Тогда, согласно (11.3) и (11.6), получим

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \sqrt{R_0} \cdot \frac{1 - e^{-2\sqrt{R_0}t}}{1 + e^{-2\sqrt{R_0}t}} - \frac{a_1(t)}{2} = q(t). \tag{11.9}$$

Откуда

$$y(t) = y(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau}. \tag{11.10}$$

п.12. Общая теория однородных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Линейная однородная система

$$\begin{cases} y_i^{/}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)y_i(t), \ \ i \in [1, n], \ \ t \in [t_0, t_0 + T], \\ y_i(t_0) = y_i^0. \end{cases} \tag{12.1}$$

Если обозначить матрицу $\hat{A} = \{a_{ik}(t)\}$, а $\overline{y}(t) = \begin{Bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{Bmatrix}$, то задача Коши

$$\begin{cases} \overline{y}(t) = \hat{A}\overline{y}(t), \quad t \in [t_0, t_0 + T] \\ \overline{y}(t_0) = \overline{y}^0 \end{cases}, \tag{12.2}$$

$L(\overline{y}) \equiv \overline{y}' - A\overline{y}$ – линейный оператор, следовательно, к нему применим принцип суперпозиции

$$L\left(\sum_{m=1}^{M} C_m^{(m)}\overline{y}\right) = \sum_{m=1}^{M} C_m L({}^{(m)}\overline{y}). \tag{12.3}$$

Через ${}^{(m)}\overline{y}$ – обозначаем m-ое решение, чтобы отличить от m-ой производной $\overline{y}^{(m)}$.

Если $\overline{f}(t) = \sum_{m=1}^{M} a_m \overline{f}^{(m)}$, то $\overline{y}(t) = \sum_{m=1}^{M} a_m^{(m)}\overline{y}$, где $L\left({}^{(m)}\overline{y}\right) = \overline{f}^{(m)}$.

Т е о р е м а 12.1. **Пусть** ${}^{(1)}y(t), \dots, {}^{(n)}y(t)$ **- "*n*" решений однородной системы**

$$\overline{y}' - \hat{A}\overline{y} = 0. \tag{12.4}$$

Тогда матрица

$$\hat{W}(t) = \begin{Bmatrix} {}^{(1)}y_1, \dots, {}^{(n)}y_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ {}^{(1)}y_n, \dots, {}^{(n)}y_n \end{Bmatrix}$$

удовлетворяет матричному уравнению

$$\hat{W}'(t) - \hat{A}\hat{W}(t) = 0 \tag{12.5}$$

и, обратно, если матрица $\hat{W}(t)$ **удовлетворяет уравнению (12.5), то ее столбцы есть вектора, являющиеся решением уравнения** (12.4).

Доказательство проводится покомпонентным дифференцированием.

Т е о р е м а 12.2. **Если $\hat{W}(t)$ - решение (12.5), то $\overline{y} = \hat{W}\overline{C}$ ($\overline{C}$ - постоянный вектор) удовлетворяет системе (12.4), а $\hat{Z} = \hat{W}\hat{C}$ ($\hat{C}$ - постоянная матрица) удовлетворяет матричному уравнению (12.5).**

Доказательство следует из принципа суперпозиций.

О п р е д е л е н и е . Векторные функции ${}^{(1)}y(t),...{}^{(n)}y(t)$ – линейно зависимы на интервале $\tau \ = \left\{t_0, t_0 + T\right\}$, если $\exists$ ненулевой постоянный вектор $\overline{C}$ такой, что выполняется тождество

$$\hat{W}\overline{C} \equiv 0 \quad \text{при} \quad \forall t \in \tau . \tag{12.6}$$

Если условие (12.6) выполняется только при $\overline{C} \equiv 0$, то ${}^{(1)}\overline{y}(t),...,{}^{(n)}\overline{y}(t)$ являются линейно независимыми.

