1. **Кинематика материальной точки**.

Механическим движением тел называется изменение взаимного расположения тел, их размеров и формы, происходящее с течением времени. Для описания механического движения надо выбрать систему отсчета, т.е. указать тело отсчета, относительно которого наблюдается движение других тел, и связать с телом отсчета координатную систему и часы. Простейшая модель тела – ***материальная точка***: тело, размерами которого можно пренебречь. Размеры тела малы по сравнению с размерами области его движения, твердое тело совершает поступательное движение.
Чтобы измерить расстояние, сравним его с длиной некоторого тела, принятого за эталон. Метр - расстояние, которое проходит свет в вакууме за $\sim 1/(3\cdot 10^8)$ с.
Чтобы измерить время, сравним его с длительностью некоторого процесса, взятого за эталон. Секунда - продолжительность $\sim 10^{10}$ колебаний электрона в атом цезия.
Радиус-вектор - вектор, проведенный из начала отсчета к данной материальной точке.
Законы движения:
- на плоскости: $x(t)$, $y(t)$, где x, y - декартовы координаты точки
- в пространстве: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, где x, y, z - декартовы координаты точки
- через радиус-вектор: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$

Перемещение материальной точки из положения 1 в положение 2 : вектор $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, проведенный из начального положения точки в конечное . Проекции вектора перемещения на декартовы координатные оси (перемещения точки вдоль осей): $\Delta x = x_2 - x_1, \Delta y = y_2 - y_1, \Delta z = z_2 - z_1$ => вектор перемещения: $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{i}\Delta x + \mathbf{j}\Delta y + \mathbf{k}\Delta z$, где **i**, **j**, **k** – единичные векторы в направлении осей .
Путь точки равен сумме расстояний, пройденных ею вдоль траектории, и всегда > 0 . Пути, пройденные точкой за последовательные промежутки времени, складываются арифметически. Модуль $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ перемещения точки в общем случае не равен пути, пройденному точкой за данный промежуток времени. Совпадают только при движении точки по прямой в одном направлении.
Средняя скорость точки в данной системе отсчета на интервале $(t, t + \Delta t)$ - вектор $\mathbf{v}_{\text{ср}}$, равный отношению вектора перемещения $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ к величине Δt интервала времени

$$\mathbf{v}_{\text{ср}} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

Направление средней скорости совпадает с направлением вектора перемещения $\Delta\mathbf{r}$.
Средняя путевая скорость: отношение пути, пройденного точкой, ко времени его прохождения. Модуль средней скорости в общем случае не совпадает со средней путевой скоростью.
Мгновенная скорость (просто скорость) $\mathbf{v}(t)$ точки в данной системе отсчета в момент времени t - предел средней скорости при неограниченном уменьшении интервала времени Δt (производная радиус-вектора по времени):

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории точки. Проекции скорости точки на декартовы оси равны: $v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z}$ => вектор скорости точки:

$$\mathbf{v}(t) = \{\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\} = \mathbf{i}\dot{x} + \mathbf{j}\dot{y} + \mathbf{k}\dot{z}$$

Модуль скорости через ее проекции на декартовы оси : $v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

Среднее ускорение точки в данной системе отсчета на интервале времени $(t, t + \Delta t)$ - вектор $\mathbf{a}_{\text{ср}}$, равный отношению вектора приращения скорости $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$ на этом интервале к величине интервала времени Δt:

$$\mathbf{a}_{\text{ср}} = \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$$

Мгновенное ускорение (или просто ускорение) $\mathbf{a}(t)$ точки в момент времени t в данной системе отсчета - предел среднего ускорения при стремлении интервала времени Δt к нулю:

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$$

Проекции ускорения точки на декартовы оси : $a_x = \ddot{x}, a_y = \ddot{y}, a_z = \ddot{z}$ => вектор ускорения точки:
$\mathbf{a}(t) = \{\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)\} = \mathbf{i}\ddot{x} + \mathbf{j}\ddot{y} + \mathbf{k}\ddot{z}$
Модуль ускорения : : $a(t) = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$
При криволинейном движении точки ее ускорение раскладывается на 2 составляющие:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{a}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\tau} a_\tau + \mathbf{n} a_n$$

$\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор, направленный по касательной к траектории в данной точке (*тангенциальное* ускорение характеризует изменение вектора скорости по модулю, вектор $\mathbf{a}_\tau$ направлен в сторону движения точки при возрастании ее скорости и в противоположную сторону – при ее убывании);
$\mathbf{n}$ – единичный вектор по нормали к траектории, направленный к центру кривизны (*нормальное* ускорение характеризует изменение вектора скорости по направлению).
Величины тангенциального и нормального ускорения вычисляются по формулам:

$$a_\tau = \dot{v} = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}$$

где R – радиус кривизны траектории в данной точке. При движении точки по окружности нормальное ускорение a_n - *центростремительное* ускорение. Зависимость от времени скорости $\mathbf{v}(t)$ и координат материальной точки $\mathbf{r}(t)$ из известной зависимости от времени ее ускорения $\mathbf{a}(t)$ и заданных начальных условий $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{r}_0$ в декартовых координатах:

$$v_x(t) = v_{0x} + \int_0^t a_x(t)dt, \qquad x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t)dt \ \ (\text{для } y, z \text{ ан} - \text{но})$$

Если ускорение постоянно: $v_x(t) = v_{0x} + a_x t, \ \ x(t) = x_0 + v_{0x} + \dfrac{a_x t^2}{2} \quad (\text{для } y, z \text{ ан} - \text{но})$

2. **Принцип относительности. Преобразования Галилея и преобразования Лоренца**.

Принцип относительности Галилея: никакими механическими опытами, проведенными внутри данной системы отсчета, нельзя установить, находится ли эта система в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения. В математической форме: уравнения, выражающие законы механики, должны быть инвариантны относительно преобразований, описывающих переход от неподвижной системы отсчета к системе, движущейся прямолинейно и равномерно. Это ***преобразования Галилея.***
Рассмотрим две системы отсчета: неподвижную (S) и движущуюся (S') вдоль оси OX. Пусть при $t = 0$ начала обеих систем отсчета совпадают. Тогда расстояние между началами систем в любой момент времени t равно Vt, где V – скорость движения подвижной системы отсчета. Если некоторая материальная точка в момент времени t имеет в системе S' декартовы координаты x', y', z',то ее координаты x, y, z в системе S в этот же момент времени в соответствии с преобразованиями Галилея выражаются следующим образом: $\quad x = x' + Vt, \ \ y = y', \ \ z = z' \quad (1)$
Дифференцируя уравнения (1) по времени, получим $\quad v_x = v_x' + V, \ v_y = v_y', \ \ v_y = v_y' \quad (2)$
Формулы (2) выражают классический закон сложения скоростей: абсолютная скорость материальной точки равна сумме ее относительной скорости и скорости движущейся системы отсчета.
Принцип постоянства скорости света_: скорость света не зависит от того, по отношению к какой системе отсчета – покоящейся или движущейся – она определяется, т.е. абсолютная скорость света равна его относительной скорости по отношению к любой инерциальной системе отсчета. Напр., если свет распространяется вдоль оси OX системы S, то для скоростей волнового фронта световой волны относительно систем S и S' можно записать: $v_x = v_x' = c$. $c = 3\cdot10^8$ м/с – скорость света в вакууме.
Относительность времени_. Пусть в момент совпадения начал отсчета подвижной и неподвижной систем в этой точке происходит вспышка света. Согласно принципу постоянства скорости света, свет будет распространяться с одинаковой скоростью c относительно обеих систем отсчета. Координата фронта световой волны в неподвижной системе отсчета в момент времени t равна: $x = ct$.
Координата фронта той же волны относительно S' аналогично : $x' = ct'$. Здесь t' – время, отсчитываемое по часам системы отсчета S'. Так как $x \neq x'$, то и $t \neq t'$ => время течет по разному в разных системах отсчета.
Преобразования Лоренца_ - преобразования, описывающие переход от неподвижной системы отсчета к системе, движущейся прямолинейно и равномерно, не только координат, но и времени, т.е. преобразования, связывающие x, y, z, t и x', y', z', t' :

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \ \ y = y', \qquad z = z', \qquad t = \frac{t' + x'V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Они линейны, обратимы, удовлетворяют принципу постоянства скорости света и в пределе при $V/c \to 0$ переходят в преобразования Галилея => преобразования Лоренца можно рассматривать как обобщение преобразований Галилея.

Принцип относительности Эйнштейна: “Никакими физическими опытами, проведенными внутри данной системы отсчета, нельзя установить, находится ли эта система в состоянии покоя или равномерно прямолинейно движется”. В математической форме: уравнения, описывающие физические законы, должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца.
Релятивистское уравнение движения. Уравнение движения материальной точки также должно удовлетворять принципу относительности Эйнштейна. Уравнение Планка для заряженной частицы в электромагнитном поле было получено на основе 2-го закона Ньютона, принципа относительности и уравнений электромагнитного поля : $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$**,** где **F** – сила, действующая на заряд в электромагнитном поле (сила Лоренца),

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \text{релятивистский импульс частицы}, m - \text{ ее масса}, \mathbf{v} - \text{ скорость}$$

Законы сохранения импульса и энергии в теории относительности. Если сумма внешних сил равна 0, то релятивистский импульс и релятивистская энергия системы частиц сохраняются:

$$\mathbf{p} = \sum_i \frac{m_i \mathbf{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \text{const}, \quad E = \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \text{const}$$

Суммирование по всем частицам системы. В теории относительности закон сохранения энергии является следствием закона сохранения импульса и принципа относительности.
Энергия покоя. Из формулы для релятивистской энергии => покоящаяся частица массой m обладает энергией покоя: $E_0 = mc^2$.

3. Кинематика твердого тела.

Твердое тело - это система материальных точек, расстояние между любой парой которых всегда остается неизменным, т.е. это тело, форма и размеры которого не меняются в процессе движения. Для описания положения тела в пространстве необходимы 6 независимых координат: 3 координаты характеризуют положение какой-либо точки тела (например, его центра масс), еще 3 задают его ориентацию в пространстве. Виды движений твердого тела: поступательное, вращение вокруг неподвижной оси, плоское движение, движение с одной неподвижной точкой и произвольное .
Поступательное - это движение тела, при котором его ориентация в пространстве остается неизменной. Перемещение тела полностью определяется перемещением какой-либо одной его точки => кинематика поступательного движения тела сводится к кинематике материальной точки, скорости и ускорения всех точек тела одинаковы: $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}, \ \mathbf{a}_i = \mathbf{a}$
Вращение вокруг неподвижной оси – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, а центры всех окружностей лежат на одной прямой - оси вращения. Ось вращения – это прямая линия, на которой лежат неподвижные точки тела.
Положение тела в пространстве характеризуется углом поворота (измеряется в радианах) относительно некоторого фиксированного положения. Закон движения тела в виде зависимости угла поворота от времени: $\varphi = \varphi(t)$. Угол поворота в радианах - это отношение длины дуги окруж-ности к радиусу окружности: $\varphi = S/r_{i\perp}$, где $r_{i\perp}$ – расстояние от данной точки тела до оси вращения.
Угловая скорость вращения тела - производная угла поворота тела по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]$$

Характеризует быстроту изменения ориентации тела в пространстве, измеряется в рад/с. Если угловая скорость вращения тела известна, то величина линейной скорости любой точки тела относительно неподвижной системы отсчета :

$$v_i = \frac{dS}{dt} = r_{i\perp}\frac{d\varphi}{dt} = \omega r_{i\perp}, \quad dS = r_{i\perp}d\varphi$$

где $r_{i\perp}$ – расстояние от данной точки тела до оси вращения.
Вектор угловой скорости - вектор ω, направленный вдоль оси вращения тела по правилу правого винта и равный по модулю производной угла поворота тела по времени. Вектор скорости произвольной точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен векторному произведению вектора угловой скорости вращения тела на радиус-вектор точки с началом на оси вращения:

$$\mathbf{v}_i = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i]$$

Угловое ускорение вращения тела - производная угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Характеризует быстроту изменения угловой скорости вращения тела и измеряется в рад/с^2 . Если угловое ускорение известно, то величина тангенциального ускорения любой точки тела: $a_\tau = \varepsilon r_{i\perp}$.
Вектор углового ускорения - производная вектора угловой скорости по времени:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

