Математический анализ (продолжение)

Глава 8. Интегралы, зависящие от параметра (ИЗП).

Пр. ① $a_0 y^{(n)} + \ldots + a_n y = f(x),\ x \in (a, b)$

$\{y_i(x)\}$ - фунд. с-ма реш.

$\Longrightarrow y(x) = \sum\limits_{k=1} \left[c_k y_k(x)\right] + \underbrace{\int\limits_a^x K(x,t) f(t)\,dt}_{\text{ИЗП}}$

② Преобразование Фурье

$\hat{f}(y) = F[f] = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iyx} dx}_{\text{ИЗП}}$

③ Преобразование Лапласа

$F(p) = \int\limits_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt,\ p \in \mathbb{C}$

§1. Собственные ИЗП.

$f(x,y)$ в пр-ке $P = \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ y \in [c,d]\}$; $\forall y \in [c,d]$ ф-е $f(x,y)$ интегр. по x на $[a,b] \Longrightarrow$ ф-е: $y \to \int\limits_a^b f dx$

$I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ (1) — собст. ИЗП с пост. пред. интегрир.

М. б. $\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$

1° Постоянные пределы интегрирования

Теор. 1 Пусть $f(x,y)$ непрер. на пр-ке P. Тогда ф-е (1) $I(y)$ непр. на $[c,d]$ интегрир. на $[c,d]$ и $\int\limits_c^d I(y)\,dy =$

$= \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ (2), т.е.

по парам. можно инт. под знаком интегр.

$\left(\int\limits_{c_1}^{d_1},\ [c_1,d_1] \subseteq [c,d]\right)$.

▲ Непр-ть. Фикс. ∀т. y на $[c,d]$ $(y \in [c,d])$
$\Delta I(y) = I(y+\Delta y) - I(y) = \int\limits_a^b [f(x,y+\Delta y) - f(x,y)]\,dx$. $f(x,y)$ – непр на $P \Rightarrow$ р/м непр. $\Rightarrow$ Фикс $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$. $|\Delta y| < \delta$ $\forall x \in [a,b]$, $y, y+\Delta y \in [c,d]$ $|f(x,y+\Delta y) - f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ $\underset{|\Delta y|<\delta}{\Longrightarrow} |\Delta I(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \int\limits_a^b 1\,dx = \varepsilon$, т.е. $I(y)$ непр в данной т. $y \Rightarrow$ на $[c,d]$.

Ф-ла (2). f – непр на $P \Rightarrow \exists \iint\limits_P f(x,y)\,dx\,dy$, $\exists \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, $\exists \int\limits_c^d f(x,y)\,dy \underset{\text{о выч. } \iint}{\overset{\text{по теор.}}{\Longrightarrow}}$ оба повт. инт-ла в прав части (2) $\exists$ и $= \iint\limits_P f\,dx\,dy$ $\Rightarrow$ равны между собой, т.е. (2) верна ▲

Пр. $I(y) = \int\limits_0^1 \ln(x^2+y^2)\,dx$, $y \in \mathbb{R}$

Фикс. ∀т. $y \neq 0$. $f(x,y)$ в $P = [0,1]\times[c,d]$, непрер $y \in [c,d]$, $0 \notin [c,d] \underset{T.1}{\Longrightarrow} I(y)$ непр. в ∀т. $y \neq 0$.

$I(0) = \int\limits_0^1 \ln x^2\,dx = 2\int\limits_0^1 \ln x\,dx \underset{\text{по частям}}{=} \ldots = -2$

$I(y)$ $y\neq 0$ — посчитать

$I(y) \underset{\text{по частям}}{=} \ln(1+y^2) - 2 + 2y \operatorname{arctg}\frac{1}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} -2$

$\left(-2\int \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}dx\right)$

$\Rightarrow I(y)$ непр на $\mathbb{R}$

Замечание (для теор 2 п. 10). Для справедливости ф-лы (2) достаточно, чтобы $\exists \iint\limits_P f(x,y)dxdy$, $\exists \int_a^b f(x,y)dx$, $\exists \int_c^d f(x,y)dy$.

Теор 2. Пусть ф-я $f(x,y)$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрер на пр-ке P. Тогда $\exists I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx$ (3)

(правило Лейбница).

Δ Из 1 курса: если $\varphi(x)$ непр, то $\int_a^x \varphi(t)dt$ — диф. $\quad (\int_a^x \varphi dt)' = (\Phi(x) - \Phi(a))' = \varphi(x)$

$= \Phi(x) - \Phi(a)$

Обозн. ф-ю в прав. части (3) через $g(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx$, выразим её через $I(y)$. $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрер в $P \underset{\text{Теор 1}}{\Rightarrow} g$ непр, справедл. (2): $\int_c^y g(t)dt = \int_c^y dt \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx \underset{(2)}{=}$

$\underset{(2)}{=} \int_a^b dx \int_c^y \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dt = \int_a^b f(x,t)\Big|_{t=c}^{y} dx =$

$= \int_a^b f(x,y)\,dx - \int_a^b f(x,c)\,dx \underset{(1)}{=} I(y) - I(c) \Rightarrow$

$\Rightarrow I(y) = \int_c^y g(t)\,dt + I(c) \Rightarrow \exists\, I'(y) = g(y)$. Д-ли $I'(y)$ — непр. на $[c,d]$. △

Пр. $I(y) = \int_0^1 \ln(x^2+y^2)\,dx$ $\quad I'(y) - ?$

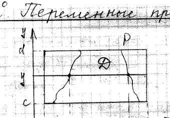
$P = [0,1]\times[c,d]$, $0 \notin [c,d]$.

$f(x,y)$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$ — непр. на P

$\Rightarrow \exists\, I'(y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}\,dx = 2y \int_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2} =$

$= \frac{2y}{y} \int_0^1 \frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{y} \underset{\substack{y\to 0+ \\ y\to 0-}}{\longrightarrow} \begin{matrix} \frac{2\pi}{2} \\ -\frac{2\pi}{2} \end{matrix} \Rightarrow I'(0) - \nexists$

2°. Переменные пределы интегрирования



Рассм. ф-ю $f(x,y)$ в $D = \{(x,y) : x \in [a(y), b(y)],\ y \in [c,d]\}$. Пусть f при $\forall$ фикс. $y \in [c,d]$ интегрир. по $x \in [a(y), b(y)] \Rightarrow$ ф-е $\forall y \to \int_{a(y)}^{b(y)} f\,dx$. $I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$ (4) — собст. ИЗП с перемен. пределами инт. Фикс некот. пр-к $P = [a_0, b_0] \times [c,d]$, $D \subseteq P$.

Теор 3. Пусть $f(x,y)$ непрер в пр-ке P, а $a(y)$, $b(y)$ непр. на $[c,d] \Longrightarrow I(y)$ непр. на $[c,d]$.

Δ Фикс $\forall$ т. $y_0 \in [c,d]$ $I(y) = \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)dx + \int\limits_{a(y)}^{a(y_0)} f(x,y)dx + \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)dx =$ ... $\int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)dx +$

$$+ \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx - \int\limits_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)\,dx \equiv \tilde{I}(y) + B(y) - A(y)$$

$\tilde{I}(y)$: f непр. в пр-ке $\tilde{P} = [a(y_0), b(y_0)] \times [c,d]$.

$\underset{T.1}{\Longrightarrow} \tilde{I}(y)$ непр. на $[c,d]$ и при $y \to y_0$

$\tilde{I}(y) \to \tilde{I}(y_0) = I(y_0)$

$B(y) = \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \underset{\text{ф-ла средн}}{=} f(\tilde{x}, y) \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} 1\,dx =$
$\tilde{x}$ - между $b(y_0)$, $b(y)$

$= f(\tilde{x}, y)\,(b(y) - b(y_0)) \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} f(b(y_0), y_0) \cdot 0 = 0$

Аналогично $A(y) \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} 0$.

$\Longrightarrow I(y) \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} I(y_0)$, т.е. $I(y)$ непр. в т. y_0

$\Longrightarrow$ на $[c,d]$. Δ

Теор 3'. f, $\frac{\partial f}{\partial y}$ непр. в D, $a(y)$, $b(y)$ — непр. на $[c,d] \Longrightarrow I(y)$ непр. на $[c,d]$.

Теор 4. Пусть $f(x,y)$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непр.

в пр-ке P, $\mathcal{D} \subseteq P$, $a(y)$, $b(y)$ дифф. на $[c,d]$ $\Longrightarrow$ ф-я $I(y)$ (4) дифференцир. и $I'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx + b'(y) \cdot f(b(y),y) -$

$- a'(y) f(a(y),y)$ (6)

Δ Фикс $\forall\, y_0 \in [c,d]$ и предст. $I(y)$ в виде (5). $I(y) = \tilde{I}(y) + B(y) - A(y)$ (5)

$\tilde{I}(y)$ $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ непр. в $\tilde{P} = [a(y_0), b(y_0)] \times [c,d]$

$\underset{T\,2}{\Longrightarrow} \exists\, \tilde{I}'(y) = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx \quad \forall y \in [c,d]$

Требуется найти $\lim\limits_{y \to y_0} \frac{I(y) - I(y_0)}{y - y_0} =$

$= \lim\limits_{y \to y_0} \left[\frac{\tilde{I}(y) - \tilde{I}(y_0)}{y - y_0} + \frac{B(y)}{y - y_0} - \frac{A(y)}{y - y_0} \right]$

$\frac{B(y)}{y - y_0} = \frac{1}{y - y_0} \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y) dx \underset{\text{ф-ла среднего}}{=} \frac{1}{y - y_0} \cdot$

$\cdot \underset{\substack{\tilde{x} \text{ между} \\ b(y) \text{ и } b(y_0)}}{f(\tilde{x}, y)} \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} 1 dx = f(\tilde{x}, y) \frac{b(y) - b(y_0)}{y - y_0} \underset{y \to y_0}{\longrightarrow}$

$\underset{y \to y_0}{\longrightarrow} f(b(y_0), y_0)\, b'(y_0)$ Аналогично:

$\frac{A(y)}{y - y_0} \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} a'(y_0) f(a(y_0), y_0)$ т.е

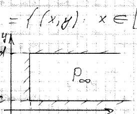
$\exists I'(y_0)$ и справедл. (6) Δ

Теор. 4' $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ непр. в $\mathcal{D}$, $a(y)$, $b(y)$ дифф. на $[c,d]$ $\Longrightarrow \exists I'(y)$ (6)

§2 Несобственные ИЗП

Рассм. ф-ю $f(x,y)$ в полуполосе

$P_\infty = \{(x,y): x\in[a,+\infty), y\in[c,d]\}$.



Пусть для $\forall y\in[c,d]$ $f(x,y)$ инт. (в несобст. смысле) по x на $[a,+\infty)$. $\mathcal{P}$-е $\forall y \to \int_a^{+\infty} f dx$ — несобств. ИЗП 1го рода. Интеграл

$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ (1) наз. сходящимся:

$\forall \varepsilon>0$ $\forall y\in[c,d]$ $\exists A>a: \forall R\geq A$

$\left|\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$. $A(\varepsilon, y)$, введём понятие равн. сх-ти

1° Равн. сх-ть. Критерий Коши

Опред. Инт-л (1) наз. равномерно сходящимся по y на $[c,d]$, если

1) он сход. $\forall y\in[c,d]$;
2) $\forall \varepsilon>0$ $\exists A>a: \forall R\geq A$, $\forall y\in[c,d]$ $\left|\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$ (2) $A = A(\varepsilon)$

Теор 5 (критерий Коши). Для того чтобы инт. (1) сходился равном на $[c,d]$ $\Longleftrightarrow$, чтобы $\forall \varepsilon>0\ \exists A>a\ \forall R', R''\geq A$, $\forall y\in[c,d]\ \left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon$ (3)

Δ (2) $\Longrightarrow$ (3) Фикс $\forall\varepsilon>0\ \exists A>a: \forall R\geq A$

$\left|\int\limits_{R}^{\infty} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}\quad \forall y\in[c,d] \underset{R',R''\geq A}{\Longrightarrow} \left|\int\limits_{R'}^{R''} f dx\right| =$

$= \left|\int\limits_{R'}^{\infty} f dx - \int\limits_{R''}^{\infty} f dx\right| \leq \left|\int\limits_{R'}^{\infty} f dx\right| + \left|\int\limits_{R''}^{\infty} f dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$

т. е. (3) - верно

(3) $\Longrightarrow$ (2). (3) при фикс. (y) - крит. Коши для несобст инт. без парам $\underset{(3)}{\Longrightarrow}$ инт. $I(y)$ сход. в $\forall y\in[c,d]$.

$\forall\varepsilon>0\ \exists A>a\ \forall R', R''\geq A\ \left|\int\limits_{R'}^{R''} f dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall y\in[c,d]$. $R''\to+\infty$:

$\left|\int\limits_{R'}^{\infty} f(x,y)\,dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\ \forall y\in[c,d]$,

т. е. (2) верно Δ

2° Признаки равномерной сходимости

Теор 6 (признак Вейерштрасса). Пусть $f(x,y)$ опред. в P_∞, $\forall y\in[c,d]$ интегрир по x на $[a,R]$ $(\forall R>a)$, $\exists$ ф-е $g(x)\geq 0$, опред. на $[a,+\infty)$, сход. $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$. Пусть $|f(x,y)|\leq g(x)$

$\forall (x,y)\in P_\infty \Longrightarrow$ инт. (1) сх-ся равномерно по $\textcircled{y}$ на $[c,d]$. (Инт-л от $|f|$ тоже сх. равн.)

$\Delta \int\limits_a^\infty g\,dx$ — сх $\Longrightarrow \underset{\text{фикс}}{\forall\varepsilon>0}\ \exists A>a : \forall R', R''\geq A \int\limits_{R'}^{R''} g(x)dx<\varepsilon$

$\Longrightarrow \underset{\forall y\in[c,d]}{\forall R', R''\geq A} \left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)dx\right| \leq \int\limits_{R'}^{R''} |f(x,y)|dx \leq$

$\leq \int\limits_{R'}^{R''} g(x)dx<\varepsilon \underset{T.5}{\Longrightarrow}$ инт. (1) сх. равн. на $[c,d]$

$(\int|f|\rightrightarrows)$ Δ

Рассм. инт. вида $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,g(x)dx$ (4)

<u>Теор 7 (признак Дирихле-Абеля).</u> Пусть $f(x,y)$ опред. на P_∞ и $\forall y\in[c,d]$ инт. по $\textcircled{x}$ на $\forall\,[a,R]$. $\exists M=\text{const}>0$:

$\left|\int\limits_a^x f(t,y)\,dt\right|\leq M,\ \forall (x,y)\in P_\infty$; /аналогия $|S_n(x)|\leq M$./

Ф-я $g(x)$ опред. на $[a,+\infty)$, монотонно не возрастая стремится к 0 при $x\to+\infty \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ инт. (4) сход. равн. по $\textcircled{y}$ на $[c,d]$.

$\Delta\ \forall\alpha,\beta\geq a \left|\int\limits_\alpha^\beta f(x,y)dx\right| = \left|\int\limits_a^\beta f dx-\int\limits_a^\alpha f dx\right|\leq$

$\leq \left|\int\limits_a^\beta f dx\right|+\left|\int\limits_a^\alpha f dx\right|\leq M+M=2M\ \forall y\in[c,d]$

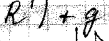
$\forall R', R''>a,\ a<R'<R''.\ \left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)\,g(x)dx\right| \underset{R'' \quad g\geq0}{\overset{\exists\xi\in[R',R'']}{\overline{\text{2 т. о ср. значен.}}}}$

$\underset{\text{2 т. ср.}}{\overset{\exists\xi\in[R',R'']}{=}} \left|g(R')\int\limits_{R'}^{\xi} f(x,y)dx+g(R'')\int\limits_{\xi}^{R''} f(x,y)dx\right|\leq$

$\leq g(R')\left|\int\limits_{R'}^{\xi} f dx\right| + g(R'')\underbrace{\left|\int\limits_{\xi}^{R''} f dx\right|}_{\leq 2M} \leq$

$\leq 2M\left(g(R') + g(R'')\right) < 4Mg(R') \underset{R' \geq A}{\leq} 4M\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon$

$g(R'') < g(R')$



$\forall y \in [c,d]$

Фикс. $\forall \varepsilon > 0$, т.к. $g \underset{x \to +\infty}{\to} 0$, то $\exists A > a$:

$\forall R' \geq A \quad 0 \leq g(R') < \frac{\varepsilon}{4M}$

$\Downarrow$ т.5

инт(4) $\Rightarrow$

Δ

Замечание. В (4) возьм. $g(x,y)$:

$g(x,y)$ $\forall y \in [c,d]$ мон. не возр. при $x \to \infty$

$g(x,y) \underset{x \to +\infty}{\rightrightarrows} 0$ по $y \in [c,d]$ (т.е. $|g(R',y)| < \frac{\varepsilon}{4M}$ $\forall y \in [c,d]$)

Теор. 8 (признак Дини). Рассм. инт. (1).

/ Вспомним: $\{f_n(x)\}$ на $\{x\}$, $f_n \to f$ на $\{x\}$

1) $\{x\}$ – компакт
2) $\{f_n\}$ монот.
3) $\forall n$ f_n – непр.
4) f – непр.

$\Rightarrow f_n \rightrightarrows f$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$
1) –''–
2) $u_k \geq 0$
3) $\forall u_k$ – непр.
4) S – непр.

$\sum \rightrightarrows$ /

Пусть $f(x,y) \geq 0$ и непр. на P_∞, ф-е $I(y)$ непр. на $[c,d]$ $\Rightarrow$ инт. (1) сх. равн. по y на $[c,d]$.

Δ Рассм ФП $I_n(y)=\int\limits_a^{a+n} f(x,y)\,dx$. Док., что для $\{I_n\}$ вып. все услов. пр. Дини для ФП. Фикс. (n). $f(x,y)$ на $P=[a,a+n]\times[c,d]$ непр $\underset{T.1}{\Longrightarrow}$ $I_n(y)$ – непр на $[c,d]$.

$f\geq 0 \Longrightarrow \{I_n(y)\}$ – монот. не убывает на $[c,d]$. $I_n(y)\to I(y)$ – непр. на $[c,d]$ $\underset{\text{пр. Дини для ФП}}{\Longrightarrow}$ $I_n(y)\rightrightarrows I(y)$ на $[c,d]$, т.е. $\forall\varepsilon>0$ $\exists N:\ 0\leq I(y)-I_N(y)=\int\limits_{a+N}^{\infty} f(x,y)\,dx<\varepsilon$ $\forall y\in[c,d]$

Т.к. $f\geq 0$, то $\forall R\geq A=a+N$ $0\leq\int\limits_R^{\infty} f(x,y)\,dx\leq$

$\leq\int\limits_{a+N}^{\infty} f\,dx<\varepsilon$ $\forall y\in[c,d]$ $\underset{(2)}{\Longrightarrow}$ инт (1) $\rightrightarrows$ на $[c,d]$ $\blacktriangle$

3°. Функциональные св-ва несобств. ИЗП.

Теор 9. Рассм. инт (1). Пусть $f(x,y)$ непр на P_∞, инт (1) сход равн на $[c,d]$ $\Longrightarrow$ ф-я $I(y)$ (1) непр. на $[c,d]$, она инт-ма на $[c,d]$ и $\int\limits_c^d I(y)\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx=$

$=\int\limits_a^{+\infty} dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$, (5) т.е. по парам (y) можно инт. под знаком инт.

Δ Непр-ть. Исп. теор. о непр ФП. Рассм

$I_n(y)=\int\limits_a^{a+n} f(x,y)\,dx$. n – фикс f – непр на

$P=[a,a+n]\times[c,d]$ $\underset{T.1}{\Longrightarrow}$ $I_n(y)$ – непр. $\forall n$

на $[c,d]$. Д-ть, что $I_n(y) \rightrightarrows I(y)$.

Инт (1) сх равн по y на $[c,d] \implies$
$\implies \forall \varepsilon>0 \quad \exists A>a \quad \forall R \geq A \quad \left|\int\limits_R^\infty f(x,y)dx\right| < \varepsilon$

$$|I(y) - I_n(y)| = \left|\int\limits_{a+n}^{\infty} f(x,y)dx\right|$$

$a+n > A \implies n > A-a, \; N = \underbrace{[A-a]}_{\text{целая часть}} + 1 \implies$
$\implies \forall n \geq N \quad \left|\int\limits_{a+n}^{\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon \implies |I(y) - I_n(y)| < \varepsilon.$

$\forall y \in [c,d] \implies I_n(y) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} I(y)$ на $[c,d]$,
т.к. $\forall I_n$ - непр на $[c,d]$, $\xRightarrow[\text{теор 7 из гл. 2}]{} I(y)$ - непр. на $[c,d]$.

