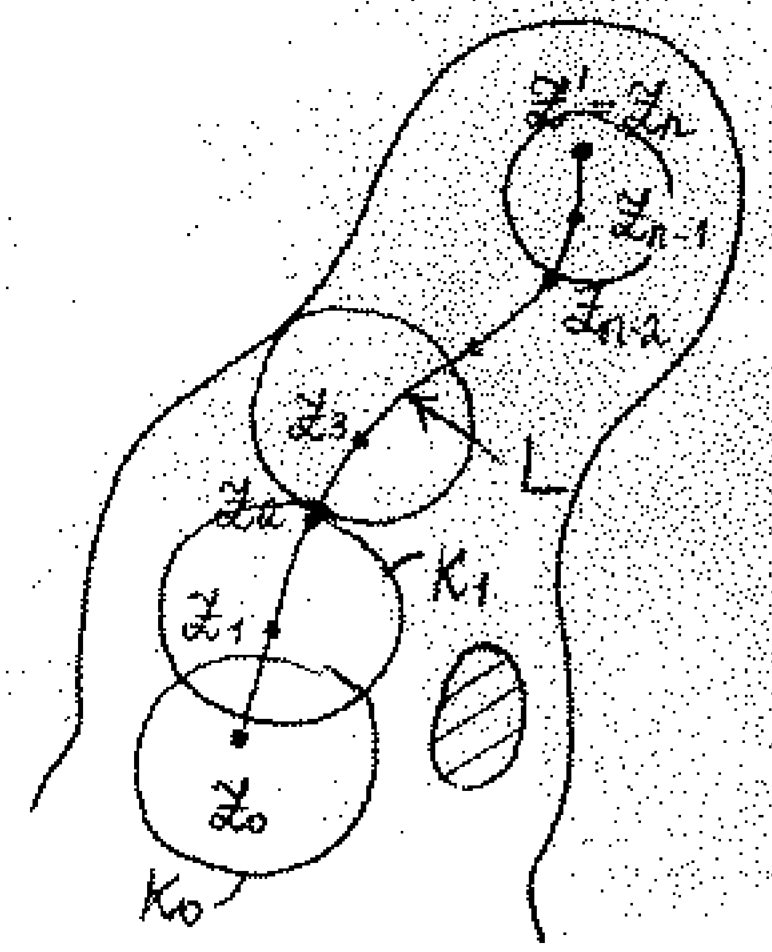
Подставим в (**) $z = z_k$:

$0 = \varphi(z_k) = c_n(z_k - z_0) + c_{n+1}(z_k - z_0)^{n+1} + \ldots$

$0 = c_n + c_{n+1}(z_k - z_0) + c_{n+2}(z_k - z_0)^2 + \ldots$

$z_k \to z_0$, $k \to \infty$ $c_n = 0$

Первая часть док-ва проведена. Перейдем ко второй



Фикс. произвольную т. $z' \in G$. Покажем, что $\varphi(z') = 0$

Пользуясь связностью, проведем непрерывную кривую $L \subset G$, соединяющую z_0 и z', где z_0 – предельная точка.

Пусть $\delta = \rho(L, \partial G) > 0$ (по задаче из лекции 1)

Разобьем L точками $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n$ так, что $|z_{i+1} - z_i| < \delta$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$

K_0: $|z - z_0| < \delta$. По первой части $\varphi(z) \equiv 0$ в K_0

Проведем многошаговый процесс:

Шаг 1. Построим круг K_1: $|z - z_1| < \delta$, $E_1 = K_0 \cap K_1$
Обозн. $K_1 \to G_1$, $E_1 \to E$, z_1 – пред. т. для E_1

Рассуждая как в первой части док-ва, покажем, что из $\varphi(z) = 0$ $\forall z \in E_1$ следует, что $\varphi(z) \equiv 0$ в K_1

Шаг 2. Построим круг K_2: $|z - z_2| < \delta$, $E_2 = K_1 \cap K_2$

Рассуждая как в первой части:
$\varphi(z) = 0$ $\forall z \in E_2 \Rightarrow \varphi(z) \equiv 0$ в K_2

После $n-1$ шагов процесса получим круг
K_{n-1}: $|z - z_{n-1}| < \delta$, в котором $\varphi(z) \equiv 0$. Т.к. $z' = z_n \in K_{n-1}$, то $\varphi(z') = 0$
$\Rightarrow$ доказано ■

Ситуации использования теоремы

① $[a, b] \subset R$ $\varphi(x)$ определена на $[a, b]$. $\exists$ область $G \supset [a, b]$. Применяя 1-ую формулировку: может существовать не более одной ф-ии $f(z) \in A(G)$, совпадающей всюду на $[a, b]$.

$[0, 2\pi]$ $y = \sin x$

$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ – никаким другим способом ф-ию нельзя распространить на комп. пл-ть

$f(z)$ – аналитическое продолжение ф-ии $\varphi(x)$ с $[a, b]$ на $\mathbb{C}$

② (несуществование аналит. ф-ий с заданными свойствами)
Существует ли ф-ия $f(z) \in A(K)$, K: $|z| < 1$, такая, что
$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$, $n = 2, 3, \ldots$? Не существует. Покажем

$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$, $n = 2, 3, \ldots$

$g(z) = z$ – аналитическая всюду (*)

$G = K$, $E = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, $z_0 = 0$

Если решение $\exists$, то оно имеет вид (*). Однако она не удовл. второму условию $\Rightarrow$ противоречие.

③ (продолжение соотношений)

1) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

$F(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ целая

$F(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$G = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{R}$. Используем т. о единственности во второй формулировке:

$F(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

2) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \quad (*)$

Используем т. во второй формулировке и докажем в 2 этапа.
Фикс. произв. вещ. значение $z_2 = x_2$

$f(z_1) = \cos(z_1 + x_2)$, $g(z_1) = (\cos x_2)\cos z_1 - (\sin x_2)\sin z_1$ — целые

$f(z_1) = g(z_1) \quad \forall z_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(z_1) = g(z_1) \quad \forall z_1 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ промежуточный итог: формула $(*)$ верна для $\forall z_2 \in \mathbb{R}$ и $\forall z_1 \in \mathbb{C}$.
Дальнейшая задача — опять комплексность.

Фикс. произв. $z_1 \in \mathbb{C}$ и рассм. обе части в $(*)$ как ф-ии от z_2

$F(z_2) = \cos(z_2 + z_1)$, $G(z_2) = (\cos z_1)\cos z_2 - (\sin z_1)\sin z_2$ — целые ф-ии

$F(z_2) = G(z_2) \quad \forall z_2 \in \mathbb{R}$

$G = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{R}$

$F(z_2) \equiv G(z_2) \quad \forall z_2 \in \mathbb{C}$

Формула $(*)$ верна для всех $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Глава VI. Ряды Лорана и изолированные особые точки

Опр. $f(z) \in A(\mathcal{D})$, $\mathcal{D}: 0 < |z - z_0| < R$ — проколотая R-окрестность т. z_0, z_0 — изолированная особая точка ф-ии $f(z)$. Т.е. в т. z_0 ф-ия $f(z)$ теряет аналитичность $\Rightarrow$ не может быть разложена в этой т. z в ряд Тейлора.

Рассм. ряд Лорана, который позволит произвести разложение:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} = \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

Из-за нового вида ряда необходимо ввести понятие сходимости — ряд $(*)$ сходится, если сходятся оба ряда I и II.

Изучим типичные области сходимости.

Ряд I сход. в круге $K_1: |z - z_0| < R_1$ абсолютно и нормально к некоторой аналитической ф-ии $f_1(z)$.

Ряд II не явл. степенным $\Rightarrow$ сведем заменой $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$ к степенному отн. т. 0

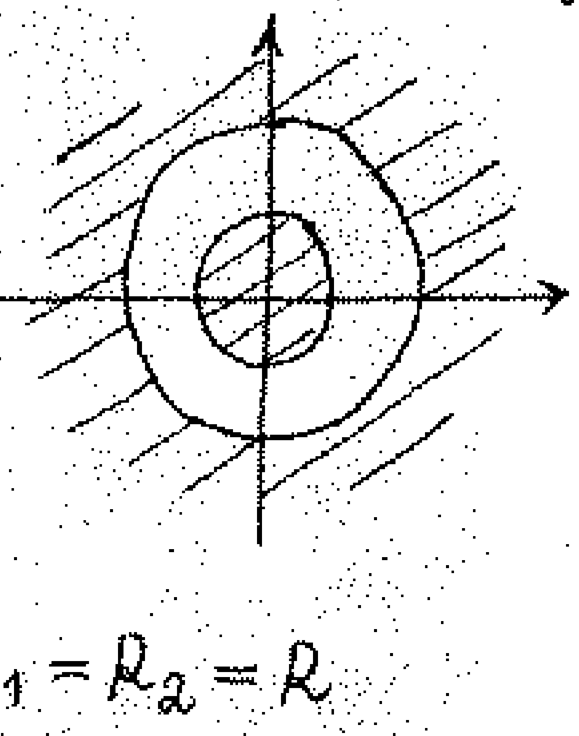
$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} \zeta^n$

Считаем, что ряд имеет положительный радиус сходимости:

$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} \zeta^n$ сход. в круге $K_2: |\zeta| < R_2^{-1}$ абсолютно и нормально к некоторой аналитической ф-ии $f_1(z)$.

Ряд II сход. в обл. $|z - z_0| > R_2$ абсолютно и нормально к некоторой аналит. ф-ии $f_2(z)$

① $R_1 < R_2 \Rightarrow$ Ряд Лорана $(*)$ нигде не сходится



② $R_1 = R_2 = R$

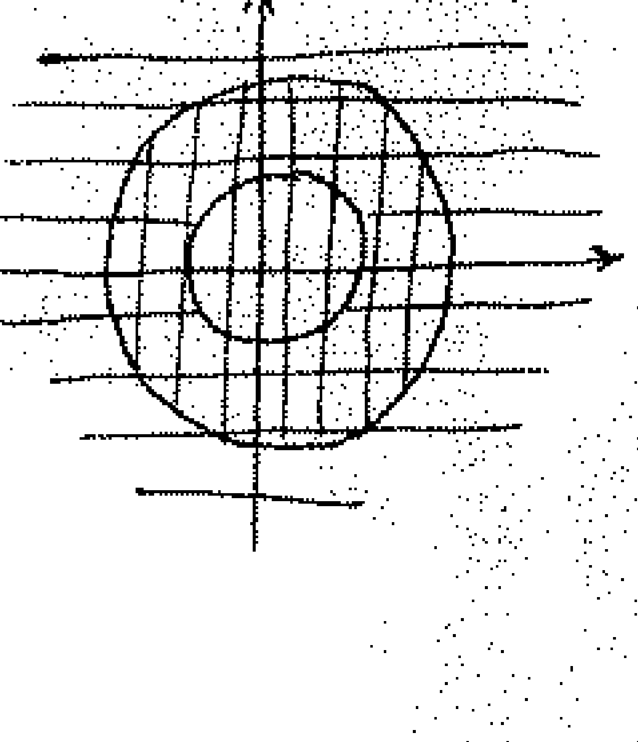
$\gamma_R: |z - z_0| = R$

$\Rightarrow$ может быть сходимость на границе, но точный вывод возможен после дополнительного исследования

③ $R_1 > R_2 \Rightarrow$ Ряд Лорана $(*)$ сходится в кольце $\mathcal{D}: R_2 < |z - z_0| < R_1$ абсолютно и нормально к ф-ии:

$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$

Есть типичный случай.



Есть ф-ция аналитическая в кольце. Можно ли представить ее в виде ф-ии Лорана? Да.

Замечание о единственности Ряд Лорана с нетривиальным кольцом сходимости однозначно определяется своей суммой $f(z)$, где кольцо сходимости $\mathcal{D}: R_2 < |z-z_0| < R_1$

□ Построим окружность $\gamma_\rho : |z-z_0| = \rho$, $R_2 < \rho < R_1$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \underset{\gamma_\rho}{\rightrightarrows}$$

$$\varphi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}$$

При $\forall k$ ф-ция имеет постоянный модуль на ок-сти: $|\varphi_k(z)| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho^{k+1}}$, $z \in \gamma_\rho$
Важнее тот факт, что он ограничен $\Rightarrow$ умножение не испортит сходимости:

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{2\pi i} (z-z_0)^{n-k-1} \underset{\gamma_\rho}{\rightrightarrows}$$

Интегрируем почленно по γ_ρ:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} (z-z_0)^{n-k-1} dz$$

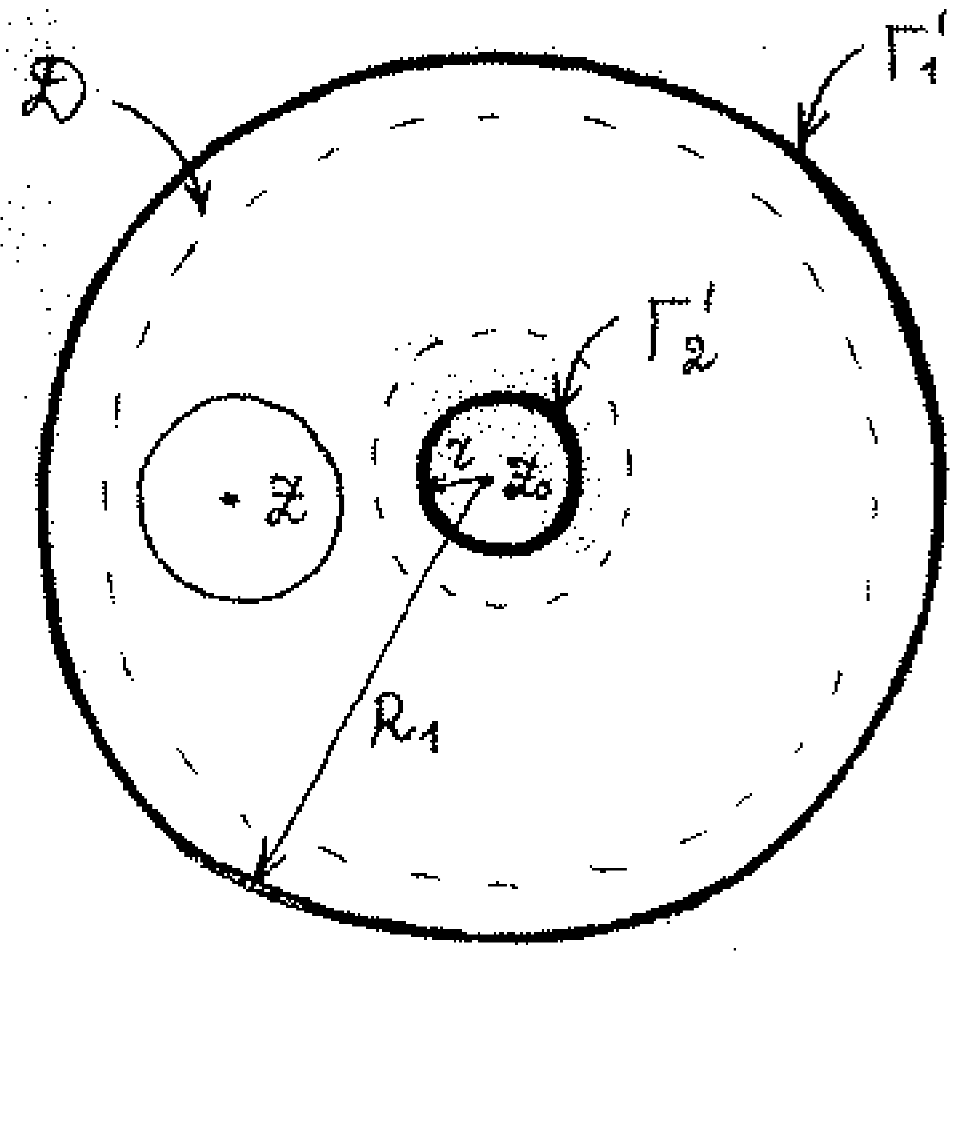
$$\oint_{\gamma_\rho^+} (z-z_0)^m dz = \begin{cases} 0, & m \neq -1 \\ 2\pi i, & m = -1 \end{cases} \qquad n-k\cancel{-1} = \cancel{-1}$$
$$n = k$$

$$\Rightarrow \boxed{c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ ■$$

Теорема Лорана. Ф-ция $f(z)$, аналитическая в кольце $\mathcal{D}: R_2 < |z-z_0| < R_1$, представляется в $\mathcal{D}$ как сумма ряда Лорана, причем это представление единственно.