Движение тела с одной неподвижной точкой (напр., вращение волчка на неподвижной шероховатой поверхности): в соответствии с теоремой Эйлера движение тела, закрепленного в одной точке, можно рассматривать как вращение вокруг мгновенной оси, т.е. прямой, проходящей через неподвижные в данный момент времени точки тела, в том числе через точку закрепления. Математически теорема Эйлера : $\mathbf{v}_i = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i]$ **,** где $\mathbf{v}_i$ – скорость некоторой точки тела, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор мгновенной угловой скорости вращения, $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор данной точки тела. Начало отсчета выбрано в точке закрепления тела. В отличие плоского движения, здесь вектор угловой скорости ω может менять свою ориентацию с течением времени как относительно неподвижной системы координат, так и относительно самого тела: $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$
Произвольное движение твердого тела : суперпозиция перемещения некоторой точки тела (например, его центра масс) и изменения ориентации тела в пространстве. Скорость любой точки тела относительно сопровождающей системы, связанной с центром масс: $\mathbf{v}_i = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i]$, скорость этой точки относительно неподвижной системы отсчета : $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_{ic}]$.
Для описания ориентации твердого тела в пространстве используется ***матрица поворота тела.*** Описать ориентацию твердого тела – значит описать ориентацию одной координатной системы относительно другой, имеющей с первой общее начало.
Рассмотрим две декартовы системы координат *S* и *S*', имеющие общее начало отсчета. Орты системы *S* : $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, орты системы S' : $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ **.** Пусть положение некоторой материальной точки *M* в пространстве характеризуется радиус-вектором $\mathbf{r}$. Этот вектор можно выразить через орты обеих систем: $\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 x_1 + \mathbf{e}_2 x_2 + \mathbf{e}_3 x_3 = \mathbf{e}'_1 x'_1 + \mathbf{e}'_2 x'_2 + \mathbf{e}'_3 x'_3$ **.**
Для установления связи между координатами точки *M* в системах *S* и S' умножим скалярно векторные равенства по очереди на орты $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и системы *S*. Т.к. орты нормированы:

$$x_1 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}'_1 x'_1 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}'_2 x'_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}'_3 x'_3$$

$$x_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}'_1 x'_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}'_2 x'_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}'_3 x'_3$$

$$x_3 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}'_1 x'_1 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}'_2 x'_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}'_3 x'_3$$

Эти формулы выражают декартовы координаты точки *M* в системе *S* через координаты точки *M* в системе S' и скалярные произведения ортов обеих систем. В компактном виде:

$$x_i = \sum_j s_{ij} x'_j, \quad i, j = \overline{1,3}, \quad s_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}'_j$$

Коэффициенты этого преобразования в виде матрицы: $\hat{S} = \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{Vmatrix}$

Матрица, элементы которой представляют собой скалярные произведения ортов двух координатных систем, задает пространственную ориентацию одной декартовой системы координат относительно другой, имеющей с ней общее начало. По теореме Эйлера, переход от *S* к S' можно осуществить путем поворота системы *S* вокруг некоторой оси => $\hat{S}$ - матрица поворота, ее элементы - направляющие косинусы.

4. Кинематика вращающихся систем отсчета.

На практике часто надо связать систему отсчета с каким-нибудь движущимся или вращающимся телом: физические явления на борту космической станции удобно рассматривать в системе отсчета, связанной со станцией; движения тел вблизи земной поверхности - относительно поверхности Земли. Но сама земная поверхность движется вокруг своей оси и вокруг Солнца.
Пусть *S* – неподвижная, S' – движущаяся система отсчета, начало отсчета подвижной системы совершает произвольное движение, сама S' вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$. Пусть материальная точка *M* совершает произвольное движение относительно *S* и S' . $\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a}$ - радиус-вектор, скорость и ускорение точки относительно *S*, $\mathbf{r}', \mathbf{v}', \mathbf{a}'$ – ее радиус-вектор, скорость и ускорение относительно *S*'. Радиус-вектор, скорость и ускорение начала отсчета S' по отношению к *S* - $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{a}_0$.
Кинематические соотношения между этими величинами :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}', \ \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}'], \ \mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}' + \big[\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']\big] + 2[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}']$$

=> при поступательном движении системы S', когда $\boldsymbol{\omega} = 0$: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}'$
Если материальная точка жестко связана с S', т.е. если $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$, то :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_\Pi \quad , \quad \mathbf{a}_\Pi = \mathbf{a}_0 + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']], \quad [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']] = -\omega^2 \mathbf{r}'_\perp$$

Величина $\mathbf{a}_\Pi$ называется ***переносным ускорением***, $\mathbf{r}'_\perp$- составляющая радиус-вектора точки M относительно S', перпендикулярная вектору $\boldsymbol{\omega}$. Вектор $-\mathbf{r}'_\perp$ направлен от точки M к оси вращения S' => ускорение точки, выражаемое $[\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']]$, называют ***центростремительным ускорением***.
Последнее слагаемое $\mathbf{a}_K = 2[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}']$ называют ***кориолисовым ускорением***. Оно отлично от 0 только для точки, движущейся относительно вращающейся системы отсчета. Таким ускорением обладает маятник Фуко. Кориолисово ускорение, обусловленное суточным вращением Земли, приводит к тому, что плоскость колебаний маятника поворачивается относительно земной поверхности.
Т.о., в общем случае абсолютное ускорение материальной точки равно сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений : $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_\Pi + \mathbf{a}_K$

5. Законы Ньютона.

Механическое действие одного тела на другое происходит при непосредственном соприкосновении тел и на расстоянии. Оно проявляется в появлении деформаций у взаимодействующих тел и в возникновении у тел ускорений.
Свободным (***изолированным***) называется тело, на которое не действуют какие-либо другие тела или поля, или тело, внешние воздействия на которое уравновешены. Свободным можно считать тело, достаточно удаленное от других тел.
1-ый закон Ньютона: существуют особого класса системы отсчета, называемые *инерциальными*, в которых свободное тело сохраняет состояние покоя или прямолинейного равномерного движения.
Чтобы выяснить, в какой степени данную систему можно считать инерциальной, нужно из этой системы наблюдать за свободным телом. Чем ближе к 0 ускорение этого тела, тем с большей точностью можно считать данную систему отсчета инерциальной.
Наиболее близка к инерциальной гелиоцентрическая система, связанная с центром Солнца. Для описания многих механических движений в земных условиях инерциальной можно считать систему отсчета, связанную либо с поверхностью Земли, либо с ее центром (геоцентрическая система отсчета). Пренебрегают ускорением этой системы, связанным с вращательным движением Земли вокруг собственной оси и вокруг Солнца.
В инерциальных системах отсчета ускорение тела и его деформации, могут быть вызваны только его взаимодействием с другими телами. ***Сила*** - векторная физическая величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей. Сила полностью определена, если заданы ее модуль, направление и точка приложения.
Сравнение сил: две силы, независимо от их природы, считаются равными по модулю и противоположно направленными, если их одновременное действие на тело не меняет его состояния покоя или равномерного прямолинейного движения.
Если на материальную точку действует несколько сил в разных направлениях, то их действие можно заменить действием одной силы, называемой равнодействующей, величина и направление которой определяется по правилу сложения векторов.
Масса тела - скалярная физическая величина, являющаяся мерой *инертности* свободного тела, т.е. его свойства сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.
2-ой закон Ньютона : в инерциальной системе отсчета произведение массы материальной точки на ее ускорение равно векторной сумме действующих на точку сил:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad \text{или} \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$$

где $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ - импульс материальной точки => изменение импульса $\Delta\mathbf{p}$ материальной точки за время Δt, в течение которого сумму сил $\mathbf{F}$ можно считать постоянной, равно $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{F}\Delta t$.
Не действует: 1) при движении тела со скоростью, близкой к скорости света; 2) при движении очень маленьких тел в малых областях пространства (электрон в атоме).
Чтобы измерить массу тела, надо подействовать на него эталонной силой и измерить ускорение.
Чтобы измерить силу, надо подействовать на тело эталонной массы и измерить ускорение.
3-ий закон Ньютона : при любом взаимодействии двух тел сила, действующая со стороны одного тела на другое, равна по величине и противоположна по направлению силе, действующей со стороны 2-го тела на 1-ое. Эти силы направлены вдоль прямой, соединяющей точки их приложения, и всегда имеют одну и ту же физическую природу. Силы взаимодействия всегда появляются попарно, они приложены к разным телам => не могут уравновешивать друг друга.

6. Силы в механике.

Силой называется векторная физическая величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей. Сила полностью определена, если заданы ее модуль, направление и точка приложения.
Основные силы в механике: гравитационные (тяготения), электромагнитные, упругости и трения.
Сравнение сил: две силы, независимо от их природы, считаются равными по модулю и противоположно направленными, если их одновременное действие на тело не меняет его состояния покоя или равномерного прямолинейного движения. Величина силы измеряется по степени деформации специального пробного тела (напр., калиброванная пружина).
Гравитационные силы подчиняются закону всемирного тяготения: две материальные точки массами m_1 и m_2 притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению их масс, обратно пропорциональной квадрату расстояния *r* между ними и направленной по прямой, соединяющей эти точки:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ – гравитационная постоянная.
Для вычисления силы притяжения протяженных тел произвольной формы нужно разбить оба тела на малые элементы, которые можно считать материальными точками, и найти сумму сил притяжения между каждой парой элементов, принадлежащих разным телам.
Простое решение в случаях: 1) если оба тела являются однородными шарами, тогда m_1 и m_2– их массы, *r* – расстояние между центрами шаров; 2) одно из тел является однородным шаром, второе – материальной точкой; тогда m_1 и m_2– их массы, *r* – расстояние от точки до центра шара.
Принцип суперпозиции: каждая пара частиц взаимодействует независимо, т.е. так, как если бы других частиц не было.
Упругое тело - тело, восстанавливающее свою форму после прекращения действия силы.
Силы упругости возникают при деформации упругого тела и направлены в сторону, противоположную деформации. Они действуют между соприкасающимися слоями деформируемого тела, а также в месте контакта деформируемого тела с телом, вызывающим деформацию. При одномерных деформациях растяжения или сжатия силы упругости направлены вдоль линии действия внешней силы, т.е. вдоль осей продольно деформируемых нитей, витых пружин и т. п., или перпендикулярно поверхности соприкасающихся тел.
Закон Гука устанавливает прямую пропорциональную зависимость величины силы упругости, возникающей при деформации тела, от величины деформации. Для пружины :

$$F = k|x|, \qquad x = l - l_0$$

l – длина деформированной пружины, l_0 –длина свободной пружины, *k* – коэффициент жесткости пружины. Т.к. сила упругости направлена противоположно деформации, в проекции на ось *OX*:

$$F_x = -kx$$

Жесткость пружины зависит от формы пружины и от упругих свойств материала.
Для тонкого однородного упругого стержня длиной l_0 и площадью поперечного сечения *S*, деформированного силой *F*, направленной вдоль его оси, величина относительной деформации $|\varepsilon| = |l - l_0|/l_0$ связана с напряжением $\sigma = F/S$ законом Гука в дифференциальной форме: $\sigma = E|\varepsilon|$, где *E* – модуль упругости материала, или модуль Юнга. Коэффициент жесткости стержня : $k = \frac{S}{l_0}E$.
Силы трения возникают при взаимном перемещении соприкасающихся твердых тел и при движении тел в вязкой среде (жидкости или газе). Эти силы препятствуют относительному перемещению соприкасающихся тел, зависят от скорости движения тел относительно друг друга или от относительной скорости тела и вязкой среды, и направлены вдоль поверхностей соприкосновения тел.
Сухое трение - трение между поверхностями соприкасающихся твердых тел при отсутствии жидкой или газообразной прослойки. Силы трения, возникающие между поверхностями твердых тел, неподвижных относительно друг друга, называются силами ***трения покоя***. Величина силы трения покоя изменяется от 0 до некоторого максимального значения. ***Сила нормального давления*** - составляющая силы взаимодействия соприкасающихся тел, перпендикулярная поверхности соприкосновения. ***Сила трения скольжения*** возникает при движении одного твердого тела по поверхности другого и направлена против скорости относительного движения трущихся поверхностей. Законы сухого трения :
1) Величина силы трения скольжения пропорциональна величине нормальной составляющей силы, с которой трущиеся поверхности прижимаются друг к другу: $F_{\text{тр}} = \mu N$

2) Коэффициент трения μ не зависит от площади соприкасающихся поверхностей и от скорости их относительного движения.
3) Максимальная величина силы трения покоя равна величине силы трения скольжения.
Силы вязкого трения возникают при движении тел в жидкости или газе, зависят от размеров и формы тела, свойств среды и от скорости относительного движения. В простейшей модели вязкого трения, применимой при малых скоростях движения:

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -\beta\mathbf{v}$$

β – коэффициент вязкого трения. Сила вязкого трения всегда направлена против относительной скорости тела и среды $\mathbf{v}$. При движении тел в вязкой среде трение покоя отсутствует**.**
Электромагнитные силы**:**

1) *Сила Кулона*: два неподвижных точечных заряда взаимодействуют с силой, прямо пропорциональной величинам зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$\mathbf{F} = k\frac{q_1 q_2 \mathbf{r}}{r^3}$$

Напряженность электрического поля: $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$

2) *Сила Лоренца*: если частица с зарядом q движется со скоростью $\mathbf{v}$ в магнитном поле, то на эту частицу действует сила: $\mathbf{F} = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$, где $\mathbf{B}$ - вектор магнитной индукции.