Док (5). Треб. д-ть, что $\int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^d f dy$ - сход и равен $\int\limits_c^d I(y)dy$, т.е $\forall \varepsilon>0 \; \exists A>a$:
$$\forall R \geq A \quad \left|\int\limits_c^d I(y)dy - \int\limits_a^R dx \int\limits_c^d f(x,y)dy\right| < \varepsilon \quad (6)$$

Рассм f на пр-ке $P = [a,R]\times[c,d]$, где фикс $R>a$. Ф-я f непр на $P \xRightarrow[T.1]{}$
$\xRightarrow[T.1]{} \int\limits_a^R dx \int\limits_c^d f dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^R f dx \implies \int\limits_c^d I(y)dy -$
$- \int\limits_a^R dx \int\limits_c^d f dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_R^\infty f(x,y)dx.$

Инт (1) сх равн по усл $\implies \forall \varepsilon>0$, фикс,
$\exists A>a: \forall R \geq A \quad \left|\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \dfrac{\varepsilon}{d-c}.$

Подст. в прав. часть послед. р-ва, получаем оценку (6) Δ

Замечание. При выполнении условий признака Дини (Теор. 8) справедл. ф-ла (5) (Т.8 $f \geq 0$, непр. в P_∞, $I(y)$-непр. $\Longrightarrow$ вып. усл. Т.9.)

Теор. 10. Пусть f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непр. на P_∞, инт. (1) сход. $\forall y \in [c,d]$, $\int\limits_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$ — сх. равном. по y на $[c,d] \Longrightarrow$ ф-я $I(y)$ диф-ма и $I'(y) = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$ (7)

Δ Исп. теор. о диф. ФП. Рассм. ФП $I_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)\,dx$. Фикс. $\forall n$, пр-к $P = [a, a+n] \times [c,d]$. $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ — непр. в $P \underset{T.2}{\Longrightarrow}$
$\underset{T.2}{\Longrightarrow}$ ф-я $I_n(y)$ — диффер. и $I_n'(y) = \int\limits_a^{a+n} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$

Из равн. сх-ти $\int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}\,dx \Longrightarrow$ равн. сх-ть $\{I_n'(y)\}$ к $\int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}\,dx$ (доказ. как в перв. части предыд. теор.) $\underset{\text{по теор. о диф. ФП}}{\Longrightarrow}$ ф-я $I(y)$ - пред. ф-я ФП $\{I_n(y)\}$ — дифференцир. и $I'(y) = \lim\limits_{n\to\infty} I_n'(y) = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$, т.е. справедл. ф-ла (7) Δ

Теор. 11 (теорема о несобственном интегрировании несобст. интегралов)

Пусть $f(x,y) \geq 0$ и непр. для всех $x \geq a$, $y \geq c$.

Пусть функции $I(y) = \int\limits_a^\infty f dx$, $K(x) = \int\limits_c^\infty f dy$ непр для $y \geq c$ и $x \geq a$ соотв. Пусть сх-ся хотя бы один из след. двух несобств. инт-лов $\int\limits_c^\infty I(y)dy$, $\int\limits_a^\infty K(x)dx$. Тогда сходится и второй из этих интегралов и они равны между собой: $\int\limits_c^\infty dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx =$

$$= \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^\infty f(x,y)dy \quad (8)$$

Δ Пусть сход $\int\limits_c^\infty I(y)dy$. Докажем, что сход. $\int\limits_a^\infty K dx$ и справедл (8), т.е. $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists A > a : \forall R \geq A \quad \left| \int\limits_c^\infty I(y)dy - \int\limits_a^R K(x)dx \right| < \varepsilon \quad (9)$$

Рассм $\int\limits_a^R K(x)dx = \int\limits_a^R dx \int\limits_c^\infty f dy$. Для f на $\tilde{P}_\infty = \underset{x}{[a,R]} \times \underset{y}{[c,\infty)}$ вып усл призн. Дини $f \geq 0$, непр, $K(x)$ – непр $\xRightarrow[\text{из теор 9}]{\text{след.}} \int\limits_a^R K(x)dx =$

$$= \int\limits_c^\infty dy \int\limits_a^R f dx \Rightarrow \left| \int\limits_c^\infty I(y)dy - \int\limits_a^R K(x)dx \right| =$$

$$= \left| \int_c^\infty dy \int_a^\infty f dx - \int_c^\infty dy \int_a^R f dx \right| = \underbrace{\int_c^\infty dy \int_R^\infty f dx}_{<\varepsilon} \underset{\forall R_1 > c}{=}$$

$\forall R > a$

$$\underset{\forall R_1 > c}{=} \int_{R_1}^\infty dy \int_R^\infty f(x,y)\,dx + \int_c^{R_1} dy \int_R^\infty f(x,y)\,dx = I_1 + I_2$$

(не пройдёт т.к. $\int_c^\infty$)

Т.к. $\int_c^\infty I(y)\,dy$ сх $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, фикс $\exists R_1 > c$:

$$\int_{R_1}^\infty I(y)\,dy = \int_{R_1}^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \; R_1 \text{ - фиксир.}$$

$$I_1 = \int_{R_1}^\infty dy \int_R^\infty f dx \underset{f \geq 0}{\leq} \int_{R_1}^\infty dy \int_a^\infty f dx < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 0 \leq I_1 < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall R > a$

I_2: По призн. Дини (Теор. 8) инт. $I(y)$ сх. равном. на $[c, R_1]$.

$P_\infty = [a, \infty) \times [c, R_1]$

$$\left[f \geq 0, \text{ непр.}, I(y) \text{ - непр на } [c, R_1] \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists A > a \;\; \forall R \geq A \;\; \left| \int_R^\infty f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2(R_1 - c)}$$

$$\forall y \in [c, R_1] \Rightarrow I_2 = \int_c^{R_1} dy \int_R^\infty f dx \underset{[R \geq A]}{<} \frac{\varepsilon}{2(R_1 - c)} \int_c^{R_1} 1 dx =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 0 \leq I_2 < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 0 \leq I_1 + I_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ вып. (8) Δ

Замечание. Условие $f(x,y) \geq 0$ можно снять, но обоснование услож. (Фихтенгольц Г.М.).

4°. Несобств. ИЗП 2го рода

Рассм. $f(x,y)$ на пр-ке $\widetilde{P}=[a,b)\times[c,d]$

Пусть $\forall y\in[c,d]$ ф-я f интегр. по x на $[a,b)$ (в несобст. смысле) $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ ф-я: $\forall y\to\int\limits_a^b f dx$. $I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ (10) — несоб. ИЗП 2го рода.

Инт. наз. сходящ. $\forall\varepsilon>0$, $\forall y\in[c,d]$ $\exists\delta>0$: $\forall\alpha\in(0,\delta)$ $\left|\int\limits_{b-\alpha}^b f(x,y)dx\right|<\varepsilon$, $\delta=\delta(\varepsilon,y)$

Опред. Инт. (10) сход. равном. по y на $[c,d]$, если он сход. $\forall y\in[c,d]$ и $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$: $\forall\alpha\in(0,\delta)$

$$\left|\int\limits_{b-\alpha}^b f(x,y)dx\right|<\varepsilon,\ \forall y\in[c,d].$$

Инт 2го рода можно свести к инт. 1го рода: $t=\frac{1}{b-x}$, $b-x=\frac{1}{t}$,

$x=b-\frac{1}{t}$, $dx=\frac{dt}{t^2}$; $\int\limits_a^b f(x,y)dx=$

$=\int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b-\frac{1}{t},y\right)\frac{dt}{t^2}\Longrightarrow$ справедл. для

$\frac{1}{b-a}>0$ $\quad\frac{1}{t}$ - непр. ф-я

инт. (10) все доказ. теор. для инт. (1) 1го рода: Т. 5* – 10*

Напр.

Теор. 8*. Пусть $f(x,y)$ непр. в $\widetilde{P}$, инт. (10) сход. равном. по y на $[c,d]$, $\Longrightarrow I(y)$ (10) непр. на $[c,d]$, интегр.

$$\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy$$

$$\int_{b-\alpha}^{b} f(x,y)\,dx = \int_{1/\alpha}^{\infty} f\left(b-\frac{1}{t}, y\right)\frac{dt}{t^2};$$

$$\frac{1}{\delta} = A \Rightarrow \forall \underset{1/\alpha}{\overset{\shortparallel}{R}} > 0 \quad \left|\int_R^{\infty} f\frac{dt}{t^2}\right| < \varepsilon$$

§3 Вычисление интеграла Дирихле.

$$\mathcal{D}(\alpha,\beta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}\,dx, \quad \forall \alpha,\beta > 0$$

спойлер. $\alpha = 1000, \beta = 1 \Rightarrow 1$; $\alpha = 1, \beta = 1000 \Rightarrow 0$; $\alpha = \beta \Rightarrow 1/2$

$$2\sin\alpha x\cos\beta x = \sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x$$

$$K(\alpha) = \int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx, \ \alpha\in\mathbb{R}$$

$\alpha x = y$, $\alpha > 0$ $\quad I_0 = \int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy$ — сх. по пр. Д-А.

Рассм. инт. $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx, \ \alpha \geq 0$ (хорошо сх, в пределе 1)

$I(0) = I_0$

Док: $I(\alpha)$ — непр. при $\alpha \geq 0$

$\alpha > 0$ вычисл. $I(\alpha)$, $\lim\limits_{\alpha\to 0+} I(\alpha) = I(0) = I_0$ — схема

Другой путь — ТФКП $\int \frac{e^{iz}}{z}\,dz$

1° Док. непр-ть $I(\alpha)$ на $\alpha \geq 0$.

Т.9. f — непр., $I(\alpha) \rightrightarrows$. $f(x,\alpha) = \begin{cases}\frac{e^{-\alpha x}\sin x}{x}, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$

— непр. на ⊗, $\alpha \geq 0$.

Равн. сх-ть $I(\alpha)$ — по опред.

$$\int e^{-\alpha x}\sin x\,dx = -e^{-\alpha x}\cos x - \alpha\int e^{-\alpha x}\cos x\,dx =$$

$$= -e^{-\alpha x}\cos x - \alpha e^{-\alpha x}\sin x - \alpha^2\underbrace{\int e^{-\alpha x}\sin x\,dx}_{\text{налево}}$$

$$\int e^{-\alpha x}\sin x\,dx = -\frac{e^{-\alpha x}(\alpha\sin x+\cos x)}{1+\alpha^2}+C=$$

$$=\Phi(\alpha,x)+C;\quad (\alpha\sin x+\cos x)\cdot\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}}=\sqrt{1+\alpha^2}\sin(x+\varphi)$$

$$\Phi(\alpha,x)=-\frac{e^{-\alpha x}\sqrt{1+\alpha^2}\sin(x+\varphi)}{1+\alpha^2}$$

$$|\Phi(\alpha,x)|\underset{\alpha\ge 0}{\le}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\le 1\Longrightarrow|\Phi(\alpha,x)|\le 1,$$

$\forall\alpha,x\ge 0$ $$\left|\int_R^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right|=\left|\underbrace{\frac{\Phi(\alpha,x)}{x}\Big|_R^\infty}_{=-\frac{\Phi(\alpha,R)}{R}}+\int_R^\infty\frac{\Phi(\alpha,x)}{x^2}dx\right|\le\frac{|\Phi(\alpha,R)|}{R}+\int_R^\infty\frac{|\Phi(\alpha,x)|}{x^2}dx\le$$

$$\le\frac{1}{R}+\int_R^\infty\frac{1}{x^2}dx=\frac{2}{R}<\varepsilon\quad\left(R>\frac{2}{\varepsilon}=A:\ \forall\alpha\ge 0\right)$$

$\boxed{\text{Фикс } \forall\varepsilon>0}\Longrightarrow I(\alpha)\rightrightarrows$ на $\alpha\ge 0\underset{T.9}{\Longrightarrow}I(\alpha)$ - непр. ф-я на $\forall[a,b]:\ a\ge 0\Longrightarrow I(\alpha)$ непр. на $\alpha\ge 0\Longrightarrow I(\alpha)$ непр в т. $\alpha=0$

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx,\ \alpha\ge 0$$

<u>2° Вычислим $I(\alpha)$ для $\alpha>0$</u>

Применим Т 10 о диф $I(\alpha)$.

$f,\ \frac{\partial f}{\partial\alpha}$ - непр, $I(\alpha)$ - сх. $\int\frac{\partial f}{\partial\alpha}dx\rightrightarrows$?

$f,\ \frac{\partial f}{\partial\alpha}=-e^{-\alpha x}\sin x$ - непр. при $\alpha,x\ge 0$.

$I(\alpha)$ - сх. $\forall\alpha\geq 0$. $\int \frac{\partial f}{\partial\alpha}dx = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx \rightrightarrows ?$

$\alpha = 0$ расх. $(0,a)$

Фикс $\forall\alpha_0>0$ $\exists c,d$ $0<c<\alpha_0<d$,

и рассм $\int\frac{\partial f}{\partial\alpha}$ на $[c,d]\ni\alpha$

$\left|\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right| = |e^{-\alpha x}\sin x| \leq e^{-\alpha x} \leq e^{-cx}$.

$\int_0^\infty e^{-cx}dx < \infty$ $\underbrace{\forall\alpha\in[c,d]}_{\text{(лишнее)}} \xRightarrow[\text{Вейерштрасса (Т.6)}]{\text{пр.}} \int\frac{\partial f}{\partial x}dx \rightrightarrows$

на $[c,d] \xRightarrow[T.10]{} I(\alpha)$ диффер на $[c,d]$ по α,

и $I'(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial\alpha}dx = -\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx =$

$= -\Phi(\alpha,x)\Big|_{x=0}^{\infty} = -\left(-\frac{e^{-\alpha x}(\alpha\sin x+\cos x)}{1+\alpha^2}\right)\Big|_{x=0}^{\infty} =$

$= -\frac{1}{1+\alpha^2} \Rightarrow I'(\alpha) = -\frac{1}{1+\alpha^2}$ на $[c,d]$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в т. α_0, т.к. $\alpha_0>0$ - $\forall$, $\Rightarrow$ $\forall\alpha>0$.

$\Rightarrow I(\alpha) = -\int\frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = -\operatorname{arctg}\alpha + C$

$I(\alpha) = -\operatorname{arctg}\alpha + C$ $\forall\alpha>0$ $C-?$

$\alpha = 0, \infty$. Док: $I(\alpha)\xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} 0$.

$|I(\alpha)| = \left|\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leq \int_0^\infty e^{-\alpha x}dx =$

$= -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\alpha}\xrightarrow[\alpha\to\infty]{} 0 \Rightarrow I(\alpha)\xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} 0$

$I(\alpha) = C - \operatorname{arctg}\alpha\Big|_{\alpha\to+\infty}$ $0 = C - \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$

$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \alpha, \ \forall \alpha > 0$

3° Интеграл Дирихле

$\exists \lim\limits_{\alpha \to 0+} I(\alpha) \underset{\text{непр}}{=} I(0) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$

$\overset{\shortparallel}{I_0}$

$I_0 = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

$K(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha > 0$:

$\alpha x = y$

$K(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}, \ \forall \alpha > 0$

$\alpha < 0$:

$\alpha x = -y, \ y = -\alpha x \geq 0$

$K(\alpha) = \int \frac{-\sin y}{y} dy = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = -\frac{\pi}{2}, \ \forall \alpha < 0$

$K(\alpha) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha = 0 \\ -\pi/2, & \alpha < 0 \end{cases}$ – разрывный множитель Дирихле.

$\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \begin{cases} 1, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha = 0 \\ -1, & \alpha < 0 \end{cases} = \operatorname{sgn} \alpha.$

$\alpha, \beta > 0$:

$D(\alpha, \beta) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} dx =$

$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x} dx + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{x} dx =$

$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \alpha > \beta \\ 0, & \alpha = \beta \\ -\pi/2, & \alpha < \beta \end{cases} = \begin{cases} 1, & \alpha > \beta \\ 1/2, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha < \beta \end{cases}$

§4. Интегралы Эйлера.

1° Гамма-функция Эйлера (Γ-функция)

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1}\,dx \quad (1)$$

1729 г.
$n!$, $n \notin N$
1814 г.

1) $\mathcal{D}(\Gamma)$ – обл. опред. p – ?

$$\Gamma(p) = \int_0^1 e^{-x}x^{p-1}dx + \int_1^{\infty} e^{-x}x^{p-1}dx \equiv I_1 + I_2$$

I_1 : $\frac{1}{e}x^{p-1} \leq e^{-x}x^{p-1} \leq x^{p-1}$

$\int_0^1 x^{p-1}dx$ – сх. $p-1>-1$, $p>0$

расх. $p-1 \leq -1$, $p \leq 0$

сх. $p>0$ – оценка справа

Оценка слева – расх. $p \leq 0$

I_1 сх. $\forall p>0$

расх. $\forall p \leq 0$

$I_2 = \int_1^{\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx$.

$\exists\, \alpha>1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|x^{\alpha} = C \geq 0$

$\int_a^{\infty} f\,dx$ – сх.

$\left(e^{-x}x^{p-1}\right)\underset{\forall \alpha>1}{x^{\alpha}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $\forall p \in \mathbb{R} \Longrightarrow I_2$ – сх

$\forall p \in \mathbb{R} \Longrightarrow \mathcal{D}(\Gamma) = \{p : p>0\}$

2) Непрерывность

Теор. 9, 9*

Для справки

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \; n \geq 2,\; n=3$$

$\Gamma(1)=\int\limits_0^\infty e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^\infty=1 \Rightarrow \Omega_2=\frac{2\pi}{\Gamma(1)}=2\pi$

$f(x,p)=e^{-x}x^{p-1}$ на $p,x>0$ – непрер.

$\int f \rightrightarrows ?$

Фикс. $\forall$ т. $p_0>0$ $\exists c,d$ $0<c<p_0<d$ и рассм. $\Gamma(p)$ на $[c,d]$. Призн. Вейерштрасса $\boxed{\Rightarrow}$: $0<e^{-x}x^{p-1}\leq e^{-x}(x^{c-1}+x^{d-1})$,

$\forall x>0,\ p\in[c,d]$. $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}(x^{c-1}+x^{d-1})dx$ – сх. (по след. призн. сравн) $\xRightarrow[\text{Вейер}]{\text{пр}}\int\text{-л}\rightrightarrows$ на $[c,d]$ $\xRightarrow[\text{Т.9,9*}]{}$ $\Gamma(p)$ – непр. на $[c,d]$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в т. p_0 – непр., а т.к. $\forall p_0>0$, то $\Gamma(p)$ непр. $\forall p>0$.

3) Дифференцируемость

Теор. 10, 10*

$f(x,p)=e^{-x}x^{p-1}$, $\frac{\partial f}{\partial p}(x,p)=e^{-x}x^{p-1}\ln x$ – непр. на $x>0,\ p>0$. $\int\limits_0^\infty f$ сх. $\forall p>0$

$\int\frac{\partial f}{\partial p}\rightrightarrows ?$ Фикс. $\forall$ т. $p_0>0$, $\exists c,d$.

$0<c<p_0<d$; на $[c,d]$ $\int\frac{\partial f}{\partial p}$.

$e^{-x}x^{p-1}|\ln x|\leq e^{-x}|\ln x|(x^{c-1}+x^{d-1})$, $\forall x>0,\ p\in[c,d]$. $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}|\ln x|(x^{c-1}+x^{d-1})dx$ – сх. по след. призн. сравн.

$\xRightarrow[\text{пр. Вей.}]{}\int\frac{\partial f}{\partial p}\rightrightarrows$ на $[c,d]$ $\xRightarrow[\text{Т.10,10*}]{}$ $\Gamma(p)$ – диффер.

на $[c,d]$, $\Gamma'(p)=\int\limits_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}\ln x\,dx \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ в т. p_0 $\exists\, \Gamma'(p_0)$, $\forall p_0>0 \Longrightarrow \forall p>0$.

Т.к. $\frac{\partial f}{\partial p}$ – непр. на $x>0$, $p\in[c,d]$,

$\int \frac{\partial f}{\partial p} \rightrightarrows \underset{T.9,9^*}{\Longrightarrow} \Gamma'(p)$ – непр на $[c,d]$, $\Rightarrow$

$\Longrightarrow$ в т. $p_0 \Longrightarrow \forall p>0$ $\quad \frac{\partial^\ell f}{\partial p^\ell}=e^{-x}x^{p-1}\ln^\ell x$,

$\ell=2,3,\ldots$ $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,|\ln x|^\ell\,(x^{c-1}+x^{d-1})\,dx$ – сх.

