Экзаменационные вопросы
по курсу "Дифференциальные уравнения".
(2 КУРС, III СЕМЕСТР)

this page left blank intentionally

ENJOY.

#1 Понятие ДУ. Мат. модели: движение точки в пространстве, динамика популярности

ОДУ – ур-е, сод. произв. неизв. ф-ции только по одной незав. перем. **ДУ в частных производных** – по нескольким.
Порядок ДУ – наиб. порядок вх. в него производных.
ОДУ, разр. отн. старшей производной:

$$y^{(n)}(t) = F\big(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)\big) = 0, t \in [a,b].$$

Это ур-е м.б. сведено к нормальной системе ОДУ:
$y_1'(t) = f_1\big(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\big), \dots, y_n' = f_n$ и наоборот.
Всякое решение норм. системы можно интерпретировать геом. как кривую в (n+1)-мерном пр-ве. Кривая $(t, y_1, \dots, y_n)$ наз. **интегральной кривой;** $(y_1, \dots, y_n)$ – **фазовым пр-вом,** а кривая $\big(y_1(t), \dots, y_n(t)\big)$ – **фазовая траектория.**

модели

1) **движение мат. точки**

С единичной массой вдоль прямой x. Движение обусл. силой $f(t)$. Из 2 з.Н $\rightarrow$ $d^2x/_{dt^2} = f(t) \Rightarrow x(t) = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau} f(\theta)d\theta d\tau + c_1 + c_2 t, t_0$ – фикс.

2) **модели динамики популяций**

Изменение численности биологических объектов во времени. Пусть кол-во $u(t) \in C^1$. Пусть изм. кол-ва засчет рожд. и смерти, скорости рожд. (кф А) и смерти (кф Б) пропорциональны: $u_t' = au(t) - bu(t) \Rightarrow u(t) = Cexp\{(a-b)t\}$.

модель жертвы-хищники:

Кол-во жертв $u(t)$, хищников $v(t)$. Жертвы – корм для хищ. → ск. рожд. пропорц. Nжертв, ск. смерт. Nжертв × Nхищ ⇒ $u'(t) = au(t) - bu(t)v(t)$. С другой стороны $v'(t) = cu(t)v(t) - dv(t)$.
Для однозначного определения необх. задать кол-ва в нач. момент t_0.

модели пространственного процесса

Давление $p(z)$ и плотность воздуха $p(z)$ в атмосфере изм. с высотой z. Выделим мал. цил. объем в воздухе с высотой dz и пл. сеч. S. Вес $P = mg = \rho Sg\, dz$. На цилиндр действ. $F = -Sdp$ (из разности давл. на разных концах цил). Условие равновесия $F = P$, т.е. $dp/dz = -g\rho(z)$.
Из ур-я Клайперона имеет $pV = \mu RT, \mu = \rho V \rightarrow \rho = p/RT$.
Получаем $p_z' = -\frac{g}{RT(z)}p(z) \Rightarrow p(z) = p_0 e^{-\frac{g}{R}\int_0^z dz/T(z)}, p_0 = p(z=0)$ – **барометрическая формула** – опр. убывание давления с высотой при известном распред. темп. $T(z)$.

#2 Понятие реш. ОДУ I порядка. ОДУ в симм. форме. Общий интеграл.

Рассмотрим ОДУ $y'(t) = f(t, y(t))$, $f(t, y) \in C\{D\}$.
Ф-ция $y(t)$ наз. **решением** на $[a, b]$, если: 1) она р/непр на нем, 2) $\big(t, y(t)\big) \in D \quad \forall t \in [a, b]$, 3) $y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$ $\forall t \in [a, b]$. **Направляющий вектор** кас. к инт. кривой равен $\Big(1, f\big(t_0, y(t_0)\big)\Big)$, т.к. $f\big(t_0, y(t_0)\big) = tg\ \alpha$ в этой точке.
Реш. **частное** – вып. усл-е единственности: этой и/к не кас. другие и/к. Решение **особое** – в кажд. точке и/к происх. кас. с другими и/к. (прим.1: $y'(t) = \sqrt[3]{y^2(t)}, y_0(t) = 0$ - особое)

ДУ в симм. виде наз. ур-е (*)$M(t, y)dt + N(t, y)dy = 0$, где M, N опр. в $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и $|M| + |N| > 0$.

Пара ф-ций $t = \varphi(\tau), y = \psi(\tau)$ наз. **парам. решением ДУ в симм. виде** на $[\tau_1, \tau_2]$, если: 1) $\varphi, \psi \in C^1$ и $|\varphi'| + |\psi'| > 0$, 2) $(\varphi, \psi) \in D$, 3) при подстановки в исх. получ. тождество.
Из 1го усл $\Rightarrow \exists\ \tau = \varphi^{-1}$ либо $\tau = \psi^{-1} \Rightarrow$ возм. представить решение как $y = \psi(\varphi^{-1})$ в окр-ти $t_0 = \varphi(\tau_0)$.
(прим.2: $tdt + ydy = 0$ задает окружность целиком, при этом однозначной ф-ции $y(t), t(y)$ для описания дуги на $[0,2\pi]$ не сущ.)