Движение заряженной частицы в электромагнитном поле с большой скоростью описывается релятивистским уравнением движения.
Релятивистское уравнение движения. Уравнение движения материальной точки также должно удовлетворять принципу относительности Эйнштейна. Уравнение Планка для заряженной частицы в электромагнитном поле было получено на основе 2-го закона Ньютона, принципа относительности и уравнений электромагнитного поля : $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$**,** где
$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ $-$ сила, действующая на заряд в электромагнитном поле,

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \text{релятивистский импульс частицы}, m - \text{ ее масса}, \mathbf{v} - \text{ скорость}$$

7. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции.

Системы отсчета, в которых свободное тело не сохраняет скорость движения постоянной, называются ***неинерциальными***. Неинерциальной является любая система отсчета, движущаяся с ускорением относительно инерциальной.
Относительно всех инерциальных систем данное тело имеет одно и то же ускорение $\mathbf{a}$. Поскольку любая неинерциальная система отсчета движется относительно инерциальной с некоторым ускорением, ускорение тела в неинерциальной системе $\mathbf{a}'$ отличается от $\mathbf{a}$. Т.е., переход в неинерциальную систему отсчета приводит к появлению у тела добавочного ускорения, причиной которого является не действие на него других тел, а движение самой системы отсчета.
Чтобы можно было применять в неинерциальных системах уравнения динамики в обычной форме, вводят ***силы инерции***, действие которых вызывает у тел добавочное ускорение => 2-й закон Ньютона в неинерциальной системе : $m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{ин}}$, где m – масса материальной точки, $\mathbf{a}'$ – ее ускорение относительно неинерциальной системы отсчета, $\mathbf{F}$ – сумма сил, действующих на мат. точку со стороны других тел, $\mathbf{F}_{\text{ин}}$ – сила инерции : $\mathbf{F}_{\text{ин}} = -m(\mathbf{a} - \mathbf{a}')$, где – $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ - ускорение материальной точки в инерциальной системе отсчета.
Величина $(\mathbf{a} - \mathbf{a}')$ - это разность ускорений одной и той же точки относительно двух систем отсчета: неподвижной и движущейся : $(\mathbf{a} - \mathbf{a}') = \mathbf{a}_{\text{П}} + \mathbf{a}_{\text{К}}$ **,** где $\mathbf{a}_{\text{П}}$ – переносное ускорение ($\mathbf{a}_{\text{П}} = \mathbf{a}_0 + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']] = \mathbf{a}_0 - \omega^2\mathbf{r}'_\perp$), $\mathbf{a}_{\text{К}}$ – кориолисово ускорение ($\mathbf{a}_{\text{К}} = 2[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}']$) => силу инерции можно представить : $\mathbf{F}_{\text{ин}} = \mathbf{F}_{\text{П}} + \mathbf{F}_{\text{К}}$ **,** где $\mathbf{F}_{\text{П}} = -m\mathbf{a}_{\text{П}}$ – переносная сила инерции, $\mathbf{F}_{\text{К}} = -m\mathbf{a}_{\text{К}}$ – кориолисова сила инерции. Можно выразить эти силы через характеристики движения неинерциальной системы отсчета и кинематические характеристики движения точки относительно неинерциальной системы:
$\mathbf{F}_{\text{П}} = -m\mathbf{a}_0 + m\omega^2\mathbf{r}'_\perp$ и $\mathbf{F}_{\text{К}} = -2m[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}']$
$\mathbf{a}_0$ – ускорение начала отсчета неинерциальной системы, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость вращения неинерциальной системы, $\mathbf{r}'_\perp$ – составляющая радиус-вектора материальной точки в неинерциальной системе отсчета, перпендикулярная оси вращения системы, $\mathbf{v}'$ – скорость материальной точки относительно неинерциальной системы.
2-е слагаемое в правой части формулы для $\mathbf{F}_{\text{П}}$ - ***центробежная сила инерции***: $\mathbf{F}_{\text{цб}} = m\omega^2\mathbf{r}'_\perp$

Центробежная сила направлена от оси вращения неинерциальной системы. Переносная сила инерции образует потенциальное силовое поле. Особенности сил инерции:
1) они не инвариантны относительно перехода от одной неинерциальной системы отсчета к другой
2) нельзя указать конкретные тела, со стороны которых действуют силы инерции. Т.е. силы инерции не подчиняются 3-ему закону Ньютона.
В остальном это обычные силы, которые способны вызывать ускорения тел, совершать работу, изменять энергию и импульс тел, деформировать тела и т.п. Использование сил инерции позволяет решать задачи механики непосредственно по отношению к ускоренно движущимся системам отсчета, что часто оказывается проще, чем анализ движения в инерциальной системе.

8. Импульс системы частиц. Движение центра масс.

Импульс материальной точки - произведение массы этой точки на ее скорость: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$
Импульс системы частиц - сумма импульсов отдельных частиц системы:
$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i$$
Центр масс системы частиц - воображаемая точка, радиус-вектор которой определяется:
$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i$$
m_i – масса отдельной частицы, $\mathbf{r}_i$ – ее радиус-вектор, $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ – полная масса системы. Скорость и ускорение центра масс :
$$\mathbf{v}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \quad , \qquad \mathbf{a}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{a}_i$$
=> импульс системы тел: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_c$
По отношению к данной механической системе все силы делятся на внутренние и внешние. Внутренними силами называются силы взаимодействия между телами системы, внешними – силы, действующие на тела системы со стороны тел, не входящих в данную систему. Полная сумма внутренних сил = 0 для любой механической системы. Из законов Ньютона следует закон изменения импульса: скорость изменения импульса системы тел равна сумме внешних сил: $\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}}_c = \mathbf{F}_{\text{внеш}}$
Закон движения центра масс: центр масс системы частиц движется так, как двигалась бы материальная точка, масса которой равна массе системы, если бы к этой точке были приложены все внешние силы.

9. Закон сохранения импульса.

Закон сохранения импульса : если сумма внешних сил равна 0, то импульс механической системы сохраняется:
$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i = \text{const}$$
Если внешние силы на систему действуют, но существует такая ось, например, ось *OX*, в проекции на которую сумма внешних сил равна 0, то проекция импульса системы на эту ось сохраняется:
$$p_x = \sum_{i=1}^{N} m_i v_{ix} = \text{const}$$
Из сохранения импульса относительно какой-либо одной инерциальной системы отсчета и правила сложения скоростей => сохранение импульса и относительно любой другой инерциальной с-мы.
Реактивное движение: $m\mathbf{V} = (m - dm)(\mathbf{V} + d\mathbf{V}) + \mathbf{U}dm, \ \ \mathbf{U} = \mathbf{V} + \mathbf{C},$
$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_p = -\mathbf{C}\dot{m} = -\mathbf{C}\mu, \ \text{ где } \ \mu = \frac{dm}{dt} - \text{скорость расхода массы}$$
Законы сохранения импульса и энергии в теории относительности. Если сумма внешних сил равна 0, то релятивистский импульс и релятивистская энергия системы частиц сохраняются:

$$\mathbf{p}=\sum_i \frac{m_i\mathbf{v}_i}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}}=\text{const},\quad E=\sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}}=\text{const}$$

Суммирование по всем частицам системы. В теории относительности закон сохранения энергии является следствием закона сохранения импульса и принципа относительности.

10. Работа и потенциальная энергия.

Элементарной работой силы называется скалярное произведение силы на бесконечно малое перемещение точки приложения силы: $dA=\mathbf{F}d\mathbf{r}$

Работой силы на траектории L называется интеграл

$$A=\int_L dA$$

т.е. сумма элементарных работ, взятая по всем участкам траектории движения точки. Если работа силы, действующей на материальную точку, равна 0 при перемещении этой точки по ∀ замкнутой траектории, то сила называется ***потенциальной***. Математически условие потенциальности силы :

$$\oint \mathbf{F}d\mathbf{r}=0 \quad \mathbf{(1)}$$

∀ однородное или центральное силовое поле является потенциальным. Примеры потенциальных сил – сила тяжести, сила упругости, сила Кулона. Сила трения, работа которой по любому замкнутому пути всегда отлична от 0, является непотенциальной силой. Для сил, обладающих свойством (1), можно ввести потенциальную энергию П. Приращение потенциальной энергии - взятая со знаком минус элементарная работа потенциальной силы: $d\Pi=-\mathbf{F}d\mathbf{r}$

Потенциальной энергией материальной точки в силовом поле называется интеграл

$$\Pi=\int d\Pi$$

взятый по ∀ пути. Потенциальной энергией системы тел называется сумма потенциальных энергий отдельных тел системы во внешнем поле и энергия взаимодействия тел друг с другом:

$$\Pi=\sum_{i=1}^{N}\Pi_i+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N}\Pi_{ij}$$

Определение потенциальной энергии позволяет вычислить ее с точностью до произвольной постоянной, значение которой зависит от выбора начала отсчета (нулевого уровня) потенциальной энергии. Конкретный выбор нулевого уровня определяется удобством решения той или иной задачи.
Для материальной точки массой m в однородном поле тяжести вблизи поверхности Земли удобно отсчитывать потенциальную энергию относительно земной поверхности: $\Pi=mgh$,где h – высота над поверхностью Земли, g – ускорение свободного падения. Эта же формула используется для тел конечного размера, где h - высота центра масс тела над поверхностью Земли.
Потенциальная энергия упруго деформированной пружины

$$\Pi=\frac{1}{2}kx^2$$

где k – коэффициент упругости пружины, x – величина деформации, т.е. разность длины пружины в деформированном состоянии и длины свободной пружины.
Потенциальная энергия материальной точки массой m в поле силы тяготения

$$\Pi=-\frac{GMm}{r}$$

где G – гравитационная постоянная, M – масса силового центра, r – расстояние от силового центра до материальной точки. $\Pi(\infty)=0$, т.е. начало отсчета потенциальной энергии выбрано в бесконечно удаленной точке.

11. Кинетическая энергия.

Кинетической энергией материальной точки называется величина

$$К = \frac{1}{2}mv^2$$

Кинетической энергией с-мы частиц называется сумма кинетических энергий отдельных частиц:

$$К = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2$$

Элементарной работой силы называется скалярное произведение силы на бесконечно малое перемещение точки приложения силы: $dA = \mathbf{F}d\mathbf{r}$ **.**

Работой силы на траектории L называется интеграл

$$A = \int_L dA$$

т.е. сумма элементарных работ, взятая по всем участкам траектории движения точки. Теорема об изменении кинетической энергии: приращение кинетической энергии материальной точки равно элементарной работе действующей на нее силы: $dК = dA$

Вращающееся тело обладает кинетической энергией :

$$К = \frac{I\omega^2}{2}$$

где I – момент инерции тела относительно оси вращения, ω – вектор угловой скорости.

При плоском движении в неподвижной системе отсчета кинетическую энергию тела согласно теореме Кенига можно представить в виде:

$$К = \frac{m{v_c}^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}$$

где m – масса тела, v_c – скорость центра масс, I_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс (рис. 10.3).

12. Закон сохранения энергии в механике.

Полной энергией системы называется сумма ее кинетической и потенциальной энергий: $E = К + П$.
Изменение полной механической энергии системы равно работе непотенциальных сил:
$dE = dA_{\text{нп}}$. Это закон изменения полной механической энергии. Из него следует ***закон сохранения полной механической энергии***: если работа непотенциальных сил равна 0, то полная механическая энергия системы сохраняется: $E = \text{const}$.

13. Момент импульса частицы и системы частиц. Момент силы.

Момент импульса частицы **-** это векторное произведение радиус-вектора этой частицы на ее импульс: $\mathbf{N} = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}]$.

Пусть частица массой m движется по прямой со скоростью **v** (см. рис. 10.1). Момент импульса этой частицы относительно полюса O перпендикулярен плоскости рисунка и направлен от нас. Величина момента импульса равна $N = rmv\sin\alpha = mvR$, где α – угол между векторами **r** и **v**, $R = r\sin\alpha$.

Если выбрать начало отсчета на линии движения точки, то момент импульса = 0.

Момент силы - это векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы на вектор силы: $\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}]$.

Момент импульса системы частиц - это сумма моментов импульсов составляющих систему частиц. По отношению к любой оси (например, оси OZ) момент импульса можно разложить на две составляющие: параллельную $\mathbf{N}_\parallel$ и перпендикулярную $\mathbf{N}_\perp$этой оси: $\mathbf{N} = \mathbf{N}_\parallel + \mathbf{N}_\perp$

Моментом импульса относительно оси называется проекция N_z вектора **N** на эту ось. Вклад в момент импульса относительно оси дает только составляющая $\mathbf{N}_\parallel$ => можно записать $N_z = \mathbf{k}\mathbf{N}_\parallel$, где **k** – единичный вектор вдоль оси OZ. Для материальной точки $\mathbf{N}_\parallel = [\mathbf{r}_\perp, m\mathbf{v}_\perp]$, где $\mathbf{r}_\perp$ и $\mathbf{v}_\perp$ – составляющие радиус-вектора точки и ее скорости, перпендикулярные оси.