$\Longrightarrow \exists\, \Gamma^{(\ell)}(p)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}\ln^\ell x\,dx$, $\forall p>0$.

– непрер на $p>0$. $\Gamma(p)\in C^\infty(0,+\infty)$.

4). <u>Формула приведения</u>

$\Gamma(p+1)=\int\limits_0^{+\infty}\underbrace{e^{-x}}_{\int}\underbrace{x^p\,dx}_{d} \overset{\forall p>0}{=} -e^{-x}x^p\Big|_{x=0}^{\infty}+$

$+p\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}dx = p\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}dx = p\Gamma(p)$.

В $\mathbb{C}$: $f(z+1)=z f(z)$, $z\in\mathbb{C}$. Итак:

$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$ $\quad (2)$ $\quad \forall p>0$.

Фикс $\forall n\in\mathbb{N}$, пусть $p>n-1$. $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)=$

$=p(p-1)\,\Gamma(p-1)=p(p-1)\ldots\underset{p-(n-1)}{(p-n+1)}\,\Gamma(p-n+1)$ $\quad \overset{(3)}{\forall p\to(0,1)}$

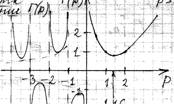
Пусть $p=n$ в (3):

$\Gamma(n+1)=n(n-1)\ldots 2\cdot 1\,\underset{1}{\underset{\parallel}{\Gamma(1)}}=n!$

$\Gamma(n+1)=n!$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$\forall p>0$ обозн $\Gamma(p+1)\equiv p!$.

5). График функции $\Gamma(p)$.



$p>0$ $\Gamma'(p)$ непр. $\Gamma''(p)=\int\limits_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\ln^2 x\,dx>0$ $\Rightarrow \cup \Rightarrow$ ~~$\forall p>0$~~ $\Rightarrow \Gamma'(p)$ — один нуль

$\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1=\Gamma(1)$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}d\sqrt{x}=2\int\limits_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}\approx 1,8$$

$p\to 0+$ $\quad p\Gamma(p)=\dfrac{\Gamma(p)}{1/p}=\Gamma(p+1)\xrightarrow[p\to 0+]{}\Gamma(1)=1$

$\Longrightarrow \Gamma(p)\underset{p\to 0+}{\longrightarrow} 1/p \underset{p\to 0+}{\longrightarrow}\infty$

Док позже. $\Gamma(p+1)=\sqrt{2\pi p}\left(\dfrac{p}{e}\right)^p\left(1+\overline{o}(1)\right)$
$p>>1$

$p<0$ — ?

Пусть $p\in(-1,0)\Longrightarrow p+1\in(0,1)$

$$\Gamma(p)\ \underset{\text{из}(2)}{\overset{def}{=}}\ \frac{\Gamma(p+1)}{p}$$

$p\in(-2,-1)$, $p+1\in(-1,0)$

$$\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p}\quad \text{и т.д.}$$

$\Gamma(p)$ — опред. на $\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$

<u>2°. Бета-функция Эйлера (B-функция)</u>

$$B(p,q)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (4) \qquad 1772\text{г}$$

<u>1) $\mathcal{D}(B)$</u>

$$B(p,q) = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx + \int_{1/2}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \equiv$$

$\equiv I_1 + I_2$.

I_1: $(1-x)^{q-1}$ – непр на $[0, \frac{1}{2}] \Rightarrow \exists C_1, C_2$ – const > 0: $C_1 x^{p-1} \leq x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq C_2 x^{p-1}$

$\int_0^{1/2} x^{p-1}dx$ – сх. $\Leftrightarrow p-1 > -1$ $\boxed{p>0} \Rightarrow$

$\Rightarrow I_1$ – сх. для $p>0$ $\forall q \in \mathbb{R}$, расх $\forall p \leq 0$, $\forall q \in \mathbb{R}$.

I_2: x^{p-1} – непр. на $[\frac{1}{2}, 1]$, $\forall p \in \mathbb{R}$

$\exists C_1, C_2 > 0$: $C_1(1-x)^{q-1} \leq x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq$
$\leq C_2(1-x)^{q-1}$. $\int_{1/2}^{1}(1-x)^{q-1}dx$ – сх. $\Leftrightarrow q-1 >$
> -1, $q>0$. I_2 – сх. $q>0$, $\forall p \in \mathbb{R}$,
расх $\forall q \leq 0$, $\forall p \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{D}(B) = \{p, q : p>0, q>0\}$

2) Непр-ть, дифф-ть $\Rightarrow$ из ф-лы, связыв B- и Γ-ф-ции

3) Симметричность

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \underset{\substack{t=1-x,\ x=1-t\\ dx=-dt}}{=} -\int_1^0 dt = \int_0^1 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt$$

$= B(q,p)$ (5) $\Rightarrow B(p,q) = B(q,p)$ (5).

4) Формулы приведения

$$B(p, q+1) = \int_0^1 \underbrace{x^{p-1}}_{\int}\underbrace{(1-x)^q}_{d} dx \underset{\forall p,q>0}{=} \underbrace{\frac{x^p}{p}(1-x)^q\Big|_{x=0}^{1}}_{=0} +$$

$$+\frac{q}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx = \underbrace{\frac{q}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx}_{\frac{q}{p}B(p+1,\,q)} =$$

$$= \underbrace{\frac{q}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}_{\frac{q}{p}B(p,q)} - \underbrace{\frac{q}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q}dx}_{\frac{q}{p}B(p,\,q+1)}$$

$$\Longrightarrow B(p,q+1) = \frac{q}{p+q}B(p,q) \quad \forall p,q>0$$

$$\frac{q}{p}B(p+1,q) = B(p,q+1) = \frac{q}{p+q}B(p,q)$$

$$\Longrightarrow B(p+1,q) = \frac{p}{p+q}B(p,q)$$

5) Связь между интегралами Эйлера

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

$$x = \frac{1}{1+t},\quad 1+t = \frac{1}{x},\quad t = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

$$t = \frac{1-x}{x},\quad 1-x = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}$$

$$dx = -\frac{dt}{(1+t)^2}$$

$$B(p,q) \underset{(-\int)}{=} \int_0^{\infty}\frac{1}{(1+t)^{p-1}}\left(\frac{t}{1+t}\right)^{q-1}\frac{dt}{(1+t)^2} =$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt \underset{(5)}{=} \int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt$$

$$B(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\, dt, \quad \forall p,q>0 \quad (6)$$

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \underset{\substack{x=ty,\ t>0 - \text{параметр} \\ dx = t\,dy}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-ty} (ty)^{p-1} t\,dy =$$

$$= t^p \int_0^{+\infty} e^{-ty} y^{p-1} dy$$

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p} = \int_0^{+\infty} e^{-ty} y^{p-1} dy, \quad \forall p>0 \quad (7)$$

В (7) заменим t на $(1+t)$, p на $p+q$

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int_0^{+\infty} e^{-(1+t)y} y^{p+q-1} dy \quad (8)$$

Умн. на t^{p-1}, $\int_0^{+\infty} dt$:

$$\Gamma(p+q) \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt = \Gamma(p+q) B(p,q) =$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{p-1} dt \int_0^{+\infty} e^{-(1+t)y} y^{p+q-1} dy \overset{?}{=} \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} t^{p-1} \cdot$$

$$\cdot e^{-(1+t)y} y^{p+q-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{p+q-1} dy \int e^{-ty} t^{p-1} dt =$$

$$\underset{(7)}{=} \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{p+q-1} \frac{\Gamma(p)}{y^p} dy = \Gamma(p) \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{q-1} dy =$$

$$= \Gamma(p) \cdot \Gamma(q) \Longrightarrow B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (9)$$

? $\int \leftrightarrow \int$ $p, q - ?$

Исп. теор. 11. $f(t,y) = t^{p-1} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y}$

$t, y \geq 0$. Пусть $p, q \geq 1$, $f(t,y) \geq 0$ и непрер. на $t, y \geq 0$.

$$\int_0^\infty f(t,y)\,dt = y^{p+q-1} e^{-y} \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-ty} dt \overset{(7)}{=}$$

$$\overset{(7)}{=} y^{p+q-1} e^{-y} \frac{\Gamma(p)}{y^p} \text{ — непр. на } y \geq 0.$$

$$\int_0^\infty f(t,y)\,dy = t^{p-1} \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy =$$

$$= t^{p-1} \frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} \text{ — непрер. на } t \geq 0$$

$$\int_0^{+\infty} \left[y^{p+q-1} \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-(1+t)y} dt \right] dy =$$

$$= \Gamma(p) \cdot \Gamma(q) \text{ — было выше } \underset{T.11}{\Longrightarrow}$$

$$\underset{T.11}{\Longrightarrow} \otimes \Longrightarrow (9) \text{ верна для } p, q \geq 1$$

А у нас $p, q > 0$. Пусть $p, q > 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow p+1, q+1 > 1 \Longrightarrow B(p+1, q+1) \overset{(9)}{=}$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} \qquad \overset{\text{ф-лы приведения}}{=} \frac{q}{p+q+1} B(p+1, q) = \frac{q}{p+q+1} \frac{p}{p+q} B(p,q)$$

ф-лы приведения

$$\frac{p\Gamma(p)\, q\Gamma(q)}{(p+q+1)(p+q)\Gamma(p+q)} = \frac{pq}{(p+q)(p+q+1)} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$\Gamma(p+q+1)$$

$\longrightarrow \left\{ \frac{pq}{(p+q+1)(p+q)} > 0 \right\} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \\ \forall p,q>0 \end{array}}$

§ 5. Асимптотическая формула для функции $\Gamma(\lambda+1)$ при $\lambda \to +\infty$. Формула Стирлинга.

$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1+\alpha_n)$, $\alpha_n \to 0$, $n\to\infty$

$\Gamma(n+1)$ $\boxed{n>>1}$ — ф-ла Стирлинга. (Муавра)

Покажем: $\alpha_n = \underline{O}\left(\frac{1}{n}\right) = ..$

$\Gamma(\lambda+1) = \int_0^{+\infty} t^\lambda e^{-t}dt$ (1)

$\Gamma(\lambda+1) = \sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda \left(1+\underline{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$, $\lambda\to+\infty$

Фикс. $\forall a>0$, $n\in N$.

Лемма. Пусть ф-я $f(t)$ интегрируема на $[-a,a]$, допускает представление $f(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} c_k t^k + \underline{O}(t^{2n})$ (2) $\Longrightarrow \exists \Lambda = \Lambda(a,n) > 1 : \forall \lambda > \Lambda$

$$\int_{-a}^{a} f(t)e^{-\lambda t^2}dt = \sum_{l=0}^{n-1} c_{2l}\frac{\Gamma(l+\frac{1}{2})}{\lambda^{l+\frac{1}{2}}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}\right) \quad (3)$$

Δ Подст. пр. часть (2) в лев. часть (3):

$\int_{-a}^{a} \underbrace{t^{2l-1}e^{-\lambda t^2}}_{\text{нечётн}} dt = 0$ (если k-нечётн)

$l = 1, ..$

$$\int_{-a}^{a} \underbrace{t^{2l} e^{-\lambda t^2}}_{\text{четн}} dt = 2\int_0^a t^{2l} e^{-\lambda t^2} dt =$$

$l = 0, 1, \dots, n$

$$= 2\int_0^{+\infty} t^{2l} e^{-\lambda t^2} dt - 2\int_a^{+\infty} t^{2l} e^{-\lambda t^2} dt \equiv I_1 \;\; I_2$$

$$I_1 = 2\int_0^{+\infty} t^{2l} e^{-\lambda t^2} dt = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{2l}{2}} e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{\lambda x}} =$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\lambda t^2 = x,\ \lambda > 0\\ &t = \oplus\sqrt{\tfrac{x}{\lambda}} \geq 0\\ &dt = \frac{dx}{2\sqrt{\lambda x}} \end{aligned}}$$

$$= \frac{1}{\lambda^{l+\frac{1}{2}}}\int_0^{+\infty} x^{l-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \frac{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)}{\lambda^{l+1/2}}, \quad \forall l = \overline{0,n}$$

$$l - \frac{1}{2} = l - 1 + \frac{1}{2} = \left(l+\frac{1}{2}\right) - 1$$

$$I_2 = 2\int_a^{+\infty} t^{2l} e^{-\lambda t^2} dt < 2e^{-(\lambda-1)a^2}\int_a^{+\infty} t^{2l} e^{-t^2} dt =$$

$$\boxed{e^{-\lambda t^2} = e^{-\lambda t^2 + t^2 - t^2} = e^{-(\lambda-1)t^2} e^{-t^2} < e^{-(\lambda-1)a^2} e^{-t^2} \quad \text{Пусть } \lambda > 1,\ t \geq a}$$

$$= Ce^{-\lambda a^2}, \quad C = 2e^{a^2}\int_a^{+\infty} t^{2l} e^{-t^2} dt \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow I_2 = \underline{O}\left(e^{-\lambda a^2}\right), \quad \forall \lambda > 1$$

$$\Longrightarrow \int_{-a}^{a} t^{2l} e^{-\lambda t^2} dt = \frac{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)}{\lambda^{l+1/2}} + \underline{O}\left(e^{-\lambda a^2}\right), \quad l = 0, 1, \dots, n;\ \forall \lambda > 1. \quad (4)$$

$$\left|\int_{-a}^{a} \underline{O}\left(t^{2n}\right) e^{-\lambda t^2} dt\right| \leq \int_{-a}^{a} \left|\underline{O}\left(t^{2n}\right)\right| e^{-\lambda t^2} dt \leq$$

$$\leq C_1 \int_{-a}^{a} t^{2n} e^{-\lambda t^2} dt \overset{(4)}{=} C_1 \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\lambda^{n+1/2}} + \underline{O}\left(e^{-\lambda a^2}\right)$$

$\forall \lambda > 1 \quad e^{-\lambda a^2} \downarrow 0 \quad \frac{1}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}},\ \forall n$

$\exists \Lambda = \Lambda(a, n) > 1: \ \forall \lambda > \Lambda \ e^{-\lambda a^2} < \frac{1}{\lambda^{n+1/2}}$

$\Longrightarrow \forall \lambda > \Lambda$ спр-ва ф-ла (3). Δ

Возвр. к инт. (1): $\Gamma(\lambda+1) = \int_0^{+\infty} t^{\lambda} e^{-t} dt =$ $\quad \lambda > 1$

$$\boxed{\begin{aligned} & t = \lambda(1+x),\ x = \frac{t}{\lambda} - 1 \\ & dt = \lambda dx \end{aligned}}$$

$$= \int_{-1}^{+\infty} \left[\lambda(1+x)\right]^{\lambda} e^{-\lambda(1+x)} \lambda dx =$$

$$= \lambda^{\lambda+1} e^{-\lambda} \int_{-1}^{+\infty} (1+x)^{\lambda} e^{-\lambda x} dx =$$

$(1+x)^{\lambda} = e^{\ln(1+x)^{\lambda}} = e^{\lambda \ln(1+x)}$

$$= \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda} \lambda \int_{-1}^{+\infty} e^{-\lambda \underbrace{(x - \ln(1+x))}_{\geq 0}} dx$$

Обозн. $g^2(x) = x - \ln(1+x) \geq 0 \ \forall x > -1$

$g(x) = \operatorname{sgn} x \sqrt{x - \ln(1+x)}$ – монот. возрастает

$$\Gamma(\lambda+1) = \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda} \lambda \int_{-1}^{\infty} e^{-\lambda g^2(x)} dx \quad (5) = \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda} I_{\lambda}$$

$I_\lambda = \int\limits_{-1}^{\infty} e^{-\lambda g^2(x)}\,dx$

Св-ва ф-ции $y=g(x)$.

Ф-я опр-на на $(-1,+\infty)$, монотонно возрастает, принимает все знач. на $(-\infty,+\infty)$, явл. беск. диф-мой, $g(0)=0$.

$\Longrightarrow \exists$ обратная ф-я $x=g^{-1}(y)\equiv\varphi(y)$, опр-ная на всей числ. прямой, монот. возрастающая, принимает все значения на $(-1,\infty)$, беск. диф-мая, $\varphi(0)=0$.

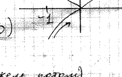
△ Монотонность $y=g(x)$.

$$\left(g^2(x)\right)' = \left(x-\ln(1+x)\right)' = 1-\frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1}$$

$$\frac{x}{x+1}: \begin{cases} >0, & x>0 \\ <0, & -1<x<0 \end{cases} \Longrightarrow g^2: \begin{cases} \nearrow, & x>0 \\ \searrow, & x\in(-1,0) \end{cases}$$

$$|g(x)|: \begin{cases} \nearrow, & x>0 \\ \searrow, & x\in(-1,0) \end{cases}$$

$$g(x): \begin{cases} \nearrow, & x>0 \\ \nearrow, & x\in(-1,0) \end{cases}$$



$x<0 \quad g(x)<0$

$g'(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}>0$ (покажем потом)

Бесконечная диф-ть. Если $x\neq 0$, $g(x)\in C^\infty\left((-1,+\infty)\setminus 0\right)$, $x=0$?

$$g^2(x) = x-\ln(1+x) = x-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\right.$$

$$= x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} - \ldots\right) \equiv x^2 h(x),$$

$$h(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k+2}, \quad R = \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = 1$$

$$\Longrightarrow h(x) \in C^{\infty}(-1, 1)$$

$h(0) = \frac{1}{2}$, $h(x) \neq 0$ $\forall x$, т.к. $g^2(x) \neq 0$ при $x \neq 0$

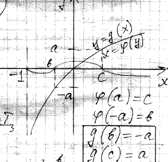
$$\Longrightarrow g(x) = x\sqrt{h(x)} \in C^{\infty}(-1, 1), \quad g' = \frac{1}{\sqrt{h}} \neq 0$$

$$\Longrightarrow g(x) \in C^{\infty}(-1, +\infty).$$

$$\varphi'(y) = \frac{1}{g'(x) \neq 0}, \quad \forall \varphi^{(l)}(y) = \frac{g}{(g'(x))} \quad l = 1, 2 \quad \neq 0$$

$$\Longrightarrow \varphi \in C^{\infty}(-\infty, +\infty)$$

Фикс. $\forall y = a > 0$.



$$I_\lambda = \int_{-1}^{\infty} e^{-\lambda g^2(x)} dx =$$

метод Лапласа

$$= \int_{-1}^{b} + \int_{b}^{c} + \int_{c}^{+\infty} = I_1 + I_2 + I_3$$

$\varphi(a) = c$

$\varphi(-a) = b$

$$\boxed{\begin{array}{l} g(b) = -a \\ g(c) = a \end{array}}$$

$$I_1 = \int_{-1}^{b} e^{-\lambda g^2(x)} dx \leqslant e^{-\lambda a^2} \int_{-1}^{b} 1\,dx = e^{-\lambda a^2}(1 - |b|)$$

$x \in (-1, b)$, $y \leqslant -a$

$g(x) \leqslant -a \Longrightarrow g^2(x) \geqslant a^2$

$I_1 = \underline{O}\left(e^{-\lambda a^2}\right)$ $\forall \lambda > 0$

$$I_3 = \int_{c}^{+\infty} e^{-\lambda g^2(x)} dx \leqslant e^{-(\lambda-1)a^2} \int_{c}^{\infty} e^{-g^2(x)} dx \;\; =$$

$x \geq c \Longrightarrow g(x) \geq a$, $g^2(x) \geq a^2$; $e^{-\lambda g^2(x) \pm g^2(x)} = e^{-(\lambda-1)g^2(x)} \cdot e^{-g^2(x)}$, $\lambda > 1$

$e^{(\lambda-1)a^2} e^{-g^2(x)}$ $\leqslant$

$\ominus$ $\tilde{C} e^{-\lambda a^2}$, $\tilde{c} = e^{a^2} \int\limits_c^{\infty} e^{-g^2(x)} dx$

$\int (x+1) e^{-x} dx - cx$

$\Longrightarrow I_3 = \underline{O}\left(e^{-\lambda a^2}\right), \ \forall \lambda > 1$

$I_2 = \int\limits_b^c e^{-\lambda g^2(x)} dx = \{ t = g(x), \ x = \varphi(t),$

$dx = \varphi'(t) dt \} = \int\limits_{-a}^{a} e^{-\lambda t^2} \varphi'(t) dt$

Фикс. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in C^{\infty}$

$\varphi'(t) = \sum\limits_{k=0}^{2n-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!} t^k + \underline{O}\left(t^{2n}\right)$ —

— ф-ла Маклорена для $\varphi'(t)$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow I_2 \overset{(3)}{=} \sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(2\ell+1)}(0)}{(2\ell)!} \frac{\Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right)}{\lambda^{\ell+\frac{1}{2}}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^{n+1/2}}\right)$

$\Longrightarrow \exists \Lambda > 1 : \forall \lambda > \Lambda \quad e^{-\lambda a^2} < \frac{1}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}$

$\Longrightarrow \underline{O}\left(e^{-\lambda a^2}\right) = \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^{n+1/2}}\right)$

$\Longrightarrow \Gamma(\lambda+1) = \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda} \lambda \left[\sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(2\ell+1)}(0)}{(2\ell)!} \frac{\Gamma\left(\ell+\frac{1}{2}\right)}{\lambda^{\ell+\frac{1}{2}}} + \right.$

$\left. + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}\right) \right] = \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda} \sqrt{\lambda} \left[\sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(2\ell+1)}(0)}{(2\ell)!} \frac{\Gamma\left(\ell+\frac{1}{2}\right)}{\lambda^{\ell}} + \right.$

$\left. + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^{n}}\right) \right]$ $\forall \lambda > \Lambda(a, n) > 1$ — асимптотич. ф-ла

для $\Gamma(\lambda + 1)$ при $\lambda \to +\infty$.