Ур-е $\Phi(t, y, c) = 0$ наз. интегралом ур-я в обл. D, если $\forall c$ оно опр. решение (*). **Общий интеграл** – если опр. все реш. (пример: $t^2 + y^2 - c = 0$ – общий для пр.1, $y - (t - c)^3/27 = 0$ - не общий, для пр.2 – ноль не мб получен)

#3 УПД. Теорема о сущ. общего интеграла. Теорема о необходимом и достаточном условии УПД

(*)$M(t,y)dt+N(t,y)dy=0$

ДУ в симм. виде наз. **УПД** в D, если сущ. $V(t,y)\in C\{D\}$, т.ч. $|V_t'(t,y)|+|V_y'(t,y)|>0;\ M(t,y)=V_t', N=V_y', \forall(t,y)\in D.$

T$_{1.4.1.}$ УПД (*) имеет в D общий интеграл $V(t,y)=C$.

[Проверим, что ур-е явл. интегралом: пусть для определенности $V_y'=N\neq 0$. Тогда по т. о неявной ф-ции в нек. окр.t_0 $!\exists y=g(t)\in C^1: y_0=g(t_0), V\big(t,g(t)\big)=C_0$ → дифф-ем → $0=Mdt+Ng'(t)dt\Rightarrow t=t, y=g(t)$ явл. парам. реш. ур-я по опр. ⇒ ур-е явл. интегралом.

Покажем, что явл. общим инт-лом: перейдем к парам. реш. и покажем, что $\exists V(\varphi,\psi)=C$. Имеем $V_\tau'=(*\text{ парам})=0\Rightarrow V(\varphi,\psi)=C$ и ур-е явл. общ. инт-лом.]

→[1] Через ∀ точку D проходит ед. и/к УПД.

→[2] Если $\overline{\alpha}(t,y)=(M,N)$ - век. поле ⇒ $\overline{\alpha}=grad\,V(t,y)$.

T$_{1.4.2.}$. **(критерий)** Пусть M,N и их ЧП 1го порядка непр. в прямоугольнике $D.|M|+|N|>0$. Тогда **ур-е (*) УПД** ⇔ $\boldsymbol{M_y'=N_t'}$ $\forall(t,y)\in D$.

[⇒. УПД ⇒ $M_y'=V_{ty}'', N_t'=V_{yt}''$.

⇐. Пусть $M_y'=N_t'$. Рассмотрим $V(t,y)=\int_{t0}^{t}M(\xi,y)d\xi+\int_{y0}^{y}N(t_0,\eta)d\eta$, (t_0,y_0) − фикс. точка из D. Дифф-ем по t, по y, учитывая усл. ⇒ $V_y'=\int_{t0}^{t}N_t'(\xi,y)d\xi+N(t_0,y)=N(t,y)\Rightarrow V(t,y)$ удовл. опр. → ур-е явл УПД.]

Пусть $f(t,y)$ опр. и непр. в прямоуг.

$\Pi = \{(t,y): |t-t_0| \le T, |y-y_0| \le A\}$.

Рассм. ДУ $y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$ на $[t_0 - T, t_0 + T]$ с условием $y(t_0) = y_0$. **Задача Коши** – опр-ть $y(t)$, удовл. ДУ+нач.усл.

Рассм. $t_0 - T \le t_1 < t_2 \le t_0 + T$.

Ф-ция $\overline{y}(t)$ наз. **реш. задачи Коши на $[t_1, t_2]$,** если $\overline{y}(t) \in C^1[t_1,t_2], |\overline{y}(t) - y_0| \le A, \overline{y}(t)$ удовл. ДУ $\forall t^{\in[t_1,t_2]}$.

Редукция к инт. ур-ю.

Рассм. на $[t_0 - T, t_0 + T]$ инт/ур $y(t) = y_0 + \int_{t0}^{t} f\big(\tau, y(\tau)\big) d\tau$.

Л$_{2.1.1.}$ Ф-ция $y(t)$ – **реш. задачи Коши** $\Leftrightarrow$

$\overline{y}(t) \in C[t_1,t_2], |\overline{y}(t) - y_0| \le A, \overline{y}(t)$ **удовл. инт/уру**.

[$\Rightarrow$. Реш. Коши по опр. $\Rightarrow$ инт-ем ДУ от t_0 до t + исп. нач. условие → удовл. инт/уру.

$\Leftarrow$. Кладем в инт/уре $t = t_0 \to y(t_0) = y_0$. Далее, т.к. $y(t)$ непр. на $[t_1, t_2] \Rightarrow$ правая часть н/д $\Rightarrow y(t)$ – н/д. Тогда дифф-ем инт/ур → y удовл. ДУ в опр. задачи Коши.]

Лемма Гронуолла-Беллмана.

Потребуется для док-ва единственности.

Л$_{2.1.2.}$ Пусть $z(t) \in C[a,b]$: $0 \le z(t) \le c + d\left|\int_{t0}^{t} z(\tau)d\tau\right|$, $t \in [a,b]$, где $c \ge 0, d > 0, t_0 \in [a,b]$. Тогда $z(t) \le ce^{d|t-t_0|}$.

