Сергей Юрьевич Никитин.

Физика - наука об элементарных явлениях в природе.

Аристотель, Архимед
4-3 вв. до н.э.

Галилей, Кеплер, Гюйгенс, Ньютон
17 век

18 век

Эйнштейн
1905 г.

Планк, Бор

1. Д.В. Сивухин. Механика.

2. Б.Б. Буховцев, С.С. Чесноков, Методика решени[я] задач механики

Основные абстракции.

1. Мат. точка. (тело, размером кот. можно пренебречь.)
2. Абсолютно твердое тело. (сист. ч-ц, расст. между ∀ парой которых всегда ост. неизм.)
3. Сплошная среда (среда, дискретностью кот. можно пренебречь)

§1. Кинематика материальной точки

Кинематика изучает движение без рассмотрения причин этого движения.

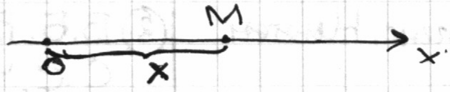
Движение - перемещение одного тела относительно другого.

Тело отсчета - тело, отн. кот. рассматриваем движение.

Математическое описание движения.

1. Прямолинейное.

Измерение расстояний производится при помощи эталонного тела.



Метр – расст., кот. проходит свет в вакууме за $\frac{1}{3\cdot 10^8}$ долю секунды.

Измерение промежутков времени.

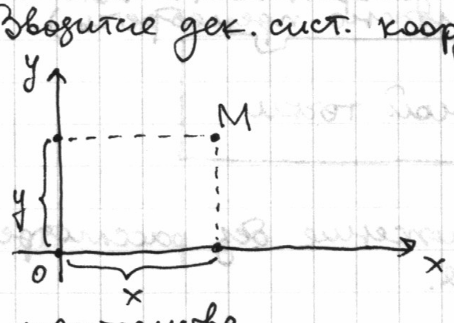
Секунда – продолжительность 10^{10} колебаний электрона в атоме цезия.

Закон движения мат. точки по прямой

$x = x(t)$ – закон движения.

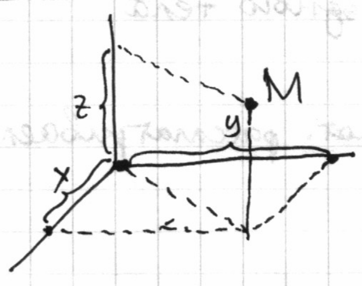
Движение в плоскости.

Вводится дек. сист. координат



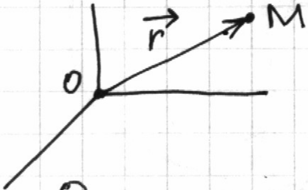
$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ – закон движения.

В пространстве.

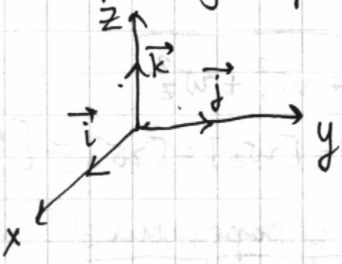


Система отсчета = система координат + часы.

Радиус-вектор — вектор, соед. начало отсчета с данной мат. точкой.



Орты декартовых координат



$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$$

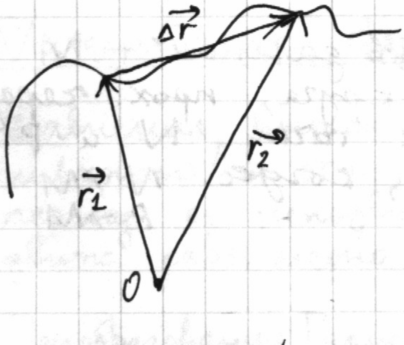
Модуль $|\vec{r}|$ будем обозначать как r.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$[x] = [y] = [z] = [r] = [м]$$ ← метры.

Перемещение.

$$\vec{\Delta r} = \vec{r_2} - \vec{r_1} \qquad \vec{r_1} = \vec{r}(t_1), \quad \vec{r_2} = \vec{r}(t_2)$$



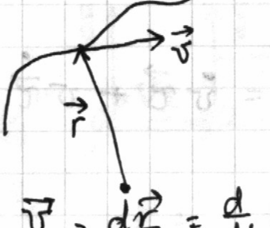
Длительность перемещения.

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Скорость.

Предел отношения перемещения к его длительности при $\Delta t \to 0$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$



$$\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z$$

v_x, v_y, v_z — дек. компоненты скорости.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = \vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y} + \vec{k}\dot{z} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad [v] = [v_x] = [v_y] = [v_z] = [м/с]$$

Ускорение.

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}.$$

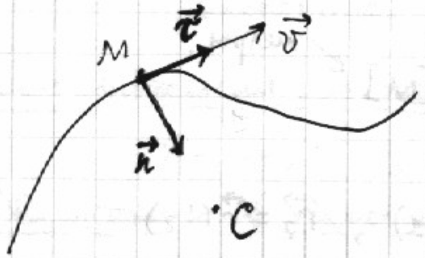
w_x, w_y, w_z – дек. компоненты.

$$w_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$$
$$w_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \qquad w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$$
$$w_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

$$[w_x] = [w_y] = [w_z] = [w] = [м/с^2]$$

Тангенциальное и нормальное ускорения.

Введем т.н. естественные оси координат.

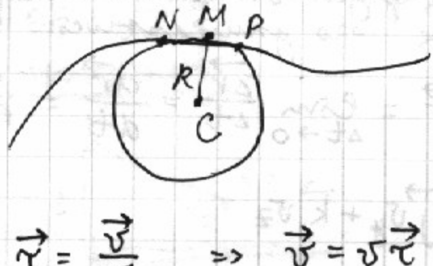


$$\vec{w} = \vec{\tau} w_\tau + \vec{n} w_n$$

w_τ – тангенц.

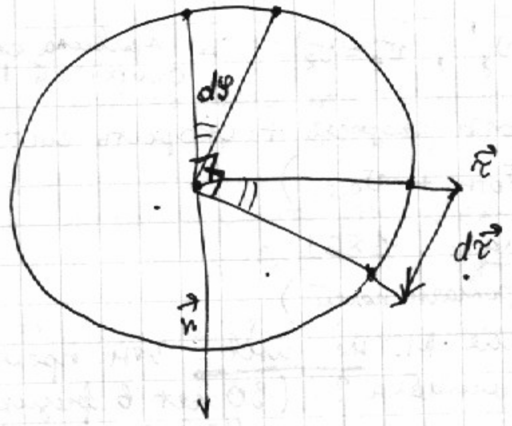
w_n – норм.

Кругом кривизны кривой в данной т. M наз. предельное полож. круга, прох. через эту точку и две другие точки N и P на кривой в пределе, когда $N \to M$, $P \to M$



$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v} \Rightarrow \vec{v} = v\vec{\tau} \qquad \vec{w} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}\vec{\tau} + v\dot{\vec{\tau}}$$

$$\dot{\vec{\tau}} = \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$



$$d\vec{\tau} = \vec{n}\cdot d\varphi$$

$$\vec{w} = \dot{v}\vec{\tau} + v\dot{\vec{\tau}}$$

$$\dot{\vec{\tau}} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{n}\,\frac{d\varphi}{dt}$$

$$d\varphi = \frac{dS}{R}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dS}{dt} = \frac{v}{R}$$

$$w_\tau = \dot{v}\,, \quad w_n = \frac{v^2}{R}.$$

§2. Принцип относительности. Преобразование Галилея. Преобразование Лоренца.

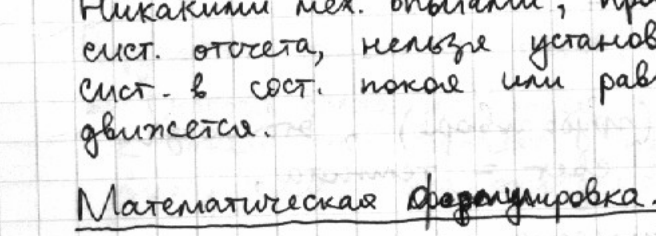
Пр. отн. Галилея.

Никакими мех. опытами, провед. внутри данной сист. отсчета, нельзя установить, нах. ли эта сист. в сост. покоя или равномерно прямолинейно движется.

Математическая ~~формулировка~~.

Уравнения, выраж. физ. законы, должны быть инвариантны отн. преобразования, выраж. переход от неподвижной сист. отсчета к сист., движ. равномерно и прямолинейно.

Преобразования Галилея.



$$x = x' + Vt$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$

$v_x = v_x' + V$, $v_y = v_y'$, $v_z = v_z'$ – правила сложения скоростей Галилея.

Абс. скорость есть отн. скорость + скорость сист. отсчета.

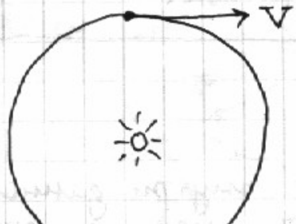
$$(v_{абс.} = v_{отн.} + v_{с.о.})$$

Уравнение Максвелла: 1861 г.
(обобщ. св-ва электромагн. полей)

Оказалось, что ур-ие М. не инв. отн. преобр. Галилея. Где же ошибка? (30 лет в физике царило недоумение)

Опыт Майкельсона (1887 г.)

Цель опыта – проверить правило сложения скоростей Галилея для световых лучей.

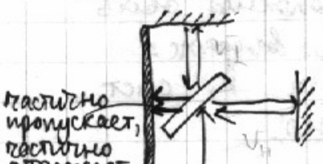


$V = 3\cdot 10^4$ м/с
$c = 3\cdot 10^8$ м/с

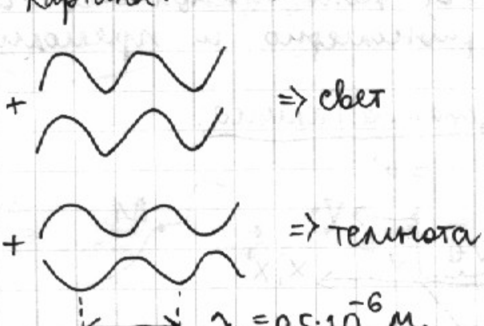
$\frac{V}{c} = 10^{-4} \ll 1$ – что делать?

Интерференция (грубо говоря), это когда
свет + свет = темнота.

Интерферометр Майкельсона.



На экране наблюдается интерф. картина.



$\lambda = 0{,}5\cdot 10^{-6}$ м.

Были сделаны два предположения:

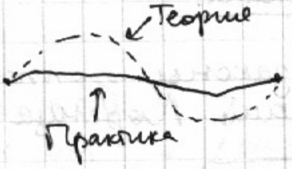
1. Скорость света отн. Солнца равна c:
$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2 .$$

2. Скорость света отн. Земли подч. пр. сл. Галилея:
$$v_x = v_x' + V, \quad v_y = v_y', \quad v_z = v_z' .$$

$\Rightarrow |v_\parallel| = c \pm V$ (продольная скорость)

$|v_\perp| = \sqrt{c^2 - V^2}$ (поперечная скорость)

В ходе эксперимента интерфер. поворачивают на $90°$ $\Rightarrow$ $v_\parallel$ и $v_\perp$ должны были бы помен. местами



$\Rightarrow$ Теория неверна.

Принцип постоянства скорости света.

Результат опыта М. таков, будто бы $V = 0$.

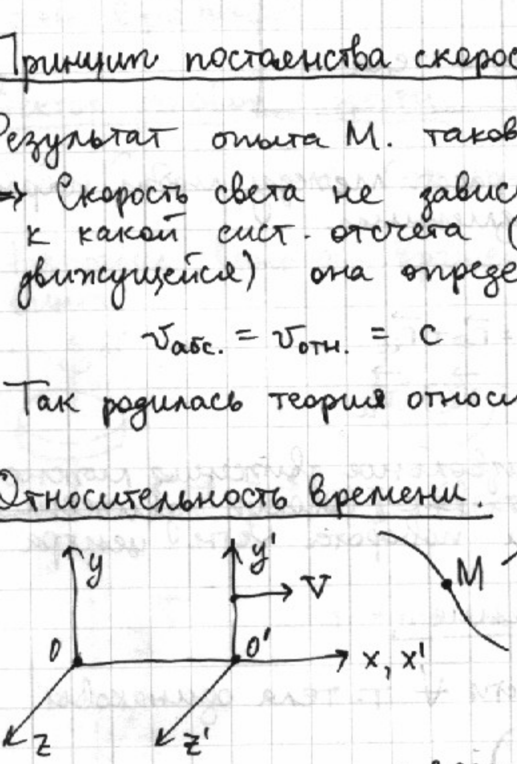
$\Rightarrow$ Скорость света не зависит от того, по отн. к какой сист. отсчета (покоящейся или движущейся) она определяется.

$$v_{абс.} = v_{отн.} = c \quad (!)$$

Так родилась теория относительности.

Относительность времени.

точка, до кот. дошел свет.



$$\begin{cases} x = ct \\ x' = ct' \end{cases}$$

$x \neq x' \rightarrow t \neq t'$ (!)

$\Rightarrow$ время течет по-разному

$\Rightarrow$ необх. найти преобразование $x, y, z, t \rightleftarrows x', y', z', t'$?

Попробуем линейное: $\begin{cases} x = x' + Vt' \\ t = t' + \dfrac{Vx'}{c^2} \end{cases}$ ← т.к. при $V = 0$ времена сохр.

Преобразование Лоренца.

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\[2ex] t = \dfrac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{cases}$$

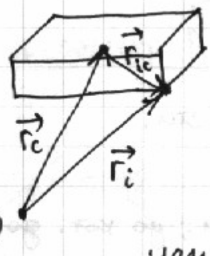
Относительно этих преобр. ур-ия Максвелла оказались инвариантными!

Принцип относительности Эйнштейна.

Ур-ия, выражающие физ. законы, должны быть инв. отн. преобразований Лоренца.

§3. Кинематика твердого тела.

Т. тело – сист. ч-ц, расст. между любой парой кот. остается неизменным.



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$$
$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}$$

Произвольное движение можно предст. как совокуп. движения центра и поворота отн. центра

Поступательное движение.

Движ., при кот. скорости $\forall$ т. тела одинаковы.

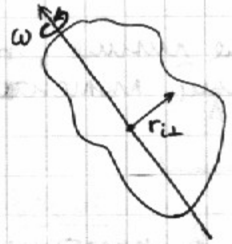
$\vec{v}_i = \vec{v}$

Вращение вокруг неподвижной оси.

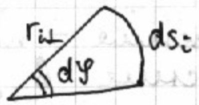
Угловая скорость вращения — величина, характ. скорость изменения ориентации тела в пр-ве.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \equiv \dot{\varphi}$$ угол пов. тела вокруг оси

$v_i = \omega r_{i\perp}$



$ds_i = r_{i\perp} d\varphi$



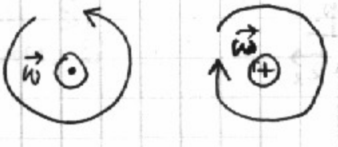
$$v_i = \frac{ds_i}{dt} = \frac{r_{i\perp} d\varphi}{dt} = r_{i\perp}\omega$$

В. вокр. неп. оси — $\forall$ т. тела движ. по окр-ти, а центры всех окр-тей лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

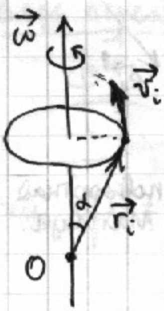
Вектор угловой скорости.

$\vec{\omega}$, $\omega = \dot{\varphi}$ (это ясно)

Направим вдоль оси вращения по правилу правого винта.



$\vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$ (векторное произведение)



$v_i = \omega r_i \sin\alpha = \omega r_{i\perp}$

Движение тела с одной неподвижной точкой.

Теорема Эйлера.

Движение т. с одной неп. точкой в $\forall$ момент времени можно рассм. как вращ. вокруг нек. оси, проходящей через точку закрепления.

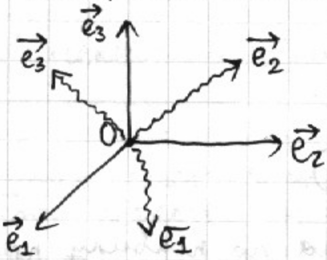
$$\vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$$

Ось вращения – прямая линия, прох. через неподвижные в данный момент точки тела.

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$$

Ориентация твердого тела в пространстве.

