КС-грамматики

Разбор цепочки - процесс построения вывода цепочки α из цели S грамматики G = (T, N, P, S).

Вывод цепочки $\beta \in T^*$ из $S \in N$ в КС-грамматике G = (T, N, P, S), называется:

- левосторонним**,** если в нем каждая очередная сентенциальная форма получается из предыдущей заменой самого левого нетерминала.

- правосторонним**,** если в нем каждая очередная сентенциальная форма получается из предыдущей заменой самого правого нетерминала.

Например, для цепочки a+b+a в грамматике

$$G = (\{a, b, +\}, \{ S,T \}, \{ S \to T \mid T+S; T \to a \mid b \}, S)$$

можно построить выводы:

(1) $S \to T+S \to T+T+S \to T+T+T \to a+T+T \to a+b+T \to a+b+a$ - произвольный

(2) $S \to T+S \to a+S \to a+T+S \to a+b+S \to a+b+T \to a+b+a$ - левый

(3) $S \to T+S \to T+T+S \to T+T+T \to T+T+a \to T+b+a \to a+b+a$ - правый

Выводы (1) – (3) являются **эквивалентными** в том смысле, что в них в одних и тех же местах применяются одни и те же правила вывода, но в различном порядке.

Дерево вывода

Дерево вывода (или ***дерево разбора***) в КС-грамматике G = (T, N, P, S) – дерево, для которого выполнены следующие условия:

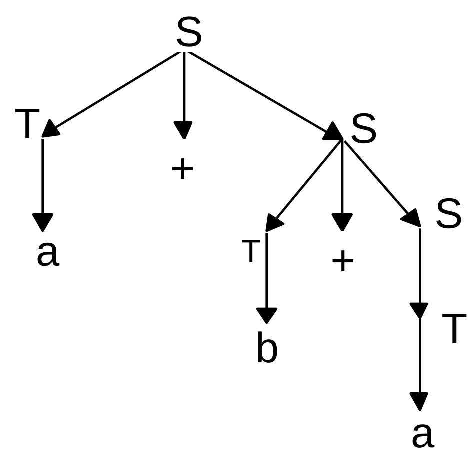
(1) дерево ориентировано и упорядочено;

(2) каждая вершина дерева помечена символом из множества $N \cup T \cup \{\varepsilon\}$, при этом корень дерева помечен символом S; листья - символами из $T \cup \{\varepsilon\}$;

(3) если вершина дерева помечена символом $A \in N$, а ее непосредственные потомки - символами a1, a2, ... , an , где каждое $ai \in T \cup N$, то $A \rightarrow a1\ a2\ ...\ an$ - правило вывода в этой грамматике;

(4) если вершина дерева помечена символом $A \in N$, а ее единственный непосредственный потомок помечен символом ε, то $A \rightarrow \varepsilon$ - правило вывода в этой грамматике.

Пример дерева вывода для цепочки a + b + a в грамматике G:



Дерево вывода можно строить ***нисходящим*** либо ***восходящим*** способом.

Неоднозначность грамматик

КС-грамматика G ***неоднозначная***, если существует **хотя бы одна** цепочка $\alpha \in$ **L(G**), для которой может быть построено два или более различных деревьев вывода.

В противном случае грамматика является ***однозначной*.**

Если грамматика однозначная, то при любом способе построения, нисходящем или восходящем, будет получено одно и то же дерево разбора.

Пример неоднозначной грамматики:

G_if = ({ if, then, else, a, b }, { S }, P, S),

где P = { S $\rightarrow$ if b then S else S | if b then S | a }.

В этой грамматике для цепочки

if b then if b then a else a

можно построить два различных дерева вывода.