Найдём главн член асимптотич ф-лы.
Пусть $n=1$. $\Gamma(\lambda+1)=\left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\sqrt{\lambda}\left[\varphi'(0)\underbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}_{\sqrt{\pi}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$ $\quad \varphi'=\frac{1}{g'}$

Вычисление $\varphi^{(k)}(0)$:

$$g^2(x)=x-\ln(1+x)$$

$$\left(g^2(x)\right)'=2gg'(x)=\frac{x}{1+x}$$

$$\Longrightarrow g'(x)=\frac{x}{2g(1+x)}=\frac{\varphi(t)}{2t(1+\varphi(t))}$$

$$\Longrightarrow \varphi'(t)=\frac{1}{g'(x)}=\frac{2t(1+\varphi(t))}{\varphi(t)} \Big| \cdot\varphi(t)$$

$$\boxed{\varphi(t)\varphi'(t)=2t+2t\varphi(t)} \quad \frac{d}{dt}$$

для $t=0$ тоже верно $(0=0)$

$\forall t\in\mathbb{R}$

$$\varphi'^2(t)+\varphi(t)\cdot\varphi''(t)=2+2\varphi(t)+2t\varphi'(t)$$

отсюда все $\varphi^{(k)}(0)$...

$$t=0:\ \varphi'^2(0)+0=2+2\cdot0+2\cdot0$$

$$\Longrightarrow \varphi'^2(0)=2,\ \varphi'(0)=\oplus\sqrt{2}$$

$$\varphi\nearrow \quad \left(g'(0)=\frac{1}{\varphi'(0)}=\frac{1}{\sqrt{2}}>0\right)$$

$$\Longrightarrow \Gamma(\lambda+1)=\left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\sqrt{\lambda}\left(\sqrt{2\pi}+\underline{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Gamma(\lambda+1)=\sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\left[1+\underline{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]} \quad \forall\lambda>\Lambda$$

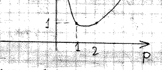
Пусть $\lambda=n\in\mathbb{N}$.

$\Gamma(n+1) = n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left[1 + \underline{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right], \forall n$

— ф-ла Стирлинга. $\varphi^{(3)}(0) = \frac{\sqrt{2}}{3}, \varphi^{(5)}(0) = \frac{\sqrt{2}}{9}$

$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\underline{O}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{571}{n^3} - \frac{139}{2488320n^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)$$



$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$q = q_0 = const.$ $y = B(p, q_0)$ — график?

$y = B(p,p)$ — ?

Глава 9. Ряды Фурье.

1811г. $Q \sim k\nabla t$.

$$\boxed{\begin{array}{ll} u_t - \underbrace{u_{xx}}_{\Delta u} = f(x,t) & v''(x) + \lambda v = 0 \\ x \in (-\pi, \pi) & v(-\pi) = v(\pi) \\ u(0,x) = u_0(x) & v'(-\pi) = v'(\pi) \\ & \{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \end{array}}$$

Методы реш-я диф ур-й:

1. Аналит. решение
2. Ф-я Грина
3. Метод Фурье
4. Численный

$E^n \quad f=\sum_{j=1}^{n} c_j \Psi_j \quad \{\Psi_j\}_{j=1}^{n}$

$E^\infty = E \quad f \overset{?}{\sim} \sum_{j=1}^{\infty} c_j \Psi_j$

§1. Задача о наилучшем приближении евклидова пространства.

Рассм. бесконечномерн. лин. пр-ва E ($\forall n\in N\ \exists\ n$ лин. независ. эл-тов E)

Опред. 1. Пр-во E наз. евклидовым, если $\forall f, g \in E$ — можно пост. в соответствие некот. число $(f,g)\in \mathbb{R}$, наз. скалярным произв., так что

1°. $(f,g)=(g,f)$, $\forall f,g\in E$;

2°. $(\alpha f_1+\beta f_2, g)=\alpha(f_1,g)+\beta(f_2,g)$, $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\forall f_1,f_2,g\in E$;

3°. $(f,f)>0$, если $f\neq\theta$

$(f,f)=0$, если $f=\theta$

Пример. $E_0[a,b]$ — пр-во всех кус.-непрер. на $[a,b]$ ф-ций. Ф-я $f(x)$ наз. кус.-непр. на $[a,b]$, если она непр. на $[a,b]$, за искл., быть может, конеч. числа точек $x_i\in(a,b)$, $i=\overline{1,n}$, в кот-х $f(x)$ имеет разрыв 1го рода, $\exists f(x_i\pm 0)$, в т x_i

$$f(x_i)=\frac{f(x_i+0)+f(x_i-0)}{2}, \quad i=\overline{1,n}$$

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx,$$

$f=\theta: \ f\equiv 0$ на $[a,b]$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_i)=1 \\ f(x_i)=\alpha f(x_i+0) \\ \alpha f(x_i+0)+\beta f(x_i-0) \end{array}\right) ?\ 3°$$

Опред2. Лин пр-во $\tilde{E}$, в котором вып. 1°, 2° аксиомы скалярн. произведение а 3° заменена на $\tilde{3}°$ $(f,f)\geq 0,\ \forall f\in\tilde{E}$,

наз-ся почти евклидовым, обозн $\tilde{E}$.

Любое евклид. пр-во явл. почти евклид. Обратное не обязат. верно.

$\Rightarrow$ если д-ть утв. для $\tilde{E}$, то оно будет верно и для $\forall E$.

$E_0[a,b]$ - беск мерное, т.к. $\forall n$ $\{x^i\}_{i=1}^n$ - лин. независ на $[a,b]$

Пример. $L[a,b]$ - пр-во всех интегрируемых (по Риману) на $[a,b]$ ф-ций.

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

$$(f,f)=\int_a^b f^2(x)\,dx\geq 0$$

Из $\int_a^b f^2(x)\,dx=0 \not\Rightarrow f=\theta,\ f\equiv 0$ на $[a,b]$

f - конеч или счётн числе точек

может $\neq 0 \Rightarrow L[a,b]$ - почти евклид., но не явл. евклидовым
Беск мерн: $\forall n \{x^i\}_{i=1}^n$ - лин независ
$E_0[a,b] \subset L[a,b]$.

<u>Опред. 3.</u> Лин пр-во L наз. нормированным, если $\forall f \in L$ можно поставить в соответствие вещ. число $\|f\|$ - норму f, так что:

1°. $\|f\| > 0$, если $f \neq \theta$
$\|f\| = 0$, если $f = \theta$

2°. $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

3°. $\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$
$\forall f_1, f_2 \in L$ - нер-во тр-ка
(нер-во Минковского)

<u>Опред. 4.</u> Если в предыд. опред. заменить 1° на $\tilde{1}°$: $\|f\| \geq 0$ $\forall f \in L$, то пр-во L наз. почти нормированным, а $\|f\|$ - наз нормой f.

<u>Теор 1.</u> В $\forall \tilde{E}$ имеет место нер-во Коши - Буняковского: $\forall f, g \in \tilde{E}$
$$(f,g)^2 \leq (f,f)(g,g) \quad (1)$$
$\triangle$ Пусть $g^2 = (g,g) \neq 0$
Рассм $(f - \lambda g)^2 = \lambda^2 (g,g) - 2\lambda (f,g) + (f,f) \geq 0$
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ Кв. трехчлен $\frac{D}{4} \leq 0$

$\frac{D}{4} = (f,g)^2 - (f,f)(g,g) \leqslant 0 \Longrightarrow (1).$

Если $(g,g)=0$, а $(f,f)\neq 0$, то рассм.

$(\lambda f - g)^2 = \lambda^2 (f,f) - 2\lambda (f,g) + (g,g) \geqslant 0$

$\forall \lambda \Longrightarrow \frac{D}{4} = (f,g)^2 - (f,f)(g,g) \leqslant 0 \Rightarrow (1).$

$(f,f) = (g,g) = 0$

$(f+g, f+g) = \overset{=0}{(f,f)} + 2(f,g) + \overset{=0}{(g,g)} \geqslant 0$

$\Longrightarrow (f,g) \geqslant 0$

$(f-g, f-g) = \overset{=0}{(f,f)} - 2(f,g) + \overset{=0}{(g,g)} \geqslant 0$

$\Longrightarrow (f,g) \leqslant 0$

$\Longrightarrow (f,g) = 0 \Longrightarrow (1)$ верно Δ

Теор. 2. Любое евклидово (почти евклид.) пр-во можно сделать нормированным (почти нормир.), положив $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$, $\forall f$ (2)

(и только так)

Δ 1°, 2° акс. нормы — очевидно (и $\tilde{1}^\circ$).

3°. $\|f_1 + f_2\| = \sqrt{(f_1+f_2, f_1+f_2)} =$

$= \sqrt{\underbrace{(f_1,f_1)}_{\|f_1\|^2} + 2(f_1,f_2) + \underbrace{(f_2,f_2)}_{\|f_2\|^2}} \underset{(1)}{\leqslant}$

$\underset{(1)}{\leqslant} \sqrt{\|f_1\|^2 + 2\underbrace{\sqrt{(f_1,f_1)}}_{\|f_1\|}\underbrace{\sqrt{(f_2,f_2)}}_{\|f_2\|} + \|f_2\|^2} =$

$= \sqrt{(\|f_1\| + \|f_2\|)^2} = \|f_1\| + \|f_2\|$ Δ

$\Rightarrow$ н-во К-Б: $|(f,g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$

$L[a,b]$, $E[a,b]$

$$\|f\|_{L[a,b]} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

f и $g \in \widetilde{E}$ наз. ортогональными, если $(f,g) = 0$.

Фикс. $\forall$ посл-ть эл-тов $\{\Psi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\Psi_i \in \widetilde{E}$

Сист. $\{\Psi_i\}$ наз. ортогональной, если $(\Psi_i, \Psi_j) = 0$, $i \neq j$, $i,j = 1,2,$

Напр, в $L[-\pi,\pi]$ $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ - ортогональная сист.

Сист. $\{\Psi_i\}$ наз. ортонормированной, если $(\Psi_i, \Psi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, $i,j = 1,2,\ldots$

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$ -

- ОНС - в $L[-\pi,\pi]$, - тригонометрическая система функций.

Рассм. ОНС $\{\Psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ в $\widetilde{E}$, $\forall f \in \widetilde{E}$

Фикс. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall$ посл. $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$

Рассм. лин. комб. $\sum_{i=1}^{n} c_i \Psi_i$ (1)

Опред. Отклонением эл-та $g \in \widetilde{E}$ от эл-та

$f \in \hat{E}$ наз $\|f-g\|_{\hat{E}}$. Какая из лин комб. (1) наименее откл от f?

$$\min_{\{c_i\}_{i=1}^n} \|f - \sum_{i=1}^n c_i \Psi_i\| \left(= \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{i=1}^n f_i^2} \text{ - спойлер}\right)$$

$$\|f - \sum_{i=1}^n c_i \Psi_i\|^2 = \left(f - \sum_{i=1}^n c_i \Psi_i, f - \sum_{k=1}^n c_k \Psi_k\right) =$$

$$= (f, f) - 2 \sum_{i=1}^n c_i \underbrace{(f, \Psi_i)}_{f_i} + \sum_{i=1}^n c_i^2 =$$

$$\sum_{i,k=1}^n c_i c_k (\Psi_i, \Psi_k) = \sum_{i=1}^n c_i^2 \overset{1}{(\Psi_i, \Psi_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(c_i^2 - 2 c_i f_i \pm f_i^2\right) + \|f\|^2 =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^n (c_i - f_i)^2}_{\geq 0} + \|f\|^2 - \sum_{i=1}^n f_i^2 \text{ - min при } c_i = f_i$$

<u>Опред</u> Рядом Фурье эл-та $f \in \tilde{E}$ по ОНС $\{\Psi_i\} \subset \hat{E}$ наз. след. ряд

$\sum_{i=1}^\infty f_i \Psi_i$, $f_i = (f, \Psi_i)$ - наз. коэффициентами Фурье эл-та f по сист. $\{\Psi_i\}$.

$\sum_{i=1}^n f_i \Psi_i$ - наз. n-ой частич суммой ряда Фурье

Докажем след. теор

<u>Теор 3</u> Среди всевозможных лин комб (1) наименьшее отклонение от произв. выбранного эл-та $f \in \hat{E}$ имеет n-я

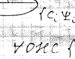
частич. сумма ряда Фурье этого эл-та по $\{\Psi_i\}$

Следствие 1 $\forall \tilde{E}$, $\forall f\in\tilde{E}$, $\forall$ ОНС $\{\Psi_i\}\subset\tilde{E}$, $\forall n\in N$, $\forall \{c_i\}$ — пост. вещ. справедл. нер-во: $\|f-\sum_{i=1}^{n} c_i\Psi_i\|^2 \geq \|f\|^2-\sum_{i=1}^{n} f_i^2$ (2)

Следствие 2 $\forall \tilde{E}$, $\forall f\in\tilde{E}$, $\forall$ ОНС $\{\Psi_i\}\subset\tilde{E}$, $\forall n\in N$: $\|f-\sum_{i=1}^{n} f_i\Psi_i\|^2 = \|f\|^2-\sum_{i=1}^{n} f_i^2$, (3)

наз. тождеством Бесселя.

Аналогия



$\forall$накл. наим. длину имеет перпендикуляр.

Теор. 4 $\forall \tilde{E}$, $\forall f\in\tilde{E}$, $\forall$ ОНС $\{\Psi_i\}\subset\tilde{E}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 \leq \|f\|^2 \quad (4)$$ — нер-во Бесселя

выкинув конечн. число направлений, все равно получим беск. мал. $\Rightarrow$ обобщ. т-мы Пифагора.

Δ Из (3): $\|f\|^2-\sum_{i=1}^{n} f_i^2 \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} f_i^2 \leq \|f\|^2$, — частич. суммы ряда с неотриц. членами ограничены $\xRightarrow{\text{Т.2 гл.1}}$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2$ — сх-ся, переходим к пределу при $n\to\infty$ в последн. нер-ве $\Rightarrow$ (4) Δ

$f_i \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$ $\forall f$, $\{c_k\}$ — мог. быть коэф. Фурье к-л $f\in\tilde{E}$, необх., чтобы $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2<\infty$

$c_k=\frac{1}{\sqrt{k}}$ — не м.б. коэф. Фурье никакого эл-та, никакого $\tilde{E}$.

Рассм. пр-во $L[-\pi,\pi]$, ОНС

Триг. ф-й $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$\forall f(x) \in L[-\pi,\pi]$ её тригонометрич. ряд Фурье $f(x) \sim \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty}(f_k' \cos kx + f_k'' \sin kx)$, $f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$,

$f_k' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$, $k=1,2,\ldots$

$f_k'' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$, $k=1,2,\ldots$

Нер-во Бесселя:

$$f_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

Этот ряд будем записывать в след виде:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$, $k=0,1,2,\ldots$

$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$, $k=1,2,\ldots$

Нер-во Бесселя:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

$$a_k, b_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad \forall f \in L[-\pi,\pi]$$

§2 Свойства полноты и замкнутости ОНС.

Рассм $\forall \tilde{E}$, $\forall$ послед. его эл-тов $\{\Psi_i\}_{i=1}^{\infty}$

<u>Опред.</u> Система $\{\Psi_i\}$ наз. замкнутой
лич. в пр-ве $\tilde{E}$, если $\forall f \in \tilde{E}$ и $\forall \varepsilon > 0$
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, числа $c_1, \dots, c_{n_0} \in \mathbb{R}$, такие
что $\left\| f - \sum_{i=1}^{n_0} c_i \Psi_i \right\|_{\tilde{E}} < \varepsilon$, (1)

т.е $\forall$ эл-т f пр-ва $\tilde{E}$ можно с
любой степенью точности приблизить
по норме $\tilde{E}$ линейн. комб. конеч.
числа эл-тов $\{\Psi_i\}$

<u>Теор 5</u> Пусть ОНС $\{\Psi_i\}$ эл-тов
пр-ва $\tilde{E}$ явл. замкнутой в $\tilde{E}$.
Тогда $\forall f \in \tilde{E}$ нер-во Бесселя
переходит в точное р-во $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 = \|f\|^2$,
вид: наз. р-вом Парсеваля
(ур-е замкнутости Ляпунова).

Δ Из опред. замкн $\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\forall f \in \tilde{E}$
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, c_k, $k = \overline{1, n_0}$: $\sqrt{\varepsilon} > \left\| f - \sum_{k=1}^{n_0} c_k \Psi_k \right\|$

$$\Longrightarrow \varepsilon > \left\| f - \sum_{k=1}^{n_0} c_k \Psi_k \right\|^2 \underset{\substack{\text{сл. 1} \\ \text{из Т.3}}}{\geqslant} \|f\|^2 -$$

$$- \sum_{k=1}^{n_0} f_k^2 \underset{\forall n > n_0}{\geqslant} \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \underset{\substack{\text{сл. 2} \\ \text{из Т.3}}}{=} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} f_k \Psi_k \right\|^2 \geqslant 0$$

$$\Longrightarrow 0 \leqslant \|f\|^2 - \overbrace{\sum_{k=1}^{n} f_k^2}^{\geqslant 0 \text{ из нер. Бесселя}} < \varepsilon, \quad \forall n \geqslant n_0$$

$\Longrightarrow \sum f_k^2$ сход. и справедл

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2 \quad \Delta$$

Теор. 6 Пусть ОНС $\{\Psi_k\}$ эл-тов $\tilde{E}$ явл. замкнутой в $\tilde{E}$. Тогда для $\forall$ эл-та $f \in \tilde{E}$ ряд Фурье эл-та f по сист. $\{\Psi_k\}$ сх-ся к нему по норме $\tilde{E}$, т.е. $\lim_{n\to\infty} \|f - \sum_{k=1}^{n} f_k \Psi_k\|_{\tilde{E}} = 0$

Δ Из следств. 2 из Теор 3:

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} f_k \Psi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \xrightarrow[n\to\infty]{T.5} 0, \quad \forall n \in N$$

т.е. ряд Фурье сх. к f по норме $\tilde{E}$ (сильная сх-ть): $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \Psi_k \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} f$ $\Rightarrow$

$L[-\pi, \pi]$ — потом.

$L[a, b]$ — сх-ть по норме — ?

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} f_k \Psi_k\| = \sqrt{\int_a^b \left(f - \sum_{k=1}^{n} f_k \Psi_k\right)^2 dx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

— сх-ть в среднем.

Опред. Сист. $\{\Psi_k\}$ эл-тов пр-ва $\tilde{E}$ наз. полной в $\tilde{E}$, если в этом пр-ве не $\exists$ эл-та, отличного от нулевого, ортогонального сразу ко всем эл-там системы $\{\Psi_k\}$, т.е. $\underset{f \in \tilde{E}}{(f, \Psi_k)} \underset{\forall k}{= 0} \Leftrightarrow f = \theta$.

Теор. 7 Пусть E — евклид. пр-во. Всякая ОНС $\{\Psi_k\}$, замкнутая в E, явл. полной в E.