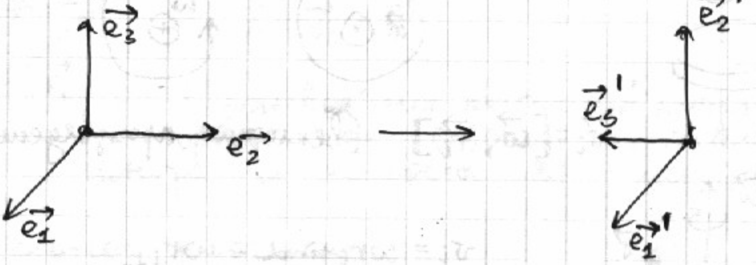
Матрицы поворота.



$$S_{ij} = \vec{e}_i \, \vec{e}_j\,'$$

скалярное произведение.

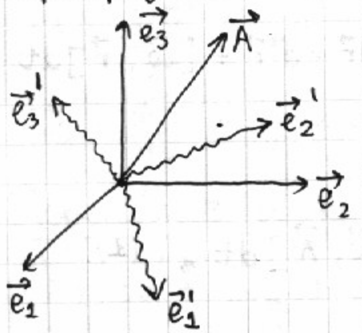
Пример.



$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

– поворотная матрица.

Преобразование координат вектора при повороте сист. к.



$$\vec{A} = \vec{e}_1 A_1 + \vec{e}_2 A_2 + \vec{e}_3 A_3 =$$
$$= \vec{e}_1^{\,\prime} A_1' + \vec{e}_2^{\,\prime} A_2' + \vec{e}_3^{\,\prime} A_3'$$

$$A_1 = \vec{e}_1 \vec{e}_1^{\,\prime} A_1' + \vec{e}_1 \vec{e}_2^{\,\prime} A_2' + \vec{e}_1 \vec{e}_3^{\,\prime} A_3' =$$
$$= S_{11} A_1' + S_{12} A_2' + S_{13} A_3' =$$
$$= \sum_{j=1}^{3} S_{1j} A_j'$$

$$\Rightarrow \quad A_i = \sum_{j=1}^{3} S_{ij} A_j' .$$

Двойной поворот.

$\hat{C} = \hat{A}\hat{B} \qquad \hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ (некомм. поворота).

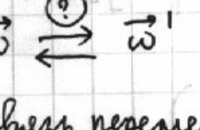
§4. Кинематика вращающихся систем отсчета.

Как связаны уск. мат. точки отн. неподвижной и вращ. системы?

S – неподв. сист. отсчета.
S' – вращ. с.о. $(\vec{\omega} = \text{const})$.
d – приращение отн. S.
d' – приращение отн. S'.

$$\vec{\omega} \underset{\longleftarrow}{\overset{?}{\longrightarrow}} \vec{\omega}'$$

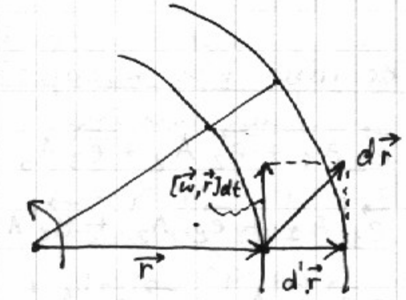
Связь перемещений.



$d\vec{r} = [\vec{\omega}, \vec{r}]\,dt$ (Следствие §3).

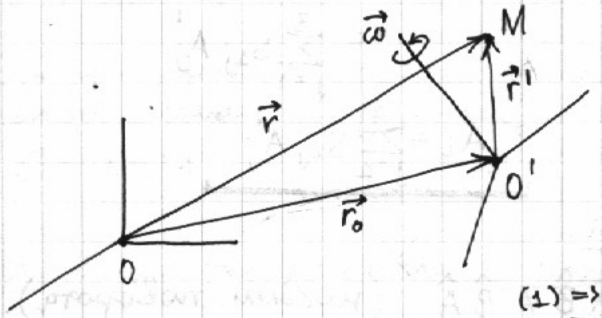
$(d'\vec{r} = 0)$.

Если $d'\vec{r} \neq 0$, то $d\vec{r} = d'\vec{r} + [\vec{\omega}, \vec{r}]\,dt$.



$$d\vec r = d'\vec r + [\vec\omega, \vec r]dt.$$

Обобщая, имеем $d\vec A = d'\vec A + [\vec\omega, \vec A]dt$. (1).



$\vec\omega = const$

$\vec r = \vec r' + \vec r_0$

$d\vec r = d\vec r' + d\vec r_0$

(1) $\Rightarrow$ $d\vec r' = d'\vec r' + [\vec\omega, \vec r']dt$

$d\vec r = d'\vec r' + [\vec\omega, \vec r']dt + d\vec r_0$

<u>Связь скоростей.</u>

$$\vec v = \vec v' + \vec v_0 + [\vec\omega, \vec r']$$

$\vec v = \dfrac{d\vec r}{dt}$ – ск-ть M отн. S

$\vec v' = \dfrac{d'\vec r'}{dt}$ – ск-ть M отн. S'

$\vec v_0 = \dfrac{d\vec r_0}{dt}$ – ск-ть движения S' отн. S.

<u>Связь ускорений.</u>

$$d\vec v = d\vec v' + d\vec v_0 + [\vec\omega, d\vec r'] \underset{\uparrow}{=} d'\vec v' + [\vec\omega, \vec v']dt + d\vec v_0 +$$

исп. соотношение (1)

$$\begin{pmatrix} d\vec r' = d'\vec r' + [\vec\omega, \vec r']dt \\ d\vec v' = d'\vec v' + [\vec\omega, \vec v']dt \end{pmatrix}$$

$$+ [\vec\omega, d'\vec r'] + [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r']]dt$$

$$\vec w = \vec w' + \vec w_0 + [\vec\omega, \vec v'] + [\vec\omega, \vec v'] + [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r']]$$

(ускорение)

Здесь $\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ — абсолютное ускорение.

$\vec{w}\,' = \frac{d'\vec{v}\,'}{dt}$ — относительное ускорение.

$\vec{w}_0 = \frac{d\vec{v}_0}{dt}$ — ускорение т. O'.

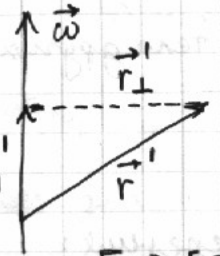
Переносное и кориолисово ускорения.

$\vec{w} = \vec{w}\,' + \vec{w}_n + \vec{w}_к$, где $\vec{w}_n = \vec{w}_0 + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}\,']]$

(переносное ускорение — уск. мат. точки, жестко связанной с вращ. сист.)

$\vec{w}_к = 2[\vec{\omega}, \vec{v}\,']$ — кориолисово ускорение.

Центростремительное ускорение.



$\vec{r}\,' = \vec{r}\,'_{\parallel} + \vec{r}\,'_{\perp}$

$= 0$ (т.к. парал.)

$[\vec{\omega}, \vec{r}\,'] = [\vec{\omega}, \vec{r}\,'_{\parallel}] + [\vec{\omega}, \vec{r}\,'_{\perp}] = [\vec{\omega}, \vec{r}\,'_{\perp}]$

$$[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}\,']] = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}\,'_{\perp}]] = \vec{\omega}\underbrace{(\vec{\omega}, \vec{r}\,'_{\perp})}_{=0} - \vec{r}\,'_{\perp}\omega^2$$

$\vec{w}_{ц.с.} = -\omega^2 \vec{r}\,'_{\perp}$

$\vec{w}_n = \vec{w}_0 + \vec{w}_{ц.с.}$

Итог: $\vec{w} = \vec{w}\,' + \vec{w}_n + \vec{w}_к$, где

$\vec{w}_n = \vec{w}_0 - \omega^2 \vec{r}\,'_{\perp}$

$\vec{w}_к = 2[\vec{\omega}, \vec{v}\,']$

$\longrightarrow$

§5. Законы Ньютона.

1. $\exists$ системы отсчета, относ. которых $\forall$ тело, беск. уд. от других тел, не испытывает ускорение. Такие сист. наз. <u>инерциальными</u>.
2. Произведение массы мат. т. на ее ускорение равно действ. на нее силе. $m\vec{w} = \vec{F}$
3. Действия 2-х тел друг на друга равны и противоположно напр. $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Ньютон утв., что этих законов вполне дост. для объяснения большинства явлений.

<u>Масса</u> — мера отклика тела на действие силы. (мера инерции, мера инертности).

<u>Сила</u> — мера действия на данное тело других тел.

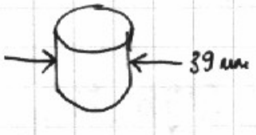
<u>Измерение сил и масс.</u>

Введем единицы измерения:

I, II

1 килограмм — масса эталонного тела, предст. собой цилиндр из сплава платины и иридия диаметром 39 мм и такой же высоты.

$m_{эт} = 1$ кг



1 Ньютон — сила, вызывающая ускорение массы в 1 кг, равное 1 м/с^2.

$$F_{эт} = 1\text{ Н} = 1\text{ кг}\cdot 1\text{ м/с}^2.$$

—ooooo— $F = 1\,Н$.

$S = \frac{w t^2}{2}$ (под действ. одной силы тело движется равноускоренно)

$\Rightarrow$ ускорение можно измерить.

А как измерить массу? $\boxed{m}$ —ooo→ $F_{эт} = 1\,Н$

$$m = \frac{F_{эт}}{w_1}$$

<u>Пример.</u>

$$w_1 = 2\,м/с^2 \rightarrow m = \frac{1\,Н}{2\,м/с^2} = 0{,}5\,кг.$$

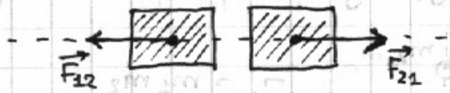
$\boxed{m_{эт}}$ —ooooo→ F (w_2) $F = m_{эт} w_2$.

1) получили $w_2 = 3\,м/с^2$ $F = 1\,кг \cdot 3\,м/с^2 = 3\,Н$.

$$w_{теор} = \frac{F}{m} = \frac{2\,Н}{0{,}5\,кг} = 6\,м/с^2.$$

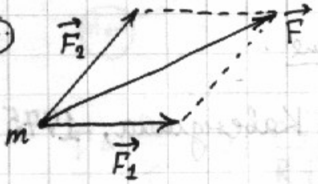
Итог: для $\forall$ сил и $\forall$ масс $w_{теор} = w_{эксп}$.

III:



<u>Свойства сил и масс.</u>

1.



$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$ (это опыт!)

2. масса — положительный скаляр.
3. масса аддитивна.

$\boxed{m_1} + \boxed{m_2} = \boxed{m_1 + m_2}$ $(v \ll c)$.

Импульс.

$\vec{p} = m\vec{v}$ (вект. хар-ка движ. мат. т., опред. как ее масса на ее скорость).

$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$

§6. Силы в механике.

Силы в природе.

1. Гравитационные.
2. Электромагнитные.
3. Сильные.
4. Слабые.

Гравитационные силы.

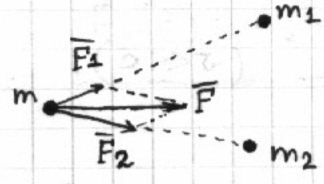
Закон всемирного тяготения:
$\forall$ 2 мат. точки притяг. с силой, пропорц. их массам и обр. пропорц. квадрату расстояния между ними.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

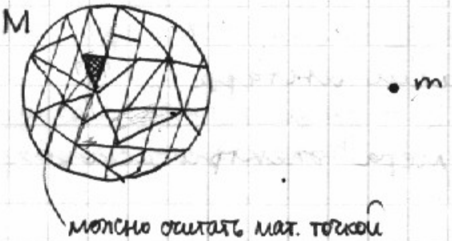
G – гравитационная постоянная.

$G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$ (опыт Кавендиша, 1775 г.)

Принцип суперпозиции:
$\forall$ пара частиц взаимодействует независимо.



Притяжение точки к шару.



Результат:
Шар притяг. точку так, как если бы вся его масса находилась в центре.

$$F = G\frac{Mm}{R^2} = mg$$

Отсюда имеем $M = \frac{gR^2}{G}$, т.е. массу Земли.

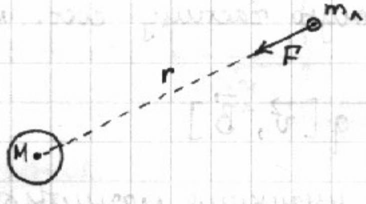
$$M_{Земля} = 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}.$$

Факты, подтверждающие закон всемирного тяготения.

1. Одинаковость g для всех тел вблизи поверхности Земли.

$$F = G\frac{Mm}{R^2} = mg \Rightarrow g = \frac{GM}{R^2} \text{ – инвариант.}$$

2. Период обращения Луны.



$$F = G\frac{Mm_л}{r^2} = m_л \omega^2 r$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{GM/r^3}$$

$$GM = gR^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{gR^2/r^3}$$

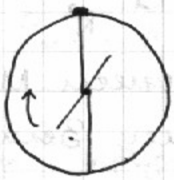
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\frac{r\sqrt{r}}{R\sqrt{g}} \qquad \begin{cases} r = 384 \cdot 10^3 \text{ км} \\ R = 6400 \text{ км} \\ g = 10 \text{ м/с}^2 \end{cases} \Rightarrow T = 30 \text{ суток.}$$

Электромагнитные силы.

Сила Кулона:

сила между кусочками янтаря .... ???

Электрический заряд – мера электрического взаимодействия тел.



Электрометр.

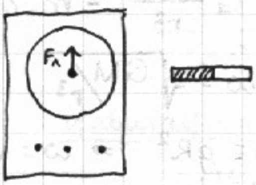
Электрическое поле – поле, созд. электр. зарядами и проявл. себя действием на электр. заряды.

Напряженность электрического поля – мера действия электрического поля на заряд.

Н.э.п.: $\vec{E} \stackrel{df}{=} \dfrac{\vec{F}}{q}$ $\qquad$ $\vec{F} = q\vec{E}$ – это и есть сила Кулона.

Сила Лоренца:

Сила, действ. на заряженную частицу сост. магнитом.



$\vec{F}_л = q[\vec{v}, \vec{B}]$

$\vec{B}$ – индукция магнитного поля.

Полная сила.

$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$ (также наз. силой Лоренца)

Сила, действ. на заряженную частицу в эл.-магн. поле.

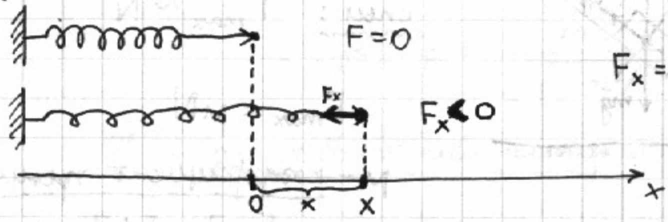
Силы упругости.

Сила, препятствующая деформации упругих тел.

Упругая деформация – д., исчезающая после прекращения действия силы.

Закон Гука:

Сила упругости пропорциональна увеличению деформации.

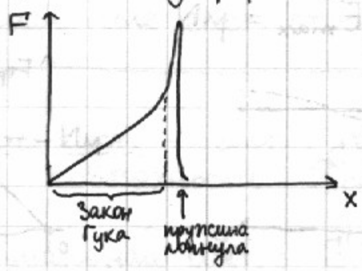


$$F_x = -kx$$

k – коэффициент упругости пружины.

$$[k] = Н/м.$$

Закон верен, если деформация не слишком велика:



Силы трения.

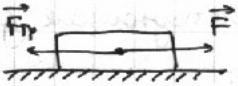
Сила трения – сила, препятств. отн. перемещению соприкасающихся тел.

Трение

- Сухое трение
  - Трение покоя
  - Трение скольжения
- Вязкое трение

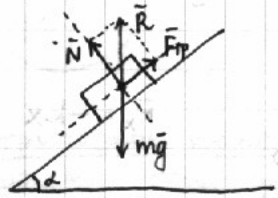
Трение покоя – трение в отсутствие перемещения тел друг отн. друга.

$$\vec{F}_{тр} = -\vec{F}$$



опыт: $F_{тр} \le F_{max}$.

Сила нормального давления – составляющая силы взаим. тел, перпенд. поверхности соприкосновения.