□ Единственность представления вытекает из замечания о единственности.

Докажем возможность такого представления.



Фикс. произвольную т. $z \in \mathcal{D}$. Строим вспомогательное кольцо:
$\mathcal{D}': R_2' < |\zeta - z_0| < R_1'$ так, чтобы $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$,
$z_0 \in \mathcal{D}'$ и окр-ть $\gamma_\rho : |\zeta - z| = \rho$ так, чтобы $\gamma_\rho \subset \mathcal{D}'$.

Рассм. составной контур $\Gamma_1' \cup \Gamma_2' \cup \gamma_\rho$, где $\Gamma_1' : |\zeta - z_0| = R_1'$ и $\Gamma_2' : |\zeta - z_0| = R_2'$

Применяя к ф-ии $\varphi(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi-z}$ теорему о составном контуре, имеем:

$$\oint\limits_{\Gamma_1'} \frac{f(\xi)}{\xi-z}\,dz-\oint\limits_{\Gamma_2'+} \frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi+\oint\limits_{\gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho^+}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi-z}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1'+}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_2'+}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi$$

$\boxed{\xi\in\Gamma_1'}$: $\dfrac{|z-z_0|}{\underbrace{|\xi-z_0|}_{R_1'}}=\theta<1$

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}$$

$$\frac{f(\xi)}{\xi-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\ \underset{\Gamma_1'}{\rightrightarrows}\qquad \sum\frac{|z-z_0|^n}{\underbrace{|\xi-z_0|^{n+1}}_{R_1'}}$$

Почленно интегрируем по Γ_1':

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1'+}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n,\quad C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1'+}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi,\ n=0,1,2,\dots$$

$\boxed{\xi\in\Gamma_2'}$: $\dfrac{|\xi-z_0|}{|z-z_0|}=\dfrac{R_2'}{|z-z_0|}=\mu<1$

$$-\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{z-\xi}=\frac{1}{(z-z_0)-(\xi-z_0)}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{\xi-z_0}{z-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\xi-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\xi-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$$

$$-\frac{f(\xi)}{\xi-z}=\sum_{n=1}^{\infty}f(\xi)(\xi-z_0)^{n-1}\frac{1}{(z-z_0)^n}\ \underset{\Gamma_2'}{\rightrightarrows}$$

Интегрируем почленно по Γ_2' и делим на $2\pi i$:

$$-\oint\limits_{\Gamma_2'+}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi=\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}(z-z_0)^{-n},\quad C_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_2'+}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{-n+1}},\ n=-1,-2,\dots$$

$$\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}(z-z_0)^{-n}\ \blacksquare$$

Замечание. Пользуясь теоремой о составном контуре, интегрирование в формулах для C_n при $n\geqslant 0$ и $n<0$ можно проводить по одной и той же окружности:

$\gamma_R: |z-z_0|=R,\ R_2<R<R_1$

1. Классификация изолированных особых точек

$f(z) \in A(\mathcal{D})$, $\mathcal{D}: 0 < |z - z_0| < R$

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n}_{\text{правильная часть}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}}_{\text{главная часть}}$$

Классификация:

① В ряде (*) отсутствуют члены с отрицательными степенями $z - z_0$
$\Rightarrow z_0$ — устранимая особая точка (УОТ) ф-ии f

② В ряде (*) присутствует лишь конечное число членов с отриц. степенями $z - z_0$.
$\Rightarrow z_0$ — полюс ф-ии f

③ Ряд (*) содержит бесконечно много членов с отриц. степенями $z - z_0$
$\Rightarrow z_0$ — существенно особая точка (СОТ) ф-ии f

Теорема 6.1 Следующие три высказывания эквивалентны:
1) z_0 — УОТ ф-ии $f(z)$
2) $\exists$ конечный $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$
3) $f(z)$ ограничена в некоторой окр-ти т. z_0

□ 1) → 2) z_0 — УОТ ф-ии f
$\exists$ конечный предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$

$$f(z) = \underbrace{c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots}_{g(z)} \quad \forall z \in \mathcal{D}$$

$f(z) = g(z) \quad \forall z \in \mathcal{D},\ z \neq z_0$

$\exists \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = g(z_0) = c_0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0$

2) → 3) $\exists$ конечный $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) \Rightarrow f(z)$ ограничена в некоторой окр. т. z_0

Очевидно

3) → 1) $\exists U_\delta: 0 < |z - z_0| < \delta$ и $M > 0$ такие, что $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in U_\delta$
Построим окружность $\gamma_\rho: |z - z_0| = \rho$ так, чтобы $\gamma_\rho \subset U_\delta$.

Во всем кольце $\mathcal{D} \Rightarrow$ и в U_δ действует лорановское разложение самого общего вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

В силу наших предположений точка устранимая $\Rightarrow$ второе слагаемое отсутствует.

Найдем и оценим величину коэффициента c_n:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

Достаточно грубой оценки:

$$|C_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \max_{\zeta \in \gamma_\rho} \frac{|f(\zeta)|}{\underbrace{|\zeta - z_0|^{n+1}}_{\rho^{n+1}}} 2\pi\rho \leqslant \frac{M}{\rho^n}$$

Справедливо как для положительных, так и для отрицательных. Используем ее для отрицательных $n = -1, -2, \dots$

$$|C_n| \leqslant M \cdot \rho^{-n} \to 0$$

Исследуем при $\rho \to 0$:

$$C_n = 0, \; n = -1, -2, \dots$$

$\Rightarrow z_0$ – УОТ ф-ции f ■

Вывод из теоремы. Если z_0 не является УОТ ф-ции f, то f не ограничена в любой окрестности т. z_0

Переходим к исследованию точек 2-го рода — полюс. В таком случае лорановское разложение должно выглядеть как:

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{C_{-m-1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{C_{-1}}{z - z_0} + C_0 + C_1(z - z_0) + \dots \quad (**)$$

$C_{-m} \neq 0$, причем не обязательно $C_{-m-1} \neq 0$

$\Rightarrow z_0$ – полюс порядка (кратности) m. Если $m = 1$ – простой полюс, если $m > 1$ – кратный полюс

Теорема 6.2 Точка z_0 тогда и только тогда является полюсом ф-ции $f(z)$, когда $f(z) \to \infty$ при $z \to z_0$.

□ Необходимость. Перепишем разложение (**) в виде (вынесем из каждого слагаемого $(z-z_0)^m$ в знаменателе):

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \underbrace{\left[C_{-m} + C_{-m+1}(z - z_0) + \dots + C_{-1}(z-z_0)^{m+1} + C_0 (z - z_0)^m + \dots \right]}_{\varphi(z) \text{ — аналит. в } \mathcal{D}:\, 0 < |z - z_0| < R} = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$$

$$\varphi(z) \to C_{-m} \neq 0 \Rightarrow f(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} \infty.$$

Промежуточное замечание.

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m} \quad \forall z \in \mathcal{D}$$

$$\varphi(z_0) = C_{-m} \neq 0$$

Определим $g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \neq z_0 \text{ — имеет конечный предел и опред-на} \\ 0, & z = z_0 \text{ — доопределим по непрерывности} \end{cases}$

$g(z) \in A(\mathcal{D})$. Если $g(z)$ допускает представление $g(z) = (z - z_0)^m \psi(z)$, $\psi(z_0) \neq 0$, то z_0 – нуль порядка (кратности) m для $g(z)$, если $g(z_0) = g'(z_0) = \dots = g^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad g^{(m)}(z_0) \neq 0$

$\Rightarrow g(z) = (z-z_0)^m \frac{1}{\varphi(z)} = (z-z_0)^m \psi(z)$

$\psi(z_0) = \frac{1}{C_{-m}} \neq 0$

Мы специально ввели ф-ию $g(z)$, чтобы док-ть достаточность.

Достаточность: $f(z) \to \infty$ при $z \to z_0$.

Положим $g(z) = \begin{cases} 1/f(z), & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0 \text{ — по непрерывности} \end{cases}$

Обозначим через m кратность т. z_0 как нуля ф-ии $g(z)$. Можем записать $g(z)$ через m:

$g(z) = (z-z_0)^m \psi(z), \ \psi(z_0) \neq 0$

Из представления для $g(z)$ выведем представление для $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \cdot \underbrace{\frac{1}{\psi(z)}}_{\varphi(z)} = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m} = \frac{1}{(z-z_0)^m}\left[d_0 + d_1(z-z_0) + \ldots + d_{m-1}(z-z_0)^{m-1} + d_m(z-z_0)^m + \ldots\right] \ominus$$

$$d_0 = \varphi(z_0) = \frac{1}{\psi(z_0)} \neq 0$$

$$\ominus \frac{d_0}{(z-z_0)^m} + \frac{d_1}{(z-z_0)^{m+1}} + \ldots + \frac{d_{m-1}}{z-z_0} + d_m + d_{m+1}(z-z_0)$$

Лорановское разложение для полюса имеет конечное кол-во слагаемых, причем их кол-во равно кратности т. z_0 как нуля ф-ии $g(z)$. Это и доказывает теорему. ■

Теорема 6.3. Точка z_0 тогда и только тогда является полюсом порядка m для ф-ии $f(z)$, когда z_0 есть нуль порядка m для ф-ии

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

Исследуем существенно особые точки. Если z_0 — СОТ ф-ии $f(z)$, то $\nexists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ (ни конечный, ни бесконечный)

Теорема (Сохоцкого–Казорати–Вейерштрасса). $\exists\, z_0$ — СОТ ф-ии $f(z)$. Тогда для любого числа A, конечного или бесконечного, $\exists \{z_n\}$ такая, что $z_n \to z_0$, $f(z_n) \to A$

($\forall$ число A может быть конечным или бесконечным пределом ф-ии $f(z)$ в т. z_0)

$\{z_n\}$ — A-последовательность Сохоцкого

□ $f(z)$ — неограничена в $\forall$ окр. т. z_0 (иначе точка была бы устранимой)
$\Rightarrow \forall n$ найдется т. z_n' такая, что $|z_n' - z_0| < 1/n$
$|f(z_n')| > n$

Пос-ть $\{z_n'\}$ — есть послед. Сохоцкого для $A = \infty$.

Пусть A — произвольное конечное число. Докажем для такого A от противного.

$\exists$ A – конечное число. Предположим, что A – последовательности Сохоцкого не существует. Тогда найдутся:

1) окрестность $U_\delta : 0 < |z - z_0| < \delta$

2) число $\alpha > 0$

такие, что $|f(z) - A| \geq \alpha$.

В этой окрестности корректно (т.е. не обращается в нуль) определена ф-ия $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z) - A} \in A(U_\delta)$

$|\varphi(z)| \leq \frac{1}{\alpha} \quad \forall z \in U_\delta \Rightarrow z_0$ – УОТ для $\varphi(z) \Rightarrow \exists$ кон. $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z)$

Вычислим этот предел, приближаясь к т. z_0 вдоль ∞ – последовательн. Сохоцкого:

$\varphi(z_n') = \dfrac{1}{f(z_n') - A} \to 0$ (т.к. $f(z_n') \to \infty$)

Показано, что $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{f(z) - A} = 0$

$\Rightarrow$ необходимо $f(z) \to \infty$ при $z \to z_0 \Rightarrow z_0$ – полюс ф-ии $f(z)$.

Получили противоречие, доказывающее A – послед. Сохоцкого, т.к. z_0 – СОТ, а не полюс ■

Пример. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$ – особая точка

$e^z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \ldots + \dfrac{z^n}{n!} + \ldots$

$R = \infty$

$e^{1/z} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2!} \cdot \dfrac{1}{z^2} + \ldots + \dfrac{1}{n!} \cdot \dfrac{1}{z^n}$

Если $A = \infty$ $\quad z_n' = \frac{1}{n}$, $\; f(z_n') = e^n \to \infty$

Если $A = 0$ $\quad z_n'' = -\frac{1}{n}$, $\; f(z_n'') = e^{-n} \to 0$

Рассм. произвольное $0 < |A| < \infty$.

Построим последовательность Сохоцкого так, чтобы $f(z_n) = A$

$\Rightarrow$ нужно решить ур-ие $e^{\frac{1}{z_n}} = A$

$\dfrac{1}{z_n} = \operatorname{Ln} A$

$\operatorname{Ln} A = \ln|A| + i \operatorname{Arg} A$

Выделим одно значение:

$\ln A = \ln|A| + i \arg A$ – главное значение логарифма

Тогда $\operatorname{Ln} A = \ln A + 2\pi n i$

$\Rightarrow z_n = \dfrac{1}{\ln A + 2\pi n i}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Почему удалось сделать в данном примере так, чтобы $f(z_n) = A$?