[Рассм. $t \ge t_0$. Введем $p(t) = \int_{t0}^{t} z(\tau)d\tau, t \in [t_0, b]$. Тогда $p'(t) = z(t) \ge 0$ (теорема), $p(t_0) = 0$. По усл. $p'(t) \le c + dp(t)$. $\times\, e^{-d(t-t_0)}$. Оставляем c справа (ост. под дифф-л) → инт-ем от t_0 до t, учитываем $p(t_0) = 0$: $p(t)e^{-d(t-t_0)}\big|_{t0}^{t} \le \frac{c}{d}\left(1 - e^{-d(t-t_0)}\right) \Rightarrow dp(t) \le ce^{d(t-t_0)} - c$ → нер-во доказано для $[t_0, b]$.

Для $t_0 \le t$: перепишем в виде $0 \le z(t) \le c + d\int_{t}^{t0}$. Обозначим $q(t) = \int_{t}^{t0}$. Тогда $q'(t) = -z(t) \le 0, q(t_0) = 0$. Далее аналогично 1му случаю.]

#5 Единственность решения задачи Коши для ДУ 1-го порядка, разр. отн. производной

Условие Липшица:

Ф-ция $f(t,y)$, зад. в прям**. удовл. в Π усл-ю Липшица по $\boldsymbol{y}$**, если $|f(t,y_1)-f(t,y_2)| \le L|y_1-y_2|,\ \forall (t,y_1),(t,y_2)\in\Pi$, где $L\ge 0$ – const.

▲ Если f, f'_y опр. и непр. в $\Pi \Rightarrow f$ удовл. усл-ю Липшица.
[доказывается через т. Лагранжа]

▲ Мб не дифф-ма, но удовл. усл-ю: $f=(t-t_0)|y-y_0|$.

▲ Мб непр, но не удовл. усл-ю: $\{\sqrt{y},[0,1];-\sqrt{y},[-1,0]\}$.

T$_{2.1.1.}$ (единственность) Пусть f непр. в Π и $f\in Lip[y]$. Если y_1,y_2 - реш. Коши на $[t_1,t_2]$, то $y_1(t)=y_2(t)$.

[Реш. коши ⇒ реш. инт/ура $y(t)=t_0+I_{t_0}^t$. Выч. 2е из 1: $|y_1-y_2|=|I_1-I_2|\le |\int_{t_0}^t\left|f\big(\tau,y_1(\tau)\big)-f\big(\tau,y_2(\tau)\big)\right|d\tau$ → по усл. Липшица $|y_1-y_2|\le L\left|\int_{t_0}^t|y_1(\tau)-y_2(\tau)|d\tau\right|$. Обозначим $z(t)=|y_1-y_2|$. Перепишем $0\le z(t)\le L\left|\int_{t_0}^t z(\tau)d\tau\right|,\quad t\in[t_1,t_2]$. Применим лемму Г-Б с $c=0, d=L\Rightarrow z(t)=0\Rightarrow y_1=y_2$.]

***Лемма Гронуолла-Беллмана:**

Пусть $z(t)\in C[a,b]$: $0\le z(t)\le c+d\left|\int_{t0}^t z(\tau)d\tau\right|,\ t\in[a,b]$, где $c\ge 0, d>0, t_0\in[a,b]$. Тогда $z(t)\le ce^{d|t-t_0|}$.

***Задача Коши** на $[t_0-T,t_0+T]$:
$y'(t)=f\big(t,y(t)\big), y(t_0)=y_0$

#6 Существование решения задачи Коши для ДУ 1-го порядка, разр. отн. производной

Можем д-ть теорему не на всем $[t_0 - T, t_0 + T]$, а на некотором, в.г., меньшем отрезке (поэтому т. – локальная).

Т$_{2.1.2.}$ (существование) Пусть $f(t,y) \in C\{\Pi\}$, $\in Lip[y]$ и $|f| \le M$ в $\Pi \Rightarrow$ на $H = [t_0 - h, t_0 + h], h = \min\{T, A/M\}$,

$\exists y(t) \in C^1\{H\}$: $|y(t) - y_0| \le A, t \in \{H\}$,

$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), t \in \{H\}; y(t_0) = y_0$.

[Из л.Г-Б $\Rightarrow$ дост. доказать $\exists y \in C\{H\}^{(3)}$: $|y - y_0| \le A^{(4)}$ и $y = y_0 + I^{(5)}$. Будем док-ть методом посл. приближений.

1) Рассм. посл-ть y_k: $y_0(t) = t_0, y_{k+1} = y_0 + I_k$. По мат. инд. док-м, что $\forall k$ вып: $y_k \in C\{H\}, |y_k(t) - y_0| \le A$.
   $k = 0$: $y_0(t) = y_0$. Пусть верно для $k = m$.
   $k = m + 1$: рассм. $y_{m+1} = y_0 + I_m$.

Т.к. $|y_m - y_0| \le A$, то $f(t, y_m(t))$ ($\sim f_m$) опр. и непр. на $\{H\} \Rightarrow I_m$ опр. и непр. в $\{H\} \Rightarrow \boldsymbol{y_{m+1}} \in \boldsymbol{C}\{H\}$.

Оценим: $|\boldsymbol{y_{m+1}} - \boldsymbol{y_0}| \le |I_m| \le \left|\int_{t0}^{t} M d\tau\right| \le Mh \le \boldsymbol{A}$.