Δ Пусть $\exists f \in E: f \perp \Psi_k,\ k=1,2,\dots$ т.е. $(f, \Psi_k) = f_k = 0,\ \forall k \underset{\text{Теор. 5}}{\Longrightarrow} \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = 0$ $\Longrightarrow \|f\| = 0 \underset{E}{\Longrightarrow} f = \theta$ Δ

<u>Теор. 8</u> Пусть E — евклид. пр-во. Для $\forall$ полной (а тем более замкнутой) сист. $\{\Psi_k\}$ эл-тов пр-ва E, два различн. эл-та f и g пр-ва E не могут иметь одинаковые ряды Фурье по $\{\Psi_k\}$ (т.е. $f_k = g_k,\ \forall k$)

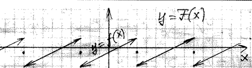
Δ Пусть $f_k = g_k\ \forall k \Longrightarrow (f, \Psi_k) = (g, \Psi_k)$ или $(f, \Psi_k) - (g, \Psi_k) = (f-g, \Psi_k) = (f-g)_k = 0\ \forall k$, т.к. $\{\Psi_k\}$ — полна, то $f-g = \theta$, $f = g$. Δ

§3. Замкнутость тригонометрической системы функций.

Рассм. $\forall f(x) \in L[-\pi, \pi]$, триг. сист. ф-ций $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ — ОНС.

<u>Опред.</u> Функцию $\mathcal{F}(x)$ наз. периодическим, с периодом 2π продолжением ф-ции $f(x)$ на $\mathbb{R}$, если $\mathcal{F}(x) = f(x)$ на $(-\pi, \pi)$, $\mathcal{F}(-\pi) = \mathcal{F}(\pi) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ $(\exists f(-\pi+0), f(\pi-0))$; $\mathcal{F}(x+2\pi) = \mathcal{F}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$

<u>Пример:</u>



Обозначение: $f(x)\ 2\pi \sim \mathbb{R}$

$\mathcal{F}(x)$ обозн через $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

[Либо считаем, что $f(x)$ – 2π-периодич на $\mathbb{R}$, интегр на $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}$].

Лемма 1. Пусть $f(x) \in L[-\pi, \pi]$, $2\pi \sim \mathbb{R} \Rightarrow \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$, независим от α, т.е. $\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$

$$\left[\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x \pm t)\,dx \overset{Л.1}{=} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\right] \quad x+t=y$$

$$\Delta \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{-\pi} f(x)dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ldots + \int\limits_{\pi}^{\alpha+2\pi} \ldots =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = x + 2\pi \\ x = t - 2\pi \end{array} \right\} = \int\limits_{\alpha+2\pi}^{\pi} \overbrace{f(t-2\pi)}^{=f(t)}\,dt + \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx +$$

$$+ \int\limits_{\pi}^{\alpha+2\pi} f(x)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad \Delta$$

вз. уничт.

1° Ядро Дирихле.

Рассм $\forall f(x) \in L[-\pi, \pi]$, $2\pi \sim \mathbb{R}$, рассм. n-ю частич. сумму её ТРФ (триг. ряда Фурье):

$$S_n(x,f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right), \quad (1)$$

$$S_0(x,f)=\frac{a_0}{2};$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\cos ky\,dy,\quad k=0,1,2,\ldots,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\sin ky\,dy,\quad k=1,2,$$

Подставим коэф. a_k, b_k в (1):

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos ky\cos kx+\sin ky\sin kx\right]dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(y-x)\right]dy$$

$$=\left\{\begin{array}{l}t=y-x\\ y=x+t\end{array},\ dy=dt\right\}:$$

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+t)\left[\frac{1}{2}+\sum\cos kt\right]dt}_{\text{периодич. } T=2\pi}\overset{1.1}{=}$$

$$\overset{1.1}{=}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]dt,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall n=0,1,2,$$

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\left[\cdot\frac{2\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}};\ 2\cos\cdot\sin=\sin\Theta-\sin\Theta\right]=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left[\sin\frac{t}{2}+\sum_{k=1}^{n}\underbrace{2\cos kt\sin\frac{t}{2}}_{=\sin(k+\frac{1}{2})t-\sin(k-\frac{1}{2})t}\right]=$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\Big[\sin\frac{t}{2} + \left(\sin\frac{3}{2}t - \sin\frac{t}{2}\right) +$$

$$+ \left(\sin\frac{5}{2}t - \sin\frac{3}{2}t\right) + \ldots + \left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t -$$

$$- \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t\right)\Big] = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Опр. Следующее выражение

$$\mathcal{D}_n(t) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}},\ t\in[-\pi,\pi],$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$, наз. ядром Дирихле.

$t = 0$ доопред.: $\mathcal{D}_n(0) = \left\{\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\left(n+\frac{1}{2}\right)t}\cdot\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\right\} =$

$= \frac{1}{\pi}\left(n+\frac{1}{2}\right)$

Доказали утв.

Лемма 2 $\forall f(x)\in L[-\pi,\pi]$, $2\pi\sim\mathbb{R}$, $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$ $S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt =$

$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\mathcal{D}_n(t)\,dt.$ (2)

Лемма 3 $\forall n = 0, 1, 2,$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathcal{D}_n(t)\,dt = 1.$$

Следствие $S_n(x,f) - f(x) \overset{л.2,3}{=\!=} \int\limits_{-\pi}^{\pi}\big[f(x+t) -$

$-f(x)\big]\,\mathcal{D}_n(t)\,dt,\ n=0,1,2\ldots$

{Гёльдер: $f(x+t)-f(x)\le t^\alpha \Rightarrow$ исслед. сх-ти}

Δ (лемма 3) Положим в (1) $f(x)\equiv 1$ на $\mathbb{R}$ $S_n(x,1)=1+0=1$, $\forall n=0,1,2\ldots$, т.к. $\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\,dx=1$, $\{1,\cos kx,\sin kx\}$ — ортогональна $\Longrightarrow a_k=b_k=0,\ \forall k=1,2,\ldots$

Подставим $f(x)\equiv 1$ в (2):

$$S_n(x,1)=1=\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\mathcal{D}_n(t)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{D}_n(t)\,dt,\quad \forall n=0,1,2,\ \Delta$$

2° Ядро Фейера.

Рассм. $\forall f(x)\in L[-\pi,\pi]$, $2\pi\sim\mathbb{R}$

Рассм. средние Чезаро (сред. арифм.) частич. сумм. $S_n(x,f)$ ТРФ ф-ции $f(x)$:

$$\sigma_n(x,f)=\frac{S_0(x,f)+\ldots+S_{n-1}(x,f)}{n},\quad (3)$$

$n=1,2,\ldots$

Получим интегральное представление для $\sigma_n(x,f)$, используем (2), получ.

$$\sigma_n(x,f)=\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)}{\sin\frac{t}{2}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right]dt,\quad \forall n=1,2\ldots,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$2\sin\sin=\cos\ominus-\cos\oplus$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\cdot\frac{2\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}=\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\big[\cos kt-\cos(k+1)t\big]=\frac{1-\cos nt}{2\sin\frac{t}{2}}=\Big\{\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha,$$

$(1-\cos t)+(\cos t-\cos 2t)+\ldots+(\cos(n-1)t-\cos nt)$

$$\cos nt=1-2\sin^2\frac{nt}{2}\Big\}=\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

Опред. След. выражение $\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi n} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}}$, $n=1,2,\dots$, наз. ядром Фейера.

Доказали утв.:

Лемма 4 $\forall f(x) \in L[-\pi, \pi]$, $2\pi \sim \mathbb{R}$, ср. Чезаро $\sigma_n(x, f)$:

$$\sigma_n(x, f) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, \Phi_n(t)\, dt, \quad n=1,2,\dots \quad (4)$$

$$\Phi_n(0) = \frac{1}{2\pi n} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\left(\frac{nt}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{nt}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{n}{2\pi} \text{ — доопред.}$$

Лемма 5 Справедл. след. св-ва ядра Фейера $\Phi_n(t)$:

1) $\Phi_n(t) \geq 0$, чётная ф-я, $\forall t \in \mathbb{R}$

2) $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\, dt = 1$, $n=1,2,\dots$

3) $\forall \delta \in (0, \pi)$ посл-сть $\eta_n(\delta) = \int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(t)\, dt \overset{1)}{=}$

$\overset{1)}{=} \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)\, dt \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Δ 1) — очевидно

2) Подст. $f \equiv 1$ в (3) $(S_n(x,1) = 1, \forall n)$

$$\sigma_n(x,1) = \frac{\overbrace{1+\ldots+1}^{n}}{n} = \frac{n}{n} = 1, \ \forall n = 1,2,\ldots$$

Подст. $f \equiv 1$ в (4):

$$\sigma_n(x,1) = 1 = \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \Phi_n(t)\,dt, \text{ ч.т.д.}$$

3) $0<\delta \le t \le \pi$, $\frac{\delta}{2} \le \frac{t}{2} \le \frac{\pi}{2}$

на $[0,\frac{\pi}{2}]$ $\sin \nearrow \implies \sin\frac{t}{2} \ge \sin\frac{\delta}{2}$, $\forall t\in[\delta,\pi]$

$$\implies 0 \le \Phi_n(t) \le \frac{1}{2\pi n \sin^2\frac{\delta}{2}} \searrow 0 \quad \forall t\in[\delta,\pi]$$

$$\implies \eta_n(\delta) = \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt \le \frac{\pi-\delta}{2\pi n\sin^2\frac{\delta}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Delta$$

<u>Следствие из л. 5</u> $\forall f(x) \in L[-\pi,\pi]$, $2\pi \sim \mathbb{R}$, $\sigma_n(x,f) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)]\Phi_n(t)\,dt$ (5) $\forall n = 1,2,\ldots$

<u>3° Теорема Фейера</u>

<u>Теорема 9 (теорема Фейера).</u> Пусть ф-я $f(x) \in \underset{(\text{непр. на } [-\pi,\pi])}{C[-\pi,\pi]}$, $f(-\pi) = f(\pi)$

Тогда $\sigma_n(x,f) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ на $[-\pi,\pi]$.

(если $f: 2\pi \sim \mathbb{R}$, то $\sigma_n \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$).

Δ Продолжим $f(x)$, $2\pi \sim \mathbb{R}$, т.к. $f(-\pi) = f(\pi)$, а $f\in C[-\pi,\pi] \implies f\in C(\mathbb{R})$

Ф-я $f(x)$ р/м непр. на $[-\pi,\pi]$,

$T=2\pi \implies f(x)$ р/м непр. на всей $\mathbb{R}$; ограничена на $\mathbb{R}$:

$\exists M>0: |f(x)|\leq M \ \forall x\in\mathbb{R}$,

Фикс $\forall\varepsilon>0 \ \exists\delta>0: |x'-x''|\leq\delta \ |f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\forall x', x''\in\mathbb{R}$. Пусть $\delta<\pi$.

Восп. ф-лой (5):

$$\sigma_n(x,f)-f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)-f(x)]\Phi_n(t)\,dt=$$

$$=\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\equiv I_-+I_0+I_+$$

$$|I_-|=\left|\int_{-\pi}^{-\delta}[f(x+t)-f(x)]\Phi_n(t)\,dt\right|\leq$$

$$\leq\int_{-\pi}^{-\delta}\underbrace{|f(x+t)-f(x)|}_{\leq(|f(x+t)|+|f(x)|)}\Phi_n(t)\,dt\leq$$

$$\leq 2M\int_{-\pi}^{-\delta}\Phi_n(t)\,dt=2M\eta_n(\delta)\xrightarrow[n\to\infty]{1.5}0$$

Для выбран. ε $\exists N: \forall n>N \ |I_-|<\frac{\varepsilon}{4}$, аналогично $|I_+|<\frac{\varepsilon}{4}$, $\forall n>N$.

$$|I_0|=\left|\int_{-\delta}^{\delta}[f(x+t)-f(x)]\Phi_n(t)\,dt\right|<$$

$|t|\leq\delta$

$$<\int_{-\delta}^{\delta}|f(x+t)-f(x)|\Phi_n(t)\,dt<$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)\,dt<\frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt}_{1}=\frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n$$

$\Longrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists N : \forall n>N$

$$\left| \sigma_n(x,f) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

$\Longrightarrow \sigma_n(x,f) \rightrightarrows f(x)$ на $\mathbb{R}$ Δ

<u>Задача</u> $f(-\pi)=f(\pi)$ $f\in C[-\pi,\pi]$ — необх. условие для $\sigma_n \rightrightarrows f$ $[-\pi,\pi]$.

$f\in L[-\pi,\pi]$, $\overset{\text{непр}}{\sigma_n} \overset{\Rightarrow\ \text{непр}}{\rightrightarrows} f(x)$ на $[-\pi,\pi]$

$\Longrightarrow f\in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$?

$\forall\varepsilon>0\ \exists\sigma_{n_0}(x,f): |f(x)-\sigma_{n_0}(x,f)|<\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \begin{cases} |f(-\pi)-\sigma_{n_0}(-\pi,f)|<\frac{\varepsilon}{2} \\ |f(\pi)-\sigma_{n_0}(\pi,f)|<\frac{\varepsilon}{2}\end{cases}$

$\Downarrow$

$|f(-\pi)-f(\pi) \pm \sigma_{n_0}(\pi,f)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \Rightarrow f(-\pi)=f(\pi)$

<u>4° Следствие из теоремы Фейера</u>

Триг. сист. ф-ций

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

<u>Опред</u> Тригонометрическим многочленом наз. произв. лин. комбинац. конечного числа эл-тов триг сист ф-ций. Обозн $T(x)$

<u>Пример</u>: $S_n(x,f)$, $\sigma_n(x,f)$, эл-ты триг сист. ф-ций.

<u>Теорема 10.</u> Тригон. с-ма ф-ций явл. замкнутой в пр-ве интегр. на $[-\pi,\pi]$ ф-ций, т.е $\forall\varepsilon>0$ $\forall f(x)\in L[-\pi,\pi]$

$$\exists T(x) : \|f(x)-T(x)\|_{L[-\pi,\pi]} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2dx} < \varepsilon$$

Δ Док в 3 этапа.

1) $\underset{\text{фикс}}{\forall\varepsilon>0}$ $\exists f\in L[-\pi,\pi]$ $\exists f_1(x)$ — кусочно-пос-

тонная на $[-\pi,\pi]$: $\|f(x)-f_1(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$

2) Док $\exists\, g(x) \in C[-\pi,\pi]$, $g(-\pi) = g(\pi)$:

$$\|f_1(x) - g(x)\|_{L[-\pi,\pi]} < \frac{\varepsilon}{3}$$

3) $\exists\, T(x)$: $\|g(x) - T(x)\|_{L[\pi,\pi]} < \frac{\varepsilon}{3}$

$\Longrightarrow$ утв. теор.
нер-во треуг-ка

1) $f \in L[-\pi,\pi] \Longrightarrow$ ограниченная,
$\exists\, M = const > 0 : |f(x)| \le M$, $\forall x \in [-\pi,\pi]$.
Фикс. $\forall \varepsilon > 0$, разбиваем $[-\pi,\pi]$:

$x_0 = -\pi < x_1 < \ldots < x_n = \pi$, так, чтобы

$$0 \le \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - s < \frac{\varepsilon^2}{18M} = \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2M}$$

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k,\ \Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$$

Рассм. след. кус.-пост. ф-ю

$$f_1(x) = \begin{cases} m_k, & x_{k-1} < x \le x_k,\ k = 2,\ldots,n \\ m_1, & x_0 \le x \le x_1 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} m_k\,dx = s$$

$$\Longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\,dx =$$

$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - f_1(x)\right] dx < \frac{\varepsilon^2}{18M}$.

$f(x) \ge f_1(x) \xRightarrow[f_1(x)]{\text{+ из опр}} |f_1(x)| \le M,\ \forall x \in [-\pi, \pi]$

Из $f \ge f_1$: $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_1(x)|\, dx =$

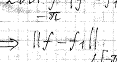
$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - f_1(x)\right] dx < \frac{\varepsilon^2}{18M}$

$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\left[f(x) - f_1(x)\right]^2}_{\parallel \atop |f-f_1|\cdot|f-f_1|} dx \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f - f_1| \cdot \left[|f| + |f_1|\right] dx \le$

$\le 2M \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f - f_1|\, dx < 2M \cdot \frac{\varepsilon^2}{18M} = \frac{\varepsilon^2}{9}$

$\Longrightarrow \|f - f_1\|_{L[-\pi, \pi]} < \frac{\varepsilon}{3}$.

2)



Пусть $g(x) = f_1(x)$ всюду на $[-\pi, \pi]$, кроме малых окрестностей точек x_k, $k = 1, \dots, n$ $(x_n = \pi)$

А в этих окрестностях доопред $g(x)$ линейным образом, так, чтобы $g(x) \in C[-\pi, \pi]$, $g(-\pi) = g(\pi)$.

$\Longrightarrow |g(x)| \le M$ — из 1)

Т.к. $|f_1| \leq M$, $|g| \leq M$, то окрестности т. x_k можно выбрать настолько малыми, что $\| f_1(x) - g(x) \| =$
$$= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f_1(x) - g(x)]^2 dx} < \frac{\varepsilon}{3}.$$
$$\underset{||}{} \sum_{k=1}^{n} \int_{(x_k-\delta, x_k+\delta)} (f_1-g)^2 dx$$

3) Т.к. $g \in C[-\pi, \pi]$, $g(-\pi) = g(\pi) \underset{Т.9}{\Longrightarrow}$
$\underset{Т.9}{\Longrightarrow} \exists T(x) = \sigma_n(x, f)$: $\|g - T(x)\|_{L[-\pi,\pi]} < \frac{\varepsilon}{3}$

$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists T(x)$:
$$\| f(x) \underset{\pm f_1(x) \pm g(x)}{-} T(x) \|_{L[-\pi,\pi]} \overset{\text{нер. тр-ка}}{\leq} \|f - f_1\| + \|f_1 - g\| + \|g - T\| < \varepsilon$$
Δ

__Следствие.__ Система тригон. ф-ций явл. замкнутой (а, следоват., и полной) в пр-ве $E_0[-\pi, \pi]$ (всех кус.-непр. ф-ций на $[-\pi, \pi]$).

__Теор. 11. (1-я теорема Вейерштрасса).__

Любую непрер. на $[-\pi, \pi]$ ф-цию $f(x)$, $f(-\pi) = f(\pi)$, можно равномерно на $[-\pi, \pi]$ приблизить триг. многочленами с любой степенью точности, т.е.
$\forall \varepsilon > 0 \ \forall f(x) \in C[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$
$\exists T(x)$: $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$.

$\Delta \Longrightarrow$ из Теор. 9:

$\sigma_n(x,f) \rightrightarrows f(x)$ на $[-\pi,\pi]$

$\Longrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists T(x)=\sigma_n(x,f)$:

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon \quad \forall x\in[-\pi,\pi] \ \Delta$$

<u>Теор. 12 (2я теор. Вейерштрасса)</u>

Пусть $f(x)\in C[a,b]$. Тогда

$\forall \varepsilon>0 \ \exists$ алгебраич. многочлен $Q_m(x)$ ($Q_m = a_0x^m + a_1x^{m-1}+\ldots$) такой, что

$$|f(x)-Q_m(x)|<\varepsilon, \ \forall x\in[a,b],$$

т.е. любую непр. на $[a,b]$ ф-ю можно с любой степ. точности приблизить алгебр. многочл. равном. на $[a,b]$

(аналогия с Т 11: $[-\pi,\pi]\to[a,b]$, триг $\to$ алгебр.)

[для степ. рядов $f=\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k \in C^\infty(-R,R)$

$|f-\sum\limits_1^n|<\varepsilon$ (ост. член в ф-ле $\bar{o}(1)$ Макл. $\to 0$)]

Δ $x\in[a,b] \longrightarrow [0,\pi]$.

$$t=\frac{x-a}{b-a}\pi\in[0,\pi]$$

$$x=t\,\frac{b-a}{\pi}+a \Longrightarrow f(x)=f\left(t\,\frac{b-a}{\pi}+a\right)=\varphi(t), \quad t\in[0,\pi]$$

Продолжим $\varphi(t)$ на $[-\pi,0]$ четным образом, $\Longrightarrow \varphi(-\pi)=\varphi(\pi)$ и

$\varphi\in C[-\pi,\pi] \xRightarrow{T\,9(T11)} \forall\varepsilon>0 \ \exists T(t)$:

$$|\varphi(t)-T(t)|<\frac{\varepsilon}{2}, \ \forall t\in[-\pi,\pi]$$

$T(t)$ - конечная сумма $\sin kx, \cos kx$, разлагается в ряд Тейлора, $R=+\infty$
$\Longrightarrow$ этот ряд сход. равномерно на

$\forall$ конеч. отрезке числ. прямой $\Rightarrow$ на $[-\pi,\pi]$
Обозн через $P_m(t)$ частич. сумму этого ряда Тейлора, такую, что

$|T(t) - P_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall t \in [-\pi, \pi]$

$\Longrightarrow |\varphi(t) - P_m(t)| \leq |\varphi(t) \underset{\pm T(t)}{-} T(t)| +$

$+ |T(t) - P_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall t \in [-\pi,\pi]$.