Неоднозначность грамматик

Н**еоднозначность - это свойство грамматики, а не языка.**

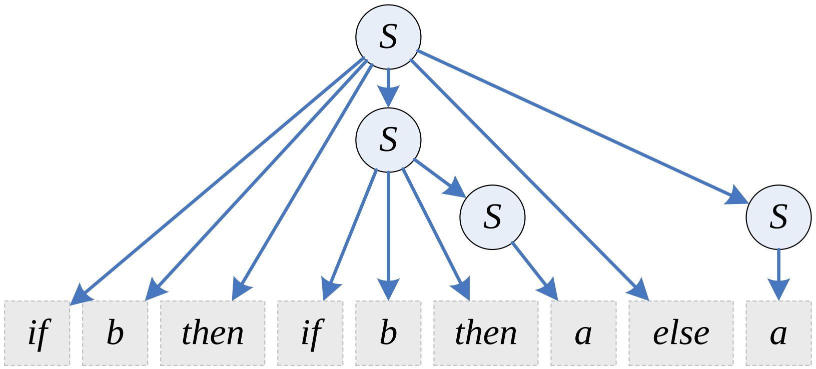
Если грамматика используется для определения языка программирования, то она должна быть однозначной.

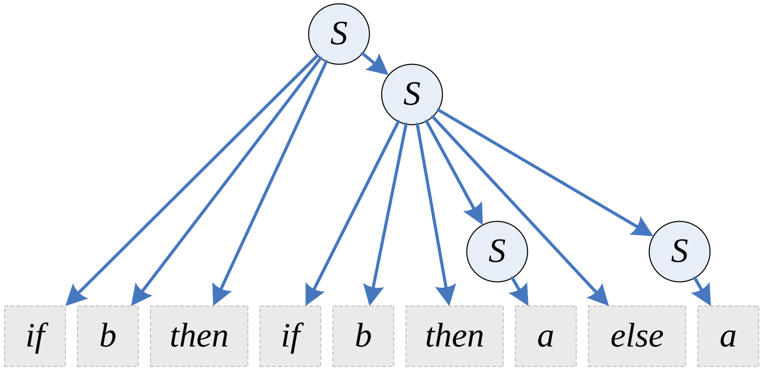
Можно преобразовать грамматику G_if, устранив неоднозначность:

$$S \rightarrow \text{if } b \text{ then } S \mid T$$
$$T \rightarrow \text{if } b \text{ then } T \text{ else } S \mid a$$

Проблема определения, является ли заданная КС-грамматика однозначной, является **алгоритмически неразрешимой**.

Деревья вывода для цепочки *if b then if b then a else a* в **грамматике G_if**





Грамматика **G_if** неоднозначна**,** однако, это **не** означает, что язык **L(G_if)** неоднозначный.

Преобразование неоднозначных грамматик

Некоторые виды правил вывода, которые приводят к неоднозначности и некоторые способы эквивалентных преобразований неоднозначных грамматик к однозначным:

1. $A \longrightarrow AA \mid \alpha \qquad \Rightarrow \qquad A \longrightarrow \alpha A \mid \alpha$

   (док-во для $\boldsymbol{\alpha\alpha\alpha}$) – порождаются подцепочки α^n (n >= 1);

2. $A \longrightarrow A\alpha A \mid \beta \qquad \Rightarrow \qquad A \longrightarrow \beta\alpha A \mid \beta$

   (док-во для $\boldsymbol{\beta\alpha\beta\alpha\beta}$) – порождаются подцепочки $\beta\ (\alpha\ \beta)^n$ (n >= 0);

3. $A \longrightarrow \alpha A \mid A\beta \mid \gamma \qquad \Rightarrow \qquad A \longrightarrow \alpha A \mid B;$

   $B \longrightarrow B\beta \mid \gamma, \quad B \notin N$

   (док-во для $\boldsymbol{\alpha\gamma\beta}$) – порождаются подцепочки $\alpha^n \gamma\ \beta^m$ (n, m >= 0);

4. $A \longrightarrow \alpha A \mid \alpha A\beta A \mid \gamma \qquad \Rightarrow \qquad A \longrightarrow \alpha A \mid B;$

   $B \longrightarrow \alpha B\beta A \mid \gamma,\ B \notin N$

(док-во для $\boldsymbol{\alpha\alpha\gamma\beta\gamma}$) – порождаются подцепочки $\delta = \alpha^n\alpha^m\ \gamma(\beta\delta)^m$ (n,m >=0)

Таким приемом преобразована грамматика G_if :

($\alpha \equiv$ if_b_then, $\beta \equiv$ else, a $\equiv \gamma$, A $\equiv$ S, B $\equiv$ T).