опыт: $F_{max} \sim N$

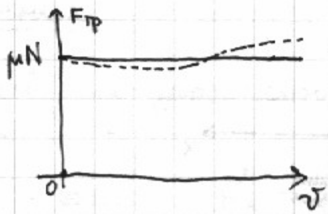
$$F_{max} = \mu N$$

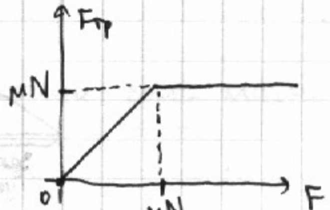
μ – коэффициент трения.

$[\mu] = [1]$.

Трение скольжения – трение при наличии относ. перемещения соприкас. тел.

опыт: $F_{тр} = F_{max} = \mu N$



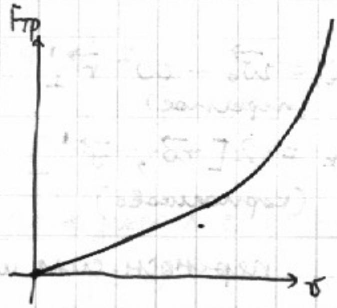


Вязкое трение – трение, препятств. движению тел в сплошной среде.

опыт: $F_{тр} = F_{тр}(v)$

опыт: $F_{тр} \sim v$, v мало $F_{тр}(v=0)=0$.

$F_{тр} \sim v^2$, v велико



Релятивистское уравнение движения.

Обобщение закона Ньютона на случай $v \sim c$.

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F} \quad , \text{ где } \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} .$$

$\vec{p}$ – релятивистский импульс.

В правой части уравнения – сила Лоренца (а как в случае гравитации? Идут споры).

§7. Неинерциальные сист. отсчета. Силы инерции.

Не Инерциальные сист. – сист., двиг. с большим уск. относительно поверхности Земли.

S – инерциальная сист.; S' – неинерциальная сист.

Ускорение мат. т.: $\vec{w}$ отн. S, $\vec{w}\,'$ отн. S'

$$m\vec{w} = \vec{F} \qquad m\vec{w} + m\vec{w}\,' - m\vec{w}\,' = \vec{F}$$

$$m\vec{w}\,' = \vec{F} - m(\vec{w} - \vec{w}\,') = \vec{F} + \vec{F}_{ин.} ,$$

где $\vec{F}_{ин.} = -m(\vec{w} - \vec{w}\,')$ – сила инерции.

Сила инерции – добавочная сила, действ. в неинерц. сист. отсчета и опред. указ. формулой.

$\vec{w} - \vec{w}' = \vec{w}_n + \vec{w}_k$, где $\vec{w}_n = \vec{w}_0 - \omega^2 \vec{r}'_\perp$ (переносное)

$\vec{w}_k = 2[\vec{\omega}, \vec{v}']$ (кориолисово).

$\Rightarrow \vec{F}_{ин} = \vec{F}_n + \vec{F}_k$

, где $\vec{F}_n = -m\vec{w}_0 + m\omega^2 \vec{r}'_\perp$ — переносн. сила инерции

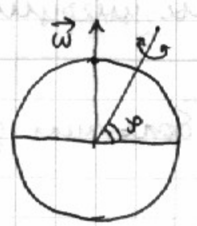
$\vec{F}_k = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}']$ — кориолисова сила инерции

$\vec{F} = m\omega^2 \vec{r}'_\perp$ — центробежн. сила инерции.

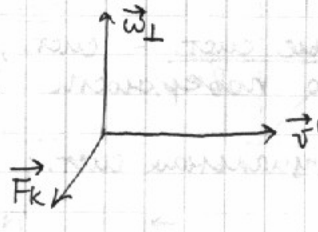
Свойства сил инерции.

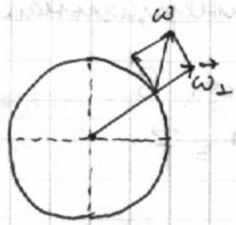
1) Силы инерции отличны от нуля только для наблюдателя, связанного с неинерциальной сист. отсчета.
2) Нельзя указать тело, со стороны кот. приложена сила инерции (с. инерц. не подчиняется 3-му закону Ньютона).

Пример: маятник Фуко.

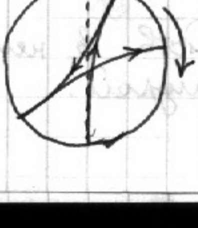


$$\vec{F}_k = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}'] = -2m[\vec{\omega}_\perp, \vec{v}']$$





[В сев. полушарии сила Кориолиса всегда напр. вправо по ходу движения!



— док-во вращения Земли.

§8. Импульс системы частиц. Движение центра масс.

<u>Импульсом системы</u> наз. сумма импульсов ч-ц.

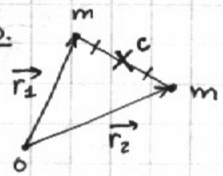
$\vec{p} = m\vec{v}$ — импульс м.т.

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

<u>Центр масс сист. ч-ц</u> наз. вообр. точка, радиус-вектор кот. определяется формулой:

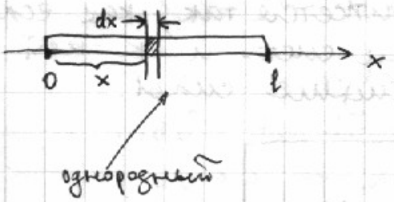
$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

<u>Пример.</u>



$$\vec{r}_c = \frac{m\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{2m} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$$

<u>Пример.</u> (стержень)



$$x_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i x_i$$

$m_i \to dm = \frac{m}{l} dx, \quad x_i \to x$

$$x_c = \frac{1}{m} \int_0^l x \frac{m}{l} dx = \frac{1}{l} \int_0^l x\,dx = \frac{l}{2}$$

<u>Определение.</u>

<u>Скорость центра масс</u>: $\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c$.

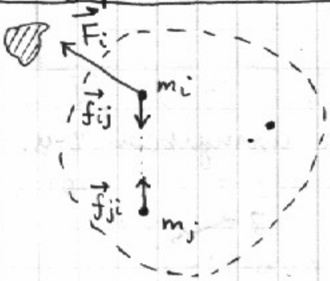
<u>Ускорение центра масс</u>: $\vec{w}_c = \dot{\vec{v}}_c = \ddot{\vec{r}}_c$.

$$\vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{w}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{w}_i$$

$\Rightarrow \forall$ сист. ч-ц $\underbrace{\vec{p}}_{\text{полный импульс}} = \underbrace{m}_{\text{полная масса}} \underbrace{\vec{v}_c}_{\text{скорость центра масс}}$

Внутренние и внешние силы.



Внутр. силы – силы взаимод. между ч-цами системы.

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji} \quad \text{(по III з. Ньютона)}$$

$$\sum_{i,j} \vec{f}_{ij} = 0.$$

Внешние силы – силы, действ. на тела системы со стороны тел, не вход. в данную систему.

$$m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{f}_{ij} \qquad \sum_i m_i \vec{w}_i = \sum_i \vec{F}_i + \underbrace{\sum_i \sum_j \vec{f}_{ij}}_{=0} \stackrel{df}{=} \vec{F}_{вн}.$$

$$\vec{w}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{w}_i$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{m\vec{w}_c = \vec{F}_{вн}}$$

$\Rightarrow$ Центр масс сист. ч-ц движется так, как если бы в этой т. нах. вся масса сист. и к ней были бы приложены все внешние силы.

§9. Закон сохранения импульса.

$$\dot{\vec{p}} = \sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_i m_i \vec{w}_i = m\vec{w}_c = \vec{F}_{вн}$$

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}_{вн}. \quad \text{– закон изменение импульса.}$$

Если $\vec{F}_{вн} = 0$, то $\vec{p} = \text{const}$.

$$\sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const}.$$

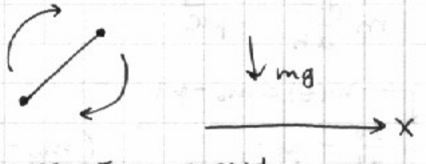
А в это время в Т. относительности...

Если $\vec{F}_{внеш} = 0$, то $\vec{p} = \sum\limits_i \dfrac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = const$

релятивистский импульс системы частиц

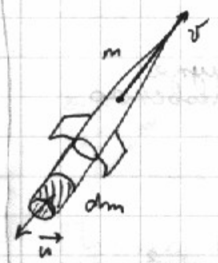
Если $\exists$ такая ось, в проекц. на кот. Σ внеш. сил равна 0, то в направлении этой оси импульс системы сохраняется.

Пример:



$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = const$$

Реактивное движение.



$$dt \leftrightarrow dm$$

$$\begin{cases} m\vec{v} = (m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + \vec{u}\, dm \\ \vec{u} = \vec{v} + \vec{c} \end{cases}$$

$\vec{c}$ — скорость струи отн. ракеты.

$$m\vec{v} = m\vec{v} + m\,d\vec{v} - \vec{v}\,dm - dm\,d\vec{v} + \vec{v}\,dm + \vec{c}\,dm$$

$$m\,d\vec{v} - dm\,d\vec{v} + \vec{c}\,dm = 0$$

$$dt \to 0 \Rightarrow dm \to 0, \; d\vec{v} \to 0$$

$$m\,d\vec{v} = -\vec{c}\,dm \qquad m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{c}\,\frac{dm}{dt}$$

$$\vec{F}_p = -\vec{c}\mu, \text{ где } \mu = \frac{dm}{dt}$$

скорость расхода массы

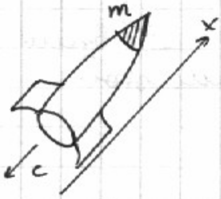
Уравнение Мещерского.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu\vec{c} + m\vec{g}$$

Пример. (ракета "Энергия")

$\mu = 10$ т/с $\quad c = 3$ км/с $\qquad F_p = \mu c = 3\cdot 10^7$ Н $\approx$ 3000 тонн (!)

Стартовая масса ракеты.



$$\begin{array}{c|} m,\ v,\ c \\ \hline m_0 = ? \end{array}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu\vec{c}$$

$$m(t) = m_0 - \mu(t - t_0)$$

$$x:\quad m\frac{dv}{dt} = \mu c \qquad\qquad (m_0 - \mu t)\frac{dv}{dt} = \mu c$$

$$\int_{t_0}^{t}\frac{\mu\,dt}{m_0 - \mu t} = -\ln\frac{m}{m_0} = \ln\frac{m_0}{m} = \frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{m_0}{m} = e^{v/c} \quad\rightarrow\quad \boxed{m_0 = m e^{v/c}}$$ формула Циолковского.

Пример. (ракета "Энергия")

$v = 8$ км/с, $\quad m = 100$ т $\quad\Rightarrow\quad m_0 = 100\text{ т}\cdot e^3 = 2000$ т.

$c = 2{,}7$ км/с

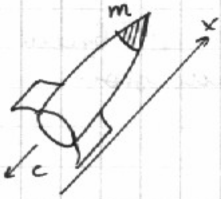
Фотонная ракета.

$c = 3\cdot 10^8$ м/с

Пример. (ракета "Энергия")

$\mu = 10$ т/с $\quad c = 3$ км/с $\quad F_p = \mu c = 3\cdot 10^7$ Н ≈ 3000 тонн. (!)

Стартовая масса ракеты.



$$\begin{array}{c|} m,\ v,\ c \\ \hline m_0 = ? \end{array}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu\vec{c}$$

$$m(t) = m_0 - \mu(t - t_0)$$

$$x:\ m\frac{dv}{dt} = \mu c \qquad (m_0 - \mu t)\frac{dv}{dt} = \mu c$$

$$\int_{t_0}^{t}\frac{\mu dt}{m_0 - \mu t} = -\ln\frac{m}{m_0} = \ln\frac{m_0}{m} = \frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{m_0}{m} = e^{v/c} \rightarrow \boxed{m_0 = m e^{v/c}}$$ формула Циолковского.

Пример. (ракета "Энергия")

$v = 8$ км/с, $\quad m = 100$ т $\Rightarrow m_0 = 100\text{ т}\cdot e^3 = 2000$ т.
$c = 2{,}7$ км/с

Фотонная ракета.

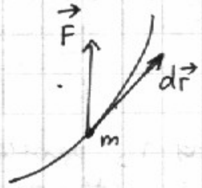
$c = 3\cdot 10^8$ м/с

§10. Работа и потенциальная энергия.

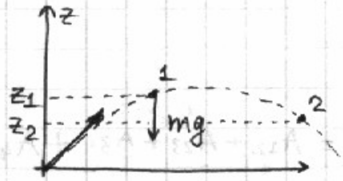
Эл. работой наз. скал. произвед. силы на беск. малое перемещение в точке приложения силы.

[$dA = (\vec{F}, d\vec{r}) = \vec{F} d\vec{r}$. Работа $A = \int dA$.

$[A] = Н \cdot м = Дж$ ("джоуль").



__Пример.__ (работа силы тяжести)

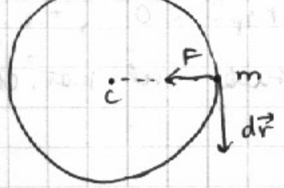


$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F_z dz = -mg\, dz$$

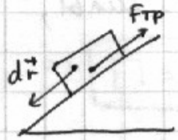
$$A = \int_{z_1}^{z_2} dA = -mg \int_{z_1}^{z_2} = mg(z_1 - z_2).$$

__Пример.__ (работа центрострем. силы)

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = 0 \Rightarrow \underline{A = 0}. \quad (???A = c???)$$



__Пример.__ (работа силы трения)



$$dA = \vec{F} d\vec{r} < 0 \Rightarrow \underline{A_{тр} < 0}.$$

Силовое поле.

Если сила, действ. на мат. т., зависит только от коорд. точки (но не завис. от ее скорости), то ф-ция $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ наз. силовым полем.

Примеры: сила тяжести, сила Кулона, сила упругости.

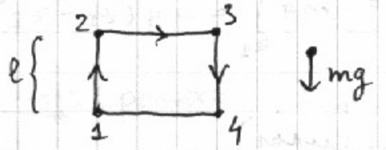
Ясно, что сила трения не образует с. п.

Потенциальное силовое поле.

Если работа силы, действ. на мат. т., равна 0 при перемещении этой точки по $\forall$ замкн. контуру, то сила наз. потенциальной.

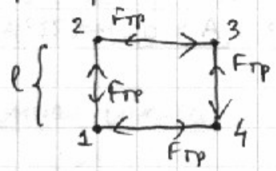
$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0.$$

Пример: сила тяжести



$$\oint dA = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = -mgl + mgl = 0.$$

Пример: сила трение



$\oint dA = -4F_{тр}l < 0$, т.е. с. трения – не пот. сила.

Потенциальная энергия.

Элем. пот. энергия – элем. работа пот. силы, взятая с минусом.

$$d\Pi = -dA_п$$

Пот. энергия: $\Pi = \int d\Pi$

$[\Pi] = [A] = Дж.$

Выражение силы через пот. энергию.

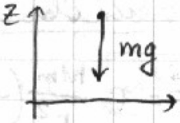
$$d\Pi = -dA = -\vec{F}d\vec{r} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) =$$
$$= \frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz$$

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x};\ F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y};\ F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} \qquad \Pi = \Pi(\vec{r}) \to \vec{F}(\vec{r})$$

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}\,\Pi \qquad \left(\mathrm{grad} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

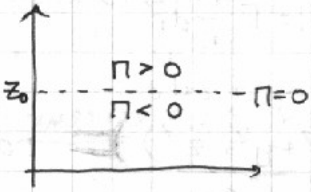
Пример. (однородное силовое поле)

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F} = \mathrm{const} \qquad \oint \vec{F}d\vec{r} = \vec{F}\oint d\vec{r} = 0.$$



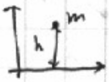
$$d\Pi = -dA = -\vec{F}d\vec{r} = -m\vec{g}\,d\vec{r} = mg\,dz.$$
$$\Pi = \int d\Pi = mg\int_{z_0}^{z} dz = mg(z - z_0)$$

уровень начала отсчета потенциальной энергии.