Тело, имеющее неподвижную ось вращения (рис. 10.2). Составляющая момента импульса тела, параллельная оси вращения равна $\mathbf{N}_{\parallel} = I\boldsymbol{\omega}$,где I – момент инерции тела относительно оси вращения, ω – вектор угловой скорости.
При плоском движении ось вращения тела движется поступательно, не меняя своей ориентации в пространстве. Составляющая момента импульса тела, параллельная оси вращения, равна : $\mathbf{N}_{\parallel} = [\mathbf{r}_{c\perp}, m\mathbf{v}_c] + I_c\boldsymbol{\omega}$ **,** где m – масса тела, $\mathbf{v}_c$ – скорость центра масс, I_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, $\mathbf{r}_{c\perp}$ – составляющая радиус-вектора центра масс тела, перпендикулярная оси вращения (рис. 10.3).

14. Теорема моментов. Закон сохранения момента импульса.

Уравнение моментов: скорость изменения момента импульса системы относительно неподвижной точки (полюса) равна сумме моментов внешних сил относительно той же точки:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M}$$

=> ***закон сохранения момента импульса относительно полюса***: если сумма моментов внешних сил относительно неподвижного полюса равна 0, то момент импульса системы относительно полюса сохраняется.
По отношению к любой оси (например, OZ) момент импульса можно разложить на две составляющие: параллельную $\mathbf{N}_{\parallel}$ и перпендикулярную $\mathbf{N}_{\perp}$этой оси: $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{\parallel} + \mathbf{N}_{\perp}$
Моментом импульса относительно оси называется проекция N_z вектора **N** на эту ось. Вклад в момент импульса относительно оси дает только составляющая $\mathbf{N}_{\parallel}$ => можно записать $N_z = \mathbf{k}\mathbf{N}_{\parallel}$, где **k** – единичный вектор вдоль оси OZ. Для материальной точки $\mathbf{N}_{\parallel} = [\mathbf{r}_{\perp}, m\mathbf{v}_{\perp}]$, где $\mathbf{r}_{\perp}$ и $\mathbf{v}_{\perp}$ – составляющие радиус-вектора точки и ее скорости, перпендикулярные оси.
Закон сохранения момента импульса относительно оси : если сумма моментов внешних сил относительно какой-либо неподвижной оси равна 0, то момент импульса системы относительно этой оси сохраняется.

15. Материальная точка в центральном поле.

1) *Движение материальной точки в центральном силовом поле является плоским*.
Рассмотрим для определенности гравитационное поле. Пусть материальная точка массой m движется по некоторой орбите в поле силового центра массой M. Положение материальной точки относительно силового центра характеризуется радиус-вектором **r**, скорость точки - **v**. На точку действует сила тяготения **F**, направленная в сторону силового центра. Векторы **r** и **F** направлены в противоположные стороны => их векторное произведение =0 => момент силы тяготения относительно силового центра = 0, и момент импульса материальной точки сохраняется: $\mathbf{N} = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}] = \text{const}$ => в процессе движения радиус-вектор частицы и ее скорость не выходят за пределы одной и той же фиксированной плоскости, перпендикулярной вектору **N** => движение частицы является плоским.
2) *При движении в центральном силовом поле радиус-вектор частицы очерчивает равные площади за равные промежутки времени* (закон постоянства секторной скорости).
Пусть **r** – радиус-вектор частицы в некоторый момент времени t, $d\mathbf{r}$ – приращение радиус-вектора за малое время dt. Секторная площадь $d\mathbf{S}$ **-** половина векторного произведения векторов **r** и $d\mathbf{r}$:

$$d\mathbf{S} = \frac{1}{2}[\mathbf{r}, d\mathbf{r}]$$

Вектор $d\mathbf{S}$ перпендикулярен плоскости орбиты частицы, а его величина равна площади треугольника, построенного на векторах **r** и $d\mathbf{r}$. Назовем секторной скоростью частицы **σ** отношение секторной площади $d\mathbf{S}$ к промежутку времени dt, за который частица совершает перемещение $d\mathbf{r}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{d\mathbf{S}}{dt}$$

Подставим в эту формулу выражение для $d\mathbf{S}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right] = \frac{1}{2}[\mathbf{r}, \mathbf{v}]$$

где $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ – скорость частицы. Учитывая определение момента импульса частицы $\mathbf{N} = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}]$, выражение для секторной скорости:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2m}\mathbf{N}$$

где $\mathbf{N}$ – вектор момента импульса, m – масса частицы. При движении в центральном поле момент импульса частицы сохраняется (см. п.1): $\mathbf{N} = \mathrm{const}$ => сохранение секторной скорости $\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{const}$ => при движении в центральном силовом поле радиус-вектор частицы относительно силового центра очерчивает равные площади за равные промежутки времени.

Закон постоянства секторной площади позволяет наглядно представить характер движения частицы в центральном силовом поле : по эллиптической траектории. На рисунке заштриховать два сектора, имеющие одинаковые площади. Один из них опирается на участок траектории, близкий к силовому центру, а другой – на периферическую часть орбиты. По закону постоянства секторной скорости частица проходит оба участка орбиты за равные промежутки времени. Но первый из этих участков значительно длиннее второго => скорость частицы на эллиптической орбите велика вблизи силового центра и мала вдали от него => двигаясь в центральном поле, частица увеличивает свою скорость по мере приближения к силовому центру и замедляет движение по мере удаления от него.

16. Плоское движение твердого тела.

Плоское движение твердого тела: все его точки движутся в параллельных фиксированных плоскостях. Например, качение автомобильного колеса по прямолинейному участку дороги.

Плоское движение можно рассматривать как суперпозицию поступательного движения и вращения вокруг неподвижной оси. Введем сопровождающую систему координат: начало связано с какой-либо точкой тела (напр., с центром масс), а оси параллельны осям неподвижной системы. Относительно неподвижной системы сопровождающая система координат совершает поступательное движение. Пусть $\mathbf{v}_c$ - скорость этого движения. В сопровождающей системе отсчета движение тела - это вращение вокруг неподвижной оси. Угловая скорость вращения ω не зависит от того, с какой именно точкой тела связано начало сопровождающей системы отсчета. При плоском движении ориентация вектора ω не зависит от времени.

По правилу сложения скоростей (абсолютная скорость материальной точки равна сумме ее относительной скорости и скорости движущейся системы отсчета), скорость произвольной точки тела :

$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_{ic}]$. $\mathbf{r}_{ic}$ – радиус-вектор данной точки тела в сопровождающей системе координат.

Вращение твердого тела при ***плоском движении*** удобно описывать в поступательно движущейся системе отсчета, связанной с центром масс тела => уравнение вращения тела $I_c\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{M}_\parallel$, где I_c - момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной плоскости движения тела и проходящей через центр масс, $\mathbf{M}_\parallel$– составляющая момента внешних сил вдоль этой же оси.

При плоском движении ось вращения тела движется поступательно, не меняя своей ориентации в пространстве. Составляющая момента импульса тела, параллельная оси вращения, равна :

$\mathbf{N}_\parallel = [\mathbf{r}_{c\perp}, m\mathbf{v}_c] + I_c\boldsymbol{\omega}$, где m – масса тела, $\mathbf{v}_c$ – скорость центра масс, I_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, $\mathbf{r}_{c\perp}$ – составляющая радиус-вектора центра масс тела, перпендикулярная оси вращения (рис. 10.3).

В неподвижной системе отсчета кинетическая энергия тела согласно теореме Кенига:

$$К = \frac{m{v_c}^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}$$

17. Момент инерции твердого тела.

Момент инерции - основная величина, характеризующая меру инертности твердого тела при его вращении. Если твердое тело является дискретной системой материальных точек, ***момент инерции*** относительно оси вращения рассчитывается по формуле :

$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

где m_i - масса i-той точки, $r_{i\perp}$ – расстояние от этой точки до оси вращения. Если твердое тело можно рассматривать как сплошное, то сумма заменяется интегралом по объему тела V:

$$I = \int_V \rho r_\perp^2 dV$$

где dV – элемент объема, ρ – плотность материала, $r_\perp$– расстояние от данного элемента до оси вращения.
Для разных осей вращения моменты инерции одного и того же тела различны. Теорема Гюйгенса-Штейнера: момент инерции тела I относительно произвольной оси равен моменту инерции тела I_c относительно оси, проходящей через центр масс тела и параллельной данной, сложенному с произведением полной массы тела m на квадрат расстояния a между осями :

$$I = I_c + ma^2$$

Для твердого тела - системы материальных точек, радиус-вектор центра масс рассчитывается :

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i$$

m_i – масса отдельной частицы, $\mathbf{r}_i$ – ее радиус-вектор, $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ – полная масса системы.
Для сплошного тела положение центра масс определяется по формуле

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{m}\int_V \rho\mathbf{r}dV$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор элемента объема тела dV. Интегрирование проводится по объему тела V.
Вычисление моментов инерции можно во многих случаях упростить, используя соображения симметрии, теорему Гюйгенса-Штейнера и полезные соотношения. Пусть OX, OY и OZ – оси декартовой системы координат, связанные с твердым телом, I_x, I_y и I_z – моменты инерции тела относительно этих осей. Тогда

$$I_x + I_y + I_z = 2\int_V \rho r^2 dV \quad \mathbf{(2)}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – расстояние от элемента тела до начала координат. Если повернуть координатные оси OX, OY и OZ относительно тела, оставляя углы между ними прямыми, то моменты инерции I_x, I_y и I_z изменятся. Но из (2) видно, что их сумма останется той же самой, так как стоящая в правой части (2) величина не зависит от ориентации координатных осей => $I_x + I_y + I_z$ относительно любых трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через одну точку, зависит только от положения этой точки и не меняется с изменением ориентации осей.
Для тонкой плоской пластинки произвольной формы из (2) => если совместить координатную плоскость XOY с плоскостью пластинки, то z-координаты всех элементов пластинки будут равны 0 => интеграл в правой части (2) преобразуется в момент инерции пластинки I_z относительно оси OZ => в случае плоского распределения масс справедливо соотношение $I_x + I_y + I_z = 2I_z$ или $I_x + I_y = I_z$

18. Системы со связями. Степени свободы. Обобщенные координаты.

Связи - не вытекающие из уравнений движения ограничения на координаты, скорости и ускорения отдельных точек системы. Связи реализуются с помощью поверхностей различных тел, стержней, нитей и т.п. Математически связи выражаются *уравнениями связей*, т.е. соотношениями между координатами точек системы, их скоростями и ускорениями.
Пример: плоский математический маятник (см. рисунок в лекциях Игоря), длина нити l, координаты в отклоненном состоянии x, y => $x^2 + y^2 = l^2$ - уравнение связи, $x(t), y(t), T-?$
Силы, с которыми тела, осуществляющие связи, действуют на тела системы, называются силами реакции или ***реакциями*** связей. Помимо сил реакции на тела системы действуют силы, которые известны заранее или являются известными функциями координат и скоростей точек рассматриваемой системы, например, силы тяготения, силы упругости, силы Лоренца. Такие силы называют ***заданными*** или ***активными***. Задача механики - отыскание закона движения системы и сил реакции по заданным силам и уравнениям связи.
Классификацию связей проводят на основе вида уравнения связи. Различают голономные и неголономные, стационарные и нестационарные, идеальные и неидеальные связи. Если связь сводится к ограничениям на координаты тел, то она называется ***голономной*** (в противном случае – ***неголономной***). Уравнения голономных связей можно представить в виде

$$f_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \boldsymbol{t}) = 0, \;\; \alpha = 1,2,\dots,k \quad \mathbf{(1)}$$

где N – число материальных точек системы, k – число связей. Голономные связи налагают ограничения не только на положения, но и на скорости и ускорения точек системы, в чем можно убедиться, дифференцируя (1) по времени. Характерным для голономных связей является то, что вытекающие из них уравнения, связывающие скорости и ускорения точек системы, могут быть проинтегрированы до решения уравнений движения.
Пример неголономной связи - качение шара без проскальзывания (см. рисунок в лекциях Игоря), скорость движения центра масс: $\mathbf{v}_c = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_c]$
Стационарной называется связь, уравнение которой не содержит времени в явном виде. Если же время явным образом входит в уравнение связи, то связь называется ***нестационарной***. Пример системы с нестационарной связью: математический маятник, длина нити которого меняется по заданному закону: $x^2 + y^2 = l^2(t)$. Особенность систем с нестационарными связями: их полная механическая энергия может меняться с течением времени за счет работы тел, осуществляющих нестационарную связь.
Основная задача механики несвободной системы: отыскание закона движения тел по заданным силам и уравнениям связей. 2 основные трудности: координаты тел взаимозависимы, а силы реакции заранее не известны. 1-ая проблема решается путем перехода к независимым обобщенным координатам, 2-ая – путем исключения сил реакции из уравнений движения системы, что возможно лишь для систем с идеальными связями.
Числом степеней свободы системы s называется число независимых координат, полностью определяющих положение системы в пространстве, а сами независимые координаты называются ***обобщенными координатами*** системы. ***Обобщенными скоростями*** системы называются производные обобщенных координат по времени. Всю совокупность обобщенных координат обозначим q, а совокупность обобщенных скоростей – $\dot{q}$. Число степеней свободы для голономной системы, состоящей из отдельных материальных точек: $s = 3N - k \quad (\mathbf{2})$
т.к. используя уравнения связей (1), можно выразить k каких-либо координат через остальные координат. Эти координат являются независимыми => их число равно числу степеней свободы системы. Математический маятник ($N = 1$, $k = 1$) имеет 2 степени свободы; 2 материальные точки, связанные жестким невесомым стержнем ($N = 2$, $k = 1$) - 5 степеней свободы.
Обобщенные координаты должны удовлетворять требованиям:
1) радиус-векторы точек системы должны быть однозначными функциями $q_1, \dots, q_s$:

$$\mathbf{r}_l = \mathbf{r}_l(q_1, \dots, q_s, t), \quad l = 1,2, \dots, N$$

2) координаты $q_1, \dots, q_s$ должны быть выбраны в соответствии с уравнениями связей, т.е. должны обращать их в тождества.
Примеры см. лекции Игоря.