Неоднозначные языки

Язык, порождаемый грамматикой ***неоднозначный***, если он не может быть порожден никакой однозначной грамматикой.

Проблема определения, порождает ли данная КС-грамматика однозначный язык (т.е. существует ли эквивалентная ей однозначная грамматика), является **алгоритмически неразрешимой.**

Пример неоднозначного КС-языка:

$L = \{a^i b^j c^k \mid i = j$ или $j = k\}$.

Одна из грамматик, порождающих L, такова:

$S \longrightarrow AB \mid DC$ (док-во для цепочки abc)

$A \longrightarrow aA \mid \varepsilon$

$B \longrightarrow bBc \mid \varepsilon$

$C \longrightarrow cC \mid \varepsilon$

$D \longrightarrow aDb \mid \varepsilon$

Бесплодные символы грамматики.

Символ $A \in N$ является ***бесплодным*** в грамматике $G = (T, N, P, S)$, если множество $\{ \alpha \in T^* \mid A \Rightarrow \alpha \}$ пусто.

Алгоритм удаления бесплодных символов:

Вход: КС-грамматика $G = (T, N, P, S)$,

Выход: КС-грамматика $G' = (T, N', P', S)$, не содержащая бесплодных символов, для которой $L(G) = L(G')$.

Метод:

Строим множества $N_0, N_1, \ldots$

1. $N_0 := \varnothing$; $i := 1$.

2. $N_i := N_{i-1} \cup \{ A \mid A \to \alpha \in P$ и $\alpha \in (T \cup N_{i-1})^* \}$.

<u>Если</u> $N_i \neq N_{i-1}$, <u>то</u> $i := i + 1$ и переходим к шагу 2,
<u>иначе</u> $N' := N_i$; P' состоит из правил множества P, содержащих только символы из $N_i \cup T$; $G' := (T, N', P', S)$.

Удаление бесплодных символов грамматики. Пример.

$S \longrightarrow AC \mid Bb \mid \varepsilon$

$A \longrightarrow aCb$

$B \longrightarrow bB$

$C \longrightarrow cCc \mid c$

$D \longrightarrow Aa \mid Bb \mid d$

Шаг 0: $N_0 := \varnothing$; $i := 1$.

Шаг 1: $N_1 := \{S, C, D\}$; $i := 2$.

Шаг 2: $N_2 := \{S, C, D, A\}$; $i := 3$.

Шаг 3: $N_3 := \{S, C, D, A\} = N_2$, т.е. искомое множество построено.

Удаляем все правила, содержащие нетерминал B, не вошедший в построенное множество:

$S \longrightarrow AC \mid \varepsilon$

$A \longrightarrow aCb$

$C \longrightarrow cCc \mid c$

$D \longrightarrow Aa \mid d$

Недостижимые символы грамматики

Символ $x \in (T \cup N)$ является ***недостижимым*** в грамматике $G = (T, N, P, S)$, если он не появляется ни в одной сентенциальной форме этой грамматики.

Алгоритм удаления недостижимых символов:

Вход: КС-грамматика $G = (T, N, P, S)$,

Выход: КС-грамматика $G' = (T', N', P', S)$, не содержащая недостижимых символов, для которой $L(G) = L(G')$.

Метод:

Строим множества $V_0, V_1, \ldots$

1. $V_0 := \{S\}$; $i := 1$.

2. $V_i := V_{i-1} \cup \{ x \mid x \in T \cup N, \quad A \rightarrow \alpha x \beta \in P, \; A \in V_{i-1}, \; \alpha, \beta \in (T \cup N)^* \}$.

<u>Если</u> $V_i \neq V_{i-1}$, <u>то</u> $i := i + 1$ и переходим к шагу 2,
<u>иначе</u> $N' := V_i \cap N$; $T' := V_i \cap T$; P' состоит из правил множества P, содержащих только символы из V_i; $G' := (T', N', P', S)$.

Удаление недостижимых символов грамматики. Пример.