Если $z_0 = 0$

$$\Pi = mgz = \underline{\underline{mgh}}.$$



Потенциальная энергия системы частиц.

$$\Pi = \sum_i \Pi_i$$

ex. (поле силы тяжести:

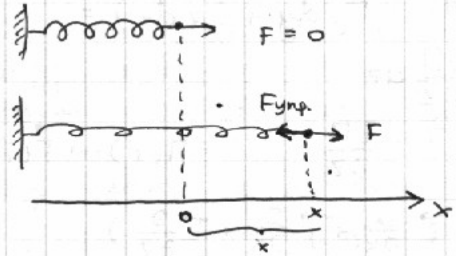
$$\Pi_i = m_i g(z_i - z_0)$$
$$\Pi = \sum_i \Pi_i = \sum_i m_i g z_i - g z_0 \sum_i m_i =$$
$$= g\sum_i m_i z_i - mgz_0,$$
$$, m = \sum_i m_i$$

$$\left(\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{r}_i\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi = mg(z_c - z_0)}$$

ц. масс

Потенциальная энергия пружины.



$$d\Pi = -\vec F d\vec r = -F_x dx$$

$F_x = -kx$ (закон Гука)

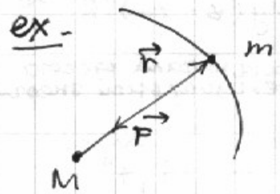
$$d\Pi = kx\,dx$$

$$\Pi = \int d\Pi = k\int_0^x x\,dx = \frac{kx^2}{2}.$$

Центральное силовое поле.

Поле силы, направленной всегда в сторону одной и той же неп. т., наз. **силовым центром**.

ex.



$$d\Pi = -dA = -\vec F d\vec r, \quad \vec F = G\frac{Mm}{r^2}\left(-\frac{\vec r}{r}\right)$$

$$d\Pi = F\frac{\vec r}{r}d\vec r$$

$$\left(\vec r d\vec r = x\,dx + y\,dy + z\,dz = \frac{1}{2}d(\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{r^2}) = r\,dr\right)$$

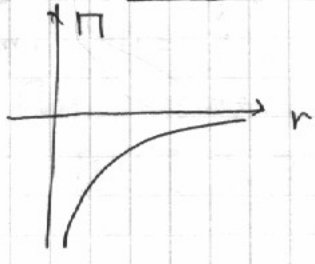
$$\Rightarrow d\Pi = F\frac{r\,dr}{r} = F\,dr \qquad F = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$d\Pi = GMm\frac{dr}{r^2} \qquad \Pi = \int d\Pi = GMm\int\frac{dr}{r^2} =$$

$$= GMm\int_{r_0}^{r} d\left(-\frac{1}{r}\right) = GMm\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right).$$

Положим $r_0 = \infty$.

Тогда $\Pi(r) = -\frac{GMm}{r}$.



§11. Кинетическая энергия. Закон сохранения энергии в механике.

Кин. энергия мат. т. $K = \frac{mv^2}{2}$. $[K] = Дж$.

Закон изменения кин. энергии.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \qquad m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} = \vec{F}d\vec{r} = dA$$

$$m\frac{d\vec{r}}{dt}d\vec{v} = m\vec{v}d\vec{v} = mv\,dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dK$$

Т.о., $\boxed{dK = dA}$ (Теорема об изменении кинетической энергии).

„Изменение кин. энергии в точке равно работе действ. на нее сил."

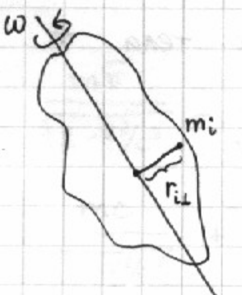
Кинетическая энергия системы частиц (тела).

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}, \qquad [K] = Дж.$$

Поступательное движение тела.

$$\vec{v}_i = \vec{v}, \quad K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{v^2}{2}\sum_i m_i = \frac{mv^2}{2}$$

Вращение тела вокруг неп. оси.



$v_i = \omega r_{i\perp}$

(§3)

$$K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

Момент инерции тела (отн. оси)

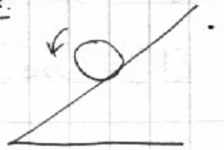
$$I \overset{df}{=} \sum_i m_i r_{i\perp}^2 \qquad [I] = кг \cdot м^2$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{I\omega^2}{2}}$$

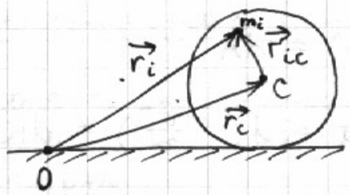
Плоское движение твердого тела.

$\forall$ т. тела движутся $\parallel$ нек. неп. пл-ти.

ex.



– плоское движение.



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$$
$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}$$

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_i \vec{v}_i = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{v}_c + \vec{v}_{ic})(\vec{v}_c + \vec{v}_{ic}) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(m v_c^2 + 2\vec{v}_c \sum_i m_i \vec{v}_{ic} + \sum_i m_i v_{ic}^2\right) =$$
$$= \left[\sum_i m_i \vec{v}_{ic} = \sum_i m_i(\vec{v}_i - \vec{v}_c) = \sum_i m_i \vec{v}_i - \vec{v}_c m = 0\right] =$$
$$= \frac{m v_c^2}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i m_i v_{ic}^2}_{\frac{1}{2} I\omega^2 \ (I = I_c)}$$

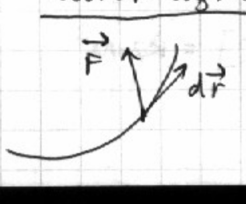
Итак, $\boxed{K = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad (I = I_c)}$ (Теорема Кёнига).

„Полная энергия тела есть эн. движ. тела + + эн. движ. отн. тела".

Полная механическая энергия мат. т.

$$E \overset{df}{=} K + \Pi$$

Закон изм. полной энергии.



$$\vec{F} = \vec{F}_{\Pi} + \vec{F}_{H\Pi} \qquad dK = dA$$

$$dA = \vec{F}\,d\vec{r} = \vec{F}_п\,d\vec{r} + \vec{F}_{нп}\,d\vec{r} = dA_п + dA_{нп}$$

$$dK = dA_п + dA_{нп} = [d\Pi = -dA_п] = -d\Pi + dA_{нп}$$

$$\Rightarrow d(K+\Pi) = dA_{нп}. \quad \Rightarrow \quad \underline{dE = dA_{нп}}$$

Т.о., „изменение полной энергии равно работе непотенциальных сил"
(Теорема об изменении полной энергии.)

<u>Закон сохранения.</u>

Если работа непот. сил $= 0$, то полн. мех. энергия системы сохраняется.

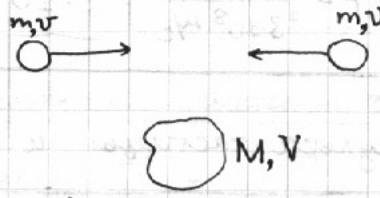
<u>Закон сохр. в теории относ.</u>

Если $\vec{F}_{внеш.} = 0$, то <u>релятивистская энергия</u> сохраняется:

$$E \overset{df}{=} \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = const$$

Этот закон является следствием з. сохр. имп. и принципа относительности

<u>Пример</u>. неупругий удар



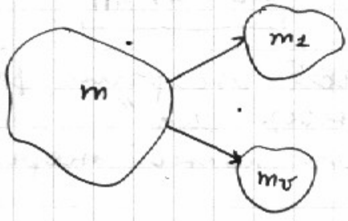
$$\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{M\vec{V}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \Rightarrow \vec{V} = 0$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} > 2m \quad (!) \quad (\text{при } v \neq 0)$$

Факты, подтверждающие Т. относительности.

1) деление ядер урана



<u>Опыт</u>: $E = c^2(m - m_1 - m_2)$

2) световое давление

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$E\vec{v} = \vec{p}c^2$$
$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$$

$\exists\, m = 0 \Rightarrow E = pc,\ v = c$ — фотон.

Сила светового давления

$$F = \dot{p} = \dot{E}/c = \mathcal{P}/c \qquad \mathcal{P} \text{ — мощность света}$$

<u>Пример</u>:

$\mathcal{P} = 10^3$ Вт $\qquad F = \dfrac{10^3 \text{ Вт}}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} = \underline{3 \cdot 10^{-6} \text{ Н}}.$

§12. Момент импульса частицы и системы частиц.

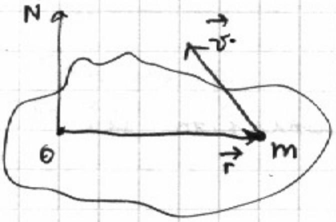
<u>Момент силы.</u>

Момент силы

- относительно точки
- относительно оси

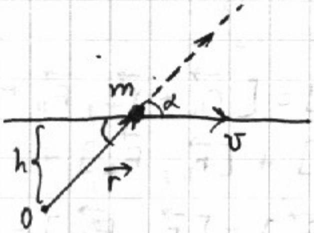
Момент имп. ч-цы отн. точки.

$$\vec{N} \overset{df}{=} [\vec{r}, \vec{p}\,] = [\vec{r}, m\vec{v}\,]$$



$N = r\, m v \sin\alpha$

$r \sin\alpha = R$



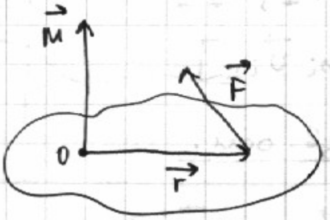
$N = m v R$

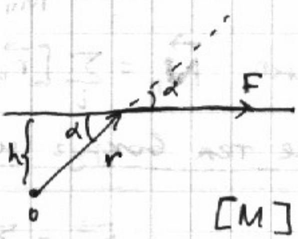
$[N] = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$

Момент силы.

$$\vec{M} \overset{df}{=} [\vec{r}, \vec{F}\,]$$

$M = rF \sin\alpha.$





$r \sin\alpha = R$

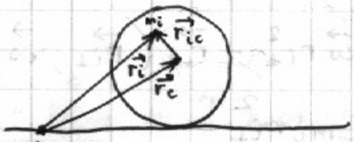
R - плечо силы

$[M] = \text{Н} \cdot \text{м}$

Момент импульса системы частиц (тела).

Определение. $\vec{N} = \sum\limits_i \vec{N}_i \qquad \vec{N} = \sum\limits_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$

Пример.



$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$

$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}$

$\vec{N} = \sum\limits_i m_i [\vec{r}_c + \vec{r}_{ic}, \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}] =$

$= [\vec{r}_c, m\vec{v}_c] + \underbrace{[\vec{r}_c, \sum\limits_i m_i \vec{v}_{ic}]}_{=0} + \underbrace{[\sum\limits_i m_i \vec{r}_{ic}, \vec{v}_c]}_{=0} + \sum\limits_i [\vec{r}_{ic}, m_i \vec{v}_{ic}]$

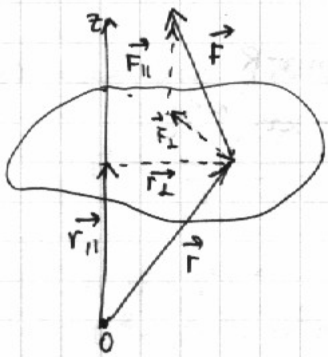
$\vec{N} = \vec{N}_c + \vec{N}_{0,c}$

$$\vec{N}_c = [\vec{r}_c, m\vec{v}_c]$$

$$\vec{N}_{oc} = \sum_i [\vec{r}_{ic}, m_i \vec{v}_{ic}]$$

Моменты относ. оси.

<u>М.о.о.</u> наз. проекция в-ра момента на эту ось.



$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$$

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = [\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}] =$$

$$= [\vec{r}_{\parallel}, \vec{F}_{\parallel}] + [\vec{r}_{\parallel}, \vec{F}_{\perp}] +$$

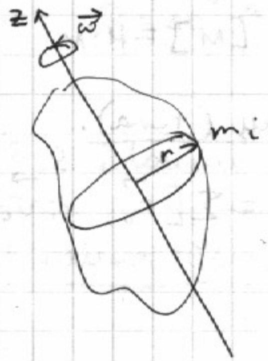
$$+ [\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\parallel}] + [\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}] =$$

$$= \vec{M}_{\perp} + \vec{M}_{\parallel}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_{\parallel} = [\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}]$$

Аналогично, $\vec{N}_{\parallel} = \sum_i [\vec{r}_{i\perp}, m_i \vec{v}_{i\perp}]$

Вращение тел вокруг неподв. оси.



$$\vec{N}_{\parallel} = \sum_i [\vec{r}_{i\perp}, m_i \vec{v}_{i\perp}]$$

$$\vec{v}_{i\perp} = \vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]$$

(§3)

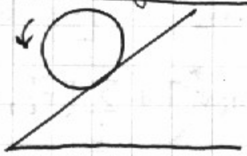
$$\vec{N}_{\parallel} = \sum_i m_i [\vec{r}_{i\perp}, [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]] =$$

$$= \sum_i m_i \{\vec{\omega} r_{i\perp}^2 - \vec{r}_{i\perp}(\vec{r}_{i\perp}, \vec{\omega})\}$$

$$\vec{N}_{\parallel} = \vec{\omega} \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

$$\boxed{\vec{N}_{\parallel} = I\vec{\omega}} \qquad N_z = I\omega_z$$

Плоское движение твердого тела.



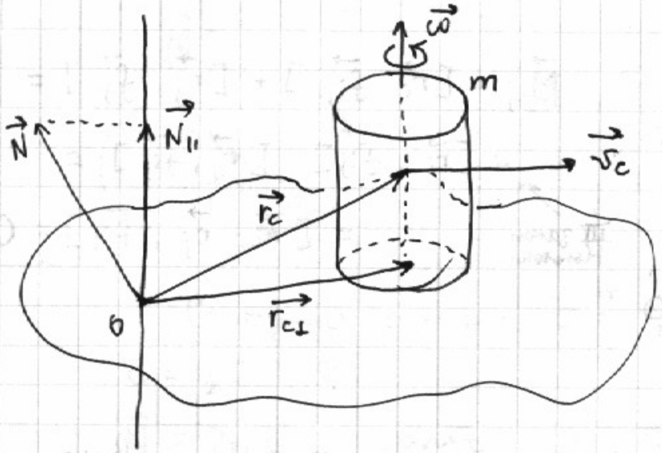
$$\vec{N} = \vec{N}_c + \vec{N}_{o.c.}$$

$$\vec{N}_{\parallel} = \vec{N}_{c\parallel} + \vec{N}_{o.c.\parallel} \qquad \vec{N}_{c\parallel} = [\vec{r}_{c\perp}, m\vec{v}_c]$$

Отн. центра тело совершает вращение как вокруг неподв. оси.

$$\vec{N}_{o.c\parallel} = I\vec{\omega} \qquad (I = I_c)$$

$$\vec{N}_{\parallel} = [\vec{r}_{c\perp}, m\vec{v}_c] + I\vec{\omega}$$



§13. Т. о моментах. Закон сохр. момента импульса.

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] \qquad \dot{\vec{N}} = \underbrace{[\dot{\vec{r}}, m\vec{v}]}_{=0} + [\vec{r}, m\dot{\vec{v}}] = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}$$

$(\text{т.к. } \dot{\vec{r}} = \vec{v})$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{N}} = \vec{M}}$$ – Т. моментов.

Скорость изм. момента имп. мат. точки равна моменту действ. на нее силы.

Система частиц.

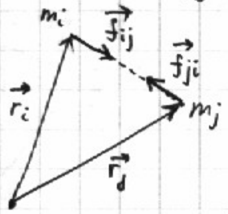
$$\vec{N} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i] \qquad \dot{\vec{N}} = \overbrace{\sum_i [\dot{\vec{r}}_i, m_i\vec{v}_i]}^{0} + \sum_i [\vec{r}_i, m_i\dot{\vec{v}}_i] =$$

$$= \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i + \sum_j \vec{f}_{ij}]$$

$$\dot{\vec{N}} = \vec{M}_{\text{внеш.}} + \vec{M}_{\text{внутр.}}$$

$$\vec{M}_{\text{внеш.}} = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$$

$$\vec{M}_{\text{внутр.}} = \sum_{i,j}\sum [\vec{r}_i, \vec{f}_{ij}]$$



$$\vec{M}_{ij} = [\vec{r}_i, \vec{f}_{ij}] + [\vec{r}_j, \vec{f}_{ji}] =$$

$$= [\vec{r}_i, \vec{f}_{ij}] - [\vec{r}_j, \vec{f}_{ij}] =$$

III закон Ньютона

$$= [\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{f}_{ij}] = 0.$$

$$\Rightarrow \vec{M}_{\text{внутр.}} = 0$$

$$\boxed{\dot{\vec{N}} = \vec{M}_{\text{внеш.}}}$$

Скорость изм. момента имп. сист. ч-ц равна сумме моментов внешних сил.