19. Виртуальные перемещения. Виртуальная работа. Идеальные связи.

Действительным перемещением точки $d\mathbf{r}$ называется бесконечно малое перемещение этой точки под действием заданных сил и сил реакции связей. Действительное перемещение происходит за время dt в соответствии с уравнениями движения и начальными условиями.
Виртуальным перемещением $\delta\mathbf{r}$ называется воображаемое бесконечно малое перемещение точки, допускаемое связями в данный фиксированный момент времени. Виртуальное перемещение не обладает длительностью и не зависит от заданных сил. Используя формулу для радиус-векторов точек системы в обобщенных координатах $\mathbf{r}_l = \mathbf{r}_l(q_1, \dots, q_s, t), \ \ l = 1,2, \dots, N$
вектор виртуального перемещения l-ой материальной точки системы можно представить:

$$\delta\mathbf{r}_l = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j \quad l = 1,2, \dots, N$$

δq_j– вариация обобщенной координаты . ***Виртуальной работой*** называется работа силы на виртуальном перемещении $\delta A = \mathbf{F}\delta\mathbf{r}$
Идеальными называются связи, виртуальная работа сил реакции которых = 0. Обозначив через $\mathbf{R}_l$ силу реакции, действующую на материальную точку системы с номером l, условие идеальности связей :

$$\delta \mathrm{A}_R = \sum_{l=1}^{N} \mathbf{R}_l \, \delta\mathbf{r}_l = 0$$

Идеальными являются связи, задаваемые идеально гладкими поверхностями любой формы, невесомыми нерастяжимыми стержнями или нитями, а также связи, возникающие при качении без проскальзывания. Неидеальными являются системы, в которых скольжение тел происходит вдоль шероховатых поверхностей. Примеры см. лекции Игоря.

20. Уравнения Лагранжа. Обобщенные силы.

Рассмотрим систему с идеальными голономными связями: $\mathbf{r}_l = \mathbf{r}_l(q_1, \ldots, q_s, t)$, $l = 1,2, \ldots, N$
$\mathbf{R}_l$ - сила реакции, действующая на материальную точку системы с номером l; s - число степеней свободы.

$$\delta \mathbf{r}_l = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \delta \mathrm{A}_R = \sum_{l=1}^{N} \mathbf{R}_l \, \delta \mathbf{r}_l = 0, \;\; m_l \ddot{\mathbf{r}}_l = \mathbf{F}_l + \mathbf{R}_l \quad =>$$

$$\sum_{l=1}^{N} (m_l \ddot{\mathbf{r}}_l - \mathbf{F}_l)\, \delta \mathbf{r}_l = 0 - \text{уравнение Даламбера} - \text{Лагранжа}$$

В это уравнение уже не входят силы реакции.

$$\sum_{l=1}^{N} (m_l \ddot{\mathbf{r}}_l - \mathbf{F}_l) \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

Меняем порядок суммирования:

$$0 = \sum_{j=1}^{s} \delta q_j \sum_{l=1}^{N} (m_l \ddot{\mathbf{r}}_l - \mathbf{F}_l) \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^{s} \delta q_j \left(\sum_{l=1}^{N} m_l \ddot{\mathbf{r}}_l \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_j} - \sum_{l=1}^{N} \mathbf{F}_l \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_j} \right) = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{l=1}^{N} m_l \ddot{\mathbf{r}}_l \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_j} = x_j, \\ \displaystyle\sum_{l=1}^{N} \mathbf{F}_l \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_j} = Q_j \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \delta q_j \left(x_j - Q_j \right)$$

=> из независимости обобщенных координат => $x_j = Q_j, j = 1,2, \ldots, s$, Q_j – ***обобщенная сила***, соответствующая обобщенной координате q_j. Здесь $\mathbf{F}_l$ – сумма заданных сил, действующих на материальную точку с номером l, $\mathbf{r}_l$ – радиус-вектор этой точки

Покажем, что величину x_j можно выразить через кинетическую энергию системы.

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N} m_l v_l^2 = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N} m_l \mathbf{v}_l \mathbf{v}_l$$

Выразим кинетическую энергию через обобщенные координаты и обобщенные скорости:

$$\mathbf{v}_l = \dot{\mathbf{r}}_l = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial t} = \mathbf{v}_l(q, \dot{q}, t)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_l}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_j}, \qquad \mathrm{K} = \mathrm{K}(q, \dot{q}, t)$$

$$\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^{N} m_l \mathbf{v}_l \frac{\partial \mathbf{v}_l}{\partial q_j} \quad => \quad \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{l=1}^{N} m_l \mathbf{v}_l \frac{\partial \mathbf{v}_l}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{l=1}^{N} m_l \mathbf{v}_l \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \dot{q}_j}\right) = \sum_{l=1}^{N} m_l \frac{d\mathbf{v}_l}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_j} + \sum_{l=1}^{N} m_l \mathbf{v}_l \frac{\partial \mathbf{v}_l}{\partial q_j} = x_j + \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial q_j}$$

$$=> \; x_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial q_j}$$

=> Уравнения движения системы с идеальными голономными связями (или вообще без связей) можно представить в форме ***уравнений Лагранжа***:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1,2, \ldots, s$$

$К = К(q, \dot{q}, t)$ – кинетическая энергия системы, выраженная через обобщенные координаты и обобщенные скорости (для с-м с нестационарными связями возможна явная зависимость от времени).
Физический смысл обобщенной силы - это проекция силы на какую-либо ось или момент силы относительно какой-либо оси.

21. Функция Лагранжа. Обобщенные импульсы.

Рассмотрим систему с идеальными голономными связями: $\mathbf{r}_l = \mathbf{r}_l(q_1, \dots, q_s, t), \quad l = 1,2,\dots,N$ и потенциально заданными силами.

$$\mathbf{F}_l = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial П_l}{\partial x_l} + \mathbf{j}\frac{\partial П_l}{\partial y_l} + \mathbf{k}\frac{\partial П_l}{\partial z_l}\right)$$

=> обобщенная сила:

$$Q_j = -\sum_{l=1}^{N}\left(\frac{\partial П_l}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial q_j} + \frac{\partial П_l}{\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial q_j} + \frac{\partial П_l}{\partial z_l}\frac{\partial z_l}{\partial q_j}\right) = -\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial П_l}{\partial q_j} = -\frac{\partial}{\partial q_j}\sum_{l=1}^{N}П_l = -\frac{\partial П}{\partial q_j}, \qquad \sum_{l=1}^{N}П_l = П$$

$$\text{Из ур}-\text{ния Лагранжа } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial К}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial К}{\partial q_j} = Q_j \text{ и т.к.} \frac{\partial П}{\partial \dot{q}_j} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0\,, \quad j = 1,2,\dots,s \ (\mathbf{1})$$

$$\text{где } L(q, \dot{q}, t) = К - П - \text{функция Лагранжа или лагранжиан}$$

(разность кинетической и потенциальной энергий системы, выраженную через обобщенные координаты, обобщенные скорости и время)
Уравнения Лагранжа в независимых координатах не содержат реакций связей, хотя полностью учитывают влияние связей на движение системы. ***Обобщенным импульсом*** p_j называется частная производная функции Лагранжа по соответствующей обобщенной скорости

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,, \quad j = 1,2,\dots,s$$

$$\Rightarrow \text{ можно переписать (1) в виде} \quad \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} \qquad (\mathbf{2})$$

Это ***закон изменения обобщенного импульса***. Обобщенная координата, которая не входит в лагранжиан явным образом, называется ***циклической***. Уравнение (2) показывает, что если координата q_j является циклической, т.е. $\partial L/\partial q_j = 0$, то соответствующий этой координате обобщенный импульс сохраняется: $p_j = \text{const}$. Это ***закон сохранения обобщенного импульса***.
Физический смысл обобщенного импульса - это проекция импульса на какую-либо ось или момент импульса относительно какой-либо оси.

22. Уравнения Гамильтона. Канонические переменные.

Рассмотрим систему с идеальными голономными связями: $\mathbf{r}_l = \mathbf{r}_l(q_1, \dots, q_s, t), \quad l = 1,2,\dots,N$ и потенциально заданными силами. Состояние системы характеризовать набором обобщенных координат и обобщенных импульсов, их совокупность $\{q, p\}$ называют ***каноническими переменными***.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0\,, \quad j = 1,2,\dots,s \ (\mathbf{1})$$

$$\text{где } L(q, \dot{q}, t) = К - П - \text{функция Лагранжа}$$

Переход от обобщенных скоростей к обобщенным импульсам производится с помощью формул

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,, \quad \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad j = 1,2,\dots,s$$

которые можно рассматривать как систему уравнений, связывающих между собой величины $\dot{q}_1, \ \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ и $p_1, \ p_2, \dots, p_s$. Найдем дифференциал функции L:

$$dL = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}d\dot{q}_j\right) + \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$$dL = \sum_{j=1}^{s}\left(\dot{p}_j dq_j + p_j d\dot{q}_j\right) + \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

Введем функцию $H = H(q, p, t)$

$$H=\sum_{j=1}^{s}\dot q_j\,p_j-L$$

Найдем ее дифференциал:

$$dH=\sum_{j=1}^{s}\left(\dot q_j dp_j+p_j d\dot q_j\right)-dL=\sum_{j=1}^{s}\left(\dot q_j dp_j+p_j d\dot q_j-\dot p_j dq_j-p_j d\dot q_j\right)-\frac{\partial L}{\partial t}dt=$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\left(\dot q_j dp_j-\dot p_j dq_j\right)-\frac{\partial L}{\partial t}dt$$

Выразим функцию H через канонические уравнения и время

$$dH=\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}dq_j+\frac{\partial H}{\partial p_j}dp_j\right)+\frac{\partial H}{\partial t}dt$$

Если в качестве переменных, характеризующих состояние механической системы, использовать канонические переменные, то уравнения движения имеют вид

$$\dot q_j=\frac{\partial H}{\partial p_j},\quad \dot p_j=-\frac{\partial H}{\partial q_j},\qquad j=1,2,\dots,s$$

Это ***уравнения Гамильтона***, $H=H(q,p,t)$ - ***функция Гамильтона*** (гамильтониан) системы:

$$H=\sum_{j=1}^{s}\dot q_j\,p_j-L$$

Зависимость по времени гамильтониана:

$$\frac{dH}{dt}=\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\dot q_j+\frac{\partial H}{\partial p_j}p_j\right)+\frac{\partial H}{\partial t}=\sum_{j=1}^{s}\left(-\dot p_j\dot q_j+\dot q_j p_j\right)+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}\quad => \frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}$$

Если гамильтониан системы не содержит явной зависимости от времени, то система называется ***консервативной***. К числу консервативных систем относятся системы с идеальными голономными стационарными связями (или вообще без связей) и потенциальными заданными силами. Гамильтониан консервативной системы есть постоянная движения, имеющая смысл полной механической энергии системы: $H(q,p)=\text{К}(q,p)+\Pi(q)$. Покажем это.

$$\mathbf{r}_l=\mathbf{r}_l(q_1,\dots,q_s),\ \ l=1,2,\dots,N$$

$$\mathbf{v}_l=\dot{\mathbf{r}}_l=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_j}\dot q_j,\qquad p_j=\frac{\partial L}{\partial \dot q_j},$$

$$\text{К}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N}m_l v_l^2=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N}m_l\mathbf{v}_l\mathbf{v}_l=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N}m_l\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_\alpha}\dot q_\alpha\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_\beta}\dot q_\beta$$

Меняем порядок суммирования:

$$\text{К}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s}\dot q_\alpha\,\dot q_\beta\sum_{l=1}^{N}m_l\frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_\alpha}\frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_\beta}=\left[\sum_{l=1}^{N}m_l\frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_\alpha}\frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_\beta}=\text{К}_{\alpha\beta}(q)=\text{К}_{\beta\alpha}(q)\right]=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s}\text{К}_{\alpha\beta}(q)\dot q_\alpha\,\dot q_\beta$$

$$p_j=\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}=\frac{\partial}{\partial \dot q_j}(\text{К}-\Pi)=\frac{\partial \text{К}}{\partial \dot q_j}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s}\text{К}_{\alpha\beta}(\dot q_\alpha\delta_{j\beta}+\dot q_\beta\delta_{\alpha j})=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\dot q_\alpha\sum_{\beta=1}^{s}\text{К}_{\alpha\beta}\delta_{j\beta}+\frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{s}\dot q_\beta\sum_{\alpha=1}^{s}\text{К}_{\alpha\beta}\delta_{\alpha j}=\frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{s}\dot q_\beta\text{К}_{j\beta}+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\dot q_\alpha\text{К}_{\alpha j}$$

$$=>\ \ p_j=\sum_{\alpha=1}^{s}\dot q_\alpha\text{К}_{j\alpha}\quad => H=\sum_{j=1}^{s}\dot q_j\,p_j-L=\sum_{j=1}^{s}\dot q_j\sum_{\alpha=1}^{s}\dot q_\alpha\text{К}_{j\alpha}-L=\sum_{j=1}^{s}\sum_{\alpha=1}^{s}\dot q_\alpha\dot q_j\text{К}_{j\alpha}-L=$$

$$=2\text{К}-(\text{К}-\Pi)=\text{К}+\Pi$$

23. Равновесие системы и его устойчивость.