2) Док-м, что $|y_{k+1} - y_k| \le AL^k |t - t_0|^k / k!$:
   $k = 0$: $|y_1 - y_0| = |I_0| \le Mh \le A$ – *ок*. Пусть k=m-1 ок.
   $k = m$: $|y_{m+1} - y_m| = |I_m - I_{m-1}| \le$ {исп. усл. Lip + нер-во для k=m-1} $\le L\left|\int_{t0}^{t} |y_m - y_{m-1}| d\tau\right| \le L\left|\int_{t0}^{t} AL^{m-1}\frac{|\tau - t_0|^{m-1}}{(m-1)!} d\tau\right| =$ *ok*.
3) Представим $y_k(t)$ как ч/с: $y_k = y_0 + \sum_{n=1}^{k}(y_n - y_{n-1})$. Р/сх $\sim$ сх-ти $\sum_{n=1}^{\infty}(y_n - y_{n-1})$ на $\{H\}$. По пр. Вейерштрасса $|y_n - y_{n-1}| \le c_n$ (оценка п.2), а $\sum c_n$ сх-ся по Даламберу $\Rightarrow$ ряд р/сх на $\{H\} \Rightarrow \{y_k\} \rightrightarrows y(t)$. А т.к. все $y_k \in C\{H\} \Rightarrow y \in C\{H\}$.
4) Покажем, что $|y - y_0| \le A$: дост. перейти к пределу в $|y_k - y_0| \le A$.
5) Покажем, что y – реш. инт/ура $y = y_0 + I$: в силу $y_k \rightrightarrows y \;\Rightarrow\; \forall \delta > 0\, \exists k_0(\delta): \forall k \ge k_0: |y_k - y| < \delta \;\to\; \forall \varepsilon > 0$ выбираем $\delta(\varepsilon) = \varepsilon / Lh$ и $k_0 = k_0\big(\delta(\varepsilon)\big)$, т.ч. при $k \ge k_0$ $|f_k - f| \le L|y_k - y| < \varepsilon / h, \tau \in \{H\}$.
   Тогда получаем $|I_k - I| < \frac{\varepsilon}{h}(t - t_0) < \varepsilon, t \in \{H\}$, что позволяет перейти к пределу в $y_{k+1} = y_0 + I_k$, k→∞.
   Т.о. y явл. решением инт/ура → реш. Коши на $\{H\}$.

]

▲Доказываем только на $\{H\}$, т.к. т. $\big(t, y(y)\big)$ не должна выходить за Π, т.к. чтобы $|y - y_0| \le A \longleftarrow$ необх, поскольку только в Π $|f| \le M$ и ∈Lip. Увеличивать h засчет A нельзя, т.к. при ↑A ↑M=tgβ.

пример: $a > 0$; $y' = a(y^2 + 1), y(0) = 0$ – ф-ция f опр. $\forall t$, однако $y = tg(at)$ сущ. только на $[-h_1, h_1] \subset \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}\right)$.

***Условие Липшица:**

Ф-ция $f(t,y)$, зад. в прям**. удовл. в Π усл-ю Липшица по $\boldsymbol{y}$**, если $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$, $\forall (t,y_1),(t,y_2) \in \Pi$, где $L \ge 0$ – const.

#7 ДУ 1-го порядка, неразр. отн. производной. Существование и единственность реш. задачи Коши.

Рассм. (*) $F\big(t, y(t), y'(t)\big) = 0$. Будем считать $F(t, y, p)$ опр. в параллелепипеде D с центром в нек. т.$(t_0, y_0, y_0') \in \mathbb{R}$:

$$D = \{(t, y, p): |t - t_0| \le a, |y - y_0| \le b, |p - y_0'| \le c\}$$

Ф-ция наз. реш. (*) на $[t_1, t_2]$, если: 1) $y \in C^1$, 2) $(t, y, y') \in D$, 3) вып. (*); $\forall t \in [t_1, t_2]$.
Если ур-е разр. отн. произв. $\sim F = p - f(t, y)$, то для получ. ед. решения дост. задать усл. прохождения соотв. и/к через нек. точку (t_0, y_0) $\rightarrow$ задача с доп. условием.
Однако для (*) характерна неединственность (напр. для $y'^2 - (t + y)y' + ty = 0 \rightarrow y_1 = t^2/2 + C_1$ и $y_2 = C_2 e^t$ $\rightarrow$ 2 реш. при $y(0) = 1$, 4 реш. при $y(0) = 0$)
Необх. задать еще 1 условие: наклон касательный в заданной точке. Приходим к **задаче Коши:**

(!) $F\big(t, y(t), y'(t)\big) = 0, y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0'$

Т$_{2.2.1.}$ (сущ и ед.) Пусть $F(t, y, p)$ опр. в D и
1) $F(t_0, y_0, y_0') = 0$; 2) $F, F_y', F_p' \in C\{D\}$; 3) $F_d'(t_0, y_0, y_0') \neq 0$.
$\Rightarrow \exists h$, т.ч. на $\{H\} = [t_0 - h, t_0 + h]$!∃ реш. задачи Коши.

[Рассм. в окр-ти (t_0, y_0, y_0') ур-е $F(t, y, p) = 0$. Из условий и т. о неявной ф-ции ⇒ ∃ B-окрестность т.(t_0, y_0), в кот. !∃ непр. ф-ция $p = f(t, y)$, им. в B непр. ЧП $f_y' = F_y'/F_p'$ и явл. реш. ур-я. Вып. равенство $y_0' = f(t_0, y_0)$.