О п р е д е л е н и е . Определителем Вронского для системы вектор- функций $\left\{{}^{(i)}y(t)\right\}$, $i \in \left[1, n\right]$ называется

$$\Delta(t) = Det\ \hat{W}(t) . \tag{12.7}$$

Т е о р е м а 12.3. **Если решения $\left\{{}^{(k)}\overline{y}\right\}$ $k \in \left[1, n\right]$ однородной системы $\overline{y}' - \hat{A}\overline{y} = 0$ линейно зависимы на $t \in \tau$, то определитель Вронского $\Delta(t) = 0$ для $\forall t \in \tau$.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Из линейной зависимости следует $\exists \overline{C} \neq 0$ такое, что $\hat{W}\overline{C} = 0$. Это линейно однородная система для $\overline{C}$, следовательно, $Det\ \hat{W} = \Delta(t) = 0$.

Т е о р е м а 12.4. **Если $\Delta(t) = 0$ хотя бы для одного $t \in \tau$, то $\Delta(t) = 0$ и для $\forall t \in \tau$, и , следовательно, $\left\{{}^{(k)}\overline{y}\right\}$ линейно зависимы на τ .**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть при $t = t_0 \in \tau$ имеем $\Delta(t_0) = 0$. Тогда $\exists \overline{C} \neq 0$, которые удовлетворяют системе уравнений $\hat{W}(t_0)\overline{C} = 0$. Возьмем $\overline{y}(t) = \hat{W}(t)\overline{C}$. Согласно теореме 12.2 $\overline{y}$ решение задачи Коши

$$\begin{cases} \overline{y}' - \hat{A}\overline{y} = 0 & t \in \tau \\ \overline{y}(t_0) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\overline{y} \equiv 0 \quad \forall t \in \tau$ по теореме единственности решения задачи Коши. Тогда $\hat{W}\overline{C} = 0$ для $\forall t \in \tau \Rightarrow Det\hat{W} = \Delta(t) = 0$ для $\forall t \in \tau$.

Т е о р е м а 12.5 (альтернатива). **Определитель Вронского $\Delta(t)$ для решения $\left\{{}^{(k)}\overline{y}\right\}$ $k \in \left[1, n\right]$ однородной системы дифференциальных уравнений или $\Delta(t) \equiv 0$ для $\forall t \in \tau$, что означает линейную зависимость $\left\{{}^{(k)}\overline{y}\right\}$, или $\Delta(t) \neq 0$ для $\forall t \in \tau$, что означает линейную независимость $\left\{{}^{(k)}\overline{y}\right\}$.**

п.13. Фундаментальная система решений и общее решение для линейной системы дифференциальных уравнений.

Определение. **Фундаментальной системой** решений (Ф.С.Р.) однородной системы уравнений называется "n" линейно независимых решений $\left\{ {}^{(k)}\overline{y} \right\}$, $k \in [1,n]$ этой системы, а соответственно матрица $\hat{W} = \left\{ {}^{(1)}\overline{y}, {}^{(2)}\overline{y}, ..., {}^{(n)}\overline{y} \right\}$ называется **фундаментальной матрицей системы**.

Фундаментальная матрица является решением матричного уравнения

$$\hat{W}'(t) = \hat{A}\hat{W}(t),$$

причем $Det\hat{W} \neq 0$.

Теорема 13.1**. Фундаментальная матрица существует.**

Доказательство.

Решение задачи Коши

$$\begin{cases} \hat{W}'(t) = \hat{A}\hat{W} & t \in \tau \\ \hat{W}(t_0) = \hat{E} \end{cases}$$

дает фундаментальную матрицу, т.к.

$$\Delta(t_0) = Det\hat{W}(t_0) = Det\hat{E} \neq 0,$$

следовательно, по т.12.2 $\Delta(t) \neq 0$ при $\forall t \in \tau$ и решения $\left\{ {}^{(k)}\overline{y} \right\}$ - линейно независимы.

Теорема 13.2. **Если $\hat{W}(t)$ – фундаментальная матрица для однородной системы, то ее общее решение представимо в виде: $\overline{y}(t) = \hat{W}\overline{C}$, где $\overline{C}$ - произвольный постоянный вектор.**

Доказательство.

Согласно т.12.2. $\overline{y}(t) = \hat{W}\overline{C}$ есть решение однородной системы $\overline{y}' = \hat{A}\overline{y}$. Надо показать, что мы можем удовлетворять произвольным начальным данным Коши $\overline{y}(t_0) = \hat{W}(t_0)\overline{C} = \overline{y}^0$, т.к. $Det\hat{W}(t_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \overline{C}$ для $\forall \overline{y}^0$.