Сила, действующая на твердое тело, характеризуется величиной, направлением и точкой приложения. В задачах статики выделяют два типа сил:
1) контактные силы, возникающие при соприкосновении тел: силы упругости, силы трения и силы давления жидкости или газа;
2) дальнодействующие силы, действующие на расстоянии между телами: гравитационные и электромагнитные силы.
Силы упругости и трения приложены к телу в точке или в плоскости соприкосновения с другим твердым телом. Силы давления жидкости (газа) приложены ко всем точкам поверхности тела, окруженной жидкостью (газом). Гравитационные силы действуют на каждую точку внутри тела. Их равнодействующая приложена к его центру тяжести.
Вектор силы определяет линию, вдоль которой действует сила – линию действия. Две силы, действующие на твердое тело, уравновешиваются ⇔ линии их действия лежат на одной прямой, силы равны по величине и действуют в противоположных направлениях. Перенос точки приложения силы, действующей на твердое тело, вдоль линии ее действия не влияет на изменение механического состояния тела => в задачах статики можно переносить точку приложения силы вдоль линии действия.
Равновесие (покой) – это состояние механической системы, в котором она будет находиться все время, если в начальный момент она в нем находилась и имела 0-ые скорости всех точек.
Условие равновесия твердого тела, имеющего ось вращения, в виде правила моментов: тело находится в равновесии, если сумма моментов всех приложенных к телу сил относительно оси вращения = 0.
Если твердое тело может перемещаться поступательно и совершать вращательное движение, равновесие тела достигается при одновременном выполнении условий:
1) сумма всех сил, приложенных к телу, = 0;

$$m_l\ddot{\mathbf{r}}_l = \mathbf{F}_l + \mathbf{R}_l, \qquad l = 1,2,\dots,N, \qquad \ddot{\mathbf{r}}_l = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{F}_l + \mathbf{R}_l = 0$$

2) сумма моментов всех сил, приложенных к телу, относительно любой оси = 0.
Всякое тело, находящееся в гравитационном поле, можно представить в виде системы частиц, на каждую из которых действует сила тяжести, пропорциональная ее массе. Полная сила тяжести, действующая на тело, является равнодействующей всех этих сил. Вблизи поверхности Земли, где гравитационное поле можно считать однородным, элементарные силы тяжести, действующие на частицы, параллельны. Точка приложения равнодействующей всех элементарных сил тяжести называется ***центром тяжести*** тела. Относительно оси, проходящей через центр тяжести тела, сумма моментов всех элементарных сил тяжести = 0.
Положение центра тяжести тела в выбранной системе координат определяется формулой:

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{m}\int_V \rho\mathbf{r}dV$$

где m – масса тела, ρ – плотность, **r** – радиус-вектор элемента объема тела. Интегрирование в ведется по объему тела V. Центр тяжести тела совпадает с его центром масс.
Для твердого тела - системы материальных точек, радиус-вектор центра масс рассчитывается :

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i$$

m_i – масса отдельной частицы, $\mathbf{r}_i$ – ее радиус-вектор, $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ – полная масса системы.
Для сплошного тела положение центра масс определяется по формуле

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{m}\int\limits_V \rho\mathbf{r}dV$$

где **r** – радиус-вектор элемента объема тела dV. Интегрирование проводится по объему тела V
Для нахождения положений равновесия произвольной механической системы необходимо найти такие ее конфигурации, в которых сумма всех сил, действующих на каждую точку системы, обращается в 0. Задача значительно упрощается для голономных систем, подчиненных идеальным стационарным связям. Необходимым и достаточным условием равновесия таких систем является равенство 0 работы всех заданных (активных) сил $\mathbf{F}_l$ на любых виртуальных перемещениях точек системы:

$$\delta A = \sum_{l=1}^{N} \mathbf{F}_l\,\delta\mathbf{r}_l = 0$$

где N – число точек системы. Перейдем к обобщенным координатам q_j :

$$\mathbf{r}_l=\mathbf{r}_l(q_1,\dots,q_s),\;\; l=1,2,\dots,N,\quad \delta\mathbf{r}_l=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\mathbf{r}_l}{\partial q_j}\delta q_j => \sum_{l=1}^{N}\mathbf{F}_l\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\mathbf{r}_l}{\partial q_j}\delta q_j=0$$

Меняем порядок суммирования:

$$\sum_{j=1}^{s}\delta q_j\sum_{l=1}^{N}\mathbf{F}_l\frac{\partial\mathbf{r}_l}{\partial q_j}=0,\text{т.к.}\;\;\sum_{l=1}^{N}\mathbf{F}_l\frac{\partial\mathbf{r}_l}{\partial q_j}=Q_j => \;\;\delta A=\sum_{j=1}^{s}Q_j\,\delta q_j=0$$

где s – число степеней свободы с-мы, Q_j – обобщенная сила, соотв-щая j-ой обобщенной координате. Т.к. вариации обобщенных координат δq_j независимы, то условие может выполняться только при одновременном выполнении равенств $Q_1=0, Q_2=0,\dots,Q_s=0$ => в положении равновесия голономной стационарной системы, подчиненной идеальным связям, все обобщенные силы обращаются в 0.

Если силы, действующие на систему, потенциальны, то

$$Q_j=-\frac{\partial\Pi}{\partial q_j},\qquad j=1,2,\dots,s$$

где $\Pi=\Pi(q_1,\dots,q_s)$ – потенциальная энергия системы, выраженная через обобщенные координаты. В положении равновесия

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q_j}\right)_0=0,\qquad j=1,2,\dots,s$$

т.е. при равновесии потенциальная энергия с-мы имеет экстремум по всем обобщенным координатам. Различают 3 типа равновесия тел: устойчивое, неустойчивое и безразличное. Равновесие называется ***устойчивым***, если движение, полученное в результате небольшого возмущения, не выходит за пределы небольшой окрестности первоначальной конфигурации системы. Если же при бесконечно малом возмущении система начинает удаляться от первоначальной конфигурации, то равновесие называется ***неустойчивым***. Равновесие системы называется ***безразличным***, если существует область отклонений от положения равновесия, в которой смещение любого тела системы не вызывает появления сил, изменяющих состояние системы. О характере равновесия голономной системы, подчиненной стационарным идеальным связям, можно судить по зависимости потенциальной энергии от обобщенных координат. Если в состоянии равновесия потенциальная энергия имеет изолированный минимум:

$$\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_j^2}\right)_0>0,\qquad j=1,2,\dots,s$$

то это состояние является устойчивым. Равновесие неустойчиво, если потенциальная энергия в состоянии равновесия имеет максимум:

$$\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_j^2}\right)_0<0,\qquad j=1,2,\dots,s$$

24. Колебания в системах с одной степенью свободы. (См. также лекции Игоря !!!!)

Малые колебания, совершаемые вблизи устойчивого положения равновесия, широко распространены в природе. Рассмотрим голономную систему с 1 *степенью свободы* => потенциальная энергия зависит от 1 обобщенной координаты: $\Pi=\Pi(q)$

Пусть q_0 - значение координаты q в положении равновесия =>

$$\left.\frac{\partial\Pi}{\partial q}\right|_{q_0}=0$$

Рассмотрим малые отклонения системы от положения равновесия и введем новую обобщенную координату: $\eta=q-q_0$.

Разложим потенциальную энергию в ряд Тейлора вблизи положения равновесия:

$$\Pi(q)=\Pi(q_0)+\left.\frac{\partial\Pi}{\partial q}\right|_{q_0}\eta+\left.\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2}\right|_{q_0}\eta^2+\cdots$$

Первое слагаемое можно отбросить как несущественное, т.к. потенциальная энергия всегда определяется с точностью до const. Второе слагаемое в положении равновесия = 0. Пусть

$$П_1 = \left.\frac{\partial^2 П}{\partial q^2}\right|_{q_0}$$

=> получим для потенциальной энергии вблизи положения равновесия :

$$П \approx \frac{1}{2}П_1\eta^2$$

Кинетическую энергию системы всегда можно представить:

$$К = \frac{1}{2}f(q)\dot{\eta}^2$$

Полагая $q = q_0$ и обозначая $f(q_0) = К_1$, выразим кинетическую энергию системы в виде

$$К \approx \frac{1}{2}К_1\dot{\eta}^2$$

=> вблизи положения равновесия лагранжиан системы можно приближенно записать:

$$L \approx \frac{1}{2}(К_1\dot{\eta}^2 - П_1\eta^2)$$

$К_1$ всегда положительно. Если положение равновесия устойчиво, то $П_1 > 0$. Уравнение движения системы, совершающей свободные малые колебания, имеет вид:

$$\ddot{\eta} + \omega^2\eta = 0$$

где $\omega = \sqrt{П_1/К_1}$ – ***собственная частота***. Общее решение этого уравнения:

$$\eta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

где A – ***амплитуда***, φ – ***начальная фаза колебаний***. Используя начальные условия

$$\eta(0) = \eta_0\,, \qquad \dot{\eta}(0) = v_0 \qquad => \quad A = \sqrt{\eta_0^2 + v_0^2/\omega^2}\ , \qquad \varphi = \operatorname{arctq}\left(-\frac{v_0}{\omega\eta_0}\right)$$

Примеры: (рис. и вывод см. лекции Игоря)

1. Математический маятник. l - длина нити

   $$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad - \text{формула Гюйгенса}$$

2. Обруч. R -радиус.

   $$\omega = \sqrt{\frac{g}{2R}} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

3. Пружинный осциллятор. k - жесткость пружины, m - масса груза

   $$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

25. Физические эффекты в колебательных системах. (графики см. лекции Игоря)

1. Гармонические колебания.
   $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

2. Затухающие колебания.
   $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega^2 x = 0$
   Добротность Q - число колебаний, которые успеют произойти до того как амплитуда уменьшится в 2 раза.

3. Нелинейные колебания
   $\ddot{x} + f(x) = 0$
   Например, для маятника
   $\ddot{x} + \omega^2\sin x = 0,\ \ \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$
   Уравнение не решается в элементарных функциях. Численное решение позволяет установить, что период колебаний будет зависеть от амплитуды.

4. Вынужденные колебания - колебания, происходящие под действием периодически меняющейся внешней силы.
   $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$, ??? $f(t)_0 = f_0 \cos\omega t$, $\cos\omega t = \frac{1}{2}e^{i\omega t} + \text{к.с.}$, $x = \frac{1}{2}Ae^{i\omega t} + \text{к.с.}$
   $A(-\omega^2 + \alpha i\omega + \omega_0^2) = f_0 \quad => A = \dfrac{f_0}{(-\omega^2 + \alpha i\omega + \omega_0^2)}$
   Резонанс - это возрастание амплитуды колебаний при совпадении частоты внешней силы с собственной частотой колебаний системы.

5. Параметрические колебания.
   $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$
   Например, длина нити маятника зависит от времени: $l = l(t)$

6. Ансамбль осцилляторов.

26. Нормальные колебания и нормальные координаты.

Частные движения системы, при которых все координаты гармонически изменяются со временем на одной из собственных частот, называются ***нормальными колебаниями***. Эти движения всегда можно возбудить путем специального выбора начальных условий. Например, если задать начальные значения координат в соответствии с *j*-й собственной формой, а начальные скорости положить = 0, то в системе возникнут нормальные (гармонические) колебания на *j*-й частоте. Во многих случаях такое выделение гармонических движений из собственных колебаний системы позволяет сразу определить собственную частоту. Если мы зададим *s* гармонических колебаний

$$\xi_k = A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k), \qquad k = 1,2,\dots,s$$

сумма которых представляет собой движение **1-ой** координаты η_1, то тем самым мы зададим движение всех остальных координат $\eta_j \quad (j = 2,3,\dots,s)$ => величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$, полностью определяющие движение всей системы, можно принять за новые обобщенные координаты. Они называются ***нормальными координатами.***

Формулы преобразования от нормальных координат к обобщенным имеют вид:

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{kj}\,\xi_k, \quad j = 1,2,\dots,s$$

В нормальных координатах

$$\text{К} = \frac{1}{2}\left(a_1\dot{\xi}_1^2 + \dots + a_s\dot{\xi}_s^2\right) \qquad \text{П} = \frac{1}{2}\left(a_1\omega_1^2\xi_1^2 + \dots + a_s\omega_s^2\xi_s^2\right)$$

и уравнения Лагранжа распадаются на *s* независимых друг от друга уравнений:

$$\ddot{\xi}_k + \omega_k^2\xi_k = 0, \quad k = 1,2,\dots,s$$

Каждая нормальная координата совершает гармоническое колебание с соответствующей ей собственной частотой. В отличие от нормальных каждая обобщенная координата совершает движение по сложному, вообще говоря, непериодическому закону. Но всегда можно указать такие линейные комбинации обобщенных координат, которые колеблются по чисто гармоническому закону на собственных частотах системы.