В окр. B ур-е (!) ~ ДУ, разр. отн. произв. Рассм. задачу Коши в прям. $\Pi = \{(t, y): |t - t_0| \le a_0, |y - y_0| \le b_0\}$, где $a_0, b_0: \Pi \subset \mathrm{B}$.

Ф-ция $f \in C\{B\} \Rightarrow \in C\{\Pi\}$ и вып. усл-е Липшица с $L = \max_{\text{в }\Pi}|f_y'|$. Т.о. вып. все усл-я для т. о !∃ Коши ⇒ ∃ $h > 0$, т.ч. на $\{H\}$!∃ реш. задачи Коши (пред.) ⇒ и для задачи (!).]

#8 Особые решения ур-я 1-го порядка, неразр. отн. производной

Ф-ция $y = \xi(t)$ – **особое реш. ДУ** $F\big(t, y(t), y'(t)\big) = 0$ на $[t_1, t_2]$, если оно явл. решением ур-я в смысле (*), и через кажд. т. соотв. и/к Γ проходит другое реш., не отл. от данного в ск. угодно малой окр. точки.

Т.о. нарушаются усл-я т. !∃ решения. Ситуации → о/р:
Среди и/к, у кот. $\nexists F'_y$ (пример: $y' = \sqrt[3]{y^2}$, $y = 0$ - о/р).
Пусть вып. 2-е усл. из т. о !∃. Если сущ. особое реш. $\xi(t)$, то тройка (t, ξ, ξ') при каждом t явл. реш. системы $\{F(t, y, p) = 0; F'_p(t, y, p) = 0\}$. Исключая p получаем $\Phi(t, y) = 0$ – его реш. задаются **дискриминантными кривыми.** Возм. три случая: 1) $\Phi = 0$ задает о/р; 2) $\Phi = 0$ задает не о/р; 3) $\Phi = 0$ задает ф-цию, не явл. реш. исх. ур.

примеры:
$y'^3 - y^2 = 0$. Из сист. для д/к → $y(t) = 0$, совп. с реш→ о/р.
$y'^2 - y^2 = 0$. Получаем $y(t) = 0$ – не касается семейств и/к решения $y_1 = c_1 \mathrm{e}^{\pm t}$ ни в одной точке → не о/р.

#9 Норм. системы ДУ. Единственность решения задачи Коши для норм. системы n-ого порядка.

Пусть ф-ции $f_i(t, y_1, \dots, y_n), i = 1,2, \dots, n$ опр. и непр. для $t \in [a,b], y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Требуется опр. ф-ции $y_1, \dots, y_n$, явл. реш. норм. сист. ДУ на $[a,b]$: $\{y_i'(t) = f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)$ и удовл. нач. условиям $y_i(t_0) = y_{01} \in \mathbb{R}$, где $t_0 \in [a,b]$ - **задача Коши для НСДУ.**

Ф-ции $y_1, \dots, y_n$ наз. **реш. задачи Коши на $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$,** если: 1) $y_i(t) \in \boldsymbol{C}^1[a,b]$; 2) $y_i'(t) = f_i$; 3) $y_i(t_0) = y_{0i}$; $t \in [a,b]$.

Условие Липшица:

Ф-ция $f(t,y)$, **удовл. в Π усл-ю Липшица по $\boldsymbol{y}$**, если $\exists L > 0$:
$|f(t,y) - f(t,\tilde{y})| \le L(|y_1 - \widetilde{y_1}| + \dots + |y_n - \widetilde{y_n}|)$,
$y = (y_1, \dots, y_n), \tilde{y} \in \mathbb{R}$.

T$_{2.3.1.}$ (единственность) Пусть $f_k(t,y), k = \overline{1,n}$ опр. и непр. при $t \in [a,b]$, $f \in Lip[y]$ с одной и той же константой L. Если $y, \tilde{y}$ - реш. Коши на $[a,b]$, то $y_i(t) = \widetilde{y_i}(t)$.

[y - реш. коши $\Rightarrow y_i(t) = f_i(t,y) \to$ инт-ем от t_0 до t исп. нач. усл-е: $y_i(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^t f_i(\tau, y) d\tau, t \in [a,b]$, аналогично $\widetilde{y_i}(t) = y_{0i} + I_{\tilde{y}}$. Выч. 2е из 1го и исп. Lip: $|y_i - \widetilde{y_i}| = \left|I_y - I_{\tilde{y}}\right| \le L \left|\int_{t_0}^t (|y_1 - \widetilde{y_1}| + \dots + |y_n - \widetilde{y_n}|) d\tau\right|$. Обозначим $z(t) = (\dots)$. Перепишем: $|y_i - \widetilde{y_i}| \le L \left|\int_{t_0}^t z(\tau) d\tau\right|$. Складывая нер-ва $i = \overline{1,n}$, имеем $z(t) \le nL \left|\int_{t_0}^t z(\tau) d\tau\right|$, $t \in [a,b]$. Применим лемму Г-Б с $c = 0, d = L \Rightarrow z(t) = 0 \Rightarrow y_i = \widetilde{y_i}, i = \overline{1,n}, t \in [a,b]$.]

***Лемма Гронуолла-Беллмана:**

Пусть $z(t) \in C[a,b]$: $0 \le z(t) \le c + d\left|\int_{t0}^t z(\tau) d\tau\right|$, $t \in [a,b]$, где $c \ge 0, d > 0, t_0 \in [a,b]$. Тогда $z(t) \le c e^{d|t - t_0|}$.