Следствие. **Решение задачи Коши для произвольных начальных данных $\overline{y}^0$ представимо в виде**

$$\overline{y}(t) = \hat{Z}(t,t_0)\overline{y}^0,$$

где импульсная функция $\hat{Z}(t,t_0)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \hat{Z}'(t) = \hat{A}Z(t), & t \in \tau, \\ \hat{Z}(t_0) = \hat{E}. \end{cases} \qquad (13.1)$$

Доказательство.

Из теоремы 12.2. следует $\overline{y}(t) = \hat{W}(t)\overline{C}$, где $\hat{W}(t_0)\overline{C} = \overline{y}^0 \Rightarrow \overline{C} = \hat{W}^{-1}(t_0)\overline{y}^0 \Rightarrow \overline{y}(t) = \hat{Z}(t,t_0)\overline{y}^0$, где

$$\hat{Z}(t,t_0)=\hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(t_0). \qquad (13.2)$$

Легко видеть, что $\hat{Z}(t_0,t_0)=\hat{E}$ и $\hat{Z}(t)$ удовлетворяет (13.1).

п.14. Решение неоднородной системы дифференциальных уравнений.

Т е о р е м а 14.1. **Если $\hat{W}(t)$ – фундаментальная матрица, а ${}^{(0)}\overline{y}(t)$ – частное решение уравнения $\overline{y}'=\hat{A}\overline{y}+\overline{f}$, то общее решение неоднородного уравнения представимо в виде:**

$$\overline{y}(t)=\hat{W}(t)\overline{C}+{}^{(0)}\overline{y}(t). \qquad (14.1)$$

Т е о р е м а 14.2. **Частное решение неоднородной системы с нулевыми начальными данными выражается через импульсную функцию в виде**:

$${}^{(0)}\overline{y}(t)=\int_{t_0}^{t}\hat{Z}(t,\tau)\overline{f}(\tau)d\tau, \qquad (14.2)$$

а общее решение задачи Коши с условием $\overline{y}(t)=\overline{y}^0$ представимо в виде

$$\overline{y}(t)=\hat{Z}(t,t_0)\overline{y}^0+\int_{t_0}^{t}\hat{Z}(t,\tau)\overline{f}(\tau)d\tau. \qquad (14.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) (14.3) получается из (14.1) и (14.2), поэтому надо доказать (14.2).

2) Формула (14.2) получается вариацией постоянной

$$\overline{y}(t)=\hat{W}(t)\overline{C}(t)$$

$$\overline{y}'(t)=\hat{W}'(t)C(t)+\hat{W}(t)\overline{C}'(t)=\hat{A}\hat{W}(t)C(t)+\overline{f},$$

т.к. $\hat{W}'=AW$, то имеем $\hat{W}(t)\overline{C}'(t)=f(t)\Rightarrow\overline{C}'(t)=\hat{W}^{-1}(t)f(t)$.

Т.к. $\overline{y}(t_0)=0=\hat{W}(t_0)\overline{C}(t_0)\Rightarrow\overline{C}(t_0)=0\Rightarrow$

$$\overline{C}(t)=\int_{t_0}^{t}\hat{W}^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau\Rightarrow\overline{y}(t)=\int_{t_0}^{t}\hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,$$

что и требовалось доказать, т.к. $\hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(\tau)=\hat{Z}(t,\tau)$.

п. 15. Построение Ф.С.Р. для системы уравнений с постоянными коэффициентами в случае некратных корней характеристического уравнения.

Частное решение однородной системы $\overline{y}'=\hat{A}\overline{y}$ с постоянными коэффициентами будем искать в виде:

$$\overline{y}(t)=\overline{\alpha}\ e^{\lambda t};\ \overline{\alpha}\ -\text{ постоянный вектор.} \qquad (15.1)$$

Тогда $\left(\hat{A}-\lambda\hat{E}\right)\overline{\alpha}=0.$

Для того, чтобы $\exists\overline{\alpha}\neq 0$, необходимо