$|\varphi(t) - P_m(t)| < \varepsilon, \forall t \in [0, \pi]$

$|f(x) - Q_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b]$

$P_m(t) = P_m\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right) \equiv Q_m(x)$ - алг. мн-н Δ

<u>Следств.</u> Сист. $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ явл замкн.
в $C[a,b]$, $\forall [a,b]$

$\|f\|_c = \max\limits_{\forall x \in [a,b]} |f(x)|$

<u>5° Следствие из Теор 10</u>
<u>(о замкнутости).</u>

Рассм. триг. сист. ф-ций
$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

Следствие 1. $\forall f(x) \in L[-\pi, \pi]$ справедл. р-во Парсеваля:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx,$$

$\left(a_k, b_k - \text{триг. коэфф. Фурье ф-ции } f(x)\right)$

$\Delta \xrightarrow[\text{теор. 5}]{\text{из теор. 10,}} \Delta$

Следств. 2. $\forall f(x) \in L[-\pi, \pi]$

ТРФ этой функции сх-ся к ней в среднем на $[-\pi, \pi]$

$\Delta \Longrightarrow$ из теор. 10, теор. 6 Δ

Следств. 3. $\forall f(x) \in L[-\pi, \pi]$

ТРФ этой ф-ции можно почленно интегрировать на $[-\pi, \pi]$

$\Delta \Longrightarrow$ из следств. 2 и теор. 11 гл. 2 о почл. инт. Δ

Следств. 4. Если ф-ции $f(x), g(x) \in E_0[-\pi, \pi]$ имеют одинак. ТРФ на $[-\pi, \pi]$ $(f_k = g_k \; \forall k)$, то $f(x) \equiv g(x)$ на $[-\pi, \pi]$.

$\Delta \Longrightarrow$ из теор. 10, теор. 8

(E_0 – евкл. пр-во) Δ

Следств. 5. Пусть $f(x) \in L[-\pi, \pi]$, $f(x) \in E_0[a, b]$, $[a, b] \subseteq [-\pi, \pi]$, пусть ТРФ ф-ции $f(x)$ сх-ся равном. на $[a, b] \Longrightarrow$ он сх. на $[a, b]$ к $f(x)$

$S_n(x, f) \rightrightarrows f(x)$ на $[a, b]$

△ Пусть $S_n(x,f) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} g(x)$ на $[a,b]$

Докажем, что $g(x) \equiv f(x)$ на $[a,b]$.

Из сх-ти равном. $\Longrightarrow$ сх-ть в среднем, т.е. $\|S_n(x,f) - g(x)\|_{E_0[a,b]} \longrightarrow 0,\ n\to\infty$

Из следств. 2 $\Longrightarrow S_n(x,f) \underset{\text{в средн}}{\Longrightarrow} f(x)$ на $[-\pi,\pi]$, а, $\Longrightarrow$, и на $[a,b]$

$\Longrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N_1 : \forall n>N_1\ \|S_n(x,f)-g(x)\|_{E_0[a,b]} < \frac{\varepsilon}{2}$

$\|S_n(x,f) - f(x)\|_{E_0[a,b]} < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n > N_2$

$\Longrightarrow \forall n > N = \max(N_1, N_2)$:

$\|f(x) - g(x)\|_{E_0[a,b]} \le \|f - S_n\| + \|g - S_n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ (*)

$\pm S_n(x,f)$

$\Longrightarrow \|f-g\|_{E_0[a,b]} < \varepsilon\ \ \forall \varepsilon>0$

$\Longrightarrow \|f-g\|_{E_0[a,b]} = 0$, к. E_0 – евклид.

$\Longrightarrow f-g=\theta$, т.е. $f(x) \equiv g(x)$ на $[a,b]$ △

6° Локальная теорема Фейера

Теор 13 (лок теор Фейера) Пусть $f(x) \in L[-\pi,\pi]$, $2\pi \sim \mathbb{R}$.

Фикс $\forall$ т. $x_0 \in \mathbb{R}$, пусть $\exists f(x_0 \pm 0)$

$\Longrightarrow \sigma_n(x_0,f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} \equiv \tilde{f}(x_0)$

Следств. Если $f\in L[-\pi,\pi]$, $2\pi\sim\mathbb{R}$, в т. x_0 $\exists f(x_0\pm 0)$, а $S_n(x_0,f)$ (ТРФ) – сходится, то $S_n(x_0,f)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

О $\Longrightarrow$ из того, что метод Чезаро явл. регулярным из сх-ти ТРФ $\Longrightarrow$ сх-ть $\sigma_n(x,f)$ и равенство их сумм О

Δ Д-во Т.13:

$f\in L[-\pi,\pi]$, $2\pi\sim\mathbb{R}\Longrightarrow f(x)$ огр. на $\mathbb{R}$, $\exists M>0: |f(x)|\le M$, $\forall x\in\mathbb{R}\Longrightarrow|\tilde f(x_0)|\le M$.

Фикс $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta\in(0,\pi):\ \forall t\in[0,\delta]$

$$(*)\begin{cases}|f(x_0+t)-f(x_0+0)|<\frac{\varepsilon}{2}; & \forall t\in[-\delta,0]\\ |f(x_0+t)-f(x_0-0)|<\frac{\varepsilon}{2}\end{cases}$$

$$\Delta_n(x_0)\equiv\sigma_n(x_0,f)-\tilde f(x_0)\overset{1}{\underset{14,5}{=}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x_0+t)\Phi_n(t)dt-\tilde f(x_0)\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x_0+t)-\tilde f(x_0)]\cdot$$

$$\cdot\Phi_n(t)dt=\int_{\delta\le|t|\le\pi}[f(x_0+t)-\tilde f(x_0)]\Phi_n(t)dt\ \oplus$$

$$\tilde f(x_0)\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)dt=\frac{f(x_0+0)}{2}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n dt+\frac{f(x_0-0)}{2}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)dt=$$

$$=f(x_0+0)\int_0^{\delta}\Phi_n dt+f(x_0-0)\int_{-\delta}^{0}\Phi_n dt\quad(\Phi_n\text{ – чётн.})$$

$$\oplus\int_{-\delta}^{\delta}f(x_0+t)\Phi_n(t)dt-f(x_0+0)\int_0^{\delta}\Phi_n dt-$$

$$-f(x_0-0)\int_{-\delta}^{0}\Phi_n dt=\int_{\delta\le|t|\le\pi}[f(x_0+t)-\tilde f(x_0)]\Phi_n(t)dt$$

$$+\int_0^{\delta}[f(x_0+t)-f(x_0+0)]\Phi_n\,dt+$$

$$+\int_{-\delta}^{0}[f(x_0+t)-f(x_0-0)]\Phi_n\,dt\equiv I_1+I_2+I_3$$

$$|I_1|\leq\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}(|f(x_0+t)|+|\tilde f(x_0)|)\Phi_n\,dt\leq$$

$$\leq 2M\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}\Phi_n\,dt=2M\left(\int_{-\pi}^{-\delta}\Phi_n\,dt+\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n\,dt\right)\overset{1.5}{=}$$

$$\overset{1.5}{=}2M\left(\eta_n(\delta)+\eta_n(\delta)\right)=4M\eta_n(\delta)\xrightarrow[n\to\infty]{1.5}0$$

$$\exists N:\forall n>N\quad |I_1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

$$|I_2+I_3|\leq\int_0^{\delta}|f(x_0+t)-f(x_0+0)|\Phi_n\,dt+$$

$$+\int_{-\delta}^{0}|f(x_0+t)-f(x_0-0)|\Phi_n(t)\,dt\underset{(*)}{\overset{|t|\leq\delta}{<}}$$

$$\underset{(*)}{<}\frac{\varepsilon}{2}\int_0^{\delta}\Phi_n\,dt+\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{0}\Phi_n\,dt=\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n\,dt<$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt}_{1\ (1.5)}=\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow|I_2+I_3|<\frac{\varepsilon}{2}\ \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists N:\forall n>N\quad|\Delta n|=|I_1+I_2+I_3|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\text{ т.е. }\sigma_n(x_0,f)\to\tilde f(x_0),\ n\to\infty$$

Δ

§4. Простейшие условие равном. сход-ти и почленной дифференцируемости ТРФ.

Сл. 2 из Т10: $f \in L[-\pi,\pi] \Rightarrow S_n(x,f) \underset{\text{в сред.}}{\Rightarrow} f$ на $[-\pi,\pi]$

$f \in C[-\pi,\pi],\ f(-\pi)=f(\pi)$: Т.9. $\sigma_n(x,f) \underset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$

$S_n(x,f)$ — ?

(1876г Дю Буа Раймон):

$f \in \underset{\text{непр.}}{C},\ f(-\pi)=f(\pi)$ $S_n(x,f)$ — расх. в наперёд задан. точке (в счетн. колич. точек)

$f(x) \in L[-\pi,\pi] \Rightarrow S_n(x,f)$ — сх. хотя бы в одн. точке?

1923г $f \in \underset{(\Lambda)\text{-Лебега}}{L}[-\pi,\pi]$ $S_n(x,f)$ расх почти всюду $\underset{(\text{п.в.})}{}$ на $[-\pi,\pi]$

$f \notin \underset{(R)\text{-Римана}}{L}[-\pi,\pi]$

1926г $f \in L_{(\Lambda)}[-\pi,\pi]$ $S_n(x,f)$ — расх. на $[-\pi,\pi]$ (всюду)

1966г Carleson:

$f \in L_{2(\Lambda)}[-\pi,\pi] \Rightarrow S_n(x,f)$ сх п.в на $[-\pi,\pi]$
(с квадратом)

$\int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx < \infty$

1967г Хант (охотник):

$f \in L_p[\pi,\pi]$ $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\,dx \overset{(1+\varepsilon)}{<} \infty,\ p>1$

$\Rightarrow S_n(x,f)$ — сх п.в. на $[-\pi,\pi]$

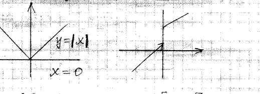
В нашем случае:

$$f \in L_{(R)}[-\pi, \pi] \Rightarrow f^2 \in L_{(R)}[-\pi, \pi] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^2 \in L_{(\Lambda)}[-\pi, \pi] \Rightarrow S_n(x, f) \text{ сх. п. в. } [-\pi, \pi]$$

1° Равномерная сходимость.

Опред. Ф-я $f(x)$ имеет на $[a, b]$ кус.-непр. производную, если $f'(x) \exists$ и непр. во всех точках $[a, b]$, за искл., быть может, конеч. числа точек $x_k \in (a, b)$, $k = \overline{1, n}$, в которых $\exists f'(x_k \pm 0)$, в т. x_k доопред. $f'(x_k)$ произв. образом (напр., $f'(x_k) = \frac{f'(x_k+0) + f'(x_k-0)}{2}$). $f(x)$ – м. б. разрыв в т. x_k

Напр., 

Опред. Ф-я $f(x)$ имеет на $[a, b]$ кус-непр. произв. n-го порядка ($n \geq 1$), если ф-я $f^{(n-1)}(x)$ имеет на $[a, b]$ кус. непр. произв.

Теор 14 Пусть $f(x) \in C[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$, и $\exists$ кус.-непр. $f'(x)$ на $[-\pi, \pi]$.

$\Longrightarrow$ ТРФ $f(x)$ сход. к ней равномерно на $[-\pi, \pi]$, ряд сход. абсолютно на $[-\pi, \pi]$ и ряд, составл. из модулей его членов, сход равн. на $[-\pi, \pi]$.

$$\left[S_n(x, f) - f(x) = \frac{\bar{o}(1)}{\sqrt{n}},\ n \to \infty \right]$$

Δ $S_n(x, f) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \underset{ТРФ}{\sim} f(x)$

Достат. д-ть, что ряд

$$\sum_{k=1} |a_k \cos kx + b_k \sin kx| \rightrightarrows \text{ на } [-\pi, \pi]$$

По призн. Вейерштр. для этого достат. сх-ти числ. ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)$ (1)

a_k, b_k — триг. коэф. Фурье ф-ции $f(x)$

Обозн. α_k, β_k — триг. коэф. Фурье ф-ции $f'(x)$

Изв. $a_k, b_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty$ — нер. Бесселя, р-во Парсев.

Выразим a_k, b_k через α_k, β_k:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{n} \int_{x_{l-1}}^{x_l} f(x) \cos kx \, dx =$$

$f'(x)$ не явл. непр. на $[-\pi, \pi]$,
на $[x_{l-1}, x_l]$ $f'(x)$ — непр

$$\ominus \{\text{по частям}\} = \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{n} \left[\frac{1}{k} f(x) \sin kx \Big|_{x = x_{l-1}}^{x_l} - \frac{1}{k} \int_{x_{l-1}}^{x_l} f'(x) \sin kx \, dx \right] = \left\{ \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{k} f \sin k \Big|_{x_{l-1}}^{x_l} = \right.$$

$$= \left(\frac{1}{k} f \sin kx\right)\Big|_{x_0}^{x_1} + (\ldots)\Big|_{x_1}^{x_2} + \ldots + (\ldots)\Big|_{x_{n-1}}^{x_n} \Big\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k} f(x) \sin kx \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx\,dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx\,dx = -\frac{\beta_k}{k}$$ (скорость $1/k$)

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\left[\quad\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi k} f(x)\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx =$$

$= \{ f(-\pi) = f(\pi),\ \cos k\pi = \cos(-k\pi) \Rightarrow$ внеинт слаг вз. уничт. $\} = \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx$

$= \frac{\alpha_k}{k} \Rightarrow$ для сх-ти ряда (1)

достат д-ть сх-ть ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\alpha_k| + |\beta_k|}{k}$ (2)

Знаем: $\sum(\alpha_k^2 + \beta_k^2) < \infty$

$\sum \frac{1}{k^2}$ сх

$\frac{|\alpha_k|}{k}$ $\qquad ab \leq \frac{a^2+b^2}{2},\ \forall a, b \in \mathbb{R}$

$\|$ $\qquad$ нер-во Коши

$|\alpha_k| \frac{1}{k} \leq \frac{\alpha_k^2 + \frac{1}{k^2}}{2}, \quad \frac{|\beta_k|}{k} \leq \frac{\beta_k^2 + \frac{1}{k^2}}{2}$

$$\Rightarrow \frac{|\alpha_k| + |\beta_k|}{k} \leq \frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2}{2} + \frac{1}{k^2}.$$

Т.к. $\sum(\alpha_k^2 + \beta_k^2)$ – сх, $\sum \frac{1}{k^2}$ – сх. $\Rightarrow$

$\Longrightarrow$ по 1му призн. сравн. ряд (2) сх.

$\Longrightarrow$ (1) сх Δ

Напр, $f(x)=|x|$, $f(x)=x^2$

<u>Теор 15</u> Пусть $f(x)\in C[-\pi,\pi]$,
$\exists f^{(l)}(x)\in C[-\pi,\pi]$, $l=1,2,\dots,m$,
$f^{(l)}(-\pi)=f^{(l)}(\pi)$, $l=0,1,2,\dots,m$

Пусть $\exists$ кус-непр $f^{(m+1)}(x)$ на $[-\pi,\pi]$ $\Longrightarrow$ ТРФ ф-ции $f(x)$ можно почленно дифф-ть на $[-\pi,\pi]$ (m) раз.

Δ ТРФ $f(x) \underset{T.14}{=} \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(x)$, $\rightrightarrows$ на $[-\pi,\pi]$

$$|u_k^{(l)}(x)| \le \left\{ \begin{matrix} (\sin kx)'=k\cos kx \\ (\cos kx)'=-k\sin kx \end{matrix} \right\} \le \underset{l=0,1,\dots,m}{k^l(|a_k|+|b_k|)} \le$$

$$\le k^m(|a_k|+|b_k|)$$

$\Longrightarrow$ для д-ва теор достат. д-ть сх-ть числ. ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^m(|a_k|+|b_k|)$ (3)

($\Longrightarrow$ все ряды $\sum\limits_{l=\overline{1,m}} u_k^{(l)}(x) \rightrightarrows$ и можно почл. дифф. (m) раз).

Обозн. α_k, β_k – триг. коэфф. Фурье $f^{(m+1)}(x)$

Выразим a_k, b_k через α_k, β_k

a_k, (m) раз – по частям, далее разб.

на $\sum \int\limits_{x_{l-1}}^{x_l} \ldots$ (на $(l+1)$-м шаге), получ

$$|a_k| + |b_k| = \frac{1}{k^{m+1}} \left(|\alpha_k| + |\beta_k| \right)$$

И для сх-ти ряда (3) достат. д-ть сх-ть ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^m (|a_k| + |b_k|) =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^m}{k^{m+1}} \left(|\alpha_k| + |\beta_k| \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\alpha_k| + |\beta_k|}{k}$$

Завершаете обосн. теор так же, как Т.14 $\left(\sum (\alpha_k^2 + \beta_k^2) - cx, \sum \frac{1}{k^2} cx \right)$

Δ

§5. Уточнённое условие равном. сх-ти и сх-ти в точке ТРФ.

1° Лемма о св-вах коэфф. Фурье ф-ции двух переменных.

Лемма 6. Пусть $f(x), g(x) \in L[-\pi, \pi]$, и $f(x)$ $2\pi \sim \mathbb{R}$. Рассм ф-ю $F(x,t) = f(x+t) g(t)$

$\left[S_n(x, f) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)\, dt \right]$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in [-\pi, \pi]$

и ее триг коэф Фурье:

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x,t) \cos nt\, dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x,t) \sin nt\, dt, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$\Longrightarrow$ 1) Функция $I(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x,t)\, dt$ непр.

на $[-\pi, \pi]$ (и на $\mathbb{R}$);

2) $a_n(x), b_n(x) \rightrightarrows 0, n \to \infty$ равном. по $x \in [-\pi, \pi]$ (на $\mathbb{R}$);

3) Функц. посл-ть $c_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x,t) \sin(n+\frac{1}{2}) t dt =$

$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \sin(n+\frac{1}{2}) t dt \rightrightarrows 0$ на $[-\pi, \pi]$ (на $\mathbb{R}$)

(1)

$\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \mathcal{D}_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} dt \right]$

Δ 1) Фикс. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0$, докажем, что $\exists \delta > 0 : |u| < \delta \quad |\Delta I(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t+u) - f(x+t)] g(t) dt \right| < \varepsilon \Rightarrow$

$|\Delta I(x)| = |I(x+u) - I(x)|$

$\Rightarrow I(x)$ непр. в т. x.

$g \in L[-\pi, \pi] \Rightarrow$ огранич. $\Rightarrow \exists M = const > 0$: $|g(t)| \leq M, \forall t \in [-\pi, \pi]$.

Фикс. $\forall u \in \mathbb{R}$, рассм. $|\Delta I(x)| \leq$

$\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u) - f(x+t)| \cdot |g(t)| dt \leq$

$\leq M \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|f(x+t+u) - f(x+t)|}_{2\pi-\text{периодич}} dt \stackrel{1.1}{=}$

$\stackrel{1.1}{=} M \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)| dt, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Longrightarrow$ Д-ть $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{M}$

$\forall u \quad |u| \leq \delta(\varepsilon)$

Для краткости записи доказ, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)|\,dt < \varepsilon$ (2)

По теор о замкнутости триг сист. (Т.10) $\exists T(x): \|f(t) - T(t)\|_{L[-\pi,\pi]} =$

$= \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(t) - T(t)]^2 dt\right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}$

$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t) - T(t)|\,dt = (|f-T|, 1) \underset{\text{нер К-Б}}{\overset{T1}{\leqslant}} \|f-T\|_{L[-\pi,\pi]} \cdot$

$\cdot \|1\|_{L[-\pi,\pi]} < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\,dt\right)^{1/2} = \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\varepsilon}{3}$ (3)

По лемме 1: f, T - 2π-период

$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - T(t+u)|\,dt =$

$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t) - T(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall u \in \mathbb{R}.$ (4)

$T(t)$ - непр на $[-\pi, \pi]$, период $2\pi \Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ равном непр на $\mathbb{R} \Longrightarrow \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0:$

$|u| < \delta \quad |T(t+u) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2\pi},$
$\forall t \in [-\pi, \pi] \ (\mathbb{R})$

$\Longrightarrow \int\limits_{-\pi}^{\pi} |T(t+u) - T(t)\, dt < \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 dt =$
$= \frac{\varepsilon}{3} \quad (5) \qquad \forall u : |u| < \delta$

$\Longrightarrow \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)|\, dt \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) -$
$\pm T(t+u) \pm T(t)$

$- T(t+u)|\, dt + \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t) - T(t)|\, dt +$

$+ \int\limits_{-\pi}^{\pi} |T(t+u) - T(t)|\, dt \overset{(4),(3),(5)}{\underset{|u|<\delta}{<}} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

$\Longrightarrow (2)$ доказ $\Longrightarrow I(x)$ непр. в т. x.

