

## Билеты по курсу «Введение в численные методы» (2 –ой поток) (2013)

- Билет 1. Прямые методы решения СЛАУ. Метод Гаусса.
- Билет 2. Трехдиагональные системы линейных алгебраических уравнений. Метод прогонки.
- Билет 3. Обусловленность системы линейных алгебраических уравнений. Число обусловленности.
- Билет 4. Одношаговые итерационные методы решения системы линейных алгебраических уравнений. Достаточные условия сходимости.
- Билет 5. Метод простой итерации.
- Билет 6. Метод Зейделя.
- Билет 7. Метод верхней релаксации.
- Билет 8. Интерполирование полиномами. Интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона.
- Билет 9. Погрешность интерполяционного полинома.
- Билет 10. Интерполирование с кратными узлами. Полиномы Эрмита
- Билет 11. Интерполирование сплайнами.
- Билет 12. Квадратурные формулы прямоугольников и трапеций.
- Билет 13. Квадратурные формулы Симпсона.
- Билет 14. Квадратурные формулы Гаусса.
- Билет 15. Сеточные функции. Разностная аппроксимация первой и второй производной.
- Билет 16. Метод Эйлера.
- Билет 17. Метод Рунге-Куты.
- Билет 18. Метод Адамса.
- Билет 19. Разностная аппроксимация краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка.
- Билет 20. Разностная задача на собственные значения.

## Содержание

### Глава 1 Численное решение систем линейных алгебраических уравнений.

#### **Билет 1. Прямые методы решения СЛАУ. Метод Гаусса.**

Постановка задачи численного решения СЛАУ.

##### § 1. Прямые методы.

###### 1. Правило Крамера

Формулы Крамера (без вывода). Оценка количества действий (с использованием формулы Стирлинга).

###### 2. Метод Гаусса

Прямой ход, формулы прямого хода, получение треугольной матрицы. Обратный ход, формулы обратного хода. Оценка количества действий.

###### 3. Метод Гаусса с выбором главного элемента

Оценка роста погрешности вычислений в процессе обратного хода. Выбор главного элемента, ограниченность погрешности.

###### 4. Система с диагональным преобладанием

Определение, теорема о существовании и единственности решения системы с

диагональным преобладанием.

## **Билет 2. Трехдиагональные системы линейных алгебраических уравнений. Метод прогонки.**

### 5. Системы с трехдиагональной матрицей. Метод прогонки.

Запись системы с трехдиагональной матрицей в виде системы «трехточечных» уравнений. Формулы метода прогонки – прямого и обратного хода. Теорема о корректности метода прогонки. Устойчивость метода прогонки.

## **Билет 3. Обусловленность системы линейных алгебраических уравнений. Число обусловленности.**

### **§ 2. Обусловленность СЛАУ. Число обусловленности.**

Непрерывная зависимость погрешности решения от погрешности правой части для системы с невырожденной матрицей. Определения абсолютной и относительной погрешности. Оценка относительной погрешности решения через относительную погрешность правой части. Определение числа обусловленности, роль числа обусловленности. Примеры.

Лемма об оценке числа обусловленности через собственные значения невырожденной матрицы. Лемма о числе обусловленности самосопряженной невырожденной матрицы.

## **Билет 4. Одношаговые итерационные методы решения системы линейных алгебраических уравнений. Достаточные условия сходимости.**

### **§ 3. Итерационные методы.**

Постановка задачи .

#### 1. Одношаговые итерационные методы. Сходимость.

Определение одношагового итерационного метода. Канонический вид. Определение сходимости, невязки. Лемма о связи погрешности решения и невязки для линейного одношагового метода. Свойства самосопряженных положительных операторов, лемма о положительности собственных значений, лемма об оценке  $(Ax, x)$  через собственные значения. Лемма об оценке  $(Ax, x)$  снизу для невырожденной матрицы.

#### 2. Достаточные условия сходимости одношагового итерационного процесса.

Теорема Самарского.

## **Билет 5. Метод простой итерации.**

### 3. Метод простой итерации.

Каноническая запись метода. Теорема о достаточном условии сходимости. Теорема о необходимом и достаточном условии сходимости (условие на оператор перехода). Оптимальное значение итерационного параметра.

## **Билет 6. Метод Зейделя.**

### 4. Метод Зейделя.

Каноническая запись метода Зейделя. Теорема о сходимости метода Зейделя. Индексная запись метода. Теорема о сходимости при диагональном преобладании. Скорость сходимости.

## **Билет 7. Метод верхней релаксации.**

### 5. Метод верхней релаксации.

Каноническая запись. Индексный вид. Теорема о достаточном условии сходимости.