Закон сохранение момента импульса.

Если сумма мом. внеш. сил $= 0$, то момент имп. системы сохр.

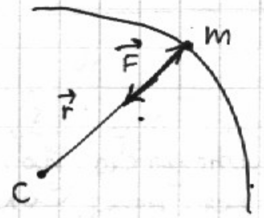
(Если $\vec{M}_{\text{внеш.}} = 0$, то $\vec{N} = \text{const}$.)

Сильнее.

Если $\exists$ такая ось, относ. кот. Σ мом. внеш. сил $= 0$, то относ. этой оси мом. импульса системы сохраняется.

(Если $M^{(z)}_{\text{внеш.}} = 0$, то $N^{(z)} = \text{const}$.)

<u>Пример</u>. (движение ч-цы в центральном сил. поле)



$\vec M = [\vec r, \vec F] = 0$

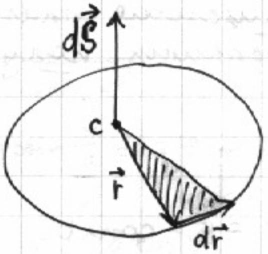
$\vec N = [\vec r, m\vec v] = const$

$\Rightarrow$ 1) движение плоское;

2) секторная скорость сохраняется.

<u>Опр</u>. Секторная площадь.

$$d\vec S = \frac{1}{2}[\vec r, d\vec r]$$

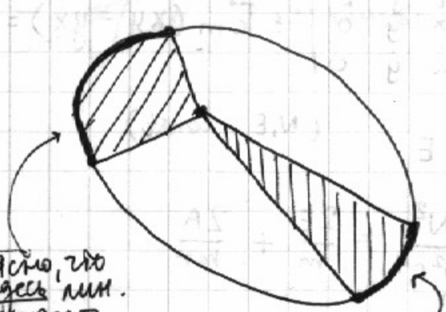


Секторная скорость: $\vec \sigma \overset{df}{=} \dfrac{d\vec S}{dt}$.

$\vec \sigma = \frac{1}{2}[\vec r, \vec v]$

$\vec N = 2m\vec \sigma = const \Rightarrow \vec \sigma = const$.

За равные промеж. врем. рад.-вектор ч-цы очерчивает равные площади.



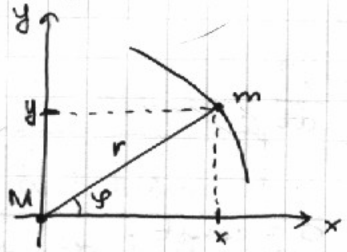
Ясно, что
здесь мин.
скорость
здесь быстрее, чем <u>здесь</u>

§14. Материальная точка в центральном поле.

Законы Кеплера.

1. Планеты солн. системы движутся по эллипсам, в общ. фокусе кот. нах. Солнце.
2. За равные промежутки времени радиус-вектор планеты очерчивает равные площади.
3. Квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их эллиптических орбит.

Вывод З. К. 1.



З.С.Э. $K + \Pi = E = const$

З.С.М.И. $\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] = const$

момент

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases}$$

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

$$\Pi = -\frac{GMm}{r} = \frac{-A}{r}, \quad A \overset{df}{=} GMm.$$

$$\vec{N} = m[\vec{r}, \vec{v}] = m\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}m(x\dot{y} - y\dot{x}) = \vec{k}mr^2\dot{\varphi}.$$

$$\begin{cases} N = mr^2\dot{\varphi} \\ \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{A}{r} = E \end{cases} \qquad (N, E - const)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{N}{mr^2} \qquad \dot{r}^2 + r^2\frac{N^2}{m^2r^4} = \frac{2E}{m} + \frac{2A}{mr}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2A}{mr} - \frac{N^2}{m^2r^2}} = \frac{dr}{dt} \\ \dot{\varphi} = \frac{N}{mr^2} = \frac{d\varphi}{dt} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{mr^2}{N}\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2A}{mr} - \frac{N^2}{m^2r^2}} = \pm r^2\sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2 r} - \frac{1}{r^2}}.$$

$$\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2 r} - \frac{1}{r^2}}} = \pm d\varphi \qquad s \overset{df}{=} \frac{1}{r} \qquad ds = -\frac{1}{r^2}\,dr$$

$$\frac{ds}{\sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2}s - s^2}} = \mp d\varphi$$

$$\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2}s - s^2 = \underbrace{\frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2A^2}{N^4}}_{a^2} - (\underbrace{s - \frac{mA}{N^2}}_{x})^2 = a^2 - x^2$$

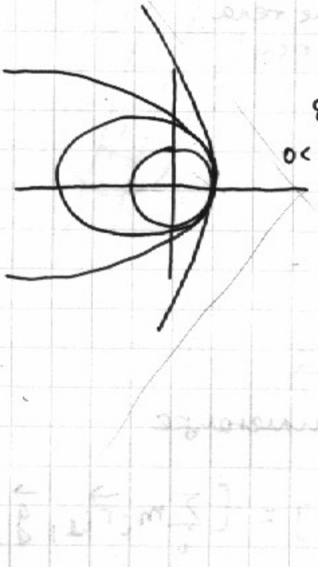
$$\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mp d\varphi \quad \Rightarrow \quad d\left(\arcsin\frac{x}{a}\right) = d(\mp\varphi)$$

$\arcsin\frac{x}{a} = \mp\varphi + \text{const}$ В частности, $\arcsin\frac{x}{a} = \frac{\pi}{2} - \varphi$ (нек. нач. условие).

$$\Rightarrow x = a\cos\varphi \quad \Rightarrow r = \frac{1}{a\cos\varphi + \frac{mA}{N^2}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}, \text{ где } p = \frac{N^2}{mA}, \; A = GMm$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2N^2E}{mA^2}}$$



$\varepsilon = 0$ окр-ть

$0 < \varepsilon < 1$ эллипс

$\varepsilon = 1$ парабола

$\varepsilon > 1$ гипербола

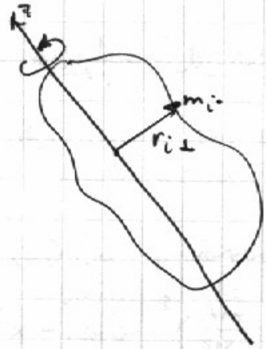
$E = 0 \Rightarrow$ парабола

$E > 0 \Rightarrow$ гипербола

$E < 0 \Rightarrow$ движение по замкн. траектории.

→

§15. Плоское движение твердого тела.



§12 => $\vec{N}_{\parallel} = I\vec{\omega}$,

где $I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$ —

— момент инерции тел относительно данной оси.

$$N_z = I\omega_z$$

§13 => $\dot{\vec{N}} = \vec{M}_{внеш} \equiv \vec{M}$

$$\dot{N}_z = M_z$$

$I\dot{\omega}_t = M_t$

угловое ускорение вращения тела

$[\dot{\omega}_z] = рад/с^2$

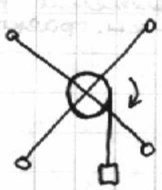
Вектор углового ускорения.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Тогда $\dot{\omega}_z = \varepsilon_z = \ddot{\varphi}$.

$\boxed{I\varepsilon_z = M_z}$ — ур-ие вращения тела вокруг неподв. оси.

Опытная проверка.



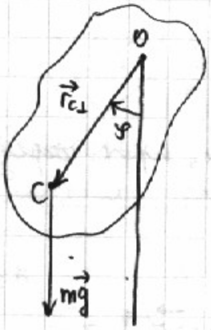
Физ. маятник — тело произв., имеющее гориз. ось вращения.

$$\vec{M}_{\parallel} = \sum_i [\vec{r}_{i\perp}, m_i\vec{g}] = \left[\sum_i m_i\vec{r}_{i\perp}, \vec{g}\right] =$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i\vec{r}_i, \quad m = \sum_i m_i.$$

② $[\vec{r}_{c\perp}, m\vec{g}]$

$\Rightarrow$ Сумм. момент сил тяжести таков, как если бы вся масса тела нах. в его центре масс.



$z \oplus$

$\vec{M} \odot$

$$I\varepsilon_z = M_z$$

$$M_z = -|\vec{M}_{\parallel}| = -\underbrace{|\vec{r}_{c\perp}|}_{\ell} \cdot mg \sin\varphi$$

$$M_z = -mg\ell \sin\varphi$$

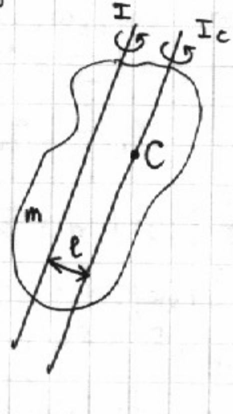
$$\varepsilon_z = \dot{\omega}_z, \quad \omega_z = \dot{\varphi}$$

$$\varepsilon_z = \ddot{\varphi}$$

$$I\ddot{\varphi} = -mg\ell\sin\varphi \qquad \underline{I\ddot{\varphi} + mg\ell\sin\varphi = 0}$$

Теорема Гюйгенса-Штейнера.

Момент инерции тела отн. произв. оси равен мом. ин. отн. оси, прох. через ц. масс тела и параллельной данной + масса тела, умнож. на квадрат расстояние между осями.



$$I = I_c + m\ell^2$$

$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 \qquad \vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$$

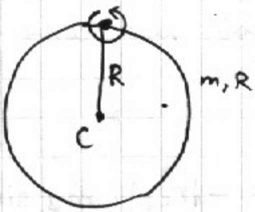
$$\vec{r}_{i\perp} = \vec{r}_{c\perp} + \vec{r}_{ic\perp}$$

$$I = \sum_i m_i (\vec{r}_{c\perp} + \vec{r}_{ic\perp})(\vec{r}_{c\perp} + \vec{r}_{ic\perp}) =$$

$$= m\ell^2 + I_c + 2\vec{r}_{c\perp}\underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_{ic\perp}}_{=0}$$

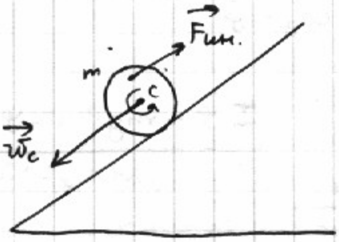
$$\left(\text{т.к. } \sum_i m_i \vec{r}_{ic} = \sum_i m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_c) = \sum_i m_i \vec{r}_i - m\vec{r}_c = 0\right)$$

Пример. (применение т. Г.-Ш. к обручу)



$$I = I_c + mR^2$$
$$I_c = mR^2$$
$$\Rightarrow \underline{I = 2mR^2}.$$

Пример. (ур-ие вращения отн. оси, прох. через ц.м. тела)



$$\vec{F}^{(i)}_{ин} = m_i \vec{w}_c$$
$$\vec{M}_{ин} = \sum_i \left[\vec{r}_{ic}, -m_i \vec{w}_c\right] =$$
$$= -\Big[\underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_{ic}}_{=0\ \text{(см. выше)}}, \vec{w}_c\Big] = 0$$

$$\Rightarrow \quad I\varepsilon_z = M_z \quad (\underline{\underline{I = I_c}}).$$

Сводка формул.

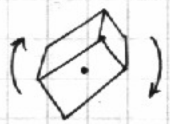
$$\begin{cases} m\vec{w}_c = \vec{F}_{внеш.} \\ I\varepsilon_z = M_z \end{cases}$$

$$\vec{p} = m\vec{v}_c$$

$$\begin{cases} K = \dfrac{mv_c^2}{2} + \dfrac{I\omega^2}{2} \quad (I = I_c) \\ \vec{N}_{\parallel} = \left[\vec{r}_{c\perp}, m\vec{v}_c\right] + I\vec{\omega} \quad (I = I_c) \end{cases}$$

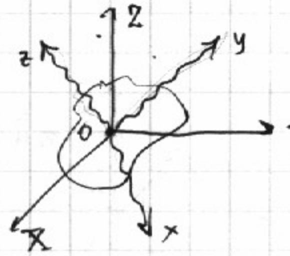
§16. Тензор инерции твердого тела. Главные оси инерции.

Произвольное движение тв. тела.



Движение центра масс: $m\vec{w}_c = \vec{F}$.

Движение тела с одной неподвижной точкой.



XYZ – лаб. сист. координат.

xyz – сист. тела.

$$\dot{\vec{N}} = \vec{M} \quad \text{(т. моментов)}$$

Свободное вращение: $\vec{M} = 0 \quad \therefore \quad \vec{N} = \text{const}$.

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – компоненты мгн. угл. скорости

$$\vec{N} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i] \qquad \vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i] \qquad (\S 4)$$

$$\vec{N} = \sum_i \vec{N}_i, \quad \vec{N}_i = m_i[\vec{r}_i, \vec{v}_i]$$

$$\vec{N}_i = m_i[\vec{r}_i, [\vec{\omega}, \vec{r}_i]] = m_i\{\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i(\vec{r}_i, \vec{\omega})\}$$

$$N_{ix} = m_i\{\omega_x r_i^2 - x_i(\vec{r}_i, \vec{\omega})\}$$

$$\begin{cases} r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \\ (\vec{r}_i, \vec{\omega}) = x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z \end{cases}$$

$$N_{ix} = m_i\{\omega_x(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)\}$$

$$N_{ix} = m_i\{(y_i^2 + z_i^2)\omega_x - x_i y_i\omega_y - x_i z_i\omega_z\}$$

Аналогично, $N_{iy} = m_i\{-y_i x_i\omega_x + (z_i^2 + x_i^2)\omega_y - y_i z_i\omega_z\}$

$N_{iz} = m_i\{-z_i x_i\omega_x - z_i y_i\omega_y + (x_i^2 + y_i^2)\omega_z\}$

$$\begin{cases} N_x = \sum_i N_{ix} = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ N_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ N_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{cases}$$

, где
$$\begin{cases} I_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) \\ I_{yy} = \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) \\ I_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i = I_{yx} \\ I_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i = I_{zx} \\ I_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i = I_{zy} \end{cases}$$

Тензор инерции твердого тела.

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \qquad \vec{N} = \hat{I}\vec{\omega}$$

Главные оси инерции тела.

В общем случае оси, связ. с телом, можно выбрать так, что тензор инерции в этих осях станет диагональным. Эти оси и наз. главными осями инерции тела.

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

I_x, I_y, I_z – главные моменты инерции тела.

$\Rightarrow \quad N_x = I_x\omega_x \qquad N_y = I_y\omega_y \qquad N_z = I_z\omega_z$

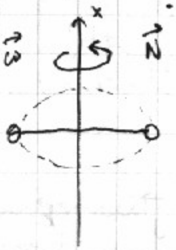
Пример.

$\exists\ \omega_x \neq 0, \quad \omega_y = \omega_z = 0$

$\Rightarrow N_x \neq 0, \quad N_y = N_z = 0$, т.е. $\omega_x \parallel N_x$.

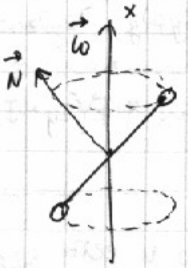
Гл. оси ин. тела физически выделены тем, что при вращении вокруг них $\vec{\omega} \parallel \vec{N}$.

Пример.



$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}]$

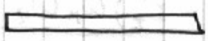
$\Rightarrow \vec{N} \parallel \vec{\omega}$



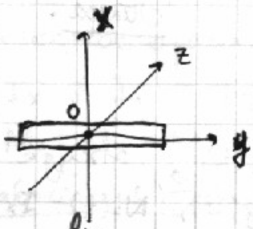
$\forall$ ось симм. тела явл. его главной осью инерции.

$\Rightarrow \vec{N} \nparallel \vec{\omega}$.

Пример: Стержень.

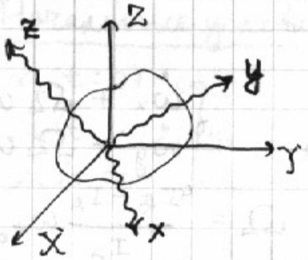


$\hat{I} = ?$



$$I_x = \int_{-l/2}^{l/2} \rho S x^2 dx = \frac{ml^2}{12} \qquad \hat{I} = \frac{ml^2}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

§17. Динамика твердого тела. Уравнение Эйлера.