2) Т.к. $\mathcal{F}(x,t)$ при $\forall$ фикс x интегрируема по t на $[-\pi, \pi] \xrightarrow[\text{из Т.10}]{\text{следств 1}}$ для $\mathcal{F}$ справедл р-во Парсеваля

$$\frac{a_0^2(x)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k^2(x) + b_k^2(x) \right] = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}^2(x,t)\, dt \quad (6)$$

$\forall$ фикс. $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow a_k(x),\ b_k(x) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0,\ \forall x$

Восп призн Дини. По доказ в 1) ф-ции $a_k(x)$, $b_k(x)$, прав часть (6) — непр по x на $[-\pi, \pi]$ ($\mathbb{R}$).

$\xrightarrow[\text{пр. Дини}]{}$ ряд в лев части (6) сход ($\rightrightarrows$) на $[-\pi, \pi]$ (на $\mathbb{R}$)

$\underset{\substack{\text{по крит.} \\ \text{Коши}}}{\Longrightarrow}$ $a_k^2(x)+b_k^2(x) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ на $[-\pi,\pi]$ $(\mathbb{R})$

$\Longrightarrow a_k(x),\ b_k(x) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ на $\mathbb{R}$

часть 2) доказана

3) Рассм. $c_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt=$

$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\underbrace{\left[g(t)\cos\frac{t}{2}\right]}_{\tilde{g}(t)}\sin nt\,dt+$

$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\underbrace{\left[g(t)\sin\frac{t}{2}\right]}_{\tilde{\tilde{g}}(t)}\cos nt\,dt=$

$=\tilde{b}_n(x)+\tilde{\tilde{a}}_n(x)\underset{k\to\infty}{\overset{2)}{\rightrightarrows}} 0$ на $[-\pi,\pi]$ $(\mathbb{R})$ Δ

2° Следствие из леммы 6.

Лемма 7. Пусть $f(x)\in L[-\pi,\pi]$, $2\pi\sim\mathbb{R}$

Фиксируем $\forall\delta\in(0,\pi)$.

$\Longrightarrow$ 1) Справедл. след. представл. для $S_n(x,f)$ и $S_n(x,f)-f(x)$:

$S_n(x,f)=\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\,\mathcal{D}_n(t)\,dt+c_n(x),\ (7)$

$\mathcal{D}_n$ – ядро Дирихле

$S_n(x,f)-f(x)=\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left[f(x+t)-f(x)\right]\mathcal{D}_n(t)\,dt$

$+\hat{c}_n(x),\ (8)$ где $c_n(x),\ \hat{c}_n(x)\rightrightarrows 0$ на $[-\pi,\pi]$ (на $\mathbb{R}$).

2) Фикс. $\forall$ т. $x_0\in\mathbb{R}$, пусть $\exists f(x_0\pm 0)$ — конеч.; обозн. $\hat f(x_0)=\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$, $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow S_n(x_0,f)-\hat f(x_0)=\int_{-\delta}^{\delta}[f(x_0+t)-\hat f(x_0)]\cdot D_n(t)\,dt + C_{1n},\quad (9)$$

где $C_{1n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$\triangle$ 1) Справедл. предст. для $S_n(x,f)$:

$$S_n(x,f)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt =$$

$$=\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)D_n(t)\,dt + \underbrace{\int_{\delta\le|t|\le\pi}}_{\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}} f(x+t)D_n(t)\,dt$$

$$\int_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac12)t}{2\sin\frac t2}\,dt = \|$$

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sin\frac t2}, & \delta\le|t|\le\pi\\ 0, & |t|<\delta\end{cases}$$ — интегрир. на $[-\pi,\pi]$

$$\| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin\left(n+\tfrac12\right)t\,dt \overset{(1)}{=} c_n(x)\quad (10)$$

$\xRightarrow[\text{л.6}]{} c_n(x)\rightrightarrows 0$ на $[-\pi,\pi]$ ($\mathbb{R}$) и справедл. представл. (7).

Исп. предст. S_n-f из следствие из леммы 2 и (10). $S_n(x,f)-f(x)\overset{\text{л.2}}{=}$

$$\overset{\text{л.2}}{=}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)-f(x)]\,D_n(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\delta}^{\delta} [f(x+t) - f(x)]\, \mathcal{D}_n(t)\, dt +$$

$$+ \underbrace{\int_{\delta \le |t| \le \pi} f(x+t) \mathcal{D}_n(t)\, dt}_{\overset{(10)}{=} C_n(x)} - f(x) \int_{\delta \le |t| \le \pi} \mathcal{D}_n(t)\, dt = //$$

$$f(x) \int_{\delta \le |t| \le \pi} \mathcal{D}_n(t)\, dt = \frac{f(x)}{\pi} \int_{\delta \le |t| \le \pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt =$$

$$= f(x) \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot g(t) \sin(n+\tfrac{1}{2})t\, dt = f(x) \cdot \tilde{c}_n$$

где $\tilde{c}_n$ — это $C_n(x)$ из (1) для $f(x) = 1$

$\Longrightarrow \tilde{c}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, а т.к. $f(x)$ — огр. на $\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Longrightarrow f_\delta(x)\, \tilde{c}_n \rightrightarrows 0$ на $[-\pi, \pi]$ (на $\mathbb{R}$)

$$// = \int_{-\delta}^{\delta} [f(x+t) - f(x)]\, \mathcal{D}_n(t)\, dt + C_n(x) -$$

$$- f(x)\, \tilde{c}_n = \int_{-\delta}^{\delta} [\;] + \hat{c}_n(x), \quad \hat{c}_n(x) =$$

$$= C_n(x) - f(x)\, \tilde{c}_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0 \text{ на } \mathbb{R}.$$

$\Longrightarrow$ соотн (8) доказано.

2) При выводе (8) от $f(x)$ требо-

валась только ограниченность, что выполняется для $\hat{f}(x_0)$. Заменяя в (8) $f(x)$ на $\hat{f}(x)$, x на x_0, получаем соотн (9), $C_{1n} = \underbrace{C_n(x_0) - \hat{f}(x_0)\tilde{C}_n}_{\hat{C}_n(x_0)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ Δ

3° Принцип локализации Римана.

Теор 16 (принцип лок. Римана).
Сх-ть или расх-ть ТРФ ф-ции $f(x)\in L[-\pi,\pi]$, $2\pi\sim\mathbb{R}$, в данной точке $x\in\mathbb{R}$ зависит от поведения $f(x)$ в как угодно малой окр-ти точки x (т.е. сх-ть ТРФ — есть лок. св-во ф-ции f).

Δ Исп. соотн (7):

$$S_n(x,f) = \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\,\mathcal{D}_n(t)\,dt + c_n(x),$$

$c_n(x) \rightrightarrows 0$ при $n\to\infty$ на $\mathbb{R}$.

$|t|\le\delta$ в первом слаг. $\Longrightarrow$ арг. $f(x)$: $(x-\delta, x+\delta)$ и сх-ть или расх-ть $S_n(x,f)$ зависит от поведения $f(x)$ на этом интервале (для как угодно малого δ) Δ

4° Классы функций Гельдера.

$f\in C[a,b] \Longrightarrow |f(x+t)-f(x)| < \varepsilon$ $\quad 0<\alpha\le 1$, εt^{α}

$f\in C^1[a,b] \Longrightarrow |f(x+t)-f(x)| < \varepsilon t$

Пусть $f(x)$ непр на $[a, b]$.

Опред. Для $\forall \delta > 0$ модулем непрерывности $\omega(\delta, f)$ ф-ции $f(x)$ на $[a,b]$ наз. супремум $\omega(\delta, f) = \sup\limits_{\substack{\forall x, x+t \in [a,b] \\ |t| \leq \delta}} |f(x+t) - f(x)|$.

Если $f \in C[a, b] \Rightarrow \omega(\delta, f) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$

(Теор Кантора $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ |t| \leq \delta$ $|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x, x+t \in [a, b]$)

$\omega(\delta, f) = \overline{\overline{o}}(1)$, $\delta \to 0$.

Утв. Пусть ф-я $f(x)$ имеет на $[a, b]$ огранич. производн. $\Rightarrow \omega(\delta, f) = \underline{O}(\delta)$.

Δ $\exists M > 0 : |f'(x)| \leq M, \ \forall x \in [a, b]$;

$|f(x+t) - f(x)| = |f'(\xi)| \, |t| \leq M\delta$, если $|t| \leq \delta$, $\forall x, x+t \in [a, b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega(\delta, f) = \underline{O}(\delta)$. Δ

$\omega(\delta, f) = \underline{O}(\delta^\alpha)$

Утв Существуют непр. ф-ции, для которых $\omega(\delta, f) = \underline{O}(\delta^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$

Δ Пример $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in [0, 1]$

$f'(x)$ — не явл огр на $[0, 1]$

$\forall x', x'' \in [0, 1]$, $\exists x' > x''$

$|f(x') - f(x'')| = |\sqrt[3]{x'} - \sqrt[3]{x''}| = \dfrac{x' - x''}{\sqrt[3]{x'^2} + \sqrt[3]{x'x''} + \sqrt[3]{x''^2}}$

$$= \sqrt[3]{x'-x''}\ \frac{\sqrt[3]{(x'-x'')^2}}{\underbrace{\sqrt[3]{x'^2}+\sqrt[3]{x'x''}+\sqrt[3]{x''^2}}_{\geq 0}} \leq \{(x'-x'')^2 \leq x'^2\} \leq$$

$$\leq \sqrt[3]{x'-x''}\cdot\frac{\sqrt[3]{x'^2}}{\sqrt[3]{x'^2}} = \sqrt[3]{x'-x''}.$$

$$x'-x''<\delta \Longrightarrow |f(x')-f(x'')| < \delta^{1/3}\ \forall x', x''$$

$$\Longrightarrow \omega(\delta, f) = \underline{O}(\delta^{1/3})\ \Delta$$

Задача $\omega(\delta, \sqrt[n]{x}) = \underline{O}(\delta^{1/n}),\ n=1,2,\ldots$ $(\alpha\to 0)$

Фикс $\forall\alpha\in(0,1]$, пусть $f(x)\in C[a,b]$

Опред. Ф-я $f(x)$ принадлежит классу функций Гёльдера $C^\alpha[a,b]$ с показателем α на отрезке $[a,b]$, если

$\exists$ точн. верхн. грань

$$\sup_{\substack{\forall x, x+t\in[a,b]\\ t\neq 0}} \frac{|f(x+t)-f(x)|}{|t|^\alpha} = M \text{ (пост. Гёльдера)}$$

Обозн. $f(x)\in C^\alpha[a,b]$.

$$\Longrightarrow |f(x+t)-f(x)| \leq M|t|^\alpha,\ \forall x, x+t\in[a,b] \quad (11)$$

$$\Longrightarrow \omega(\delta, t) = \underline{O}(\delta^\alpha).$$

$\alpha = 1$ — класс Липшица

$$\Longrightarrow \sqrt[3]{x}\in C^{1/3}[0,1],\quad \sqrt[n]{x}\in C^{1/n}[0,1]$$

$$\sqrt[3]{x}\in C^1[\varepsilon,1],\ \varepsilon>0\ \text{(из утв.)}$$

Задача $\alpha>1$ $C^\alpha[a,b]$ — ?

5°. Равномерная сходимость ТРФ

Теор 17. Пусть $f(x)\in C^{\alpha}[-\pi,\pi]$ с некоторым $\alpha\in(0,1]$, $f(-\pi)=f(\pi)$. Тогда ТРФ ф-ции $f(x)$ сход. равномерно на $[-\pi,\pi]$ (к $f(x)$). (Если f, $2\pi\sim\mathbb{R}$, $S_n(x,f)\rightrightarrows f(x)$ на $\mathbb{R}$).

$[f(x)=\sqrt[3]{|x|},\ x\in[-\pi,\pi];\ x^2]$

Δ $f(x)$, $2\pi\sim\mathbb{R}$, т.к. $f(-\pi)=f(\pi)$
$\Longrightarrow f(x)\in C^{\alpha}(\mathbb{R})$

$$\left[|f(x')-f(x'')|\le\underbrace{|f(x')-f(\pi)|}_{\le C\delta^{\alpha}}+\underbrace{|f(\pi)-f(x'')|}_{C\delta^{\alpha}}\right]$$

Фикс. $\forall\varepsilon>0$, $\delta\in(0,\pi)$:

$$\frac{M\delta^{\alpha}}{\alpha}<\frac{\varepsilon}{2}.\quad(12)$$

M – из (11). Исп. представл. (8) из леммы 7:

$$S_n(x,f)-f(x)=\int_{-\delta}^{\delta}[f(x+t)-f(x)]D_n(t)dt+c_n(x)\quad(8)$$

где $c_n(x)\rightrightarrows 0$ на $[-\pi,\pi]$ (на $\mathbb{R}$).

(δ) – удовл. (12), $c_n=c_n(\delta)$

$\Longrightarrow \exists N:\ \forall n>N$

$$|c_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\ \forall x\in[-\pi,\pi]\ (\mathbb{R})\quad(13)$$

Воспользуемся оценками (11) и (12):

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta}[f(x+t)-f(x)]\,\mathcal{D}_n(t)\,dt\right| = \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\delta}^{\delta}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} |\sin(n+\tfrac{1}{2})t| \leqslant 1; \quad t\in(-\pi,\pi) \Rightarrow \frac{t}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \\ |\sin t| \geqslant \frac{2}{\pi}|x|, \quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \quad \left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)'_{[0,\frac{\pi}{2}]} \; \frac{2}{\pi}\right] \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow |\sin\tfrac{t}{2}| \geqslant \frac{2}{\pi}\cdot\frac{|t|}{2} \\ &\frac{1}{2|\sin\frac{t}{2}|} \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{|t|} \quad (14) \end{aligned}\right\} \underset{(14),(11)}{\leqslant} \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}M\cdot$$

$$\cdot\int_{-\delta}^{\delta}\frac{|t|^{\alpha}}{|t|}\,dt = \frac{M}{2}\int_{-\delta}^{\delta}\underbrace{|t|^{\alpha-1}}_{\text{чётн}}\,dt = \frac{2}{2}M\int_{0}^{\delta}t^{\alpha-1}\,dt \underset{\forall x\in\mathbb{R}}{=}$$

$$\underset{\forall x\in\mathbb{R}}{=} \frac{M\cdot\delta^{\alpha}}{\alpha} \underset{(12)}{<} \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n>N$$

$$|S_n(x,f)-f(x)|<\varepsilon, \ \forall x\in[-\pi,\pi] \ (\text{на } \mathbb{R})$$

т.е. $S_n(x,f) \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$ Δ

Т 17 f, $2\pi \sim \mathbb{R}$, $f\in C^{\alpha}(\mathbb{R})$

Пусть $f\in C^{\alpha}[a,b]$, $b-a\leqslant 2\pi$.

Теор. 18 Пусть $f(x)\in L[-\pi,\pi]$,

$2\pi \sim \mathbb{R}$ и $f(x) \in C^\alpha[a,b]$, для некот $[a,b]$: $b-a \le 2\pi$, $\alpha \in (0,1]$

$\Longrightarrow \forall \delta_0 \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$ ТРФ ф-ции $f(x)$ $\rightrightarrows$ на $[a+\delta_0, b-\delta_0]$ (к $f(x)$)

Δ Пусть δ в (8) $\xrightarrow{0<\delta<\delta_0}$ $x \in [a+\delta_0, b-\delta_0]$

$\Longrightarrow x+t \in [a,b], |t| \le \delta \Longrightarrow$ справедл (11).

$\Longrightarrow$ проводим всю схему д-ва предыд теоремы, исп оценку (11), (12), (13), (14), подст. в (8) и получ $|S_n(x,f) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in [a+\delta_0, b-\delta_0]$ Δ

6°. Сх-ть ТРФ в точке.

__Опред.__ Ф-я $f(x)$ удовл в т. $x_0 \in \mathbb{R}$

- справа условию Гёльдера с показателем α, $\alpha \in (0,1]$, если $\exists f(x_0+0)$, $\exists M>0, \delta>0$ - пост:

$$|f(x_0+t) - f(x_0+0)| \le Mt^\alpha, \forall t \in (0,\delta].$$

- слева усл Гёльдера с показ. α, $\alpha \in (0,1]$, если $\exists f(x_0-0)$, $\exists M, \delta > 0$:

$$|f(x_0+t) - f(x_0-0)| \le M|t|^\alpha, \forall t \in [-\delta, 0).$$

$\exists f'_\pm(x_0)$ - f удовл. усл Гёльдера справа (слева), с $\forall \alpha \le 1$ $(|x|)$ в 0

$$f'_+(x_0) = \lim_{t \to 0+0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{t}$$

<u>Теор 19</u> Пусть $f(x) \in L[-\pi, \pi]$, $2\pi \sim \mathbb{R}$, в некот. точке $x_0 \in \mathbb{R}$ $f(x)$ удовл. справа усл Гельдера с показ. α_1, $\alpha_1 \in (0,1]$, и слева — усл Гельдера с показ. α_2, $\alpha_2 \in (0,1]$ $\Longrightarrow$ ТРФ $f(x)$ сход. в т. x_0

$$S_n(x_0, f) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} \equiv \tilde{f}(x_0)$$

Δ По усл. $\exists M_1, M_2, \delta_1, \delta_2 > 0$:

$|f(x_0+t) - f(x_0+0)| \le M_1 t^{\alpha_1}$, $\forall t \in (0, \delta_1]$,

$|f(x_0+t) - f(x_0-0)| \le M_2 |t|^{\alpha_2}$, $\forall t \in [-\delta_2, 0)$,

$\exists M = \max(M_1, M_2)$, $\delta_0 = \min(\delta_1, \delta_2)$, $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow (15) \begin{cases} |f(x_0+t) - f(x_0+0)| \le M t^{\alpha}, & \forall t \in (0, \delta_0] \\ |f(x_0+t) - f(x_0-0)| \le M |t|^{\alpha}, & \forall t \in [-\delta_0, 0) \end{cases}$$

Фикс. $\forall \varepsilon > 0$, $\delta \in (0, \pi)$, $0 < \delta < \delta_0$

$$\frac{M \delta^{\alpha}}{\alpha} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (12)$$

$\xrightarrow[\text{из (9) л. 7}]{(8)}$ $S_n(x_0, f) - \tilde{f}(x_0) =$

$$= \int_{-\delta}^{\delta} [f(x_0+t) - \tilde{f}(x_0)] \mathcal{D}_n(t)\,dt + c_{1n},$$

$$c_{1n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \quad \exists N: \forall n>N: |c_{1n}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (16)$$

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} [f(x_0+t) - \tilde{f}(x_0)] \mathcal{D}_n(t)\,dt \right| =$$

$$= \left\{ \mathcal{D}_n(t) \text{ - чётная} \Rightarrow \int_{-\delta}^{\delta} \mathcal{D}_n(t)\,dt = 2\int_0^{\delta} \mathcal{D}_n(t)\,dt = 2\int_{-\delta}^{0} \mathcal{D}_n(t)\,dt \right\}$$

$$= \left| \int_{-\delta}^{\delta} f(x_0+t) \mathcal{D}_n(t)\,dt - \frac{f(x_0+0)}{2} \cdot 2\int_0^{\delta} \mathcal{D}_n(t)\,dt - \frac{f(x_0-0)}{2} \cdot 2\int_{-\delta}^{0} \mathcal{D}_n(t)\,dt \right| = \left| \int_0^{\delta} [f(x_0+t) - f(x_0+0)] \mathcal{D}_n(t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{-\delta}^{0} [f(x_0+t) - f(x_0-0)] \mathcal{D}_n(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\delta} |f(x_0+t) - f(x_0+0)| \cdot |\mathcal{D}_n(t)|\,dt +$$

$$+ \int_{-\delta}^{0} |f(x_0+t) - f(x_0-0)| \cdot |\mathcal{D}_n(t)|\,dt \underset{(15),(14)}{\leqslant}$$

$$\underset{(15),(14)}{\leqslant} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} M \left[\int_0^{\delta} \frac{t^{\alpha}}{t}\,dt + \underbrace{\int_{-\delta}^{0} \frac{|t|^{\alpha}}{|t|}\,dt}_{\substack{\text{чётн} \\ \| \\ \int_0^{\delta} t^{\alpha-1}}} \right] =$$

$= \frac{2}{2} M \int_0^\delta t^{\alpha-1}\,dt = \frac{M\delta^\alpha}{\alpha} \underset{(12)}{<} \frac{\varepsilon}{2}$

(16) $\left[\text{т.е. } S_n(x_0,f) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \tilde f(x_0)\right]$

$\Longrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n>N$

$|S_n(x_0,f)-\tilde f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$

т.е. $S_n(x_0,f)\xrightarrow[n\to\infty]{} \tilde f(x_0)$ △

7° Сходимость ТРФ кусочно-гельдеровой ф-ции

Опред. Ф-я $f(x)$ наз. кусочно-гельдеровой на $[a,b]$, если точками $x_0=a<x_1<\dots<x_n=b$ отрезок $[a,b]$ разбив. на конеч. число отрезков $I_k=[x_{k-1},x_k]$, на каждом из которых $f(x)\in C^{\alpha_k}[I_k]$, $\alpha_k\in(0,1]$, $(k=\overline{1,n})$ (в т. x_{k-1}, x_k: $f(x_{k-1}+0)$, $f(x_k-0)$). I_k наз. отрезками гладкости ф-ции $f(x)$.