Это объясняет следующая теорема – (большая) теорема Пикара

$f(z) = e^{\frac{1}{z}}, \ z_0 = 0$

$A = \infty, \ z_n' = \frac{1}{n}$
$A = 0, \ z_n'' = -\frac{1}{n}$

$0 \neq A, \ |A| < \infty, \ e^{\frac{1}{z_n}} = A$

Теорема Пикара (большая) $\exists z_0$ — СОТ ф-ии $f(z)$. Тогда для любого конечного числа A (с единственным возможным исключением) найдется последовательность A-точек ф-ии f, сходящаяся к т. z_0

$f(z) = \sin\frac{1}{z}, \ z_0 = 0$
Иск. значений нет.

2. Особенность в бесконечно удаленной точке

(Маркушевич, гл. VII, раздел 6)

Пусть функция $f(z)$ — аналитическая в окрестности D бесконечно удаленной точки:

$$D : |z| > R.$$

Сопоставим $f(z)$ вспомогательную функцию

$$g(\zeta) = f(\frac{1}{\zeta}),$$

делаем замену переменного на плоскости z

определенную в окрестности

$$0 < |\zeta| < \frac{1}{R}$$

точки $\zeta_0 = 0$.

Определение. Точка $z_0 = \infty$ является для $f(z)$ устранимой особенностью, полюсом или существенно особой точкой, если $\zeta_0 = 0$ есть соответственно устранимая особенность, полюс или существенно особая точка для функции $g(\zeta)$.

вспомогательная функция

лорановские разложения

$$\begin{cases} \textbf{УОТ} & g(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \cdots + a_n\zeta^n + \cdots \\ \textbf{Полюс} & a_{-m}\zeta^{-m} + \cdots + a_{-1}\zeta^{-1} + a_0 + a_1\zeta + \cdots, \quad a_{-m} \neq 0 \\ \textbf{СОТ} & \cdots + a_{-n}\zeta^{-n} + \cdots + a_{-1}\zeta^{-1} + a_0 + a_1\zeta + \cdots + a_n\zeta^n + \cdots \\ \textbf{УОТ} & f(z) = a_0 + a_1\frac{1}{z} + \cdots + a_n\frac{1}{z^n} + \cdots \\ \textbf{Полюс} & a_{-m}z^m + \cdots + a_{-1}z + a_0 + a_1\frac{1}{z} + \cdots, \quad a_{-m} \neq 0 \\ \textbf{СОТ} & \cdots + a_{-n}z^n + \cdots + a_{-1}z + a_0 + a_1\frac{1}{z} + \cdots + a_n\frac{1}{z^n} + \cdots \end{cases}$$

делаем обратную замену

Вывод: Тип особенности в бесконечно удаленной точке определяется совокупностью членов с **положительными** степенями z в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = \infty$. Эта часть ряда Лорана считается на бесконечности **главной**, тогда как члены с неположительными степенями z составляют **правильную** часть ряда Лорана.

эквивалент
теоремы 6.1.

- $z_0 = \infty$ тогда и только тогда является устранимой особой точкой функции $f(z)$, когда существует конечный предел $\lim_{z\to\infty} f(z)$, или, что равносильно, когда $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки.

аналог
теоремы 6.2

- $z_0 = \infty$ тогда и только тогда является полюсом функции $f(z)$, когда $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$.
- $z_0 = \infty$ тогда и только тогда является существенно особой точкой функции $f(z)$, когда не существует ни конечного, ни бесконечного предела $\lim_{z\to\infty} f(z)$.

Примеры

- $f(z) = \sin^2 \frac{1}{z}$

  Поскольку $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, то $z_0 = \infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$.

  (и)ллюстрация для 1-го типа

  Так как для вспомогательной функции $g(\zeta) = \sin^2 \zeta$ точка $\zeta_0 = 0$ есть нуль кратности два, то $z_0 = \infty$ можно считать двойным нулем функции $f(z)$.

- $f(z)$ есть многочлен степени n $(n \geq 1)$.

  Запись этого многочлена по степеням z

  $$f(z) = a_0 z^n + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

  есть его лорановское разложение, сходящееся во всей комплексной плоскости и, в частности, в любой окрестности нуля. Из него видно, что $z_0 = \infty$ есть полюс порядка n для $f(z)$.

• $f(z) = e^z$

Всюду в **C** сходится ряд

$$e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!},$$

который можно считать лорановским разложением функции $f(z)$. Так как все члены этого ряда содержат неотрицательные степени z, то $z_0 = \infty$ есть существенно особая точка для $f(z)$.

Глава 7. Вычеты и их приложения

∃ $f(z)$ — аналит. в обл. G за исключением некот. кол-ва ИОТ. Задача — научиться эффективно вычислять инт-лы:

$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$, где $\Gamma \in G$

Далее придерживаемся соглашения о контурах: все рассм. контуры не проходят через особые точки ф-ии $f(z)$.

∃ z_0 — ИОТ ф-ии $f(z)$. Тогда в некот. ок-ти $\mathcal{D}: 0<|z-z_0|<R$ $f(z)$ представима рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad (*)$$

Опр. **Вычетом ф-ии $f(z)$ отн. т. z_0** наз. коэффициент c_{-1} в ряде $(*)$:

$$\ldots + c_{-1}\frac{1}{z-z_0} + \ldots$$

В окр-ти $\mathcal{D}$ построим окружность $\gamma_\rho: |z-z_0|=\rho,\ 0<\rho<R$. Тогда для вычета получим выражение:

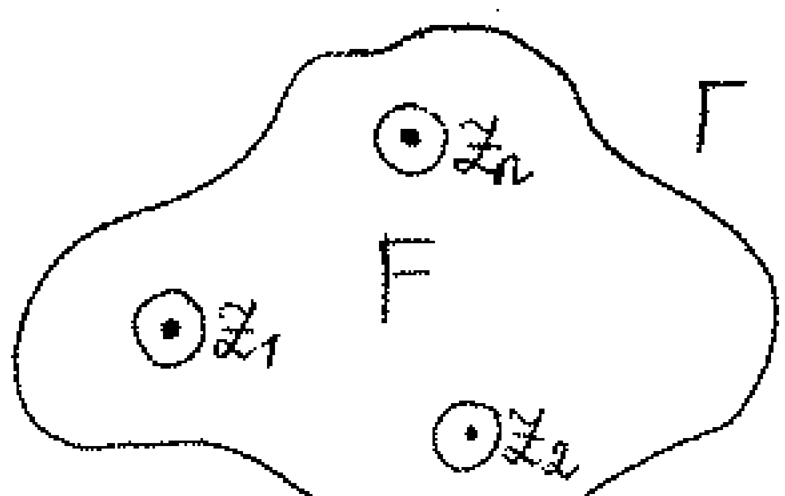
$$\boxed{c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho^+} f(z)\,dz} \quad (**)$$

Обозн. $c_{-1} = \operatorname{res}[f(z), z_0] = \operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z)$ (от. франц. residu — вычет)

Теорема о вычетах. ∃ $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — все особые точки ф-ии $f(z)$ внутри контура Γ. Тогда:

$$\oint\limits_{\Gamma^+} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}[f(z), z_k]$$

□ Почему внутри Γ конечное число ОТ? По предположению ∃ только ИОТ (изолированные). Если допустить бесконечное число точек, то у них образуется предел — не ИОТ ⇒ противоречие.



Построим окружности $\gamma_i: |z-z_i|=\rho_i$ так, чтобы $\gamma_i \subset \operatorname{int}\Gamma$, $i=1,2,\ldots,n$ — лежат внутри контура Γ
$\gamma_i \subset \operatorname{ext}\gamma_j$, $i\neq j$ — не пересекаются

∃ F — обл., ограниченная составным контуром $\Gamma \cup \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n$. По т. о составном контуре:

$$\oint\limits_{\Gamma^+} f(z)\,dz = \oint\limits_{\gamma_1^+} f(z)\,dz + \ldots + \oint\limits_{\gamma_n^+} f(z)\,dz = \{\text{по ф-ле } (**)\} =$$

$$= 2\pi i\left[\operatorname{res}[f(z), z_1] + \ldots + \operatorname{res}[f(z), z_n]\right] \ ■$$

Какие точки нужно учитывать, т.е. какие точки дают вклад в сумму?

1) $\exists$ z_0 – УОТ. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ $\quad c_{-1} = 0$

$\Rightarrow$ УОТ не дают вклад.
Остальные виды точек вклад дают и приходится считать лорановское разложение по-честному. Но бывают отдельные хорошие вар-ты.

2) $\exists$ z_0 – простой полюс ф-ии $f(z)$

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots$$

$$f(z)(z-z_0) = c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1(z-z_0)^2 + \ldots$$

$$\exists \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0) = c_{-1} = \operatorname{res}[f(z), z_0]$$

Выведем еще одну ф-лу для вычета простого полюса.

$\exists$ $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z), \psi(z)$ – аналит. в ок-ти т. z_0

$\varphi(z_0) \neq 0$,

$\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$ – чтобы полюс был простым, а не кратным

Подставим $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ в имеющуюся ф-лу для вычета:

$$c_{-1} = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)(z-z_0)}{\psi'(z_0)(z-z_0) + \psi''(z_0)/2\,(z-z_0)^2 + \ldots} = \left\{ \begin{matrix} \text{сократим} \\ \text{на } (z-z_0) \end{matrix} \right\} =$$

подставим степенное разложение

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi'(z_0) + \psi''(z_0)/2\,(z-z_0) + \ldots} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

– вторая ф-ла для вычета (если представление для $f(z)$ получено)

3) $\exists$ z_0 – полюс кратности m ф-ии $f(z)$

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots, \quad c_{-m} \neq 0$$

Умножим на $(z-z_0)^m$, чтобы избавиться от знаменателей:

$$f(z)(z-z_0)^m = c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m + \ldots$$

Дифференцируем:

$$\frac{d^{m-1}[f(z)(z-z_0)^m]}{dz^{m-1}} = (m-1)!\,c_{-1} + m(m-1)\ldots 2c_0(z-z_0) + \ldots$$

Перейдем к пределу $z \to z_0$:

$$(m-1)!\,c_{-1} = \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}[f(z)(z-z_0)^m]}{dz^{m-1}}$$

$C_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}[f(z)(z-z_0)^m]}{dz^{m-1}}$; $m = 1$ — для простого полюса, если следовать соглашениям:

$$\begin{cases} f^{(0)}(z) = f(z) \\ 0! = 1 \end{cases}$$

1. Вычет отн. бесконечно удаленной точки

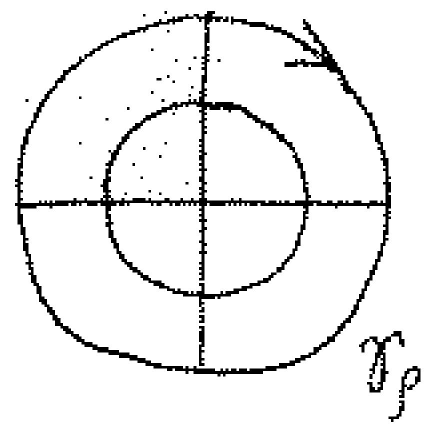
Ранее рассм. вычеты только в конечных точках.

$\mathcal{D}: |z| > R \quad f(z) \in A(\mathcal{D})$

$z_0 = \infty$ ИОТ для $f(z)$

$f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$

Опр. Вычетом ф-ции $f(z)$ отн. т. $z_0 = \infty$ наз. число $-C_{-1}$



$\gamma_\rho: |z| = \rho$
$\rho > R$

Чтобы в обоих случаях видеть особую т. слева от себя добавляется "$-$" в формуле.

$$C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho^+} f(z)\,dz$$

$$-C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho^-} f(z)\,dz \quad (*)$$

z_0 — УОТ для $f(z) \Rightarrow C_{-1} = 0$

$z_0 = \infty$ — УОТ для $f(z)$; $C_{-1} = 0$ не обязательно

$f(z) = \frac{1}{z}, \quad z_0 = \infty, \quad \lim\limits_{z \to \infty} f(z) = 0$

$C_{-1} = 1 \quad \operatorname{res}[f(z), \infty] = -1$

Теорема о полной сумме вычетов. $\exists$ ф-ия $f(z)$ имеет во всей $\mathbb{C}$ только конечное число особых точек $z_1, \ldots, z_n$. Положим $z_0 = \infty$. Тогда:

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{res}[f(z), z_k] = 0$$

$\square$ $\exists$ число ρ таково, что $|z_i| < \rho$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$\gamma_\rho: |z| = \rho$

По теореме о вычетах, $\oint\limits_{\gamma_\rho^+} f(z)\,dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{res}[f(z), z_k]$

Перепишем $(*)$: $\oint\limits_{\gamma_\rho^-} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}[f(z), z_0]$

Складывая, получим:

$\cancel{2\pi i} \sum\limits_{k=0}^{n} \operatorname{res}[f(z), z_k] = 0$ $\blacksquare$

Замечание. Условие теоремы выполнено для $\forall$ рац. ф-ии:

$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$$

Пример. Вычислить интеграл:

$$I=\oint\limits_{|z|=2}\frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$$

$$f(z)=\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}$$

Особые точки:

$z_1, z_2, \dots, z_5$ — корни 5-ой степени из 1

$z_6=3$

$z_0-\infty$

По т. о вычетах, $I=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{5}\operatorname{res}[f(z),z_k]\ominus$

$5z^4=(z^5-1)'\neq 0,\ z=z_k$

возле т. z_k $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z_k)\neq 0$, $\psi(z_k)$, $\psi'(z_k)\neq 0$,

где $\varphi(z)=\frac{1}{z-3}$, $\psi(z)=z^5-1$ $\psi'(z)=5z^4$

$$\operatorname{res}[f(z),z_k]=\frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)}=\frac{1}{z_k-3}\cdot\frac{1}{5z_k^4}=\frac{z_k}{(z_k-3)\underbrace{5z_k^5}_{1}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{z_k}{z_k-3}$$

$$\ominus 2\pi i\overbrace{\sum_{k=1}^{5}\frac{z_k}{z_k-3}\cdot\frac{1}{5}}^{-\frac{1}{242}}=\boxed{-\frac{\pi i}{121}}$$

По т. о полной сумме вычетов,

$$\sum_{k=1}^{5}\operatorname{res}[f(z),z_k]=-\underbrace{\operatorname{res}[f(z),3]}_{\frac{1}{242}}-\underbrace{\operatorname{res}[f(z),\infty]}_{0}=-\frac{1}{242}$$

$$\operatorname{res}[f(z),3]=\frac{\varphi(3)}{\psi'(3)}=\frac{1}{3^5-1}=\frac{1}{242}$$