$S \longrightarrow AC \mid \varepsilon$

$A \longrightarrow aCb$

$C \longrightarrow cCc \mid c$

$D \longrightarrow Aa \mid d$

Шаг 0: $V_0 := \{S\}$; $i := 1$.
Шаг 1: $V_1 := \{S, A, C, \varepsilon\}$; $i := 2$.
Шаг 2: $V_2 := \{S, A, C, \varepsilon, a, b, c\}$; $i := 3$.
Шаг 3: $V_3 := \{S, A, C, \varepsilon, a, b, c\} = V_2$, т.е. искомое множество построено

Удаляем все правила, содержащие символы D и d, не вошедшие в построенное множество:

$S \longrightarrow AC \mid \varepsilon$

$A \longrightarrow aCb$

$C \longrightarrow cCc \mid c$

Приведенные грамматики

Недостижимые и бесплодные символы в грамматике $G = (T, N, P, S)$ называются ***бесполезными*** символами в этой грамматике.

КС-грамматика G называется ***приведенной,*** если в ней нет бесполезных символов.

Алгоритм приведения грамматики:

1) обнаруживаются и удаляются все **бесплодные** нетерминалы.
2) обнаруживаются и удаляются все **недостижимые** символы.

Удаление символов сопровождается удалением правил вывода, содержащих эти символы.

Если в алгоритме переставить шаги 1) и 2), то не всегда результатом будет приведенная грамматика. Например, при такой перестановке шагов грамматика

$S \rightarrow AB \mid a$

$A \rightarrow b$

$B \rightarrow BA$ останется неприведенной.

Алгоритм устранения правил с пустой правой частью

Вход: КС-грамматика $G = (T, N, P, S)$.
Выход: КС-грамматика $G' = (T, N', P', S')$ - неукорачивающая, $L(G') = L(G)$.
Метод:

1. Построить множество $X = \{A \in N \mid A \Rightarrow \varepsilon\}$; $N' := N$.
2. Построить P', удалив из множества правил P все правила с пустой правой частью.
3. Если $S \in X$, то ввести новый начальный символ S', добавив его в N', и в множество правил P' добавить правило $S' \to S \mid \varepsilon$.
   Иначе просто переименовать S в S'.
4. Изменить P' следующим образом. Каждое правило вида
   $B \to \alpha_1 A_1 \alpha_2 A_2 \ldots \alpha_n A_n \alpha_{n+1}$, где $A_i \in X$ для $i = 1,\ldots, n$, $\alpha_i \in ((N' - X) \cup T)^*$ для $i = 1,\ldots, n + 1$ (т. е. α_i — цепочка, не содержащая символов из X), заменить 2^n правилами, соответствующими всем возможным комбинациям вхождений A_i между α_i:

$$B \to \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}$$
$$B \to \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n A_n\alpha_{n+1}$$
$$\ldots$$
$$B \to \alpha_1\alpha_2 A_2\ldots\alpha_n A_n\alpha_{n+1}$$
$$B \to \alpha_1 A_1\alpha_2 A_2\ldots\alpha_n A_n\alpha_{n+1}$$

   Если $\alpha_i = \varepsilon$ для всех $i = 1, \ldots, n + 1$, то получившееся на данном шаге правило $B \to \varepsilon$ не включать в множество P'.
5. Удалить бесполезные символы и правила, их содержащие.

Устранение правил с пустой правой частью.

Пример.

$S \longrightarrow BC \mid Ab \mid AB$

$A \longrightarrow Aa \mid \varepsilon$

$B \longrightarrow \varepsilon$

$C \longrightarrow c$

Шаг 1: $N_1 := \{ A, B \};$

Шаг 2: $N_2 := \{ A, B, S \};.$

$S1 \longrightarrow S \mid \varepsilon$

$S \longrightarrow BC \mid C \mid Ab \mid b \mid AB \mid A \mid B$

$A \longrightarrow Aa \mid a$

$C \longrightarrow c$

Приводим грамматику:

$S1 \longrightarrow S \mid \varepsilon$

$S \longrightarrow C \mid Ab \mid b \mid A$

$A \longrightarrow Aa \mid a$

$C \longrightarrow c$