#10 Существование решения задачи Коши для норм. системы на всем отрезке

T$_{2.3.2.}$ (существование) Пусть $f_k(t, y)$ опр. и непр. при $t \in [a, b]$, $f_i \in Lip[y]$ с одной и той же конст. L
$\Rightarrow \exists y_1, \dots, y_n$, явл. реш. задачи Коши на всем $[a, b]$.

[Рассм. на $[a, b]$ сист. интуров: $y_i = y_{0i} + I_y$. Покажем, что если $y_i \in C[a, b]$ и удовл. системе интуров, то они явл. реш. задачи Коши: выполнены ур-я $y_i' = f_i(t, y)$.

Докажем, что $\exists y_i \in C[a, b]$, удовл. системе интуров, используя метод посл. приближений: рассм. посл-ть ф-ций $y^k(t)$, т.ч. $y_i^{k+1} = y_{0i} + I_y^k, y_i^0(t) = y_{0i}$.

1) Докажем, что все y_i^k опр. и непр. на $[a, b]$.

Для y_i^0 верно. Пусть верно для m, докажем для m+1: Т.к. $f_i(t, y) \in C$, то $y_i^{m+1} \in C$ (как левая часть равенства).

2) Обозначим $B = \max_{\mathrm{i=1,2\dots}} \max_{\mathrm{t\in[a,b]}} \left|\int_{t0}^{t} f_i(\tau, y_0) d\tau\right|$.
Покажем, что $\left|y_i^{k+1} - y_i^k\right| \leq B(nL)^k |t - t_0|^k / k!$:

k=0 – верно, т.к. $\left|y_i^1 - y_i^0\right| = \left|\int_{t0}^{t} f_i(\tau, y_0) d\tau\right| \leq B$. Пусть справедливо для m-1, докажем для m: $|y_i^{m+1} - y_i^m| \leq \{Lip\} \leq \left|\int_{t0}^{t} B(nL)^m \frac{|\tau - t_0|^{m-1}}{(m-1)!} d\tau\right| \leq ..$ - доказано по инд.

3) Рассм. ФР $y_i^0 + \sum_{m=0}^{\infty}(y_i^{m+1} - y_i^m)$. Учитывая оценки из п.2, исп. пр. Вейерштрасса, заключаем, что ряды р/сх $\Rightarrow$ посл-ти непр. ф-ций $y_i^k \rightrightarrows y_i$. Переходим к пределу при $k \to \infty$.]

▲Для вып. усл. Липшица $\Leftarrow$ все $f_k(t, y)$ имели р/огр ЧП: $\left|(f_k)'_{yj}\right| \leq D = const$.

***Задача Коши для НСДУ.**

$\{y_i'(t) = f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)$ и удовл. нач. условиям $y_i(t_0) = y_{01} \in \mathbb{R}$, где $t_0 \in [a, b]$.

#11 Сущ. и ед. реш. задачи Коши для ДУ n-ого порядка на всем отрезке

Рассм. ОДУ n-го порядка, разр. отн. старшей производной: $y^{(n)}(t) = F\left(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right), t \in [a, b]$ (*)
Рассм. усл: $y(t_0) = y_{00}, y'(t_0) = y_{01}, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1}$, где $t_0 \in [a, b]$, а $y_{00}, \dots, y_{0n-1} \in \mathbb{R}$ - заданные числа.

Задача Коши для ОДУ n-го порядка – отыскание $y(t)$.

Ф-ция y наз. решением задачи Коши на $[a, b]$, если $y \in C^n[a, b]$, удовл. (*) и нач. условиям.

T_2.3.3. (сущ. и ед.) Пусть F опр. и непр. при $t \in [a, b]$, $F \in Lip[y]$ с $L_1 > 0$: $|F(t, y) - F(t, \tilde{y})| \le L_1 \sum_{i=1}^{n} |y_i - \tilde{y}_i|$.
$\Rightarrow$ $!\exists\ y(t)$, явл. реш. задачи Коши на $[a, b]$.

[Единственность: пусть $y(t)$ – реш. Коши. Введем $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{n-1}$ $\rightarrow$ решения для норм. системы $\{y_1' = y_2, \dots, y_n' = F(t, y)\}$ с нач/у $y_i(t_0) = y_{0i-1}$. Эта система явл. частным случаем НС с ф-циями f_i, кот. опр. и непр. при $t \in [a, b]$ и удовл. Lip с $L = \max\{1, L_1\}$ $\Rightarrow$ задача удовл. усл. т. о ед. реш. для НС.

Существование: для Коши НС выполнены усл: $\exists y_i \in C^1[a, b]$, удовл. НС. Обозначив $y_1(t) = y(t)$ получим $y(t) \in C^n[a, b]$, $y^{(i-1)} = y_i$ и $y(t)$ удовл. (*) $\Rightarrow$ явл. реш. Коши.]

#12 Сущ. и ед. реш. задачи Коши для лин. системы ОДУ и лин. ур-я n-ого порядка на всем отрезке.

Рассм. на $[a, b]$ **СЛОДУ n-го порядка**:
$\{y_i'(t) = a_{i1}(t)y_1(t) + a_{i2}(t)y_2(t) + \dots + a_{in}(t)y_n(t) + \widehat{f}_1(t)$, *где* $a_{ij}(t), \widehat{f}_i(t)$ – заданные непр. ф-ции. Пусть дано начальное усл. $y_i(t_0) = y_{0i}$.