$f(z)$ $\varphi(z)=\frac{1}{z^5-1}$; $\psi(z)=z-3$

$\varphi(3)\neq 0$, $\psi(3)=0$, $\psi'=1\neq 0$

$$f(z)=\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}=\frac{1}{z^6}\cdot\frac{1}{1-3/z}\cdot\frac{1}{1-1/z^5}=\frac{1}{z^6}\left(1+\frac{3}{z}+\frac{9}{z^2}+\frac{27}{z^3}+\dots\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1+\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^{10}}+\dots\right)=\frac{1}{z^6}+\frac{3}{z^7}+\frac{9}{z^8}+\dots$$

$\Rightarrow$ отсутствует член с $\frac{1}{z}$ $\Rightarrow$ $C_{-1}=0\Rightarrow\operatorname{res}[f(z),z_0]=0$

2. Применение вычетов к вычислению интегралов от вещественной переменной

① Интегралы вида $I = \int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi \ominus$

где $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$

Перейдём от вещ. инт-ла по пер. φ к комплексному интегралу заменой:

$z = e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Подготовимся к замене:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$dz = e^{iz} i\,d\varphi \Rightarrow d\varphi = \frac{dz}{ie^{i\varphi}} = \frac{dz}{iz}$$

Перепишем исходный интеграл:

$$\ominus \frac{1}{i} \oint\limits_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{z} = \frac{1}{i} \oint\limits_{|z|=1} \tilde{R}(z)\,dz$$

<u>Пример.</u> Вычислить $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 + 3\cos\varphi}$

Переделаем в комплексный интеграл:

$$I = \frac{1}{i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z\left(5 + \frac{3}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)} = \frac{2}{i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{3z^2 + 10z + 3}$$

Имеем дело с:

$$f(z) = \frac{1}{3z^2 + 10z + 3}$$

Ф-ция имеет 2 конечные особые точки: $z_1 = -\frac{1}{3}$, $z_2 = -3$

По т. о вычетах учитываем только те точки, что в контуре, т.е. z_1

$$\Rightarrow I = \frac{2}{\cancel{i}} 2\pi \cancel{i}\, \operatorname{res}[f(z), z_1] = 4\pi \frac{\varphi(z_1)}{\psi'(z_1)} =$$

$$= 4\pi \left.\frac{1}{6z + 10}\right|_{z = -\frac{1}{3}} = 4\pi \frac{1}{8} = \frac{\pi}{2}$$

Важно, что получили вещественный ответ, т.к. изначально вычисляли вещественный интеграл. В противном случае — ошибка в вычислениях.

② Интегралы вида $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

Обозн. $P_+ : \operatorname{Im} z > 0$; $\overline{P_+} : \operatorname{Im} z \geq 0$

Сформулируем требования к ф-ии $f(x)$.

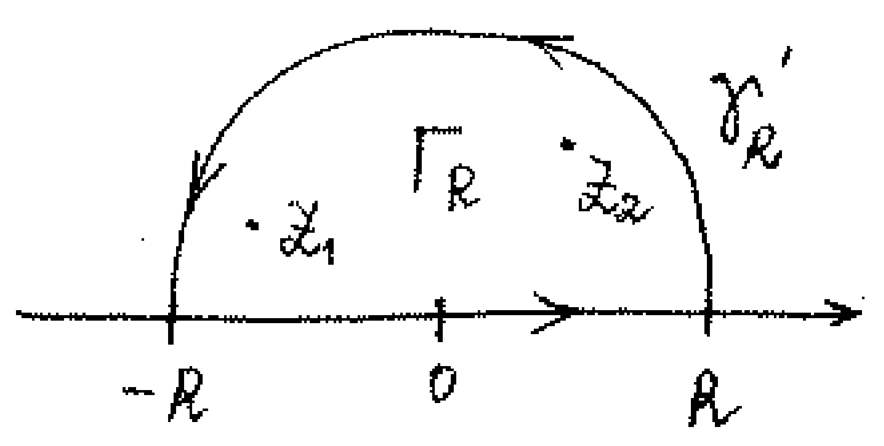
Теорема 7.1. $\exists$ $f(z)$ удовл. условиям:

1) $f(z)$ – аналит. в P^+ за исключением ИОТ $z_1, \dots, z_n$ и непрерывная в т. вещественной оси
2) для всех достаточно больших z из $\overline{P_+}$ выполняется неравенство ($M(z)$ – вещ. ф-ия):
$|f(z)| \leq \frac{M(z)}{|z|}$, где $M(z) \to 0$ при $z \to \infty$, $z \in \overline{P_+}$
(т.е. $f(z)$ убывала с хоть немного большей скоростью, чем $1/z$)

Тогда интеграл I $\exists$ хотя бы в смысле главного значения и:

$$(\text{v.p.}) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}[f(z), z_k]$$

□ Построим вспомогательный контур:



Выберем R настолько большим, чтобы все точки особые попали в контур γ_R': $|z_i| < R$, $i = 1, \dots, n$

По т. о вычетах:

$$\underbrace{\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx}_{\substack{\text{вещественный} \\ \text{интеграл по} \\ \text{оси}}} + \int\limits_{\gamma_R'} f(z)\,dz = \oint\limits_{\Gamma_R^+} f(z)\,dz = \underbrace{2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}[f(z), z_k]}_{\text{не зависит от } R}$$

Перейдем к пределу при $R \to \infty$. Достаточно грубой оценки:

$$\left| \int\limits_{\gamma_R'} f(z)\,dz \right| \leq \max_{z \in \gamma_R'} |f(z)| \pi R \leq \frac{\max_{z \in \gamma_R'} M(z)}{\cancel{R}} \pi \cancel{R} = \pi \max_{z \in \gamma_R'} M(z) \xrightarrow{z \to \infty} 0$$

$$\exists \lim_{R \to \infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx = (\text{v.p.}) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}[f(z), z_k] \ \blacksquare$$

Замечание. Можно вместо положительной полуплоскости рассм. отрицательную полуплоскость — она была выбрана для определенности.

Пример. Вычислить $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$

Имеем дело с ф-цией $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^3}$, у нее 2 особые точки $z_1=-i$, $z_0=i$. Нас интересует только z_0, т.к. она находится в верхней полуплоскости:

$I=2\pi i\cdot \operatorname{res}[f(z),i] \ominus$

z_0 — полюс кратности 3.

Ф-ла для вычета полюса кратности m:

$$\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}[f(z)(z-z_0)^m]}{dm^{m-1}}$$

Применим формулу:

$$\ominus\ \cancel{2}\pi i\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\lim_{z\to i}\frac{d^2[\overbrace{f(z)(z-i)^3}^{g(z)}]}{dz^2}\ominus$$

$$g(z)=\frac{1}{(z+1)^3}\ ;\quad g''(z)=\frac{12}{(z+i)^5}$$

$$\ominus\ \pi i\,\frac{12}{(2i)^5}=\pi\,\frac{12}{32}=\frac{3}{8}\pi$$ — вещественный!

(3) Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{iax}f(x)\,dx$

Лемма Жордана. $\exists$ $f(z)$ определена и непрерывна для всех достаточно больших $z\in\overline{P_+}$ и $f(z)\to 0$ при $z\to\infty$, $z\in\overline{P_+}$. Тогда для всех $a>0$ справедливо

$\int\limits_{\gamma_R'}e^{iaz}f(z)\,dz\to 0$ при $R\to\infty$, обозн. J

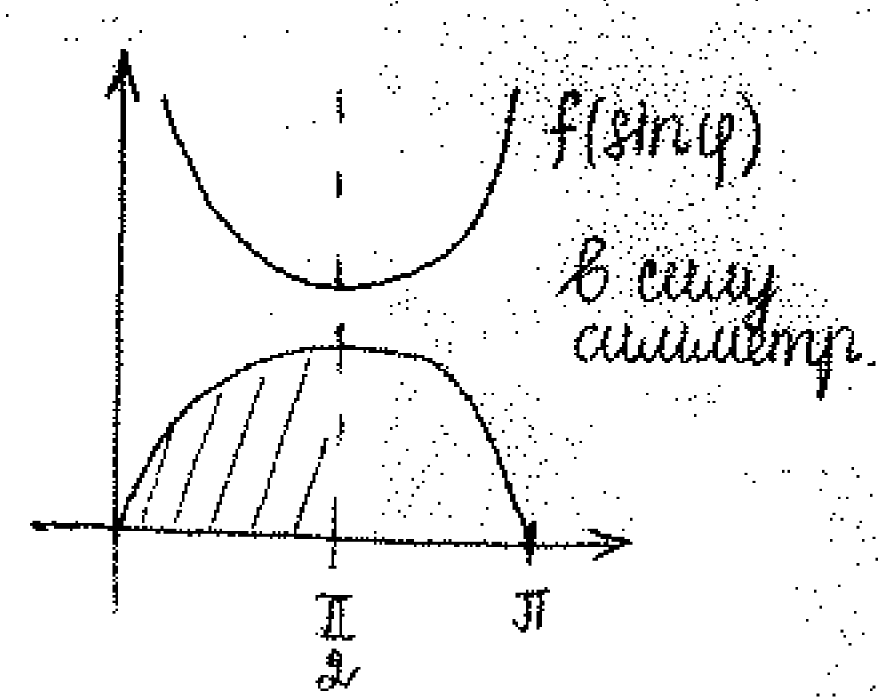
□ $|J|\le\int\limits_{\gamma_R'}|e^{iaz}||f(z)|\underbrace{d\sigma}_{dl}$ (по св-ву 4 из первоначального списка) $\ominus$

$M_R=\max\limits_{z\in\gamma_R'}|f(z)|$, $M_R\to 0$ при $R\to\infty$

$\gamma_R':\ z=R(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $0\le\varphi\le\pi$

$iaz=-aR\sin\varphi+iaR\cos\varphi$

$$\ominus\ \{d\sigma=Rd\varphi\}=M_R R\int_0^{\pi}|e^{iaz}|\,d\varphi=M_R R\int_0^{\pi}e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi=$$



$$=2M_R R\int_0^{\pi/2}e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi\ \ominus$$

На отрезке $[0,\frac{\pi}{2}]$ действует оценка:

$\frac{2}{\pi}\varphi\le\sin\varphi\le\varphi$ (в конечных точках превращается в равенство)

Преобразуем нер-во: $-\frac{2}{\pi}aR\varphi \geqslant -aR\sin\varphi$

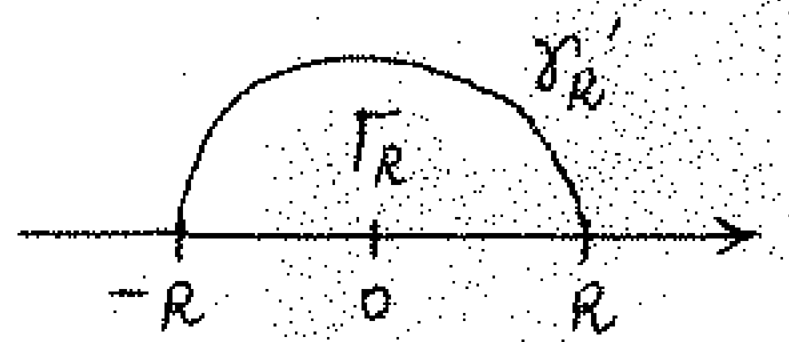
$$\ominus\ 2M_R R\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{\pi}{2}aR\varphi}\,d\varphi = \cancel{2}M_R \cancel{R}\,\frac{\pi}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{a\cancel{R}}\,e^{-\frac{2}{\pi}aR\varphi}\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{a}M_R\left(1-e^{-aR}\right)\xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \ \blacksquare$$

Теорема 7.2. $\exists\ f(z)$ удовл. условию 1 т. 7.1 и $f(z)\to 0$ при $z\to\infty$, $z\in\overline{P_+}$. Тогда $\forall$ (для всех $\alpha>0$) интеграл I $\exists$ (хотя бы в смысле главного значения) и

$$(v.p.)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}\left[e^{i\alpha z}f(z),\ z_k\right] \quad (*)$$

□ Построим такой же контур Γ_R, что и в т. 7.1.



Тогда по т. о вычетах:

$$\int_{-R}^{R} e^{i\alpha x}f(x)\,dx + \overbrace{\int_{\gamma_R'} e^{i\alpha z}f(z)\,dz}^{\to 0 \text{ при } R\to\infty \text{ по лемме Жордана}} =$$

$$= \oint_{\Gamma_R^+} e^{i\alpha z}f(z)\,dz = \underbrace{2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}\left[e^{i\alpha z}f(z),\ z_k\right]}_{\text{не зависит от } R}$$

Переходя к пределу при $R\to\infty$ получим р-во (*). $\blacksquare$

Пример. Вычислить $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{x^2+a^2}\,dx$ — интеграл Лапласа

Сведем к интегралу третьего типа:

$\cos\alpha x = \mathrm{Re}\left(e^{i\alpha x}\right)$

$I = \mathrm{Re}\,J,\quad J=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{x^2+a^2}\,dx \ominus$

Считаем $a>0$, $\alpha>0$.

$f(z)=\frac{1}{z^2+a^2}$, $z_0 = ia$ — единственная т. в контуре

$\ominus\ 2\pi i\operatorname{res}\left[e^{i\alpha z}f(z),\ ia\right] = \left\{\begin{array}{l}\text{по ф-ле вычета}\\ \text{отн. простого полюса}\end{array}\right\} =$

$= 2\pi i\,\frac{e^{i\alpha z}}{2z}\Big|_{z=ia} = \cancel{2\pi i}\,\frac{e^{-\alpha a}}{\cancel{2i}a} = \frac{\pi}{a}e^{-\alpha a}$ — вещественный

$\Rightarrow I = J = \frac{\pi}{a}e^{-\alpha a}$

3. Логарифмический вычет и принцип аргумента

Уточнение соглашения о контурах:

① все ИОТ ф-ции $f(z)$ являются полюсами

② все рассм. контуры не проходят через полюсы и через нули ф-ции $f(z)$

Пусть контур $\Gamma \subset G$: на самом контуре полюсов и нулей нет, а внутри конечное число нулей — иначе ф-ция тождественный ноль по т. о единственности, а также полюсов. Перенумеруем их:

$z_1, \dots, z_p$ — все полюсы $f(z)$ внутри Γ
$\alpha_1, \dots, \alpha_p$ — их кратности
$\zeta_1, \dots, \zeta_n$ — все нули $f(z)$ внутри Γ
$\beta_1, \dots, \beta_n$ — их кратности

$N_f(\Gamma) = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k$ — полное число нулей ф-ции f внутри Γ

$P_f(\Gamma) = \sum\limits_{l=1}^{p} \alpha_l$ — полное число полюсов ф-ции f внутри Γ

} целые числа

Теорема (о логарифмическом вычете)

$$N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma^+} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz}_{\text{логарифмический вычет}}$$

[Назван вычетом за внешнее сходство с $C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} f(z)dz$]

□ Положим $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$

Особые точки ф-ции $\varphi(z)$ — это нули и полюсы ф-ции $f(z)$

Возле т. ζ_k ф-цию $f(z)$ можно записать в виде:

$f(z) = \underline{(z-\zeta_k)^{\beta_k} g(z)}$, $g(z)$ — аналит. в окр-ти т. ζ_k, $g(\zeta_k) \neq 0$ (1)

Продифференцируем (2):

$f'(z) = \beta_k (z-\zeta_k)^{\beta_k - 1} g(z) + (z-\zeta_k)^{\beta_k} g'(z) = \underline{\beta_k (z-\zeta_k)^{\beta_k-1} h(z)}$, (2)

где $h(z) = g(z) + \frac{1}{\beta_k}(z-\zeta_k) g'(z)$. Заметим, что:

$h(\zeta_k) = g(\zeta_k)$

Разделим (2) на (1):

$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\beta_k}{z-\zeta_k} + \psi(z)$, где $\psi(z)$ — аналит. в окр-ти т. ζ_k

$\parallel$

$\varphi(z)$ по обозн.