## **Билет 8. Интерполирование полиномами. Интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона.**

### **Глава 2 Интерполирование.**

#### 1. Постановка задачи.

Постановка задачи интерполяции . Чебышевская система функций.

#### 2. Интерполирование полиномами

Постановка задачи, разрешимость задачи интерполирования полиномами.

#### 3. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа.

Построение общего вида интерполяционного многочлена в форме Лагранжа.

#### 4. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона.

Построение общего вида интерполяционного многочлена в форме Ньютона.

## **Билет 9. Погрешность интерполяционного полинома.**

#### 5. Погрешность интерполяции.

Теорема о погрешности интерполяции полиномом. Следствия (оценка погрешности, равномерная сходимость).

## **Билет 10. Интерполирование с кратными узлами. Полиномы Эрмита**

#### 6. Интерполяционный многочлен Эрмита.

Определение полинома Эрмита. Теорема о существовании и единственности полинома Эрмита. Оценка погрешности интерполяции полиномом Эрмита.

## **Билет 11. Интерполирование сплайнами.**

#### 7. Интерполирование сплайнами.

Определение кубического сплайна. Теорема о существовании и единственности кубического сплайна (сведение задачи построения кубического сплайна к системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, существование и единственность решения).

Теоремы о сходимости и скорости сходимости (без доказательств).

## **Билет 12. Квадратурные формулы прямоугольников и трапеций.**

### **Глава 3. Численное интегрирование**

Постановка задачи численного интегрирования

#### **§ 1. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона.**

##### 1. Метод прямоугольников

Квадратурные формулы прямоугольников. Оценка погрешности.

##### 2. Метод трапеций

Квадратурные формулы трапеций. Оценка погрешности.

## **Билет 13. Квадратурные формулы Симпсона.**

#### 3. Метод Симпсона.

Квадратурные формулы парабол.

Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме (без вывода). Оценка погрешности.

## **Билет 14. Квадратурные формулы Гаусса.**

## § 2. Квадратурные формулы Гаусса.

### 1. Постановка задачи.

### 2. Полиномы Лежандра.

Свойства полиномов Лежандра (четность, значения в точках 1 и -1, свойства корней, свойство ортогональности полиномов Лежандра).

### 3. Узлы и коэффициенты квадратуры Гаусса.

Способ построения узлов, способ вычисления коэффициентов.

### 4. Точность формулы Гаусса для полиномов степени $2n-1$ .

Доказательство того, что построенная по указанным узлам и коэффициентам формулам есть формула Гаусса. Пример.

## Глава 4. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений.

### Билет 15. Сеточные функции. Разностная аппроксимация первой и второй производной.

#### § 1. Сеточные функции, аппроксимация.

##### 1. Постановка задачи.

##### 2. Сетка, сеточные функции.

Определение сетки, сеточной функции. Пространство сеточных функций. Разностная схема. Погрешность решения разностной схемы, погрешность аппроксимации дифференциального оператора, погрешность аппроксимации правой части, сходимость, порядок сходимости и аппроксимации.

#### § 2. Разностная аппроксимация первой и второй производной.

##### 1. Первая производная.

Правая, левая и центральная производная. Погрешность аппроксимации.

##### 2. Вторая производная.

Аппроксимация второй производной, погрешность аппроксимации.

### Билет 16. Метод Эйлера.

#### § 3. Численное решение задачи Коши.

##### 1. Метод Эйлера

Формула явного метода Эйлера. Погрешность аппроксимации. Доказательство сходимости, оценка скорости сходимости.

### Билет 17. Метод Рунге-Куты.

##### 2. Метод Рунге-Кутты.

Однопараметрическая схема Рунге-Кутты второго порядка. Погрешность аппроксимации. Сходимость, скорость сходимости. Схема Рунге-Кутты четвертого порядка (без доказательства)

### Билет 18. Метод Адамса.

##### 3. Метод Адамса.

Построение общей формулы явного метода Адамса по  $m$  точкам. Погрешность аппроксимации для схемы с  $m=1$ .

### Билет 19. Разностная аппроксимация краевой задачи для линейного

## **дифференциального уравнения второго порядка.**

### **§ 4. Численное решение краевой задачи для ОДУ второго порядка.**

#### 1. Постановка задачи, разностная схема

Краевая задача. Разностная схема для ОДУ второго порядка. Сведение разностной схемы к системе с трехдиагональной матрицей. Диагональное преобладание. Применимость метода прогонки.

#### 2. Аппроксимация и сходимость.

Погрешность аппроксимации разностной задачи. Доказательство сходимости, скорость сходимости.

## **Билет 20. Разностная задача на собственные значения.**

#### 3. Разностная задача на собственные значения.

Краевая задача на собственные значения для дифференциального уравнения второго порядка, собственные числа, собственные функции. Разностная задача, собственные значения и собственные функции.