T$_{2.3.4.}$ (сущ. и ед. СЛОДУ) Пусть $a_{ij}(t), \widehat{f}_i(t) \in C[a, b]$. Тогда $!\exists$ набор ф-ций $y_1, \dots, y_n$, явл. реш. задачи Коши на $[a, b]$.

[Система явл. частным случаем НСДУ, где f_i опр. и непр., $\in Lip, L = \max_{1\le i,j \le n} \max_{t \in [a,b]} |a_{ij}(t)|$.]

Рассм. **ЛОДУ n-го порядка:**
$a_0(t)y^{(n)} + \dots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t)$, где $a_i(t), f(t)$ – заданные непр. ф-ции, $a_0(t) \neq 0$ на $[a, b]$.
Начальные условия: $y^{(i)}(t_0) = y_{0i}$.

T$_{2.3.5.}$ (сущ. и ед. ЛОДУ) Пусть $a_i(t), f(t) \in C[a, b]$. Тогда $!\exists y(t)$, явл. реш. задачи Коши на $[a, b]$.

[Явл. частным случаем ур-я ДУ n-го порядка с ф-цией $F(t, y) = \frac{f}{a_0} - \frac{a_n}{a_0}y_1 - \dots - \frac{a_1}{a_0}y_n$ – опр. и непр. на $[a, b]$, $F \in Lip[y]$ с $L = \max_{1\le i \le n} \max_{t\in[a,b]} |a_i/a_0| \Rightarrow$ для задачи Коши вып. усл. т.2.3.3 и $!\exists$ ед. реш.]

#13 Общие свойства линейного ОДУ n-ого порядка

Рассм. **ЛДУ n-го порядка:**
$a_0(t)y^{(n)} + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t)$,
где $a_i(t) \in C[a,b] - \mathbb{R}, f(t) \in C[a,b] - \mathbb{C}, a_0(t) \neq 0$.

Линейным дифф-ным оператором n-го порядка наз. $\mathcal{L}y = a_0(t)y^{(n)} + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t)$. Опред. для всех $y(t) \in C^n[a,b]$, причем $\mathcal{L}y \in C[a,b] \to \mathcal{L}y = f(t)$.
Если $f(t) = 0$, то ур-е **однородное,** иначе **неоднородное.**

T$_{3.2.1.}$ Если y_k явл. реш. ур-ний $\mathcal{L}y_k = f_k(t)$, то $y(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k y_k(t)$, где $c_k = const \in \mathbb{C}$, явл. реш. $\mathcal{L}y = f(t)$, где $f(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k(t)$.

[Из линейности $\mathcal{L}$: $\mathcal{L}y = \sum c_k \mathcal{L}y_k = \sum c_k f_k = f(t)$.]

→^{1} Л/к решений однородного ур-я явл. его решением.

T$_{3.2.2.}$ Решение задачи Коши $\mathcal{L}y = f(t)$, $y(t_0) = y_{00}, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1}$ представимо в виде $y(t) = v(t) + w(t)$, где $v(t)$ - реш. Коши для неоднородного ур-я $\mathcal{L}v = f(t)$ с нулевыми нач. условиями, а $w(t)$ – решение Коши для однородного ур-я с ненулевыми.

[Сумма удовл. неодн. ур-ю в силу пред. теоремы для $y_1 = v, y_2 = w$. Для нач. условий $y^{(k)}(t_0) = v^{(k)}(t_0) + w^{(k)}(t_0) = y_{0k}$.]

T$_{3.2.3.}$ Решение задачи Коши для одн. ур-я с нач. усл. $\mathcal{L}y = 0, y^{(i)}(t_0) = y_{0i}$ предст. в виде суммы $y(t) = \sum_{m=0}^{n-1} y_m(t) y_{0m}$, где $y_m(t)$ – решения зад. Коши $\mathcal{L}y_m = 0, y_m^{(m)}(t_0) = 1, y^{(k)}(t_0) = 0, \forall k \in \{0,1,\dots,n-1\} \backslash \{m\}$.

[Ф-ция y явл. реш. однородного ур-я как ЛК реш. y_m однородного с пост. к/ф в силу т3.2.1. Нач. условия также выполнены: $y^{(k)}(t_0) = \sum_{m=0}^{n-1} y_m^{(k)}(t_0) y_0^{(m)} = y^{(k)}(t_0) y_{0k}$.]

#14 ЛЗ и ЛНЗ скалярных функций. Определитель Вронского. Примеры

Рассм. произ. скалярные ф-ции $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ на $[a, b]$.
Ф-ции наз. ЛЗ на $[a, b]$, если найдется нетривиальный набор кф $c_k \in \mathbb{C}$, т.ч. ЛК ф-ций с этими кф = 0. Если равенство вып. только для тривиального набора, то **ЛНЗ.**
(прим. $\varphi_1 = t^3, \varphi_2 = t^2|t|$: если $a < 0 < b$ - ЛНЗ)

Опр. Вронского сист. ф-ций $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C^{m-1}[a, b]$ наз. det (завис. от $t \in [a, b]$):
$W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](t) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_m \\ \varphi_1^{(m-1)} & \varphi_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$ - *порядка* m.