Покажем справедливость представления:

$$\varphi(z)=\frac{\beta_k h(z)}{(z-\zeta_k)g(z)}=\frac{\beta_k}{z-\zeta_k}\cdot\frac{h(z)}{g(z)} \ominus$$

Представим $\frac{h(z)}{g(z)}$ в виде степенного ряда:

$$\frac{h(z)}{g(z)}=a_0+a_1(z-\zeta_k)+\ldots=1+a_1(z-\zeta_k)+\ldots$$

$$a_0=\frac{h(\zeta_k)}{g(\zeta_k)}=1$$

Подставим обратно:

$$\ominus\ \frac{\beta_k}{z-\zeta_k}\left[1+a_1(z-\zeta_k)+a_2(z-\zeta_k)^2+\ldots\right]=\frac{\beta_k}{z-\zeta_k}+\underbrace{\beta_k(a_1+a_2(z-\zeta_k)+\ldots)}_{\psi(z)}$$

Вывод: т. ζ_k является полюсом, причем простым, ф-ии $\varphi(z)$;

новая интерпритация $-\beta_k=\operatorname{res}[\varphi(z),\zeta_k]$

Проведем аналогичный анализ: в окр-ти т. z_m справедливо представление:

$$f(z)=\frac{\tau(z)}{(z-z_m)^{\alpha_m}},\quad \text{где } \tau(z) - \text{аналит. в ок-ти т. } z_m \text{ и } \tau(z_m)\neq 0 \quad (3)$$

Кратность полюса z_m

Продифференцируем (3):

$$f'(z)=-\frac{\alpha_m}{(z-z_m)^{\alpha_m+1}}\tau(z)+\frac{\tau'(z)}{(z-z_m)^{\alpha_m}}=-\frac{\alpha_m}{(z-z_m)^{\alpha_m+1}}\cdot S(z), \quad (4)$$

где $S(z)=\tau(z)-\frac{\tau'(z)}{\alpha_m}(z-z_m)$

$S(z)$ – аналит. в окр-ти т. z_m и $S(z_m)=\tau(z_m)$.

Делим (4) на (3):

$$\varphi(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-\alpha_m}{z-z_m}+\xi(z),\quad \xi(z) - \text{аналит. в окр-ти } z_m$$

$\Rightarrow$ аналогичные выводы: z_m – простой полюс ф-ии $\varphi(z)$

$-\alpha_m=\operatorname{res}[\varphi(z),z_m]$

По т. о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+}\varphi(z)dz=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}[\varphi(z),\zeta_k]}_{\text{нули}}+\underbrace{\sum_{\ell=1}^{p}\operatorname{res}[\varphi(z),z_\ell]}_{\text{полюсы}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\beta_k-\sum_{\ell=1}^{p}\alpha_\ell=N_f(\Gamma)-P_f(\Gamma)\ \blacksquare$$

Почему логарифмический?

Т.к. $\frac{f'(z)}{f(z)}$ наз. логарифмической производной

Рассм. логарифм как ф-ию обратную экспоненте. Формально продифференцируем:

$$(Ln\ f(z))' = \frac{1}{f(z)} f'(z) = \varphi(z)$$

Принцип аргумента? Иная формулировка т. о логарифмическом вычете за счет знания о первообразных. Рассуждения будут сложны, но мы сможем упростить формулу вычисления лог. вычета.

Применить формулу Ньютона-Лейбница нельзя из-за отсутствия C-свойства. Также неприменимость видна на примере:

$$\oint_\Gamma f(z)dz = F(z_0) - F(z_0) = 0$$

А интегралы по замкнутому контуру могут быть не равны нулю! Как-то влияет многозначность ф-ии на это.

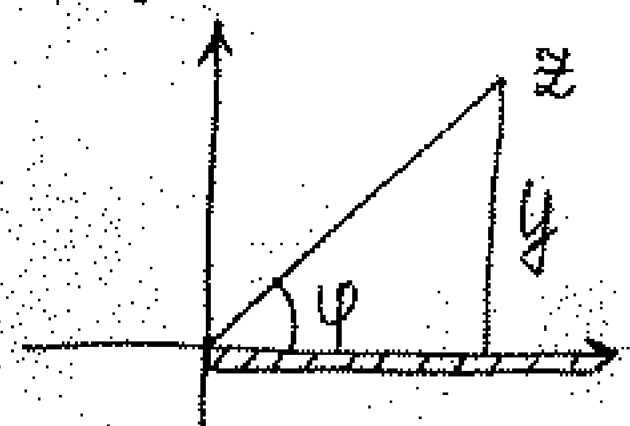
Что есть производная многозначной ф-ии? Рассм. $Ln\, z = \ln|z| + i\,Arg\, z$, определена всюду кроме нуля, и принимает счетное число значений. Также введена:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z,\ z \neq 0$$

Малый логарифм аналитичен в $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$, причем там $(\ln z)' = \frac{1}{z}$
Можно это проверить через $\ln z = u(x,y) + i v(x,y)$:

$$u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

Представить $v(x,y)$ сложнее:



В правой полуплоскости можно как:

$tg\,\varphi = \frac{y}{x}$

$\varphi = arctg\,\frac{y}{x}$

(В левой нужно действовать по другому)

Далее все подставляем: $(\ln z)'_z = u'_x + i v'_x$

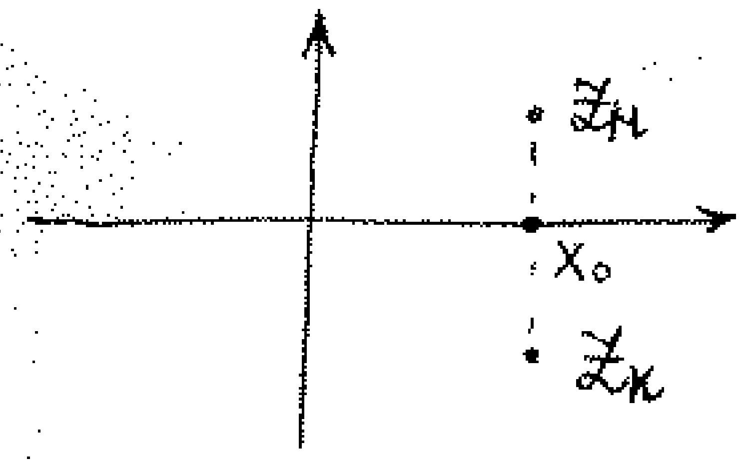
$\ln z$ не единственная однозначная ф-ия, выводимая из $Ln\, z$. Определим семейство однозначных ф-ий:

$$Ln_k\, z = \ln|z| + i[\arg z + 2\pi k],\ k = 0, \pm1, \pm2, \dots \text{ и определена на } z \neq 0$$

Причем при $k=0$ $\ln z = Ln_0\, z$; $(Ln_k\, z)' = (\ln z)' = \frac{1}{z}$

Те ф-ии, которые выделяются из многозначной, наз. однозначными ветвями многознач. ф-ии $Ln\, z$

Они обладают тем недостатком, что теряют аналитичность на своей области определения. Например:



$$\ln z_н = \ln|z_н| + i\varphi_н$$

$$\ln z_к = \ln|z_к| + i\varphi_к$$

С вещ. частями будет все хорошо.

Устремим $z_н, z_к \to z_0$

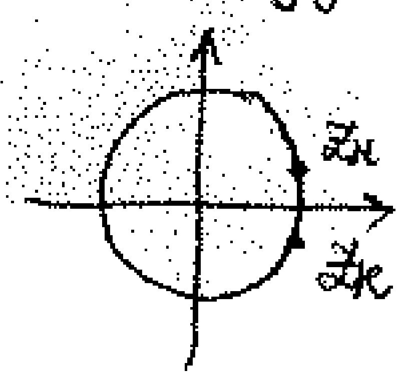
$$\Rightarrow \ln z_н \to \ln x_0 + 0$$

$$\ln z_к \to \ln x_0 + \underbrace{i2\pi}_{\text{при стремлении в } [0, 2\pi)}$$

$\Rightarrow \forall$ т. x_0 является т. разрыва $\Rightarrow$ есть неприятности

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

Если будем интегрировать не по всей окружности, а чуть отступим:



$$\int\limits_{z_н}^{z_к} \frac{dz}{z} = \ln z\Big|_{z_н}^{z_к} \ominus$$

$$\frac{dz}{z}\text{-интеграл} = i(\varphi_к - \varphi_н)$$

$\Rightarrow$ ф-ла Ньютона-Лейбница работает, пока мы не замкнем окружность. Что нужно поправить?

$$\ominus\ \underset{\downarrow\atop 2\pi i}{\ln z_к} - \underset{\downarrow\atop \ln 1 = 0}{\ln z_н}$$

$\Rightarrow$ $z_к$ стремится принять не то значение, которое приписано ей, а то, которое приписано:

$\mathrm{Ln}_1 z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi)$, $\mathrm{Ln}_1 1 = 2\pi i$

то есть та ветвь, которая принадлежит 1, а не 0

Свойство: одна ветвь старается непрерывно перейти в ветвь с следующим индексом при обходе по контуру. Действует при повторных обходах и при обходах в других направлении

$\Rightarrow$ чтобы восстановить правильность ф-лы Ньютона-Лейбница необходимо приписать т. не то значение, которое ей приписано, а то, которое она стремится принять

4. Обобщение формулы Ньютона - Лейбница

Пусть нужно вычислить интеграл $\oint_L f(z)\,dz$, если известна многозначная первообразная ф-ия $F(z)$.

Фикс. т $z_H \in L$ и выбираем какое-либо значение $F(z_H)$ в этой точке. Совершаем обход L, выбирая в каждой точке единственное значение первообразной исходя из требования ее (т.е. первообразной) непрерывности вдоль контура. Пусть $F(z_K)$ - значение F, с которым мы вернемся в начальную точку z_H по завершении обхода.

Тогда $\boxed{\oint_L f(z)\,dz = F(z_K) - F(z_H)}$ - обобщения правила Ньютона-Лейбница для многозн. первообр.

Применим к нашей ситуации с вычетами:

$F(z) = \mathrm{Ln} f(z)$

$F(z_H) = \mathrm{Ln} f(z_H) = |\ln f(z_H)| + i\varphi_H$

φ_H - значение, приписываемое аргументу $f(z)$ в начале обхода

$F(z_K) = \ln|f(z_H)| + i\varphi_K$

$\Rightarrow$ Применим формулу:

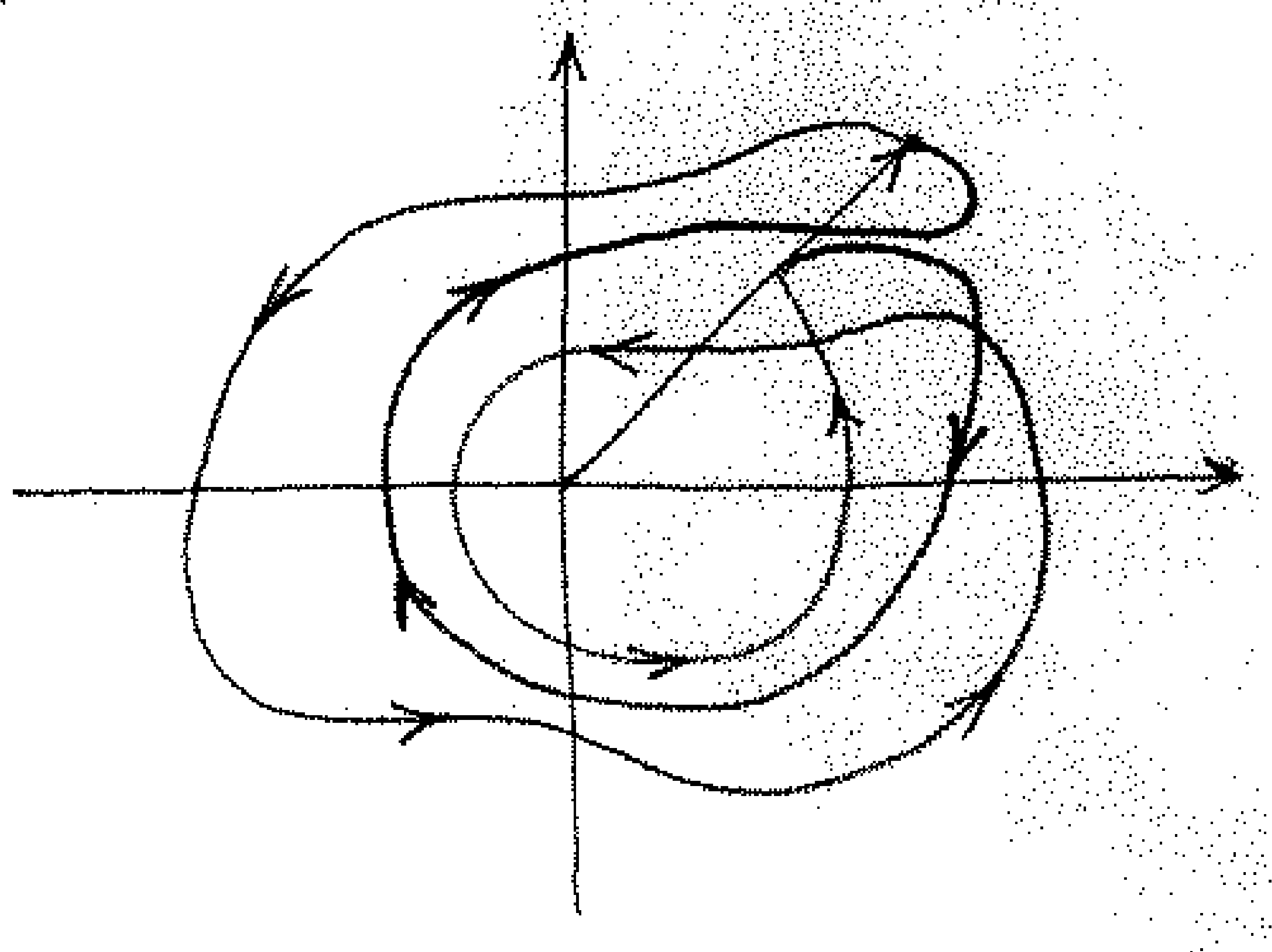
$$\oint_L \varphi(z)\,dz = i(\varphi_K - \varphi_H)$$