Из лекции:

Рисунок (колебательная система с несколькими степенями свободы): 3 пружины с коэффициентом жесткости k, между ними два тела массы *m*, вся конструкция жестоко закреплена между двумя стенами. Колебания вдоль пружин - по оси *OX*, x_1, x_2 - смещения тел от состояния покоя. Уравнения колебаний оказались связаны:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2 \end{cases}$$

Но существуют такие линейные комбинации координат, для которых уравнения колебаний будут независимыми:

$$\oplus \qquad m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2)$$
$$\ominus \qquad m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -3k(x_2 - x_1)$$

Введем новые координаты: $\begin{cases}\theta_1 = x_1 + x_2 \\ \theta_2 = x_2 - x_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ddot{\theta}_1 + \omega_1^2\theta_1 = 0 \quad \omega_k = \sqrt{k/m} \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_2^2\theta_2 = 0 \quad \omega_k = \sqrt{3\,k/m}\end{cases}$

Нормальные координаты - это координаты, которые при любых движениях системы меняются независимо друг от друга.

$$\begin{cases}\theta_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \theta_2(t) = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)\end{cases}$$

Собственные частоты колебаний - это частоты колебаний нормальных координат. Из независимости нормальных коор-т => возможны движения с-мы, при которых $\neq 0$ только 1 нормальная коор-та.

$$x_1 = \frac{1}{2}(\theta - \theta_2),\ \ x_2 = \frac{1}{2}(\theta + \theta_2)$$

Нормальные колебания - гармонические колебания на одной из собственных частот системы.

27. Механика волновых процессов. Проверить ВСЕ!!!!

Волна - это колебания, распространяющиеся в сплошной среде. Рассмотрим волну, получающуюся при движении нерастяжимого шнура вверх-вниз вдоль оси OZ. Для шнура длины l массы m:

$$\rho = \frac{m}{l}\ \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}}\right]\ - \ \text{линейная плотность}$$

Выделим фрагмент шнура массы $dm = \rho \cdot dz$, его форма описывается функцией $f(t)$, координаты начала и конца - z и $z + dz$, сила натяжения T [Н] направлена по касательной к шнуру и на концах фрагмента составляет углы α и β с прямыми, параллельными оси OZ. Тогда согласно 2-му закону Ньютона уравнение движения:

$$dm\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = T(tg\,\alpha - tg\,\beta)$$

$$dm\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \rho dz\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$$T(tg\,\alpha - tg\,\beta) = T\left(\left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z+dz} - \left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z}\right) = T\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\cdot dz$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\ ,\quad \left[\frac{T}{\rho}\right] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}\ \Rightarrow\ V^2 = \frac{T}{\rho}\ \Rightarrow V = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\ \text{ и }\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = V^2\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Стоячая волна - волна, которая описывается произведением функции времени на функцию координат: $f(z,t) = Z(z)\cdot\theta(t)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = V^2\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\ \Rightarrow\ Z\ddot{\theta} = V^2\theta Z''\ \Rightarrow\ \frac{\ddot{\theta}}{\theta} = \frac{V^2 Z''}{Z} = \text{const} \equiv \omega^2$$

т.к. левая часть не зависит от z, правая - от t. Пусть $k = \omega/V$, тогда

$$\begin{cases}\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \\ Z'' + k^2 Z = 0\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \\ Z(z) = R\cos(kz + \psi)\end{cases}$$

28. Случайные величины и вероятности.

Случайное событие – это событие, наблюдение которого можно многократно повторить, но исход которого нельзя предсказать заранее.

Вероятность случайного события $P(A)$ – это отношение числа N_A появлений события A в серии испытаний к полному числу испытаний N в пределе, когда число испытаний стремится к бесконечности:

$$P(A) = \lim_{N\to\infty}\frac{N_A}{N}\ \Rightarrow\ 0 \le P \le 1$$

Аксиома сложения вероятностей. Вероятность наступления одного из случайных взаимоисключающих событий равна сумме их вероятностей: $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Аксиома умножения вероятностей. Вероятность совместного наступления нескольких независимых случайных событий равна произведению их вероятностей: : $P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B)$

Случайная величина – это величина, измерение которой можно многократно повторить, но значение которой нельзя предсказать заранее.

Проверить, есть ли выделенный текст в лекциях !!!!

Дискретная случайная величина – это величина, принимающая конечное или бесконеч-ное, но счетное множество значений. Все эти значения можно перенумеровать: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Пусть $p_n = P(x = x_n)$ - вероятность того, что $x = x_n$. Набор чисел $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ харак-теризует данную дискретную случайную величину и называется ***распределением вероятности.*** Оно подчиняется ***условию нормировки*** (как следствие аксиомы сложения вероятностей)

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$$

Если распределение вероятности известно, то среднее значение $< f(x) >$ произвольной функции $f(x)$ случайной величины x :

$$< f(x) >= \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) p_n$$

Среднее значение (математическое ожидание): $< x >= \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$

Дисперсия - средний квадрат отклонения случайной величины от ее среднего значения:

$$\sigma_x^2 =< (x-< x >)^2 >$$

Дисперсия дискретной случайной величины:

$$\sigma_x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n-< x >)^2 p_n$$

В общем случае $\sigma_x^2 =< x^2 > -< x >^2$,

где $< x^2 >= \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 p_n$ – среднее значение квадрата случайной величины

Мерой отклонения случайной величины от ее среднего значения является величина, равная квадратному корню из дисперсии $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$ и называемая ***среднеквадратичным*** (стандартным) ***отклонением***.

Относительная флуктуация случайной величины x:

$$\delta x = \frac{\sigma_x}{< x >}$$

Распределение Пуассона: $p_n = e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!}$

n – случайная величина, которая может принимать целочисленные значения 0,1,2,… , p_n – вероятность того, что значение случайной величины равно n, величина $\alpha = \mathrm{const}$ – параметр распределения. Среднее значение пуассоновской случайной величины

$$< n >= \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = \alpha$$

=> параметр распределения Пуассона α имеет смысл среднего значения самой случайной величины.

Дисперсия пуассоновской случайной величины $\sigma_n^2 = \alpha$, а относительная флуктуация

$$\delta n = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad \text{или} \quad \delta n = \frac{1}{< n >}$$

Непрерывная случайная величина – это величина, принимающая бесконечное и несчетное множество значений из некоторого интервала.

Плотность вероятности – это отношение вероятности попадания случайной величины в малый интервал вблизи заданного значения к величине интервала в пределе, когда интервал → 0:

$$w(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x_0 \le x \le x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

Функция $w(x)$ имеет размерность, обратную размерности случайной величины x, подчиняется ***условию нормировки***

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x) dx = 1$$

и позволяет вычислить ***среднее значение*** произвольной функции случайной величины:

$$< f(x) >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)w(x)dx$$

Среднее значение (математическое ожидание) самой случайной величины

$$< x >= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, w(x)dx$$

Дисперсия случайной величины

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-< x >)^2\, w(x)dx =< x^2 > -< x >^2$$

Среднеквадратичное отклонение $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$ и относительная флуктуация непрерывной случайной величины

$$\delta x = \frac{\sigma_x}{< x >}$$

Распределение Гаусса (нормальное распределение):

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-< x >)^2}{2\sigma^2}\right\},\ \ -\infty < x < +\infty$$

Распределение Гаусса подчиняется условию нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)dx = 1$

Сумма или разность независимых гауссовых случайных величин являются гауссовыми величинами.

Многомерное распределение плотности вероятности – это отношение вероятности попадания нескольких случайных величин в малые интервалы вблизи заданных значений к произведению величин интервалов в пределе, когда интервалы стремятся к нулю. Например, в случае двух случайных величин *x*, *y*

$$w(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{P(x_0 \le x \le x_0 + \Delta x,\ y_0 \le y \le y_0 + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}$$

Размерность этой функции обратна размерности произведения случайных величин *x* и *y*.

Условие нормировки: $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} w(x,y)dxdy = 1$

Правило вычисления средних: $< f(x,y) >= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)w(x,y)dxdy$

Правила понижения порядка распределения:

$$w_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x,y)dy\ ,\ \ w_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x,y)dx$$

Многомерное (в частном случае двумерное) распределение плотности вероятности независимых случайных величин распадается на произведение одномерных распределений:

$$w(x,y) = w_1(x) \cdot w_2(x)$$

=> среднее значение произведения независимых случайных величин равно произведению их средних значений: $< x \cdot y >=< x >\cdot< y >$

Замена переменной в распределении плотности вероятности. Пусть есть случайная величина *x* с известным распределением плотности вероятности $w_1(x)$ и другая случайная величина *y*, связанная с величиной *x* известным функциональным соотношением: $y = y(x)$. Тогда распределение плотности вероятности для величины *y* можно вычислить по формуле

$$w_2(x) = w_1(x(y)) \cdot \left|\frac{dx(y)}{dy}\right|$$

$x = x(y)$ – функция, обратная функции $y = y(x)$. В случае двумерного распределения

$$w_2(u,v) = w_1(x(u,v), y(u,v)) \cdot \left|\frac{D(x(u,v), y(u,v))}{D(u,v)}\right|$$

x, y - исходные случайные переменные, для которых известно распределение плотности вероятности $w_1(x,y)$. Величины *u, v* – новые случайные переменные, связанные с величинами *x, y* известными функциональными соотношениями $u = u(x,y),\ v = v(x,y)$. Функция $w_2(u,v)$ - это распределение плотности вероятности для величин *u, v*. Второй множитель в правой части последней формулы – это якобиан преобразования от переменных *x, y* к переменным *u, v* :

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

29. Распределение Гиббса.

Рассмотрим некоторую систему, находящуюся в состоянии ***термодинамического равновесия*** - состояние, в которое самопроизвольно переходит система, предоставленная самой себе в условиях изоляции от окружающей среды. В этом состоянии система может находиться сколь угодно долго, причем ее параметры не изменяются со временем.
Основной закон статистической механики равновесных систем : при термодинамическом равновесии распределение плотности вероятности для различных состояний системы определяется следующей формулой, называемой ***распределением Гиббса***:

$$w(z) = C \cdot \exp\left\{-\frac{H(z)}{kT}\right\}$$

C – нормировочная постоянная; z - совокупность канонических переменных, т.е. набор обобщенных координат и импульсов системы: $z = \{q, p\} = \{q_1, \ldots, q_s;\ p_1, \ldots, p_s\}$, где s - число степеней свободы системы, $H(z) = \text{К} + \Pi$ – гамильтониан системы, К и П – кинетическая и потенциальная энергии системы, T – абсолютная температура, k = 1,38·10^{-23} Дж/К – постоянная Больцмана. С помощью распределения Гиббса можно вычислить, например, внутреннюю энергию u той или иной системы, которая в статистической механике определяется как среднее значение гамильтониана: $u = \langle H \rangle$.
Распределение молекул по скоростям. Распределение плотности вероятности для декартовых компонент скорости молекулы:

$$w(v_x, v_y, v_z) = C \cdot \exp\left\{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right\}$$

C – нормировочная постоянная, m – масса молекулы, v_x, v_y, v_z – декартовы компоненты скорости молекулы, которая рассматривается как материальная точка. Величины v_x, v_y, v_z могут принимать любые вещественные значения. Это ***распределение Максвелла***.
Из этой формулы видно, что трехмерное распределение плотности вероятности для декартовых компонент скорости молекулы распадается на произведение одномерных распределений:

$$w(v_x, v_y, v_z) = w_1(v_x) \cdot w_1(v_y) \cdot w_1(v_z), \qquad \text{где} \quad w_1(v_x) = C_1 \exp\left\{-\frac{mv_x^2}{2kT}\right\}$$

– распределение плотности вероятности для величины v_x. Выражения для $w_1(v_y)$ и $w_1(v_z)$ аналогичны => декартовы компоненты скорости молекулы - статистически независимые случайные величины. Каждая из декартовых компонент скорости молекулы есть гауссова случайная величина с нулевым средним значением и дисперсией

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m}$$

Из интеграла Пуассона $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$ и условия нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)dx = 1$

=> постоянная C_1 : $C_1 = \sqrt{m/2\pi kT}$. Нормировочная постоянная C в распределении Максвелла связана с C_1 : $C = C_1^3 \quad => \quad C = (m/2\pi kT)^{3/2}$
Распределение молекул во внешнем силовом поле. Распределение плотности вероятности для декартовых координат молекулы имеет вид

$$w(x, y, z) = C \cdot \exp\left\{-\frac{\Pi(x, y, z)}{kT}\right\}$$

C – нормировочная постоянная, $\Pi(x, y, z)$ – потенциальная энергия молекулы. Это ***распределение Больцмана***.