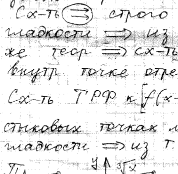
Теорема 20. Пусть $f(x)$ явл. кус-гельдеровой на $[-\pi,\pi]$ и $2\pi \sim R$.
Тогда $\forall [a,b]\subset R$ ТРФ сходится к $f(x)$ в среднем. $\forall x\in R$ ТРФ $f(x)$ сходится к $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, строго внутри отрезков гладкости ТРФ сходится к $f(x)$ равномерно.

Δ Сх-ть в среднем на $[-\pi, \pi]$ ($a \Rightarrow, \forall [a,b]$) $\Rightarrow$ из следствия 2 из Теор 10 о замкн триг. сист. ф-ций

Сх-ть ($\rightrightarrows$) строго внутри отрезков гладкости $\Rightarrow$ из Теор 18. Из этой же теор $\Rightarrow$ сх-ть ТРФ к $f(x)$ в $\forall$ внутр точке отрезков гладкости.

Сх-ть ТРФ к $[f(x-0)+f(x+0)] \cdot \frac{1}{2}$ в стыковых точках между отрезками гладкости $\Rightarrow$ из Т.19. Δ

Пр.



ТРФ $\forall [a,b] \underset{\text{в сред.}}{\Rightarrow}$

Замечание

① $[-\pi, \pi] \to [-l, l]$

$l \in \mathbb{R},\ l > 0 \Rightarrow \begin{cases} x \to \frac{\pi x}{l} \\ \frac{2\pi}{\pi} l = 2l - T \text{ (период)} \end{cases}$

$2l \sim \mathbb{R}$

$S_n(x,f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_n \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l} \right),$

$$a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi k x}{l}\,dx,\ k \geq 0, \quad b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi k x}{l}\,dx,\ k \geq 1.$$

$$[a,b];\ l = \frac{b-a}{2} \Longrightarrow [-l,l]$$

② Комплексная форма записи ТРФ

$$a_k\cos kx + b_k\sin kx \underset{\text{ф-ла Эйлера}}{=} a_k\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} + \underbrace{b_k\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\Big|\frac{i}{i}}_{ib_k\frac{e^{-ikx}-e^{ikx}}{2}} = c_k e^{ikx} + c_{-k}e^{-ikx}$$

$$\left[= \tilde{c}_{-k}e^{ikx} + \tilde{c}_k e^{-ikx}\right] \quad \left(\tilde{c}_k = c_{-k}\right)$$

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx - i\sin kx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx \ \left[= \tilde{c}_{-k}\right]$$

$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx + i\sin kx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,dx \ \left[= \tilde{c}_k\right]$$

$$\Longrightarrow S_n(x,f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \tilde{c}_k e^{-ikx},$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2},$$

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx}dx, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2,$$

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_k e^{-ikx} - \text{ТРФ}$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\right\}_{k=-\infty}^{+\infty} - \text{ОНР},\ L[-\pi,\pi].$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \text{р-во}$$

Парсеваля.

Глава 10. Интеграл Фурье

Рассм $f(x)$, опред. на $\mathbb{R}$ и не имеющие периода $\Rightarrow$ в ТРФ $f(x)$ не разлагается. Восп инт Фурье

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_k e^{-ikx}$$

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2$$

<u>Опред</u> Ф-е $f(x)$ принадл на $\mathbb{R}$ классу L_1, записываем: $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, если $f(x)$ интегрир (в собст. смысле по Риману) на $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}$ и сходится несобст. инт. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx \equiv M$ (1)

$e^{-x^2},\ e^{-|x|},\ \frac{1}{1+x^2},\ \begin{cases}\frac{1}{x^2}, & |x|\ge 1\\ 0, & |x|<1\end{cases} \in L_1(\mathbb{R})$

Опред. След. выражение $\hat f(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iyx}dx$ (2)
наз. образом или преобразованием Фурье ф-ции $f(x)$. ($F[f]$)

Иногда пишут $\hat f(y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty},\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}$

Тогда обратн. преобр. $F^{-1}(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty},\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}$

§1 Свойства преобраз. Фурье

Теор 1. Пусть $f(x)\in L_1(\mathbb{R})$. Тогда интеграл (2) сход. в $\forall y\in\mathbb{R}$, функция $\hat f(y)$ явл. непрерывной на $\mathbb{R}$,

$$\lim_{|y|\to+\infty}|\hat f(y)|=0 \quad (3)$$

▲ $|e^{iyx}|=1 \Longrightarrow |f(x)e^{iyx}|=|f(x)|$
$\forall y,x\in\mathbb{R}$

Т.к. сход. инт (1), то инт (2) сход $\Longrightarrow$ на $\forall[a,b]\subset\mathbb{R} \Longrightarrow$ (2) сход. $\forall y\in\mathbb{R}$

Непр-ть $\hat f(y)$. Прим. теор из п 8 не получится, т.к. f не обяз. быть непр.

$\underset{\text{непр}}{f_n(x)} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x) \Longrightarrow$ непр. Фикс. $\forall[a,b]\subset\mathbb{R}$

Рассм. ФП $I_n(y)=\int\limits_{-n}^{n} f(x)e^{iyx}dx$, $n=1,2,$

на $[a,b]$. Фикс $\forall n \in \mathbb{N}$. Док, что

$I_n(y)$ – непр на $[a,b]$.

$$\Delta I_n(y) = I_n(y+\Delta y) - I_n(y) =$$
$$= \int_{-n}^{+n} f(x)\left[e^{i(y+\Delta y)x} - e^{iyx}\right] dx$$

Ф-я e^{iyx} равн непр на пр-ке

$P = \underset{(x)}{[-n,n]} \times \underset{(y)}{[a,b]} \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$

$|\Delta y| < \delta \quad \left|e^{i(y+\Delta y)x} - e^{iyx}\right| < \frac{\varepsilon}{M}$ (M – из (1)), $\forall (x,y) \in P$, $(x, y+\Delta y) \in P$

$$\Longrightarrow |\Delta I_n(y)| \underset{|\Delta y|<\delta}{<} \frac{\varepsilon}{M} \int_{-n}^{n} |f(x)|\,dx \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{M} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon \underset{\forall y \in [a,b]}{\Longrightarrow}$$

$\Longrightarrow I_n(y)$ непр на $[a,b]$

Т.к. инт (2) сх. равн на $[a,b] \Longrightarrow$

$\Longrightarrow I_n(y) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \hat{f}(y)$ на $[a,b]$,

I_n – непр, сх $\rightrightarrows$ $\Longrightarrow \hat{f}(y)$ непр на $\forall [a,b] \Longrightarrow \hat{f}(y)$ непр на $\mathbb{R}$.

Док. соотн (3)

Т.к. инт (1) сходится, то $\forall \varepsilon > 0$, фикс,

$\exists A>0: \int\limits_{|x|\geq A} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{3}$ $\left(=\int\limits_{-\infty}^{-A}+\int\limits_{A}^{+\infty}\right)$

$|\hat{f}(y)| = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iyx}dx\right| = \left|\int\limits_{-A}^{A} + \int\limits_{|x|\geq A}\right| \leq$

$\leq \left|\int\limits_{-A}^{A} f(x)e^{iyx}dx\right| + \underbrace{\int\limits_{|x|\geq A} |f(x)|dx}_{<\frac{\varepsilon}{3}\ \forall y\in\mathbb{R}}$

Достат. д-ть, что $\left|\int\limits_{-A}^{A} f(x)e^{iyx}dx\right| < \frac{2}{3}\varepsilon$ (4)

для $|y| >> 1$.

Приблизим $f(x)$ кус.-пост. ф-ей $f_1(x)$ на $[-A, A]$. Т.к. $f(x)$ инт-ма на $[-A, A]$, то $\exists$ разб. T отрезка $x_0 = -A < x_1 < \ldots < x_n = A$, что

$0 \leq S - \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{3}$

$S = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$, $M_k = \sup\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

Рассм. $f_1(x) = \begin{cases} M_k, & x\in(x_{k-1}, x_k], \ k=2,3,\ldots,n, \\ M_1, & x\in[x_0, x_1] \end{cases}$

$\Longrightarrow 0 \leq \int\limits_{-A}^{A} |f_1(x) - f(x)|\,dx = \int\limits_{-A}^{A} [f_1(x) - f(x)]\,dx$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \underbrace{f_1(x)}_{=M_k}dx - \int\limits_{-A}^{A} f\,dx = S - \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{3}.$

$\Longrightarrow \int\limits_{-A}^{A} |f_1(x) - f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{3}$ (5)

Рассм. $\left| \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} e^{iyx} dx \right| = \left| \frac{1}{iy} (e^{iyx_k} - e^{iyx_{k-1}}) \right| \leq$

$\leq \frac{|e^{iyx_k}| + |e^{iyx_{k-1}}|}{|y|} \leq \frac{2}{|y|} \underset{|y|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (6)

Рассм. $\left| \int\limits_{-A}^{A} e^{iyx} [f(x) \pm f_1(x)]\,dx \right| \leq$

$\leq \left| \int\limits_{-A}^{A} f_1(x) e^{iyx} dx \right| + \left| \int\limits_{-A}^{A} [f_1(x) - f(x)] e^{iyx} dx \right| \leq$

$\leq \left| \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} M_k e^{iyx} dx \right| + \int\limits_{-A}^{A} |f_1(x) - f(x)|\,dx \overset{(5)}{<}$

$\overset{(5)}{<} \sum\limits_{k=1}^{n} |M_k| \left| \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} dx \right| + \frac{\varepsilon}{3} \overset{(6)}{\leq} \frac{2}{|y|} \sum\limits_{k=1}^{n} |M_k| +$

$+ \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon$, если $|y| > \frac{6}{\varepsilon} \sum\limits_{k=1}^{n} |M_k| =$

$= B > 0$, т.е. соотн (4) доказано

$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists B > 0 \quad |y| > B \quad |\hat{f}(y)| < \varepsilon$,

т.е. справ. (3). ▲

Следствие. Если $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, то

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x\,dx \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ – косинус-преобразование Фурье.

$|\hat f(y)| \to 0 \Longrightarrow \operatorname{Re}\hat f(y) = \cos yx \to 0$

$\operatorname{Im}\hat f(y) = \sin yx \to 0$, $|y| \to \infty$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ — наз. синус-преобразование Фурье

§2 Представление ф-ции интегралом Фурье

Теор. 2 будет чуть позже.

След. предел (если он $\exists$)

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\hat f(y)e^{-iyx}\,dy \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat f(y)e^{-iyx}\,dy \quad (1)$$

наз. интегралом Фурье ф-ции $f(x)$ или обратным преобр. Фурье ф-ции $f(x)$ $(F^{-1}[f])$

$\sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\tilde c_k e^{-ikx}$

Теор 2 Пусть $f(x)\in L_1(\mathbb{R})$, в некот. точке $x_0\in\mathbb{R}$, $f(x)$ удовл. слева усл. Гельдера с показателем α_1, справа — с показ. α_2, $\alpha_1,\alpha_2\in(0,1]$
$\Longrightarrow$ Ф-я $f(x)$ разложима в т. x_0 в интеграл Фурье (1) и

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat f(y)e^{-iyx_0}\,dy = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} \equiv f_0 \quad (2)$$

Δ По теор 1 $\hat f(y)$ непр. на $[-\lambda,\lambda]$, $\forall\lambda>0 \Longrightarrow \exists \int_{-\lambda}^{\lambda}\hat f(y)e^{-iyx}\,dy = \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iyx}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ity}\,dt\right]dy \quad (3)$

Доказ. след. соотн.

$$I(\lambda, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(y) e^{-iyx} dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\frac{\sin \lambda t}{t}dt \quad (4)$$

Покажем, что в пр. части (3) можно переставить интегралы. Интеграл в кв. [ ] в (3) сходится равномерно по (y) на $[-\lambda, \lambda]$, фикс $\forall \lambda > 0$ (по доказ. в Теор. 1)

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists A_0 > 0 \ \ \forall A \geq A_0$$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots - \int_{-A}^{A} \ldots \right| = \left| \int_{|u|\geq A} f(u) e^{iyu} du \right| < \frac{\varepsilon \pi}{\lambda} \quad (5) \quad \forall y \in [-\lambda, \lambda]$$

Рассм. $\left| I(\lambda, x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iyx} \int_{-A}^{A} f(u) e^{iyu} du dy \right| =$ $\forall A \geq A_0$

$$= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(y) e^{-iyx} dy - \ldots \right| = \frac{1}{2\pi}\left| \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iyx} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{iyu} du dy - \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iyx} \int_{-A}^{A} f(u) e^{iyu} du dy \right| = \frac{1}{2\pi}\left| \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iyx} \int_{|u|\geq A} f(u) e^{iyu} du dy \right| \overset{(5)}{<}$$

$|e^{-iyx}| = 1$

$$\overset{(5)}{<} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon \pi}{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} 1 dy = \varepsilon \quad \forall A \geq A_0(\varepsilon)$$

$$\Longrightarrow \forall A \geq A_0 \quad \left| I(\lambda, x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iyx} \int_{-A}^{A} f(u) e^{iyu} du dy \right| < \varepsilon \quad (6)$$

$f(u)$ — инт. на $[-A, A]$, фикс $\forall A \geq A_0$

$\Longrightarrow f(u)$ инт. на пр-ке $P = [-\lambda, \lambda] \times [-A, A]$
$\qquad (y) \qquad (u)$

т.е $\exists \iint\limits_{P} f(u)\, e^{iy(u-x)}\,du\,dy$,

$\exists$ однократн инт. $\int_{-A}^{A} f(u)e^{iy(u-x)}\,du$,
$\int_{-\lambda}^{\lambda} f(u)e^{iy(u-x)}\,dy$

$\Longrightarrow$ $\exists$ повт. интегралы и они равны между собой:
замеч 1 к теор 1 главы 8

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} dy \int_{-A}^{A} f(u)\, e^{iy(u-x)}\,du = \int_{-A}^{A} du \int_{-\lambda}^{\lambda} f(u)e^{iy(u-x)}\,dy$$

$\Longrightarrow$ в (6): $\left|I(\lambda, x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} du \int_{-\lambda}^{\lambda} f(u)e^{iy(u-x)}\,dy\right| < \varepsilon$

$\forall A \geq A_0$ $\Longrightarrow$ сх. несоб. инт. и он равен

$$I(\lambda, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\lambda}^{\lambda} f(u)e^{iy(u-x)}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{iy(u-x)}\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\frac{e^{i\lambda(u-x)} - e^{-i\lambda(u-x)}}{i(u-x)}\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\frac{\sin\lambda(u-x)}{u-x}\,du \underset{\substack{u-x=t\\ u=x+t}}{=}$$

$$\underset{\substack{u-x=t\\ u=x+t}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\,\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt$$! т.е (4) д-но

$(x \to x_0)$. Вспоминаем.

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}dt \underset{\lambda>0}{=} \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\sin\lambda t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\sin\lambda t}{t}dt=1$$

$$\Longrightarrow \underset{f_0}{=}\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}f(x_0+0)\frac{\sin\lambda t}{t}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}f(x_0-0)\frac{\sin\lambda t}{t}dt$$

$$I(\lambda,x_0)-f_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left[f(x_0+t)-f(x_0+0)\right]\frac{\sin\lambda t}{t}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\left[f(x_0+t)-f(x_0-0)\right]\frac{\sin\lambda t}{t}dt$$

Из справедливости условий Гельдера для $f(x)$ в т. $x_0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \exists\, \delta_0>0,\ \alpha\in(0,1],\ M>0:$

$$(7)\begin{cases}|f(x_0+t)-f(x_0+0)|<Mt^{\alpha}\ \forall t\in[0,\delta_0]\\ |f(x_0+t)-f(x_0-0)|<M|t|^{\alpha},\ \forall t\in[-\delta_0,0]\end{cases}$$

$(\delta_0=\min(\delta_1,\delta_2),\ \alpha=\min(\alpha_1,\alpha_2),\ M=\max(M_1,M_2))$

Выбираем $\delta\in(0,\delta_0)$ при фикс $\varepsilon>0$:

$$\frac{M\delta^{\alpha}}{\pi\alpha}<\frac{\varepsilon}{4} \qquad (8)$$

$$I(\lambda,x_0)-f_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta}[f(x_0+t)-f(x_0+0)]\cdot$$

$\cdot\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}\left[f(x_0+t)-f(x_0-0)\right]\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt +$

$+\frac{1}{\pi}\int_{|t|\ge\delta} f(x_0+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt - \frac{1}{\pi}f(x_0+0)\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt -$

$-\frac{1}{\pi}f(x_0-0)\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt \equiv I_1+I_2+I_3-I_4$

$\Big|\frac{2}{2} = -\frac{2f_0}{\pi}\int_{\delta}^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt$

$|I_1| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\delta}\left[f(x_0+t)-f(x_0+0)\right]\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right| \underset{(*)}{\le}$

$\underset{(7)}{<}\frac{1}{\pi}\cdot M\int_0^{\delta} t^{\alpha-1}\,dt = \frac{M\delta^{\alpha}}{\pi\cdot\alpha} \underset{(8)}{<} \frac{\varepsilon}{4}\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$

$|\sin\lambda t|\le 1$

Аналогично, $|I_2| < \frac{\varepsilon}{4}$ из (7), (8), $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

$I_3 = \frac{1}{\pi}\int_{|t|\ge\delta} f(x_0+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt.$

Рассм. вспом. ф-ю $g(t) = \begin{cases}\frac{1}{\pi}\frac{f(x_0+t)}{t}, & |t|\ge\delta\\ 0, & |t|<\delta\end{cases}$ $\quad |f_1|\le\frac{1}{\pi\delta}|f|$

$g(t)\in L_1(\mathbb{R}) \Longrightarrow I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\sin\lambda t\,dt$

$\xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$ согласно следствию из Теор 1

$\Longrightarrow \exists\Lambda>0\ \ \forall\lambda>\Lambda\ \ |I_3| < \frac{\varepsilon}{4}$

$I_4 = \frac{2f_0}{\pi}\int_{\delta}^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt \underset{\lambda t = y}{=} \frac{2f_0}{\pi}\int_{\lambda\delta}^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy$

$\xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$ – остаток сходящегося интеграла

$\Longrightarrow \exists \Lambda > 0 \colon \forall \lambda > \Lambda \quad |I_4| < \frac{\varepsilon}{4}$

$\Longrightarrow \forall \lambda > \Lambda \quad |I(\lambda, x) - f_0| < \frac{\varepsilon}{4} \cdot 4 = \varepsilon,$

т.е. $\exists \lim\limits_{\lambda \to +\infty} I(\lambda, x) = f_0 \quad \Delta$