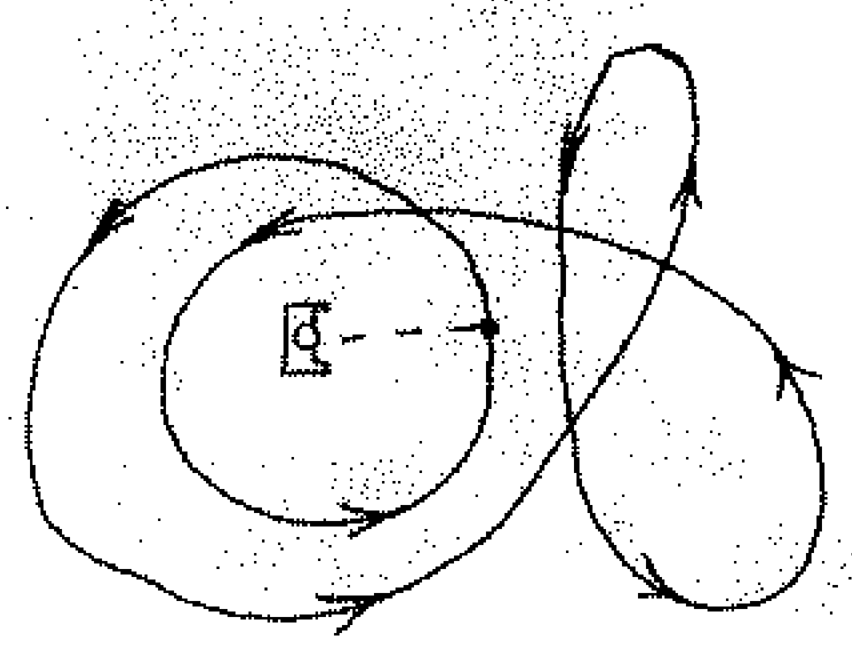
$\Rightarrow$ сама формула из т. о лог. вычете приобретает вид:

$$N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) = \frac{1}{2\pi}\underbrace{(\varphi_K - \varphi_H)}_{\text{обозн. } \underset{\Gamma}{\mathrm{Var}}\,\mathrm{Arg} f(z)} = \frac{1}{2\pi}\underset{\Gamma}{\mathrm{Var}}\,\mathrm{Arg} f(z)$$ — принцип аргумента

Можно дать теореме еще одну формулировку:

Порядок точки отн. кривой





То, что назвали приращением аргумента, через индекс точки:

$$2\pi\, \mathrm{ind}_0 L = \underset{\Gamma}{\mathrm{Var}}\, \mathrm{Arg}\, f(z)$$

Тогда третья формулировка:

$$N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) = \mathrm{ind}_{w=0} L, \text{ где } L = f(\Gamma)$$

Следствие: $\exists\, f(z) \in A(G)$, контур $\Gamma \subset G$, $\mathrm{int}\,\Gamma \subset G$. Тогда
$N_f(\Gamma) = \mathrm{ind}_0 L$, $L = f(\Gamma)$

Сформулируем следствие из трех формулировок.

Теорема Руше: $\exists\, f(z), \varphi(z) \in A(G)$, контур $\Gamma \subset G$, $\mathrm{int}\,\Gamma \subset G$.
Пусть $|f(z)| > |\varphi(z)|,\ \forall z \in \Gamma \quad (*)$

Положим $F(z) = f(z) + \varphi(z)$.

Тогда $N_F(\Gamma) = N_f(\Gamma)$.

(Хорошо работает для сложных F и простых f)

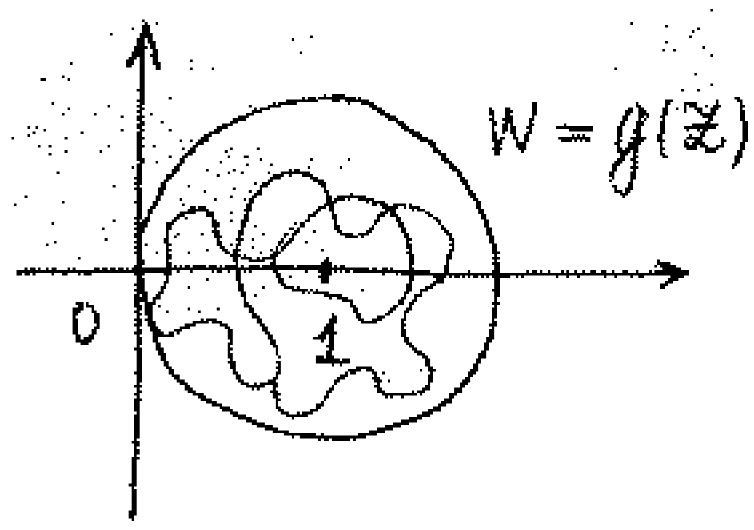
□ Из $(*) \Rightarrow f(z) \neq 0\ \ \forall z \in \Gamma$

$$F(z) = f(z)\underbrace{\left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]}_{g(z)} = f(z)g(z)$$

$$\mathrm{Arg}\, F(z) = \mathrm{Arg}\, f(z) + \mathrm{Arg}\, g(z)$$

$$\underset{\Gamma}{\mathrm{Var}}\, \mathrm{Arg}\, F(z) = \underset{\Gamma}{\mathrm{Var}}\, \mathrm{Arg}\, f(z) + \overbrace{\underset{\Gamma}{\mathrm{Var}}\, \mathrm{Arg}\, g(z)}^{0}$$

$$|g(z) - 1| = \frac{|\varphi(z)|}{|f(z)|} < 1,\ \forall z \in \Gamma$$



Содержится в круге и не выходит за него $\Rightarrow$ не может сделать полный оборот вокруг 0 ■

Пример. Найти число корней уравнения $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ внутри единичного круга $\Gamma: |z| = 1$

$f(z) = -4z^5 \qquad \varphi(z) = z^8 + z^2 - 1$

$z \in \Gamma \sim |z| = 1$

$|f(z)| = 4$

$|\varphi(z)| \leqslant |z|^8 + |z|^2 + 1 \leqslant 3$

$N_F(\Gamma) = N_f(\Gamma) = 5$

$-4z^5$ имеет 5 корней

Теорема (Руше)

Пусть $f(z), \varphi(z) \in A(G)$, $\Gamma \subset G$, $\operatorname{int} \Gamma \subset G$.
Пусть $|f(z)| > |\varphi(z)|$ $\forall z \in \Gamma$ $\quad (*)$
Тогда для функции $F(z) = f(z) + \varphi(z)$

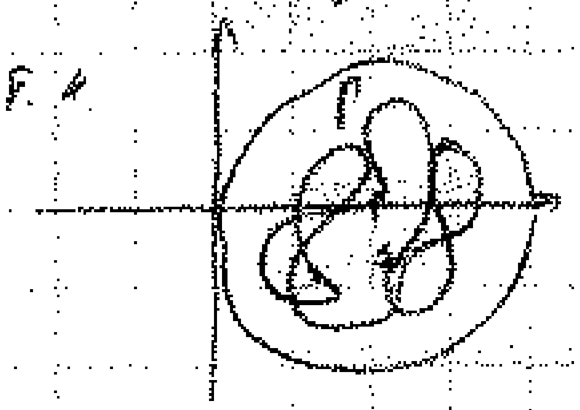
$$N_F(\Gamma) = N_f(\Gamma)$$

Д-во: $(*) \Rightarrow f(z) \neq 0,\ \forall z \in \Gamma \Rightarrow$

$$\Rightarrow F(z) = f(z)\left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right] = f(z) g(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arg} F(z) = \operatorname{Arg} f(z) + \operatorname{Arg} g(z)$$

$$\operatorname{Var}\operatorname{Arg} F(z) = \operatorname{Var}\operatorname{Arg} f(z) + \underbrace{\operatorname{Var}\operatorname{Arg} g(z)}^{=0},$$



$$|g(z) - 1| < 1$$

Теорема (Основная т. алгебры)

Многочлен $P(z)$ степени $n \geq 1$ имеет в $\mathbb{C}$ ровно n корней с учётом кратности.

Д-во: $P(z) = \underbrace{a_0 z^n}_{f(z)} + \underbrace{a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}_{\varphi(z)}$

$\frac{\varphi(z)}{f(z)} \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$ Рассмотрим контур $\Gamma: |z| = R$, где $R: |\varphi(z)|/|f(z)| < 1, \forall z$

По т. Руше $N_\varphi(\Gamma) = N_f(\Gamma) = n$

Теорема (об образе области)

$\exists f(z) \in A(G)$, $f(z) \neq const$. Тогда $D = f(G)$ – также есть область

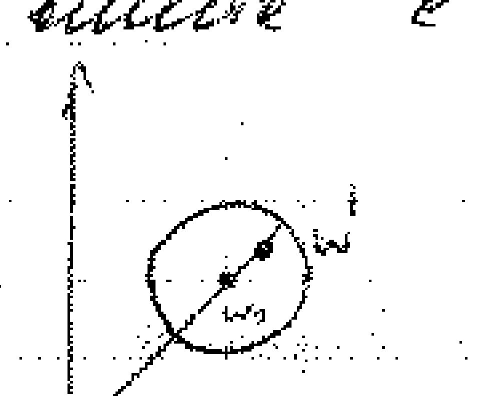
Д-во: (1) связность
Пусть w_1, w_2 – $\forall$ точки из D, а z_1, z_2 – $\exists$ произвольные (какие-то из, м.б., несколько) их прообразы: $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$.
Соединим z_1 и z_2 непр. кривой $L: z = \varphi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. $L \subset G$. Тогда кривая $\Lambda: w = f[\varphi(t)] = \mu(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$ является непрерывной, $\in D$, соедин. w_1, w_2 $\Rightarrow$ в силу произвольности w_1, w_2 D – связно

(2) открытость
Пусть w_0 – $\forall$ т. из D, z_0 – $\forall$ ее прообраз в G, т.е. $w_0 = f(z_0)$. Покажем, что $\exists K_\mu: |w - w_0| < \mu: K_\mu \in D$ (т.е. $\forall$ точка входит в D с некотор. окрестностью)
Построим замкн. круг $C_\rho: |z - z_0| \le \rho$ так, чтобы $C_\rho \subset G$, z_0 – единств. w_0-точка в круге C_ρ $(w_0 = f(z_0))$
Построим $\forall$ круг и будем его уменьшать, пока условия не будут выполнены. Процесс остановится, т.к. есть теор. единственности, а $f(z) \neq const$
Обозн. $\gamma_\rho: |z - z_0| = \rho$; $\mu = \inf_{\gamma_\rho} |f(z) - w_0| = \min_{\gamma_\rho} |f(z) - w_0| > 0$
(непр. $\Rightarrow$ достигает inf, z_0 – единств. прообр. $w_0 \Rightarrow f(z) \neq w_0$, $z \in \gamma_\rho$)
Покажем, что $K_\mu \subset D$. Пусть w' – $\forall$ т. из K_μ, т.е. $|w' - w_0| < \mu$
Обозн. $g(z) = f(z) - w_0$, $h(z) = f(z) - w'$
Сколько нулей имеют g и h внутри γ_ρ?
$N_g(\gamma_\rho) > 0$, т.к. $g(z_0) = 0$, $z_0 \in \mathrm{int}\,\gamma_\rho$
$h(z) = f(z) - w_0 - (w' - w_0)$, $|f(z) - w_0| \ge \mu$, $\forall z \in \gamma_\rho$; $|w' - w_0| < \mu$
Тогда по т. Руше $N_h(\gamma_\rho) = N_g(\gamma_\rho) > 0 \Rightarrow$
$\exists$ т. $z' \in \mathrm{int}\,\gamma_\rho: f(z') = w'$
Получили, что $\forall$ т. w' из K_μ $\exists$ прообраз $z' \in G \Rightarrow$
$\Rightarrow K_\mu \subset D$, ч.т.д.

Принцип максимума модуля аналитической функции

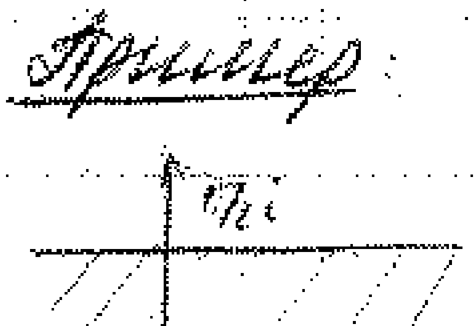
Пусть $f(z) \in A(G)$, $f(z) \neq const$. Тогда ни в одной точке из G $|f(z)|$ не может достигать максимума. Если G - огранич. область и $f(z) \in C(\bar{G})$, то $|f(z)|$ достигает своего максимума на ∂G (на границе)

Д-во: Предположим противное: пусть $|f(z)|$ достигает свой max в т. $z_0 \in G$, т.е. $|w_0| = |f(z_0)| \geq |f(z)|$ $\boxed{\forall z \in G}$. По т. об образе области т. w_0 входит в $D = f(G)$ вместе с некот. окрестностью $|w - w_0| < \rho$.



Тогда найдётся z': $|f(z')| = |w'| > |w_0| \Rightarrow$
$\Rightarrow$ противоречие.
Второе у в следует из первого и второй т. Вейерштрасса для непр. на компакте функции.

Пример: $f(z) = e^{e^z}$



$$z = x \pm \frac{\pi}{2} i \Rightarrow e^z = e^{x \pm \frac{\pi}{2} i} = e^x \left(\cos\frac{\pi}{2} \pm i \sin\frac{\pi}{2}\right) = \pm i e^x$$

$$\Rightarrow |e^{e^z}| = |e^{\pm i e^x}| = 1, \quad e^{e^x} \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$$

Принцип минимума модуля

Пусть $f(z) \in A(G)$, $f(z) \neq const$, $f(z) \neq 0$ $\forall z \in G$. Тогда ни в одной точке из G $|f(z)|$ не может достигать минимума. Если G - ограниченная область и $f(z) \in C(\bar{G})$, то $|f(z)|$ достигает своего минимума на ∂G.