$N_x(t) - ?$
$N_y(t) - ?$
$N_z(t) - ?$

$$\begin{cases} N_x = I_x \omega_x \\ N_y = I_y \omega_y \\ N_z = I_z \omega_z \end{cases}$$

Теорема моментов: $\dot{\vec{N}} = \vec{M}$ (XYZ)

Спроект. это вект. р-во на главные оси инерции тела.

$$d\vec{N} = d'\vec{N} + [\vec{\omega}, \vec{N}]\,dt \qquad \left(\S 4: d\vec{A} = d'\vec{A} + [\vec{\omega}, \vec{A}]\,dt \right)$$

$d\vec{N}$ — отн. XYZ, $d'\vec{N}$ — отн. xyz.

$$\dot{\vec{N}} = \frac{d\vec{N}}{dt} = \frac{d'\vec{N}}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{N}] = \vec{M}$$

$$[\vec{\omega}, \vec{N}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ I_x\omega_x & I_y\omega_y & I_z\omega_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(I_z - I_y)\omega_y\omega_z + \vec{j}(I_x - I_z)\omega_z\omega_x + \vec{k}(I_y - I_x)\omega_x\omega_y$$

$$\left.\begin{aligned} I_x \frac{d'\omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z &= M_x \\ I_y \frac{d'\omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\omega_x\omega_z &= M_y \\ I_z \frac{d'\omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y &= M_z \end{aligned}\right\}$$

это и есть <u>уравнения Эйлера</u>.

Решая их, получаем $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$, откуда
$N_x(t) = I_x\omega_x(t)$, $N_y(t) = I_y\omega_y(t)$, $N_z(t) = I_z\omega_z(t)$.

<u>Пример</u>: Свободное вращение симметричного волчка.
(2 из 3 гл. моментов инерции равны — <u>симм. волчок</u>.)

$I_x = I_y = I_A$, $I_z = I_B \neq I_A$, $\vec{M} = 0$ (своб. вращ.)

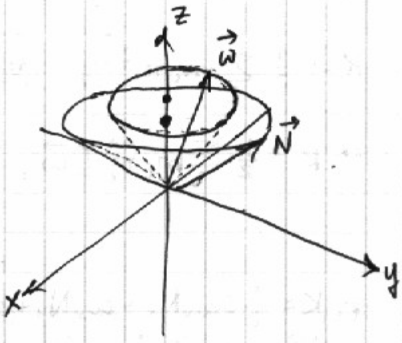
$\Rightarrow \omega_z(t) = \omega_{z_0} = \text{const}$

$$\begin{cases} I_A\dot{\omega}_x + (I_B - I_A)\omega_y\omega_{z_0} = 0 \\ I_A\dot{\omega}_y + (I_A - I_B)\omega_x\omega_{z_0} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\omega}_x + \Omega\omega_y = 0 \\ \dot{\omega}_y - \Omega\omega_x = 0 \end{cases}$$

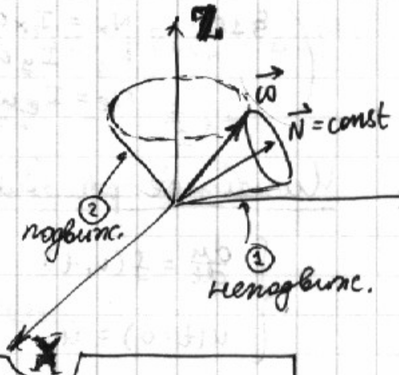
, где $\Omega = \dfrac{I_B - I_A}{I_A}\omega_{z_0}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_x(t) = \omega_0 \cos(\Omega_1 t + \varphi) \\ \omega_y(t) = \omega_0 \sin(\Omega_1 t + \varphi) \\ \omega_z(t) = \omega_{z_0} = const \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_x(t) = N_0 \cos(\Omega_1 t + \varphi) \\ N_y(t) = N_0 \sin(\Omega_1 t + \varphi) \\ N_z(t) = N_{z_0} = const \end{cases}$$



Свободный симм. волчок движется так, как если бы он был вморожен в конус, катящийся без проскальзывания по поверхности другого конуса



§18. Численный эксперимент в механике.

Свободное вращение асимм. волчка.

$I_x \neq I_y \neq I_z$

$M_x = M_y = M_z = 0$

Уравнение Эйлера.

$$\begin{cases} I_x \dfrac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\,\omega_y \omega_z = 0 \\ I_y \dfrac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\,\omega_x \omega_z = 0 \\ I_z \dfrac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\,\omega_x \omega_y = 0 \end{cases}$$

Начальные условия.

$$\begin{cases} \omega_x(t=0) = \omega_{x_0} \\ \omega_y(t=0) = \omega_{y_0} \\ \omega_z(t=0) = \omega_{z_0} \end{cases}$$

$\Rightarrow \omega_x(t),\ \omega_y(t),\ \omega_z(t).$

Как правило, аналитических решений нет.

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2, \quad v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \qquad \vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i] \quad (\S 3)$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_i [\vec{\omega}, \vec{r}_i] = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{\omega} [\vec{r}_i, \vec{v}_i] = \frac{1}{2}\vec{\omega}\sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] =$$

$$= \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{N}$$

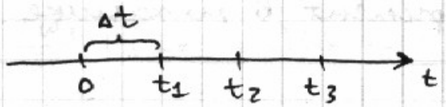
момент импульса

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}(\omega_x N_x + \omega_y N_y + \omega_z N_z) = \frac{1}{2}(I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) = \text{const}$$

$$\left(\S 16: \quad \begin{array}{l} N_x = I_x \omega_x \\ N_y = I_y \omega_y \\ N_z = I_z \omega_z \end{array} \right)$$

Численное решение дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(u, t) \\ u(t=0) = u_0 \end{cases}$$



$$t_n \overset{df}{=} \Delta t \cdot n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$u_n \overset{df}{=} u(t_n)$$

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n$$

$$\Delta u_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u, \tau)\, d\tau \quad \leftarrow$$ Численные методы по-разному аппроксимируют этот интеграл.

Метод Эйлера.

$$\Delta u_n = \Delta t \cdot f(u_n, t_n)$$

Метод Рунге-Кутта.

$$\Delta u_n^{(1)} = \Delta t \cdot f(u_n, t_n)$$

$$\Delta u_n^{(2)} = \Delta t \cdot f\left(u_n + \frac{1}{2}\Delta u_n^{(1)}, t_n + \frac{1}{2}\Delta t\right)$$

$$\Delta u_n^{(3)} = \Delta t \cdot f\left(u_n + \frac{1}{2}\Delta u_n^{(2)}, t_n + \frac{1}{2}\Delta t\right)$$

$$\Delta u_n^{(4)} = \Delta t \cdot f\left(u_n + \Delta u_n^{(3)}, t_n + \Delta t\right)$$

$$\Delta u_n = \frac{1}{6}\left(\Delta u_n^{(1)} + 2\Delta u_n^{(2)} + 2\Delta u_n^{(3)} + \Delta u_n^{(4)}\right)$$

Метод Рунге-Кутта для системы уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(u, v, t), & u(t=0) = u_0 \\ \dfrac{dv}{dt} = g(u, v, t), & v(t=0) = v_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \Delta u_n \\ v_{n+1} = v_n + \Delta v_n \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u_n = \frac{1}{6}\left(\Delta u_n^{(1)} + 2\Delta u_n^{(2)} + 2\Delta u_n^{(3)} + \Delta u_n^{(4)}\right) \\ \Delta v_n = \frac{1}{6}\left(\Delta v_n^{(1)} + 2\Delta v_n^{(2)} + 2\Delta v_n^{(3)} + \Delta v_n^{(4)}\right) \end{cases}$$

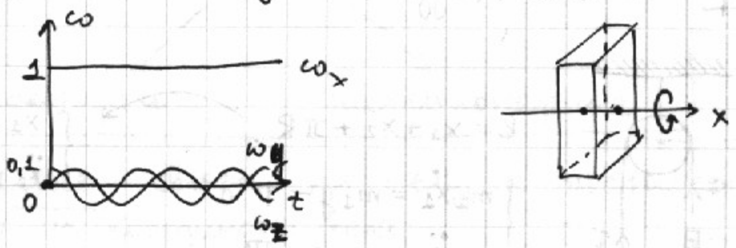
$$\Delta u_n^{(2)} = \Delta t \cdot f\left(u_n + \tfrac{1}{2}\Delta u_n^{(1)},\ v_n + \tfrac{1}{2}\Delta v_n^{(1)},\ t_n + \tfrac{1}{2}\Delta t\right)$$

$$\Delta v_n^{(2)} = \Delta t \cdot g\left(u_n + \tfrac{1}{2}\Delta u_n^{(1)},\ v_n + \tfrac{1}{2}\Delta v_n^{(1)},\ t_n + \tfrac{1}{2}\Delta t\right)$$

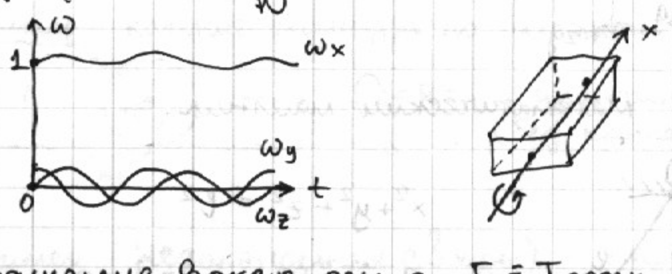
- - - - - - - - - - - - -

Результат решения ур-ий Эйлера.

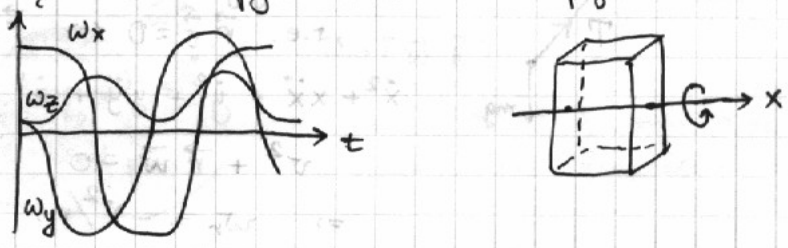
1. Вращение вокруг оси с $I = I_{max}$



2. Вращение вокруг оси с $I = I_{min}$



3. Вращение вокруг оси с $I = I_{средн.}$



Аналитическая механика.

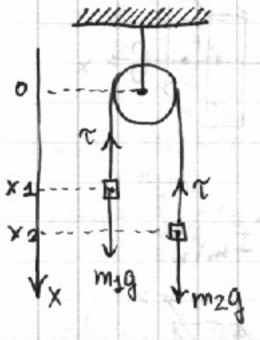
§19. Системы со связями. Степени свободы. Обобщенные координаты.

<u>Связи</u> – не вытекающие из ур-ий движения ограничение на координаты, скорости и ускорение точек мех. системы.

Связи осущ. стержнями, нитями или телами различной формы.

Математически связи выражаются уравнениями связи, т.е. соотношениями между коорд., скор. и ускорениями точек мех. системы.

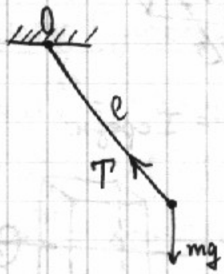
<u>Пример</u>: машина Атвуда.



$$l = x_1 + x_2 + \pi R \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0 \\ \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - T \\ m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - T \end{cases}$$

<u>Пример</u>: математический маятник.



$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} = 0$$

, т.е. $(\vec{r}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{v}$

$$\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y} + \dot{z}^2 + z\ddot{z} = 0$$

$$v^2 + (\vec{r}, \vec{w}) = 0 \qquad (\vec{r}, \vec{w}) = r w_r$$

$$\Rightarrow \quad w_r = -v^2/r.$$

Классификация связей.

Связи → голономные, неголономные

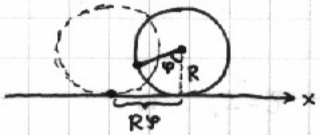
Связи → удерживающие, неудерживающие

Связи → стационарные, нестационарные

Голономные – связи, кот. свод. к ограничениям только на координаты тела.

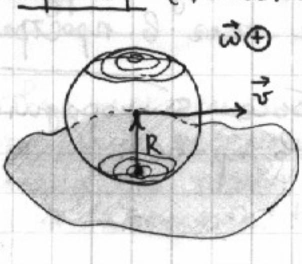
$$f(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0$$

Пример: качение цилиндра по плоскости.



$x = R\varphi$ – голономная связь (без проскальзывания)

Пример (неголономная связь) – качение шара по плоскости.

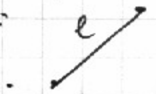


$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$$

нельзя проинтегрировать по времени

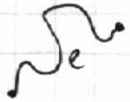
Удерживающая – связь, ур-ие кот. задается р-вом.

Пример.



$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=\ell^2$$

– удерживающая (стержень)



$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\leq\ell^2$$

– неудерживающая (нерастяж. нить)

Стационарная – связь, ур-ие кот. не содержит времени в явном виде.

Пример. $f(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N)=0$.

$f(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N,t)=0$, ex. $x^2+y^2+z^2=\ell^2(t)$.

Задача механики несвободной системы.

$$\begin{cases} m_\ell\ddot{\vec{r}}_\ell=\vec{F}_\ell+\vec{R}_\ell & \ell=\overline{1,N}. \\ f_\alpha(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N,t)=0 & \alpha=\overline{1,k} \end{cases}$$

$\vec{F}$ – заданная сила.

$\vec{R}$ – сила реакции.

N – число мат. точек в системе.

k – число связей.

Будем искать: $\begin{cases} \vec{r}_\ell=\vec{r}_\ell(t) \\ \vec{R}_\ell=\vec{R}_\ell(t) \end{cases}$ $\ell=1,\ldots,N$.

Число степеней свободы – число нез. координат, полностью опред. положение тела в пространстве (s).

Обобщенные координаты – любые s координат, полностью опред. полож. сист. в пр-ве:

$$q=q_1,\ldots,q_s.$$

<u>Обобщенные скорости</u> – $\frac{d}{dt}$ обобщенных координат ($\dot{q}$).

Как найти "s"? $s = 3N - k$, N - число мат. точек, k - число связей.

$N=1$, $k=0$, $s=3$

$N=2$, $k=0$, $s=6$

 $N=2$, $k=1$, $s=5$

 $N=2$, $k=0$, $s=6$

 $N=3$, $k=3$, $s=6$

тв. тело  $s=6$.

<u>Свойства обобщенных координат.</u>

① $\vec{r}_e = \vec{r}_e(q_1, \ldots, q_s, t)$ $\quad e=1,\ldots,N$

Обобщ. коорд. обращают в тождество уравнение связи.

② $f_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N, t) \equiv 0$ $\quad \vec{r} = \vec{r}(q)$, $\alpha = 1, \ldots, k$

<u>Пример.</u> (

§20. Виртуальные перемещения. Виртуальная работа. Идеальные связи.

Действит. перемещение $d\vec{r}$, dt.

<u>Виртуальное перемещение</u> – воображаемое беск. малое перемещение точки, допускаемое связями в данный момент времени t.

→

Математическое определение вирт. перемещения.

$$\vec{r}_l = \vec{r}_l(q_1, q_2, \dots, q_s, t), \quad l = 1, \dots, N$$

$$\delta\vec{r}_l = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j$$

δ действует как обычный дифференциал по отн. к коорд., но не ко времени.

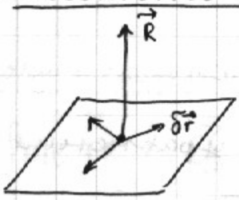
<u>Виртуальная работа</u> — работа силы на вирт. перемещении.

$$\delta A = \vec{F}\delta\vec{r}.$$

<u>Идеальные связи</u> — связи, для кот. вирт. работа сил реакции равна 0.

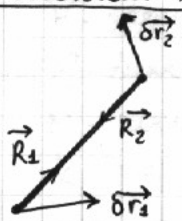
$$\delta A_R = \sum_{l=1}^{N} \vec{R}_l \delta\vec{r}_l = 0.$$

① <u>Абсолютно гладкая плоскость.</u>



$$\delta A_R = \vec{R}\delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \text{связь идеальна.}$$

② <u>Невесомый жесткий стержень.</u>



$$\vec{R}_1 = -\vec{R}_2$$

$$\delta A_R = \sum_{l=1}^{N} \vec{R}_l \delta\vec{r}_l = \vec{R}_1\delta\vec{r}_1 + \vec{R}_2\delta\vec{r}_2 = \vec{R}_1(\delta\vec{r}_1 - \delta\vec{r}_2) = (\vec{R}_1, \delta(\underbrace{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}_{\vec{r}}))$$

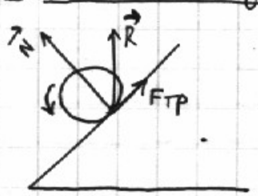
$$\vec{R}_1 = \alpha\vec{r}$$

$$\delta A_R = \alpha\vec{r}\delta\vec{r} = \alpha(x\delta x + y\delta y + z\delta z) = \frac{\alpha}{2}\delta(\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{r^2}) = \frac{\alpha}{2}\delta(l^2) = 0$$

$\Rightarrow \delta A_R = 0$, т.е. связь идеальна.