30. Распределение энергии по степеням свободы.

В состоянии ***термодинамического равновесия*** (состояние, в которое самопроизвольно переходит система, предоставленная самой себе в условиях изоляции от окружающей среды) на каждую квадратичную степень свободы системы приходится в среднем одинаковая энергия, равная $kT/2$. Это утверждение называют теоремой о равнораспределении энергии по степеням свободы. Квадратичной степенью свободы или квадратичной канонической переменной называют переменную, вклад которой в гамильтониан пропорционален квадрату этой переменной. Например, для свободной частицы массой m

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

Здесь обобщенные импульсы p_x, p_y, p_z являются квадратичными переменными.

31. Диффузия и теплопроводность.

Диффузией называют процесс проникновения одного вещества в другое. Капнув в воду каплю чернил или туши, можно наблюдать процесс постепенного окрашивания воды – диффузию. ***Закон диффузии***: поток частиц пропорционален градиенту их концентрации. В простейшем случае, когда концентрация частиц *n* зависит только от одной декартовой координаты (напр., *x*), закон диффузии записывается:

$$j_x = -D\frac{\partial n}{\partial x}\,, \quad \text{где} \quad j_x = \frac{1}{S}\cdot\frac{\Delta N_x}{\Delta t}$$

j_x – поток частиц, ΔN_x – число частиц, пересекающих площадку площадью *S* в направлении оси *OX* за время Δt. При этом предполагается, что площадка перпендикулярна оси *OX*. Знак "–" в правой части указывает на то, что поток частиц идет в направлении убывания их концентрации. Постоянная величина *D* - *коэффициент диффузии.*

Изменение концентрации частиц во времени и в пространстве описывается ***уравнением диффузии***:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\cdot\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

Это уравнение - следствие закона диффузии и *уравнения непрерывности*, выражающего сохранение числа частиц:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j_x}{\partial x}$$

Теплопроводностью называют процесс переноса тепла в неоднородно нагретом теле. ***Закон теплопроводности***: поток тепла пропорционален градиенту температуры. Когда температура *T* зависит только от одной декартовой координаты (напр., *x*), закон теплопроводности :

$$j_x = -\text{к}\frac{\partial T}{\partial x}\,, \quad \text{где} \quad j_x = \frac{1}{S}\cdot\frac{\Delta Q_x}{\Delta t}$$

j_x – поток тепла, ΔQ_x – энергия, проходящая через площадку площадью *S* в направлении оси *OX* за время *t*Δ. Предполагается, что площадка перпендикулярна оси *OX*. Знак "–" в правой части указывает на то, что поток тепла идет в направлении убывания температуры. Постоянная величина **к** - ***коэффициент теплопроводности***.

Изменение температуры во времени и в пр-ве описывается ***уравнением теплопроводности***

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\text{к}}{c\rho}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

c – удельная теплоемкость, ρ – плотность вещества. Это уравнение - следствие закона теплопроводности и уравнения, выражающего сохранение энергии:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_x}{\partial x}$$

32. Тензор инерции твердого тела. Главные оси инерции.

Рассмотрим *движение тела с одной неподвижной точкой*. Поместим начало неподвижной систе-мы координат в неподвижную точку тела и вычислим относительно нее момент импульса тела:

$$\mathbf{N} = \sum_i [\mathbf{r}_i, m_i\mathbf{v}_i] \quad (\mathbf{1}) \qquad \text{и момент внешних сил } \mathbf{M} = \sum_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i] \quad (\mathbf{2})$$

m_i – масса, $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор, $\mathbf{v}_i$ – скорость *i*–й точки тела в неподвижной системе отсчета, $\mathbf{F}_i$ – сумма внешних сил, действующих на эту точку. Суммирование в (1) и (2) по всем точкам тела.

Уравнение моментов относительно неподвижной точки:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M} \quad (\mathbf{3})$$

По теореме Эйлера скорость *i*–й точки тела в неподвижной системе отсчета выражается через радиус-вектор этой точки $\mathbf{r}_i$ и вектор мгновенной угловой скорости тела **ω**:

$$\mathbf{v}_i = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i] \quad (\mathbf{4})$$

Введем сопровождающую систему координат *x*, *y*, *z*, жестко связанную с телом. Эта система вращается относительно неподвижной системы с угловой скоростью **ω**. Пусть $d'\mathbf{N}$ - приращение вектора **N** за время *dt* относительно сопровождающей системы отсчета =>

$$d\mathbf{N} = d'\mathbf{N} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{N}]dt \quad (\mathbf{5})$$

Если вектор **N** жестко связан с сопровождающей системой координат ($d'\mathbf{N} = \mathbf{0}$), то за время *dt* он приобретает в неподвижной системе приращение $d\mathbf{N} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{N}]dt \quad (\mathbf{6})$

Формула типа (6) справедлива вообще для любого вектора, жестко связанного с сопровождающей системой, в том числе для ортов этой системы.

Из (3)и (4) => $\quad \frac{d'\mathbf{N}}{dt} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{N}] = \mathbf{M} \quad (\mathbf{7})$

Согласно (1) и (4) проекции вектора момента импульса тела N_x, N_y, N_z на оси сопровождающей системы координат выражаются через проекции вектора мгновенной угловой скорости тела $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ на оси той же системы:

$$N_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$
$$N_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$$
$$N_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

Величины I_{ij} $(i, j = x, y, z)$ образуют ***тензор инерции*** твердого тела и определяются:

$$I_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2), \quad I_{yy} = \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2), \quad I_{zz} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i, \quad I_{xz} = I_{zx} = -\sum_i m_i x_i z_i, \quad I_{yz} = I_{zy} = -\sum_i m_i y_i z_i$$

$x_i,\ y_i,\ z_i$ – декартовы координаты материальной точки тела массой m_i в сопровождающей системе координат. Тензор инерции не зависит от движения тела, а определяется формой и размерами тела и распределением массы внутри тела, а также зависит от ориентации осей сопровождающей системы координат относительно тела. Если выбрать оси сопровождающей системы координат так, что тензор инерции будет диагональным, то такие оси называются ***главными осями инерции*** тела. Связь декартовых компонент момента импульса и угловой скорости вращения тела в главных осях :

$$N_x = I_x\omega_x \quad N_y = I_y\omega_y \quad N_z = I_z\omega_z \qquad (\mathbf{8})$$

I_x , I_y , I_z - ***главные моменты инерции*** тела.

33. Динамика твердого тела. Уравнения Эйлера.

В задачах динамики твердого тела различают виды движения : поступательное движение, вращение вокруг неподвижной оси, плоское движение, движение тела с одной неподвижной точкой. По теореме о движении центра масс при любом типе движения тела справедливо уравнение $\quad m\mathbf{a}_c = \mathbf{F} \quad (\mathbf{1})$
где m – масса тела, $\mathbf{a}_c$ – ускорение центра масс, $\mathbf{F}$ – сумма внешних сил, действующих на тело. Центр масс тела движется так, как будто в этой точке сосредоточена масса всего тела и к ней приложены все внешние силы.

При ***поступательном движении тела*** перемещения, скорости и ускорения всех его точек одинаковы, поэтому уравнение (1) полностью описывает такое движение.

Уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси имеет вид: $I\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{M}_{\parallel}$, где I – момент инерции тела относительно оси, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор углового ускорения тела, $\mathbf{M}_{\parallel}$ – составляющая суммы моментов внешних сил, параллельная оси вращения. Для силы $\mathbf{F}$, точка приложения которой описывается радиус-вектором $\mathbf{r}$ с началом на оси вращения, $\mathbf{M}_{\parallel}$ вычисляется по формуле $\mathbf{M}_{\parallel} = [\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{F}_{\perp}]$, где $\mathbf{r}_{\perp}$ и $\mathbf{F}_{\perp}$ – составляющие радиус-вектора $\mathbf{r}$ и силы $\mathbf{F}$ в плоскости, перпендикулярной оси (см. рис. 9.1).

Вращение твердого тела при ***плоском движении*** удобно описывать в поступательно движущейся системе отсчета, связанной с центром масс тела => уравнение вращения тела $I_c\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{M}_{\parallel}$, где I_c - момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной плоскости движения тела и проходя-щей через центр масс, $\mathbf{M}_{\parallel}$– составляющая момента внешних сил вдоль этой же оси. Теорема
Кенига для вычисления кинетической энергии твердого тела, совершающего плоское движение:

$$\text{К} = \frac{m{v_c}^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}$$

Движение тела с одной неподвижной точкой. Поместим начало неподвижной систе-мы координат в неподвижную точку тела и вычислим относительно нее момент импульса тела:

$$\mathbf{N} = \sum_i [\mathbf{r}_i, m_i\mathbf{v}_i] \quad (\mathbf{2}) \qquad \text{и момент внешних сил} \qquad \mathbf{M} = \sum_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i] \quad (\mathbf{3})$$

m_i – масса, $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор, $\mathbf{v}_i$ – скорость i–й точки тела в неподвижной системе отсчета, $\mathbf{F}_i$ – сумма внешних сил, действующих на эту точку. Суммирование в (2) и (3) по всем точкам тела.

Уравнение моментов относительно неподвижной точки:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M} \quad (\mathbf{4})$$

По теореме Эйлера скорость *i*–й точки тела в неподвижной системе отсчета выражается через радиус-вектор этой точки $\mathbf{r}_i$ и вектор мгновенной угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{v}_i = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i] \quad (\mathbf{5})$$

Введем сопровождающую систему координат *x*, *y*, *z*, жестко связанную с телом. Эта система вращается относительно неподвижной системы с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Пусть $d'\mathbf{N}$ - приращение вектора $\mathbf{N}$ за время *dt* относительно сопровождающей системы отсчета =>

$$d\mathbf{N} = d'\mathbf{N} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{N}]dt \quad (\mathbf{6})$$

Если вектор $\mathbf{N}$ жестко связан с сопровождающей системой координат ($d'\mathbf{N} = \mathbf{0}$), то за время *dt* он приобретает в неподвижной системе приращение $d\mathbf{N} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{N}]dt \quad (\mathbf{7})$

Формула типа (7) справедлива вообще для любого вектора, жестко связанного с сопровождающей системой, в том числе для ортов этой системы.

Из (4)и (5) => $\quad \dfrac{d'\mathbf{N}}{dt} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{N}] = \mathbf{M} \quad (\mathbf{8})$

Согласно формулам (2) и (5) проекции вектора момента импульса тела N_x, N_y, N_z на оси сопровождающей системы координат выражаются через проекции вектора мгновенной угловой скорости тела $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ на оси той же системы:

$$N_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$
$$N_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$$
$$N_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

Величины I_{ij} $(i, j = x, y, z)$ образуют ***тензор инерции*** твердого тела и определяются:

$$I_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2), \quad I_{yy} = \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2), \quad I_{zz} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$
$$I_{xy} = I_{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i, \quad I_{xz} = I_{zx} = -\sum_i m_i x_i z_i, \quad I_{yz} = I_{zy} = -\sum_i m_i y_i z_i$$

x_i, y_i, z_i – декартовы координаты материальной точки тела массой m_i в сопровождающей системе координат. Тензор инерции не зависит от движения тела, а определяется формой и размерами тела и распределением массы внутри тела, а также зависит от ориентации осей сопровождающей системы координат относительно тела. Если выбрать оси сопровождающей системы координат так, что тензор инерции будет диагональным, то такие оси называются ***главными осями инерции*** тела. Связь декартовых компонент момента импульса и угловой скорости вращения тела в главных осях :

$$N_x = I_x\omega_x \quad N_y = I_y\omega_y \quad N_z = I_z\omega_z \quad (\mathbf{9})$$

I_x , I_y , I_z - ***главные моменты инерции*** тела. Формулы (9) показывают, что векторы момента импульса и угловой скорости вращения тела, вообще говоря, не параллельны друг другу. Но если тело вращается вокруг одной из главных осей инерции, то вектор $\mathbf{N}$ становится параллельным вектору $\boldsymbol{\omega}$. Подставив (9) в (8), получим уравнения движения тела с одной неподвижной точкой (***уравнения Эйлера***) :

$$I_x\frac{d'\omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z = M_x$$
$$I_y\frac{d'\omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\omega_x\omega_z = M_y$$
$$I_z\frac{d'\omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y = M_z$$

M_x, M_y, M_z – моменты внешних сил относительно главных осей инерции тела. Решив уравнения Эйлера с учетом соответствующих начальных условий, можно найти функции $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$, а затем, используя соотношения (9), функции $N_x(t)$, $N_y(t)$, $N_z(t)$.