Д-во: $g(z) = \frac{1}{f(z)} \in A(G)$, $\min f(z) = \max g(z) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ очевидно

Теорема (2-ая т. Вейерштрасса о рядах аналит. функций)

Пусть G — огран. область, $u_n(z) \in A(G)\cap C(\bar G)$. Если $\sum u_n(z) \underset{\partial G}{\rightrightarrows}$, то $\sum u_n \underset{\bar G}{\rightrightarrows}$.

Д-во. критерий Коши: $\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n\ge N, \forall p\in\mathbb{N}$

$|\varphi_{n,p}(z)| = |u_{n+1}+\dots+u_{n+p}| < \varepsilon, \ \forall z\in\partial G$

$\varphi_{n,p}(z) \in A(G)\cap C(\bar G)$. По принципу max модуля $|\varphi_{n,p}(z)|<\varepsilon\ \forall z\in\bar G$ ⇒ по кр. Коши $\sum u_n \rightrightarrows$ на $\bar G$.

VIII Основные понятия операционного исчисления

Опр. Пусть $f(t)$ — функция действительной переменной. Её *преобразованием Лапласа* называется функция:

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt,\quad p\in\mathbb{C} \qquad (8.1)$$

Класс L функций $f(t)$:

1. $f(t)\equiv 0,\ t<0$

2. На $\forall$ огран. подмн-ве положит. полуоси $f(t)$ может иметь лишь конечное число точек разрыва, причём только 1-ого рода.

3. При $t\to\infty$ $f(t)$ имеет огран. степень роста, т.е. $\exists M, a>0: |f(t)|<Me^{at}, \forall t>0$ (8.2)

Опр. Показатель степени роста ф-ции $f(t)$ — точная нижняя грань тех a, для которых справедливо (8.2)

Обозн. $f(t)\in L(a_0)$

Обозн. $f(t) \risingdotseq F(p)$

Теорема 8.1 Пусть $f(t) \in L(a)$. Тогда $F(p)$ сх-ся в открытой полуплоскости $\Pi_a = \{p \mid \operatorname{Re} p > a\}$. Во всякой замкнутой полупл-ти $\Pi_b = \{p \mid \operatorname{Re} p \geq b\}$, где $b > a$, $F(p)\ \exists$ (сх-ся равномерно).

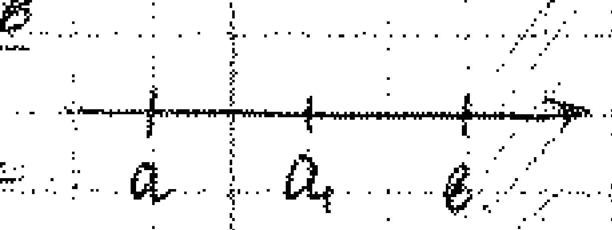
Д-во: $p = x+iy \in \Pi_a$. Найдутся $a_1, M > 0$: $a < a_1 < x$, $|f(t)| \leq M e^{a_1 t}$

$$g(t) = e^{-xt} M e^{a_1 t} = M e^{(a_1 - x)t}$$

$$|e^{-pt} f(t)| \leq e^{-xt} M e^{a_1 t} = g(t)$$

$$\int_0^\infty g(t)\,dt = \int_0^\infty M e^{(a_1-x)t}\,dt = \frac{M}{a_1 - x}(0-1) = \frac{M}{\operatorname{Re} p - a_1}$$

$$\exists b > a: \ a_1 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a_1 - x \leq a_1 - b = \frac{a-b}{2}$$



$$|e^{-pt} f(t)| = e^{-xt} |f(t)| \leq \{x \geq b\} \leq M e^{\frac{a-b}{2} t}$$

Пример: $\int_0^\infty e^{-pt} t^\nu\,dt = F(p)$, $\nu \geq 0$, $-1 < \nu < 0$

$F(p)$ - изображение (образ) Лапласа функции $f(t)$

$f(t)$ - оригинал функции $F(p)$

Теорема 8.2
Пусть для ф-ции $f(t)$ интеграл $F(p_0)$ сх-ся для нек. числа $p_0 \in \mathbb{C}$. Тогда $F(p)$ сх-ся во всей полуплоскости $\Pi_{\operatorname{Re} p_0}$.

Теорема 8.3 Пусть $f(t) \in L(a)$. Тогда $F(p) \in A(\Pi_a)$

Д-во: Построим посл-ть $0 = t_0 < \ldots < t_n < \ldots$ так, что $t_n \to \infty$ и в неё включены все точки разрыва ф-ции $f(t)$ (если такие имеются)

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-pt} f(t)\,dt}_{u_n(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(p)$$

По теореме об интеграле с параметром все функции $u_n(p)$ – целые

По 1-ой т. Вейерштрасса о рядах аналит. функций $F(p) \in A(\Pi_a)$

Из того, что $F(p) \rightrightarrows$ в $\forall$ полупл-ти Π_b, где $b > a$, следует, что $\sum u_n'(p)$ сх-ся в Π_a нормально

$$F'(p) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-pt}(-t) f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}(-t) f(t)\,dt$$

Примеры: ① $\sigma_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$

$\sigma_0(t)$ – единичная функция Хевисайда

$\sigma_0(t) \in L(0)$, $F(p) \in A(\Pi_0)$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt = 1/p \Rightarrow \sigma_0(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$$

② $f(t) = \begin{cases} e^{\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow F(t) = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha - p)t}\,dt = \frac{1}{p - \alpha}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$.

③ $f_n(t) = \begin{cases} t^n, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ $\quad f_n(t) \risingdotseq F_n(p)$

$$F_0(p) = 1/p;\ F_n(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n\,dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} t^n \Big|_0^{+\infty} + \frac{n}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{n-1}\,dt = \frac{n}{p} F_{n-1}(p) \Rightarrow F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

Свойства преобразования Лапласа

① Линейность

] $f_i \risingdotseq F_i(p)$, $\operatorname{Re} p > a_i$, $i = \overline{1,n}$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha f_i(t) \risingdotseq F(p) = \sum_{i=1}^{n} \alpha F_i(p), \quad \operatorname{Re} p > a = \max_i a_i$$

② $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \operatorname{Re} p > \alpha a$$

③ Теорема запаздывания

$f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$

Фикс $\tau > 0$ и определим функцию:

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ f(t-\tau), & t \geq \tau \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt - \{\quad\} = e^{p\tau} \int_\tau^{+\infty} e^{-pu} f_\tau(u)\,du \qquad ?$$

④ Теорема смещения

$f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$F(p+\lambda) \risingdotseq e^{-\lambda t} f(t), \quad \operatorname{Re} p > a - \operatorname{Re} \lambda$$

Пример: $\operatorname{Re} p > 0$ $\quad t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$; $\sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha \quad t^n e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$

$\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega| - \operatorname{Re} \alpha \quad e^{-\alpha t} \sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$

⑤ Изображение производной

Пусть $f(t)$ – кусочно-гладкая функция из класса $L(a)$

$$f(t) \doteqdot F(p), \quad \operatorname{Re} p > a$$

Тогда $f'(t) \doteqdot pF(p) - f(+0), \quad \operatorname{Re} p > a$

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)\,dt = e^{-pt} f(t)\Big|_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$$

Следствие: Пусть $f(t)$ и её производные до n-порядка из класса $L(a)$. Тогда

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n\left\{F(p) - \frac{f(+0)}{p} - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(+0)}{p^n}\right\}, \operatorname{Re} p > a$$

⑥ Дифференцирование изображения

$F(p) \doteqdot f(t), \quad \operatorname{Re} p > a$. Тогда

$$F'(p) \doteqdot -t f(t), \quad \operatorname{Re} p > a$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt, \quad F'(p) = \int_0^{+\infty} (-t) e^{-pt} f(t)\,dt$$

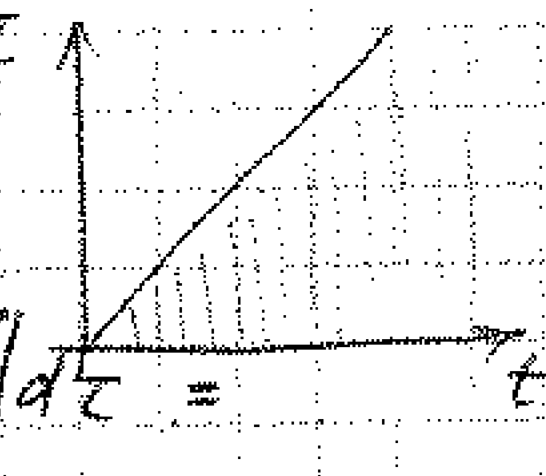
⑦ Изображение интеграла

Пусть $f(t) \doteqdot F(p), \quad \operatorname{Re} p > a, \quad f(t) \in L(a)$

Тогда $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \frac{1}{p} F(p), \quad \operatorname{Re} p > a$

$$|f(t)| \le Me^{at} \Rightarrow |\varphi(t)| \le Me^{at}\int_0^t d\tau = Mte^{at} \le M_1 e^{a_1 t}, \quad a_1 > a = \inf a_1 \Rightarrow \varphi(t) \in L(a)$$

$$\Rightarrow \exists\, \Phi(p) \qquad \varphi(t) \doteqdot \Phi(p)$$



$$\Phi(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \int_0^t f(\tau)\,d\tau\,dt =$$

переход без доказательства

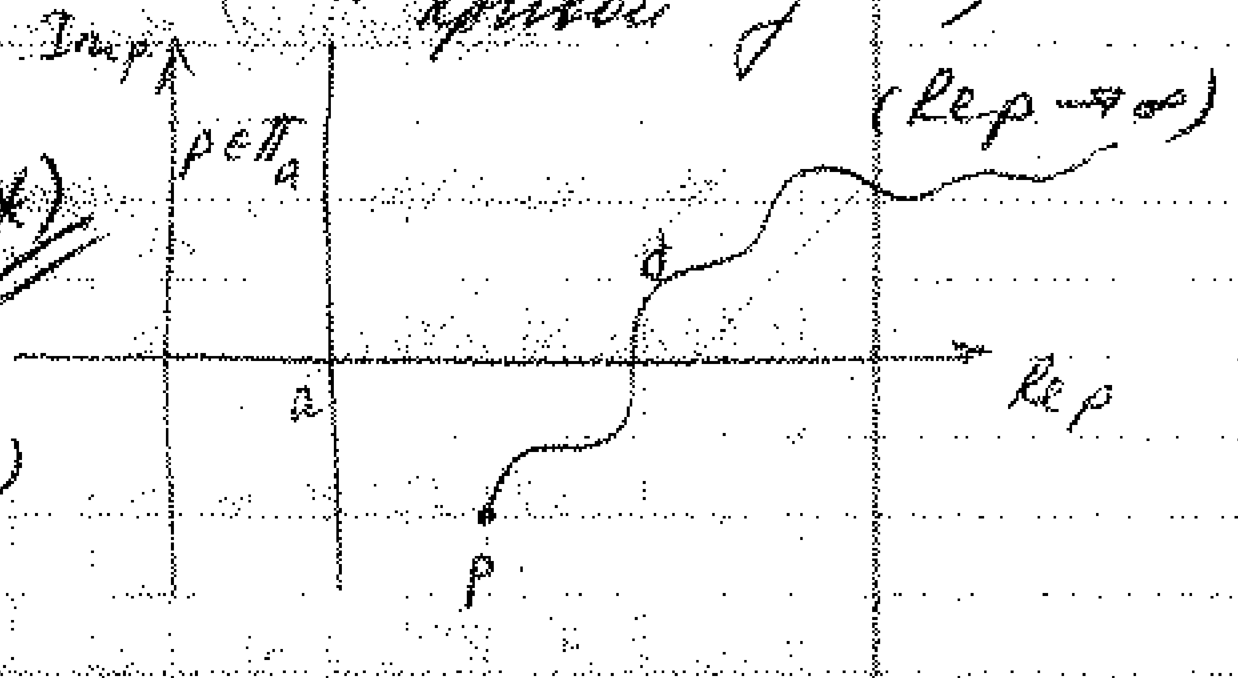
$$= \int_0^{+\infty} f(\tau)\,d\tau \int_\tau^{+\infty} e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty} f(\tau)\cdot\left[-\frac{1}{p} e^{-pt}\Big|_\tau^{+\infty}\right] d\tau =$$

$= \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-p\tau} f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{p}F(p)$

⑧ <u>Интегрирование изображения</u>

Пусть $f(t) \doteqdot F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$,
$f(t) \in L(a)$, $\frac{f(t)}{t} \in L(a)$

Тогда $\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_p^{+\infty} F(q)\,dq$ (вдоль некоторой кривой γ) $(\operatorname{Re} p \to \infty)$



$p = x+iy$, $|f(t)| \le Me^{a_1 t}$

$|F(p)| \le \frac{M}{x-a_1} = \frac{M}{\operatorname{Re} p - a_1} \Rightarrow$ (*)

$\Rightarrow |F(p)| \xrightarrow[p\in\gamma]{p\to\infty} 0$ (т.к. $\operatorname{Re} p \to \infty$)

$\frac{f(t)}{t} \doteqdot I(p)$, $p \in \Pi_a$

$I(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{f(t)}{t}\,dt$

$I'(p) = \int_0^{+\infty} (-t)e^{-pt}\frac{f(t)}{t} = -F(p) \Rightarrow$

$\Rightarrow I(p) = \int_p^{+\infty} F(q)\,dq$ $\left\{ (*) \Rightarrow I(p) \xrightarrow[\operatorname{Re} p \to \infty]{} 0,\ \text{т.к. } \frac{f(t)}{t} \in L(a) \right\}$.

<u>Опр</u> Пусть ф-ции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — интегрируемы. <u>Сверткой</u> ф-ций f_1 и f_2 наз-ся функция

$\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau$

⑨ Пусть $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$, $p\in\Pi_{a_1}$
$f_2(t) \doteqdot F_2(p)$, $p \in \Pi_{a_2}$

Тогда $\{\varphi(t)$ — свертка функций f_1 и $f_2\}$

$\varphi(t) \doteqdot F_1(p)F_2(p)$, $p\in\Pi_a$, $a = \max(a_1, a_2)$

Проверим, что $\varphi(t) \in L(a)$ (пп. 1, 2 — очев.)