<u>Весомый жесткий стержень</u> также является идеальной связью.

③ Качение без проскальзывания.



$$\delta\vec{r} = 0$$
$$\delta A_R = \vec{R}\,\delta\vec{r} = 0$$

§21. Уравнения Лагранжа. Обобщенные силы.

Рассм. систему с идеальными голономными связями.

$$\vec{r_\ell} = \vec{r_\ell}(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$$

$$\delta A_R = \sum_{\ell=1}^{N} \vec{R_\ell}\,\delta\vec{r_\ell} = 0 \qquad \delta\vec{r_\ell} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial\vec{r_\ell}}{\partial q_j}\delta q_j .$$

$$m_\ell \ddot{\vec{r_\ell}} = \vec{F_\ell} + \vec{R_\ell} \qquad (\ell = 1, \dots, N)$$

$$\sum_{\ell=1}^{N}(m_\ell \ddot{\vec{r_\ell}} - \vec{F_\ell})\,\delta\vec{r_\ell} = \sum_{\ell=1}^{N}\vec{R_\ell}\,\delta\vec{r_\ell} = 0 .$$

$$\boxed{\Rightarrow \sum_{\ell=1}^{N}(m_\ell \ddot{\vec{r_\ell}} - \vec{F_\ell})\,\delta\vec{r_\ell} = 0 \quad \text{ур-ие Даламбера-Лагранжа}}$$

Переходим к обобщенным коорд.: $\vec{r} \to q$.

$$\vec{r_\ell} = \vec{r_\ell}(q_1, \dots, q_s, t) = \vec{r_\ell}(q, t)$$

$$\delta\vec{r_\ell} = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r_\ell}}{\partial q_j}\delta q_j \qquad (\ell = 1, \dots, N)$$

$$\sum_{\ell=1}^{N}(m_\ell \ddot{\vec{r_\ell}} - \vec{F_\ell})\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r_\ell}}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{s}\delta q_j \sum_{\ell=1}^{N}(m_\ell \ddot{\vec{r_\ell}} - \vec{F_\ell})\frac{\partial\vec{r_\ell}}{\partial q_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{s}(X_j - Q_j)\,\delta q_j = 0 \qquad X_j = Q_j \quad (j = 1, \dots, s).$$

Покажем, что $X_j = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dfrac{\partial K}{\partial q_j}$, где $K = K(q, \dot{q}, t)$.

$$K = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{N} m_\ell v_\ell^2 = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \vec{v_\ell}\,\vec{v_\ell} \qquad \vec{v_\ell} = \dot{\vec{r_\ell}} \qquad \vec{r_\ell} = \vec{r_\ell}(q_1, \dots, q_s, t)$$

$$\vec{v}_e = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}$$

$$\vec{v}_e \to K \to K = K(q, \dot{q}, t)$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{1}{2}\sum_{e=1}^{N} m_e \vec{v}_e \vec{v}_e = \sum_{e=1}^{N} m_e \vec{v}_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{e=1}^{N} m_e \vec{v}_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{e=1}^{N} m_e \vec{v}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) = \sum_{e=1}^{N} m_e \dot{\vec{v}}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} + \sum_{e=1}^{N} m_e \vec{v}_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial q_j} = X_j + \frac{\partial K}{\partial q_j}$$

$$X_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, s$$

Ур-ие Лагранжа, запис. относ. кин. энергии системы.

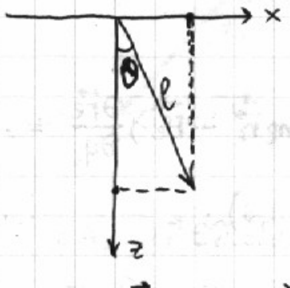
Обобщенные силы.

Обобщ. силой наз. $Q_j = \sum_{e=1}^{N} \vec{F}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, s$

Размерность $[Q] = \frac{Дж}{[q]}$.

1) $[q] = м \to [Q] \Rightarrow Н$;
2) $[q] = 1 \to [Q] = Н \cdot м$.

Пример: плоский мат. маятник.



$s = 1, \quad q = \theta$

$\dot{q} = \dot{\theta}$

$$\begin{cases} x = l\sin\theta \\ z = l\cos\theta \end{cases} \to \begin{cases} \dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{z} = -l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \to v^2 = l^2\dot{\theta}^2$$

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2$$

$$Q = \vec{F}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = m\vec{g}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = mg\frac{\partial z}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -l\sin\theta$$

$$Q = -mgl\sin\theta \qquad \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \qquad \frac{\partial K}{\partial \theta} = 0.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial K}{\partial \theta} = Q \qquad m\ell^2 \ddot\theta = -mg\ell \sin\theta$$

$$\boxed{\ddot\theta + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

§22. Функция Лагранжа. Обобщенные импульсы.

$\exists$ заданные силы потенциальны

$$\Pi_\ell = \Pi_\ell(\vec r_\ell), \quad \vec F_\ell = -\operatorname{grad} \Pi_\ell(\vec r_\ell)$$

$$\vec F_\ell \frac{\partial \vec r_\ell}{\partial q_j} = -\left(\frac{\partial \Pi_\ell}{\partial x_\ell}\frac{\partial x_\ell}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_\ell}{\partial y_\ell}\frac{\partial y_\ell}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_\ell}{\partial z_\ell}\frac{\partial z_\ell}{\partial q_j}\right)$$

$$\vec r_\ell = \vec r_\ell(q_1, \dots, q_s, t), \quad \Pi_\ell = \Pi_\ell(\vec r_\ell) \Rightarrow \Pi_\ell = \Pi_\ell(q, t)$$

$$\vec F_\ell \frac{\partial \vec r_\ell}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi_\ell}{\partial q_j} \qquad Q_j = \sum_{\ell=1}^{N}\left(-\frac{\partial \Pi_\ell}{\partial q_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial q_j}\sum_{\ell=1}^{N}\Pi_\ell = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j},$$

, где $\Pi = \sum\limits_{\ell=1}^{N}\Pi_\ell = \Pi(q, t)$

Подст. в ур. Лагранжа, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial K}{\partial \dot q_j}\right) - \dfrac{\partial K}{\partial q_j} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_j}$

т.к. $\Pi = \Pi(q, t)$, то $\dfrac{\partial \Pi}{\partial \dot q_j} = 0$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (K-\Pi)}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial (K-\Pi)}{\partial q_j} = 0, \quad L = K - \Pi = L(q, \dot q, t)$$

<u>Функция Лагранжа системы</u> (L) – это разница кин. и пот. энергий, <u>выраж.</u> через обобщенные координаты, обобщ. скорости и время.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = \overline{1, s}$$ – <u>ур-ие Лагранжа</u> (отн. L)

<u>Обобщенные непотенц. силы.</u>

$$\vec F_\ell = \vec F_\ell^{(\text{п})} + \vec F_\ell^{(\text{нп})} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{(\text{нп})}, \text{ где } Q_j^{(\text{нп})} = \sum_{\ell=1}^{N}\vec F_\ell^{(\text{нп})}\frac{\partial \vec r_\ell}{\partial q_j}$$

обыкн. непот. сила

Силы → заданные F, реакции R

заданные F → потенц. $F^{(п)}$, непотенц. $F^{(нп)}$

Обобщенный импульс.

О.и. – величина, опр. ф-лой $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$, $j = \overline{1, s}$.

(размерность: $[p] = \frac{[L]}{[\dot{q}]} = \frac{Дж \cdot с}{[q]} = \frac{кг \cdot м^2}{с \cdot [q]}$)

а) $[q] = м \Rightarrow [p] = кг \cdot \frac{м}{с}$ (mv)

б) $[q] = 1 \Rightarrow [p] = кг \cdot \frac{м^2}{с}$ (mvr)

Закон изменения обобщ. импульса.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad , \quad \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

Закон сохранения обобщ. импульса.

Если $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, то $p_j = const$.

Циклическая координата.

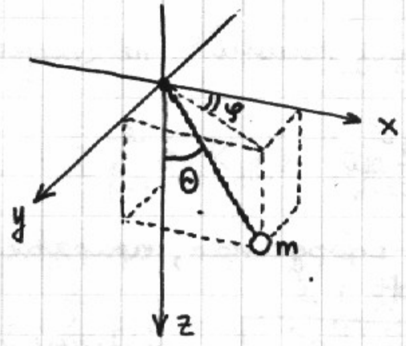
Обобщ. коорд., кот. не входит явным образом в ф-цию Лагранжа системы $\Rightarrow$ для этой коорд. (q_j) $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$.

Обобщ. импульс соотв. цикл. коорд-ты сохраняется.

Пример: математический маятник.

$s = 2$, $q_1 = \theta$, $q_2 = \varphi$

$\dot{q}_1 = \dot{\theta}$, $\dot{q}_2 = \dot{\varphi}$ $\quad L = K - П = L(q, \dot{q}, t)$ $\quad K = \frac{mv^2}{2}$, $П = -mgz$



$$\begin{cases} x = l\sin\theta\cos\varphi \\ y = l\sin\theta\sin\varphi \\ z = l\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = l(\dot\theta\cos\theta\cos\varphi - \dot\varphi\sin\theta\sin\varphi) \\ \dot{y} = l(\dot\theta\cos\theta\sin\varphi + \dot\varphi\sin\theta\cos\varphi) \\ \dot{z} = -l\dot\theta\sin\theta \end{cases}$$

$v^2 = l^2(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta) \qquad L = \frac{ml^2}{2}(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta) + mgl\cos\theta$

$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \varphi$ - циклическая координата

$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = ml^2\dot\varphi\sin^2\theta = const \qquad p_\varphi = N_z \quad ?$

$$N = [\vec{r}, m\vec{v}] = m\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \qquad N_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = ml^2\dot\varphi\sin^2\theta.$$

§23. Уравнение Гамильтона. Канонические переменные.

Будем использовать новый набор переменных:
об. коорд. и об. импульсы вместо об. коорд. и об. скоростей.

$q, \dot{q} \to q, p$ – <u>набор канонических переменных</u> (2s штук).

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = \overline{1,s} \\ p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad L = K - \Pi = L(q, \dot{q}, t) \end{cases}$$

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad dL = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}d\dot{q}_j\right) + \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$dL = \sum_{j=1}^{s}(\dot{p}_j\,dq_j + p_j\,d\dot{q}_j) + \frac{\partial L}{\partial t}dt$ Введем ф-цию $H \overset{df}{=} \sum_{j=1}^{s} p_j\dot{q}_j - L$

$$dH = \sum_{j=1}^{s}(p_j\,d\dot{q}_j + \dot{q}_j\,dp_j) - dL = \sum_{j=1}^{s}(\dot{q}_j\,dp_j - \dot{p}_j\,dq_j) - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

Доп., что мы выразили H через каноническ. переменные
$\Rightarrow H = H(q, p, t)$

$$dH = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j}dp_j\right) + \frac{\partial H}{\partial t}dt$$

Пользуясь незав-тью обобщ. координат, приравняем соотв. коэфф. при dq_j, dp_j, dt :

$$\boxed{\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}}$$ – уравнение Гамильтона

H – <u>гамильтониан</u> системы $\left(H = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L = H(q,p,t)\right)$.

Гамильтониан консервативной системы – постоянное движение. <u>Конс. система</u> – система, гамильт. кот. не содержит явной зависимости от времени $\left(\frac{\partial H}{\partial t} = 0\right)$.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = H(q, p), \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j}\dot{p}_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{s}\left(-\dot{p}_j\dot{q}_j + \dot{q}_j\dot{p}_j\right) = 0.$$

Физ. смысл гамильтониана : $H = E = K + \Pi$ (?)

$$H = \sum_{j=1}^{s} p_j\dot{q}_j - L, \quad L = K - \Pi, \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial(K-\Pi)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j},$$

$$K = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \vec{v}_\ell \vec{v}_\ell, \quad \vec{v}_\ell = \dot{\vec{r}}_\ell, \quad \vec{r}_\ell = \vec{r}_\ell(q_1, \dots, q_s),$$

$$\vec{v}_\ell = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_j}\dot{q}_j \qquad K = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha \sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\sum \dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta \cdot \sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_\alpha}\frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_\beta}$$

Обозначим $\sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_\alpha}\frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_\beta} = K_{\alpha\beta}(q) = K_{\beta\alpha}(q)$.

$$K = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\sum K_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot q_j} = \frac{\partial K}{\partial \dot q_j} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} K_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial \dot q_j}(\dot q_\alpha \dot q_\beta) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}(\delta_{\alpha j}\dot q_\beta + \delta_{\beta j}\dot q_\alpha)K_{\alpha\beta} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{s}\dot q_\beta K_{j\beta} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\dot q_\alpha K_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^{s} K_{j\alpha}\dot q_\alpha$$

Возможен переход $\dot q \leftrightarrow p$!

$$H = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot q_j - L = \sum_{j=1}^{s}\dot q_j \sum_{\alpha=1}^{s} K_{j\alpha}\dot q_\alpha - L = \sum_{\alpha,j=1}^{s} K_{\alpha j}\dot q_\alpha \dot q_j - L =$$

$$= 2K - (K - \Pi) = K + \Pi = E.$$

§24. Равновесие системы и его устойчивость.

<u>Равновесие</u> – состояние, в кот. система, предоставленная сама себе, может находиться сколь угодно долго.

<u>Условие равновесия.</u>

1. Произвольная система.

$$m_l \ddot{\vec r}_l = \vec F_l + \vec R_l, \quad l = \overline{1,N} \qquad \ddot{\vec r}_l = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec F_l + \vec R_l = 0 \quad \forall l \in [1, N] \qquad (1)}$$

2. Система с идеальными связями.

$$\sum_{l=1}^{N} \vec R_l \delta \vec r_l = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_{l=1}^{N} \vec F_l \delta \vec r_l = 0 \qquad (2)}$$

3. + голономные связи и стационарные.

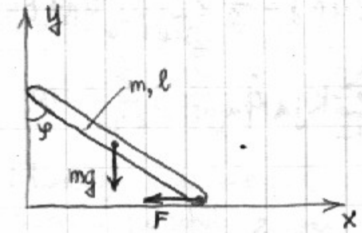
$$\vec r_l = \vec r_l(q_1, \dots, q_s), \quad \delta \vec r_l = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \vec r_l}{\partial q_j}\delta q_j, \quad l = \overline{1,N}$$

Подст. в (2): $\displaystyle\sum_{l=1}^{N}\vec F_l \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \vec r_l}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{s}\delta q_j \sum_{l=1}^{N}\vec F_l \frac{\partial \vec r_l}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j = 0$

$\Rightarrow$ (обобщ. коорд. независимы) $\boxed{Q_j = 0, \quad j = \overline{1,s} \qquad (3)}$

В положении равновесия все обобщенные силы $= 0$.

Пример.



$$s=1, \quad q=\varphi$$

$$Q=\sum_{\ell=1}^{N}\vec{F}_\ell\frac{\partial\vec{r}_\ell}{\partial\varphi}=m\vec{g}\,\frac{\partial\vec{r}_1}{\partial\varphi}+\vec{F}\,\frac{\partial\vec{r}_2}{\partial\varphi}=$$

$$=-mg\,\frac{\partial y_1}{\partial\varphi}-F\,\frac{\partial x_2}{\partial\varphi}$$

$$\begin{cases} y_1=\frac{\ell}{2}\cos\varphi \\ x_2=\ell\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial y_1}{\partial\varphi}=-\frac{\ell}{2}\sin\varphi \\ \frac{\partial x_2}{\partial\varphi}=\ell\cos\varphi \end{cases} \qquad Q=mg\frac{\ell}{2}\sin\varphi-F\ell\cos\varphi=0$$

, т.е. $\boxed{F=\frac{1}{2}mg\,\mathrm{tg}\,\varphi}$.