1) $a_1 \neq a_2$, $|f_1(t)| \le M_1 e^{a_1' t}$, $|f_2(t)| \le M_2 e^{a_2' t}$

$$|\varphi(t)| \le M_1 M_2 \int_0^t e^{a_1'\tau} e^{a_2'(t-\tau)} d\tau =$$

$$= M_1 M_2 e^{a_2' t} \int_0^t e^{(a_1'-a_2')\tau} d\tau =$$

$$= M_1 M_2 \cdot \frac{1}{a_1'-a_2'} \cdot \left(e^{a_1' t} - e^{a_2' t}\right) \le M e^{a' t}$$

$$a' = \max(a_1', a_2') \Rightarrow a = \inf a' = \max(a_1, a_2) \Rightarrow \varphi \in L(a)$$

2) $a_1 = a_2 = a$ (упрощённо $|f(t)| \le M e^{at}$)

$$|\varphi(t)| \le M_1 M_2 \int_0^t e^{a\tau + at - a\tau} d\tau = M_1 M_2 e^{at} \cdot t \Rightarrow$$

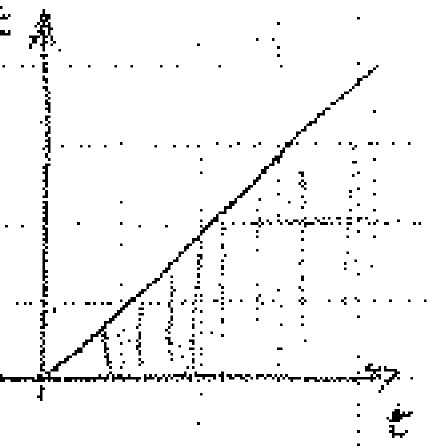
$$\Rightarrow \varphi(t) \in L(a)$$

$$\varphi(t) \doteq \Phi(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau =$$

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) d\tau \int_\tau^{+\infty} e^{-pt} f_2(t-\tau) dt = \{t = \tau + u\} =$$

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) d\tau \, e^{-p\tau} \int_0^{+\infty} f_2(u) e^{-pu} du = F_1(p) F_2(p)$$

$p \in \Pi_a$.



Определение оригинала по изображению

Пусть $F(p)$ определена в Π_a

Теорема 8.4 Пусть $F(p) \in A(\Pi_a)$, причём является образом Лапласа некоторой кусочно-гладкой функции $f(t) \in L(a)$. Тогда в каждой своей точке непрерывности $f(t)$ может быть вычислена по формуле:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} V.p. \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad \forall x > a \text{ (фикс)} \quad — (8.7)$$

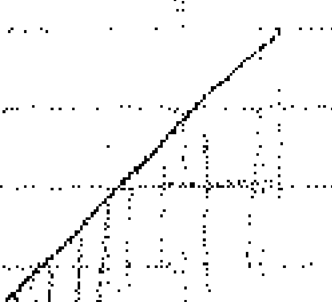
формула Меллина (обращения)

$M_2 e^{a_2' t}$

$Me^{a't}$

$, a_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi \in L(a)$

$\Rightarrow$



чём
дочно-
каждой
быть

(8.7)

<u>Д-во:</u> Положим $\varphi(t) = e^{-xt} f(t) \in L(-\infty,+\infty)$
$(\exists \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|dt)$
В точках непр-ти ф-ции $f(t)$ ф-ция $\varphi(t)$ имеет производную.

$$\varphi(t) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\, v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t} d\xi}_{\text{обратное преобр Фурье}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi\eta}\varphi(\eta)\,d\eta}_{\text{прямое преобр Фурье}}$$

$$e^{-xt} f(t) = \frac{1}{2\pi}\, v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t}d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\underbrace{(x+i\xi)}_{p}\eta} f(\eta)\, d\eta \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{p = x+i\xi\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi i}\, v.p. \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{(x+i\xi)t} F(p)\, d(i\xi) = \frac{1}{2\pi i}\, V.P. \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp$$

<u>Замечание:</u> в точках разрыва функции $f(t)$ ф-ия Меллина дает значение $\frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0))$.

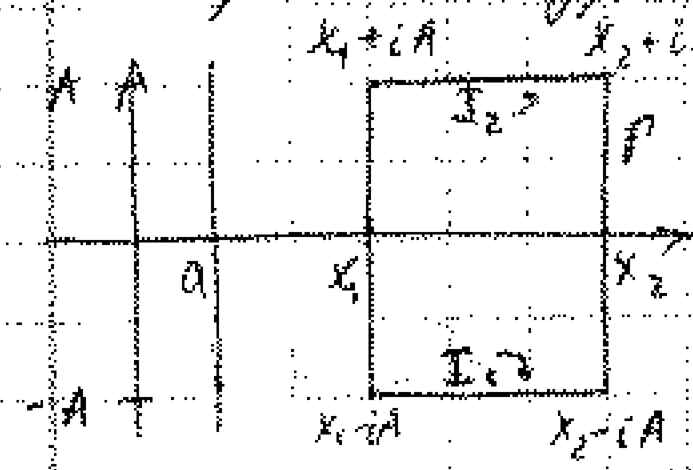
<u>Теорема 8.5</u> Пусть $f_1(t) \doteq F_1(p)$, $p\in\Pi_{a_1}$, $f_2(t) \doteq F_2(p)$, $p \in \Pi_{a_2}$, тогда $f(t) = f_1(t)\cdot f_2(t) \doteq$
$\doteq F(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q)F_2(p-q)\,dq = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(p-q)F_2(q)\,dq$
$(a_1<x<\mathrm{Re}\,p-a_2)$ $\quad$ $(a_2<x<\mathrm{Re}\,p - a_1)$
Причём $F(p)\in A(\Pi_{a_1+a_2})$

<u>Теорема 8.6</u> Пусть для функции $F(p)$ выполнено:
1. $F(p)\in A(\Pi_a)$
2. $F(p)\to 0$ при $p\to\infty$, $p\in\Pi_a$
3. $\forall x>a$ $\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}|F(p)|\,dp$ сходится

Тогда $F(p)$ есть образ Лапласа некоторой функции $f(t)\in L(a)$. Эта функция может быть восстановлена по формуле Меллина.

Д-во: 1. Рез-т, даваемый ф-лой Меллина не зависит от выбора $x>a$.
2. $f(t)$, -//- , принадлежит классу $L(a)$
3. Образ Лапласа ф-ции $f(t)$ есть $F(p)$

1. Фикс. $\forall x_1, x_2 : x_1, x_2 > a$, $x_1 \neq x_2$, фикс $\forall A>0$.
Выберем контур Γ:



$$0 = \oint_\Gamma e^{pt}F(p)dp = \int_{x_2-iA}^{x_2+iA} - \int_{x_1-iA}^{x_1+iA} + \int_{x_1-iA}^{x_2-iA} - \int_{x_1+iA}^{x_2+iA}$$

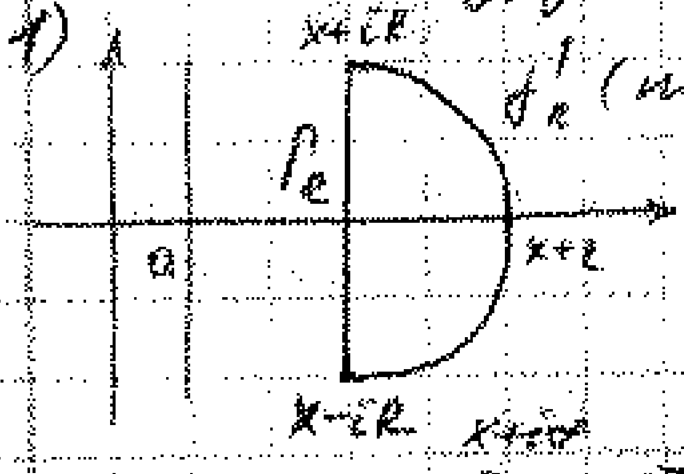
$$\left.\begin{aligned} \left|\int_{I_1}\right| &\le (x_2-x_1)e^{x_2 t}\max_{p\in I_1}|F(p)| \\ \left|\int_{I_2}\right| &\le (x_2-x_1)e^{x_2 t}\max_{p\in I_2}|F(p)| \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F(p) \xrightarrow[p\to x+i\infty]{} 0\} \Rightarrow \int_{I_1}, \int_{I_2} \xrightarrow[A\to\infty]{} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} e^{pt}F(p)dp = \int_{x_2-i\infty}^{x_2+i\infty} e^{pt}F(p)dp$$

2. Выберем другой контур Γ_R (фикс $\forall x>a$)

1) $t<0$.



γ_R^1 (полуокр-ть)

$$0 = \oint_{\Gamma_R} e^{pt}F(p)dp = \int_{\gamma_R^1} - \int_{x-iR}^{x+iR} \Rightarrow$$

$\int_{\gamma_R^1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$ (по лемме Жордана)

$$\Rightarrow \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp = 0$$

2) кусочная непр-ть следует из теоремы о непр-ти несобств. ИЗП.

3) $$|f(t)| \le \frac{1}{2\pi} e^{xt} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)|dp \le \{t\in[0,T]\} \le \frac{e^{xT}}{2\pi}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}|F(p)|dp$$

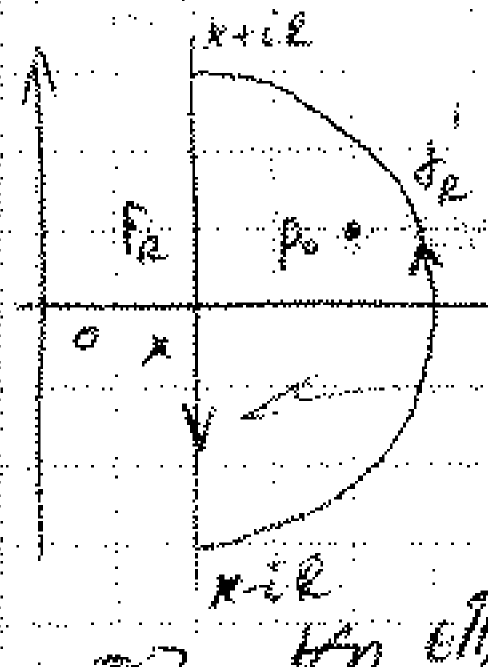
$\Rightarrow$ интеграл Меллина сх-ся равномерно на $\forall$ отрезке

$$\Rightarrow |f_1(t)| \le \frac{1}{2\pi} e^{xt} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)|\,dp \le M e^{xt} \Rightarrow f_1(t) \in L(a)$$

3. Пусть p_0 — $\forall$ т. из Π_a. $G(p)$ — образ Лапласа функции $f_1(t)$

$$G(p_0) = \int_0^{+\infty} e^{-p_0 t} f_1(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} e^{-p_0 t}\,dt \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp =$$

$$= \{a<x<\operatorname{Re} p_0\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p)\,dp \int_0^{+\infty} e^{-(p-p_0)t}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p)\frac{dp}{p_0-p}$$



$$\int_{\Gamma_R} \frac{F(p)}{p_0-p}\,dp = 2\pi i \operatorname{res}\left[\frac{F(p)}{p_0-p}, p_0\right]; \quad \int_{\gamma_R'} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{F(p)}{p_0-p}\,dp = -2\pi i \operatorname{res}\left[\frac{F(p)}{p_0-p}, p_0\right] = -2\pi i \cdot \frac{F(p_0)}{-1} = 2\pi i F(p_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall p_0\in\Pi_a \ G(p_0)=F(p_0) \Rightarrow G(p)\equiv F(p),\ p\in\Pi_a$$

__Пример:__ Решить задачу Коши

$$y''+4y'+4y = t^3e^{-2t}, \quad y(0)=1,\ y'(0)=2$$

$$t^3 \doteqdot \frac{3!}{p^4} = \frac{6}{p^4}, \quad \operatorname{Re} p>0$$

$$t^3e^{-2t} \doteqdot \frac{6}{(p+2)^4}, \quad \operatorname{Re} p > -2$$

$$y(t)\doteqdot Y(p), \quad \operatorname{Re} p>-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(t) \doteqdot pY(p) - y(0) = pY(p)-1$$

$$y''(t) \doteqdot p^2\left(Y(p) - \frac1p - \frac{2}{p^2}\right) = p^2Y(p) - p - 2$$

$$Y(p)(p^2+4p+4) - p - 2 - 4 = \frac{6}{(p+2)^4}, \quad \operatorname{Re} p>-2$$

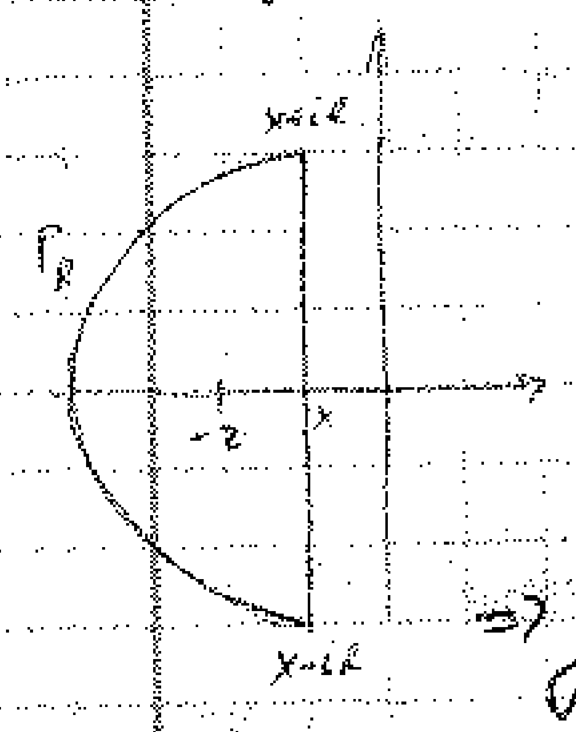
$$Y(p) = \frac{p+6}{(p+2)^2} + \frac{6}{(p+2)^6} = Y_2(p)+Y_1(p)$$

$$y_1(t)\doteqdot Y_1(p); \quad y_2(t)\doteqdot Y_2(p)$$

1) т.к. $t^n \doteq n!/p^{n+1} \Rightarrow \frac{6}{p^6} = \frac{1}{20}\cdot\frac{120}{p^6} \doteq \frac{1}{20}t^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1(t) = \frac{1}{20} t^5 \cdot e^{-2t}$

2) $y_2(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}\, Y_2(p)\,dp, \quad x>-2$



$$\oint\limits_{\Gamma_R^+} \frac{(p+6)e^{pt}}{(p+2)^2}\,dp = 2\pi i \operatorname{res}[e^{pt}Y_2(p), -2] \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{лемма}\\ \text{Жордана}\end{matrix}\right\} \Rightarrow y_2(t) = e^{-2t}(4t+1)$

$\Rightarrow y(t) = y_1(t) + y_2(t) = e^{-2t}\left[\frac{t^5}{20} + 4t + 1\right]$