4. + потенциально заданные силы.

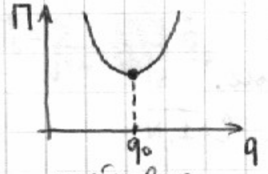
$$Q_j=-\frac{\partial\Pi}{\partial q_j} \Rightarrow (\text{с учетом } (3))\ \frac{\partial\Pi}{\partial q_j}=0,\ j=\overline{1,s}$$

Устойчивость равновесия.

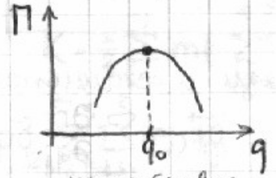
Равновесие устойчиво, если система, выведенная из состояния равновесия и предоставленная сама себе, начинает двигаться к положению равновесия.

Равновесие неустойчиво, если система, выведенная из сост. равновесия и предост. сама себе, нач. двигаться от положения равновесия.

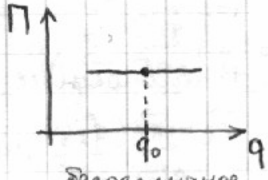
Равновесие безразлично, если сист., вывед. из сост. равн., вообще никуда не движется.



устойчивое



неустойчивое



безразличное

§25. Задача о малых колебаниях.

<u>Колебания</u> – повторяющиеся движения в окрестности полож. уст. равновесия системы.

Рассм. системы с идеальными голономными стац. связями и потенц. зад. силами или сист. без связей. Предп., что число степеней свободы – любое. (?)

s – число степ. свободы, $q_1, \dots, q_s$ – обобщ. коорд.
$(q_{10}, \dots, q_{s0})$ – коорд. точки равновесия.

Введем новые обобщ. коорд.: $x_j = q_j - q_{j0}$, $j = \overline{1, s}$

$$\Pi = \Pi(x) = \Pi(0) + \sum_{j=1}^{s} x_\alpha \frac{\partial \Pi}{\partial x_\alpha}\Big|_{x=0} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} x_\alpha x_\beta \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\Big|_{x=0} + \dots$$

Положим $\Pi(0) = 0$. $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_\alpha}\right)\Big|_{x=0} = 0$, $\alpha = \overline{1, s}$

$$\Pi(x) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \Pi_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta, \quad \Pi_{\alpha\beta} = \Pi_{\beta\alpha} = const$$

$$K(x) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} K_{\alpha\beta} \dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta, \text{ где } K_{\alpha\beta} = \sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial x_\beta}$$

$$L = K - \Pi = L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \left(K_{\alpha\beta}\dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta - \Pi_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \alpha = \overline{1, s}. \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} = p_\alpha = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{s} K_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta$$

Аналогично, $\frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = -\sum_{\beta=1}^{s} \Pi_{\alpha\beta} x_\beta$.

$$\Rightarrow \sum_{\beta=1}^{s}\left(K_{\alpha\beta}\ddot{x}_\beta + \Pi_{\alpha\beta} x_\beta\right) = 0, \quad \alpha = \overline{1, s}$$

$$x_\beta(t) = x_{\beta 0} e^{\lambda t}, \quad \ddot{x}_\beta(t) = x_{\beta 0}\lambda^2 e^{\lambda t} \Rightarrow \sum_{\beta=1}^{s}(\lambda^2 K_{\alpha\beta} + \Pi_{\alpha\beta}) x_{\beta 0} e^{\lambda t} = 0, \quad \alpha = \overline{1, s}$$

Нетр. решения существуют, если

$$\begin{vmatrix} (\lambda^2 K_{11} + \Pi_{11}) & \cdots & (\lambda^2 K_{1s} + \Pi_{1s}) \\ \vdots & & \vdots \\ (\lambda^2 K_{s1} + \Pi_{s1}) & \cdots & (\lambda^2 K_{ss} + \Pi_{ss}) \end{vmatrix} = 0$$

– ур-ие степени s от λ^2.

Все корни этого уравнения — чисто мнимые и попарно сопряженные.

$$\lambda = \pm i\omega_1, \pm i\omega_2, \dots, \pm i\omega_s \qquad \omega_j \in \mathbb{R}_+, \ j = \overline{1,s}$$

собственные частоты колебания системы

$$x_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{s} \left(A_{\alpha\beta} e^{i\omega_\beta t} + B_{\alpha\beta} e^{-i\omega_\beta t} \right) =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{s} \left(C_{\alpha\beta} \cos\omega_\beta t + D_{\alpha\beta} \sin\omega_\beta t \right) = \sum_{\beta=1}^{s} E_{\alpha\beta} \cos(\omega_\beta t + \varphi_{\alpha\beta})$$

После подстановки в уравнение движения оказ., что:

$\varphi_{\alpha\beta}$ не зависит от α $(\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta)$

$E_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} A_\beta$, где $f_{\alpha\beta}$ зависит только от системы и ее состояния, но не от начальных условий,

A_β зависит только от нач. условий.

Нач. условия: $\begin{cases} x_\alpha(t=0) = x_{\alpha 0} \\ \dot{x}_\alpha(t=0) = \dot{x}_{\alpha 0} \end{cases}, \quad \alpha = \overline{1,s}$

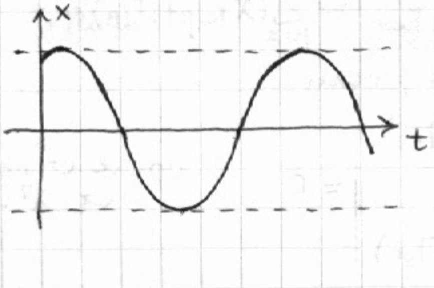
$$x_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{s} f_{\alpha\beta} A_\beta \cos(\omega_\beta t + \varphi_\beta)$$

§26. Колебания в системе с одной степ. свободы.

$s = 1$, $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ — ур-ие гарм. колебаний

$x = q - q_0$, ω — собств. частота колебаний

Решение: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ — гарм. функция



A — амплитуда

φ — нач. фаза

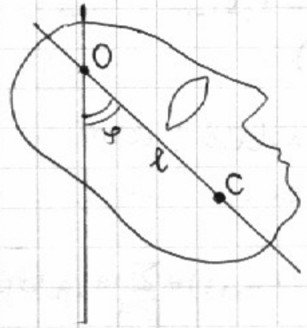
$$\begin{cases} x(t=0)=x_0 = A\cos\varphi \\ \dot{x}(t=0)=\dot{x}_0 = -A\omega\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\varphi = x_0/A \\ \sin\varphi = -\dot{x}_0/A\omega \end{cases} \qquad 1=\left(\frac{x_0}{A}\right)^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{A\omega}\right)^2$$

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \qquad \varphi=\arccos\left(\frac{x_0}{A}\right)$$

Метод отыскания частот колебания.

1) записать ур-ие движ. системы, пользуясь ур-иями Ньютона и Лагранжа.
2) используя малость колебания, привести ур-ие движения к стандартному виду.

Пример: физический маятник.



$s=1$, $q=\varphi$, $\dot{q}=\dot{\varphi}$

$$K=\frac{I\omega^2}{2}=\frac{I\dot{\varphi}^2}{2}, \quad \Pi=-mg\ell\cos\varphi$$

$$L=K-\Pi=L(q,\dot{q})=\frac{I\dot{\varphi}^2}{2}+mg\ell\cos\varphi$$

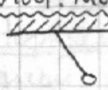
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0, \quad \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=I\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial\varphi}=-mg\ell\sin\varphi$$

$\Rightarrow \quad I\ddot{\varphi}+mg\ell\sin\varphi=0$; малые колебания ($\varphi \ll 1$)
$\sin\varphi \sim \varphi$

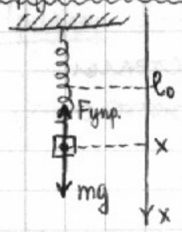
$I\ddot{\varphi}+mg\ell\varphi=0$; $\ddot{\varphi}+\omega^2\varphi=0$, где $\omega=\sqrt{\frac{mg\ell}{I}}$

m – полная масса маятника
ℓ – расстояние от оси вращения до центра масс
I – момент инерции отн. оси вращения.

Мат. маятник: $I=m\ell^2$, $\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}$, $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ (ф-ла Гюйгенса)



Пружинный осциллятор:



$$m\ddot{x}=mg-k(x-\ell_0) \qquad m\ddot{x}+k\underbrace{\left(x-\ell_0-\frac{mg}{k}\right)}_{y}=0$$

$$m\ddot{y}+ky=0 \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

§27. Нормальные колебания и нормальные координаты.

Для сист. с неск. степ. свободы выбор обобщ. коорд. не единственен. Для колеб. системы этот выбор можно оптимизировать так, чтобы ур-ия движения приняли наиболее простой вид.

$$\sum_{\beta=1}^{s}(K_{\alpha\beta}\ddot{x}_\beta + \Pi_{\alpha\beta}x_\beta) = 0, \quad \alpha=\overline{1,s} \qquad K_{\alpha\beta}=K_{\beta\alpha}, \; \Pi_{\alpha\beta}=\Pi_{\beta\alpha}$$

Начальные условия: $\begin{cases} x_\alpha(t=0) = x_{\alpha 0} \\ \dot{x}_\alpha(t=0) = \dot{x}_{\alpha 0} \end{cases}, \quad \alpha=\overline{1,s}$

Можно найти закон движения: $\alpha=\overline{1,s}$,

$$x_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{s} f_{\alpha\beta} A_\beta \cos(\omega_\beta t + \varphi_\beta),$$

где $\omega_\beta, f_{\alpha\beta}$ – не зав. от нач. условий,

а A_β и φ_β – зав. от нач. условий.

Обозначим $A_\beta \cos(\omega_\beta t + \varphi_\beta) = \Theta_\beta$; $\quad x_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{s} f_{\alpha\beta}\Theta_\beta, \; \alpha=\overline{1,s}$

$\Theta_\beta = \sum_{\alpha=1}^{s} g_{\beta\alpha} x_\alpha$ Величины Θ можно принять за новые обобщенные координаты.

$$\ddot{\Theta}_\beta + \omega_\beta^2 \Theta_\beta = 0, \quad \beta=\overline{1,s}.$$

Из независимости ур-ий для Θ => , что и сами эти величины меняются нез. друг от друга при любых движениях системы. Это – норм. коорд. системы

<u>Нормальные координаты</u> – коорд., кот. при любых движениях не изменяются.

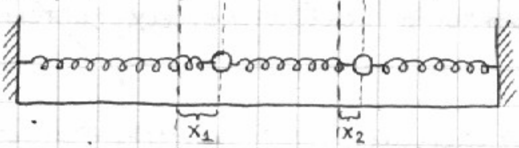
<u>Свойства нормальных координат.</u>

1) Их число равно числу степ. свободы системы: $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_s$.

2) Каждая из норм. координат колеблется со своей частотой, равной одной из собственных частот системы.

3) В этих координатах м-цы $(K_{\alpha\beta})$ и $(\Pi_{\alpha\beta})$ становятся диагональными

<u>Пример:</u> связанный маятник.



$s=2$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2) \\ m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -3k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$\Theta_1 = x_1 + x_2$, $\Theta_2 = x_2 - x_1$

$$\begin{cases} m\ddot{\Theta}_1 + k\Theta_1 = 0 \\ m\ddot{\Theta}_2 + 3k\Theta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

<u>Нормальные колебания.</u>

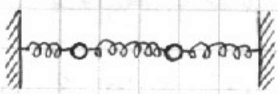
$$x_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{s} f_{\alpha\beta}\Theta_\beta$$

Из независимости норм. координат $\Rightarrow$, что возможны такие движения системы, при кот. колеблется какая-то одна из норм. координат, а остальные равны 0. В этом случае все обобщ. коорд. системы меняются по гармоническому закону.

$x_\alpha(t) = f_{\alpha\beta}\Theta_\beta$ (необх. $\Theta_\alpha(t=0) \sim \delta_{\alpha\beta}$)

<u>Нормальные колебания</u> – гармонические колебания на одной из собств. частот системы.

<u>Пример.</u>



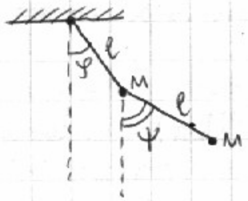
1) $\Theta_1 \neq 0$, $\Theta_2 = 0$, ω_1 $\quad \Theta_2(0) = \Theta_{20} = 0$, $\dot{\Theta}_{20} = 0$

$x_{10} = x_{20}$, $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20}$.

2) $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2 \neq 0$, ω_2

$x_{10} = -x_{20}$, $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$ (? $\dot{x}_{10} = -\dot{x}_{20}$?)

Пример: двойной маятник.



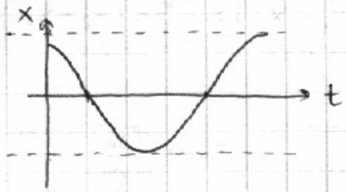
1) $\psi = \sqrt{2}\,\varphi$

2) $\psi = -\sqrt{2}\,\varphi$

§28. Физические эффекты в колебательных системах.

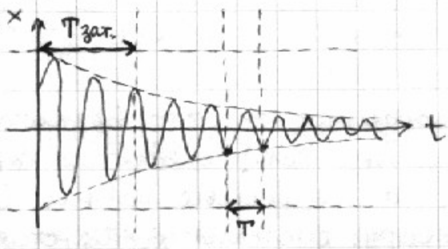
1) Гармонические колебания.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$



2) Затухающие колебания.

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

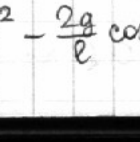


Добротность – количество колебаний до того, как амплитуда уменьшится в 2 раза:

$$Q = \frac{T_{зат.}}{T}.$$

3) Нелинейные колебания: $\ddot{x} + f(x) = 0$

Пример: маятник $\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$



$$\begin{cases} K = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} \\ \Pi = -mgl\cos\varphi \end{cases}$$

$$K + \Pi = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl\cos\varphi = E = const$$

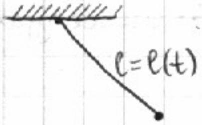
$$\dot{\varphi}^2 - \frac{2g}{l}\cos\varphi = C = const, \quad \frac{g}{l} = \omega_0^2 \qquad \dot{\varphi}^2 = C + 2\omega_0^2\cos\varphi$$

$$\dot{\varphi} = \pm\sqrt{C + 2\omega_0^2\cos\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{C+2\omega_0^2\cos\varphi}} = \pm\int_0^t dt = \pm t$$

Решение выражается через эллиптический интеграл.

Период колебаний становится функцией амплитуды. Этот эффект наз. <u>неизохронностью колебаний</u>.

4) <u>Параметрические колебания:</u> $\ddot{x} + \omega^2(t)\,x = 0$.



параметрический резонанс (?)

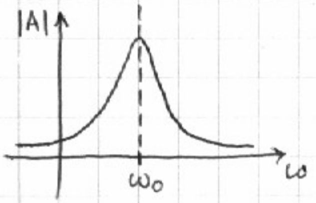
5) <u>Вынужденные колебания:</u> $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$.

$\exists\, f(t) = f_0\cos\omega t$ (в общем случае $\omega \neq \omega_0$)

Установившиеся решения:

$$\begin{cases} f = \frac{1}{2} f_0 e^{i\omega t} + \text{к.с.} \\ x = \frac{1}{2} A e^{i\omega t} + \text{к.с.} \end{cases}$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\alpha)A = f_0, \quad A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\alpha}$$



<u>Резонанс</u> – эффект повышения амплитуды колебаний при совпадении ω с ω_0.

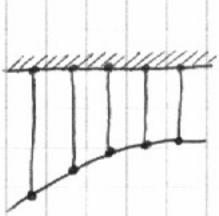
6) <u>Связанные колебания.</u>

<u>Биения</u> – переход колебат. движения от одного тела к другому и обратно.

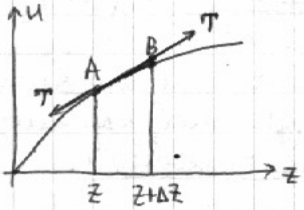
7) <u>Ансамбль осцилляторов.</u>

Маятник Чеботаева

Дефазировка и синхронизация.



8) Волна.



$$\rho = \frac{m}{l} \qquad dm = \rho\, dz$$

$$\rho\, dz\, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = T \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_B - T \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A =$$

$$= T \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\, dz$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}}$$ — волновое уравнение.