Т$_{3.3.1.}$ (Н/у ЛЗ) Система ф-ций $\in C^{m-1}$ явл. ЛЗ $\Rightarrow W = 0$.
[Т.к. φ_k - ЛЗ → сущ. нетрив. набор констант, для кот. справедливо $c_1\varphi_1 + \cdots + c_m\varphi_m = 0$. Дифф-ем (m-1) раз $\Rightarrow$ вектор-стб опр. Вронского ЛЗ $\Rightarrow det = 0$.]
→^{1} Если $W(t_0) \neq 0 \Rightarrow$ сист. ф-ций ЛНЗ.

*$W = 0 \equiv W[y_1, \dots, y_n](t) = 0 \; \forall t \in [a, b]$

#15 ЛЗ и ЛНЗ реш. лин. однородного ОДУ n-ого порядка. Теорема об альтернативе для det Вронского

Рассм. лин. одн. ДУ порядка n с действ. кф $a_j(t) \in C[a,b]$:

$a_0 y^{(n)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ *(*)*

Рассм. сист. ск. ф-ций $y_1, \dots, y_n$ - решение ОДУ.

Т$_{3.3.2.}$ (Критерий ЛЗ) Для $y_1, \dots, y_n$ - реш. ЛОДУ, $\forall t \in [a,b]$

либо $W[y_1, \dots, y_n](t) \equiv 0$ и $y_1, \dots, y_n$ ЛЗ;

либо $W[y_1, \dots, y_n](t) \neq 0$ и $y_1, \dots, y_n$ ЛНЗ;

[1) Пусть в какой-то точке $W(t_0) = 0$. Рассм. СЛАУ, сост. из ЛК столбцов W. Т.к. её det=W=0 → система имеет нетрив. решение $c_1, \dots, c_n$ → ЛЗ по опр.

Рассм. ф-цию $y(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(t)$. Т.к. $\mathcal{L} y_k = 0$, то из т.3.2.1 ⇒ ф-ция y явл. реш. (*), а из СЛАУ ⇒ удовл. нач. усл. $y^{(m)}(t_0) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k^{(m)}(t_0) = 0,^{m=0\dots n-1}$ ⇒ по т. о ед. реш. задачи Коши для ЛОДУ !∃ $y(t) = 0 = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k \Rightarrow y_k$ ЛЗ на $[a,b]$. (⇒ W=0 на всем $[a,b]$ по т3.3.1).

2) Пусть найдется точка, т.ч. $W(t_0) \neq 0$. Тогда из. след.т3.3.1 ⇒ система ф-ций y_k ЛНЗ и $W \neq 0$ ни в одной точке $[a,b]$ (иначе ЛЗ по пред.).]

(прим. $\varphi_1 = t^3, \varphi_2 = t^2|t|$: не могут явл. реш. ЛОДУ 2-го порядка, т.к. $W \equiv 0 \Rightarrow$ сист. y_k ЛЗ → не реш.)

***Т$_{3.2.1.}$** Если y_k явл. реш. ур-ний $\mathcal{L} y_k = f_k(t)$, то $y(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k y_k(t)$, где $c_k = const \in \mathbb{C}$, явл. реш. $\mathcal{L} y = f(t)$, где $f(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k(t)$.

***Опр. Вронского сист. ф-ций** $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C^{m-1}[a,b]$ наз. det (завис. от $t \in [a,b]$):

$W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](t) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_m \\ \varphi_1^{(m-1)} & \varphi_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$ - *порядка m.*

***Т$_{3.3.1.}$ (Н/у ЛЗ)** Система ф-ций $\in C^{m-1}$ явл. ЛЗ $\Rightarrow W = 0$.

→[1] Если $W(t_0) \neq 0 \Rightarrow$ сист. ф-ций ЛНЗ.

#16 ФСР для лин. одн. ОДУ. Теорема о сущ. ФСР. Теорема об общем реш. лин. одн. ДУ

Рассм. лин. одн. ДУ порядка n с действ. кф $a_j(t) \in C[a,b]$:

$$a_0 y^{(n)} + \dots + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \ (*)$$

ФСР ЛОДУ n-го порядка на $[a,b]$ наз. система из n ЛНЗ реш.

Т$_{3.4.1.}$ У ∀ЛОДУ сущ. ФСР на $[a,b]$.

[Рассм. м-цу $B = \{b_{ij}\}$, т.ч. $detB \neq 0$. Обозн. через $y_j(t)$ решения задачи Коши для (*) с нач. усл. $y_j = b_{1j}, \dots, y_j^{(n-1)} = b_{nj}, j = \overline{1,n}$. По т. о !∃ реш. Коши для ЛОДУ, y_j сущ. и опр. однозначно. Опр. Вронского $W[y_1, \dots, y_n](t_0) = detB \neq 0$ ⇒ по Т3.3.2 он ≠0 ни в одной точке $[a,b]$ и y_j ЛНЗ ⇒ они обр. ФСР.]

▲ Выбирая разл. м-цы B: $detB \neq 0$ получаем разл. ФСР ур-я(*) ⇒ ФСР опр. неоднозначно.

▲Т.к. к/ф $a_j \in \mathbb{R}$, то ФСР реш. ЛОДУ м.б. выбрана $\mathbb{R}$.

Общим решением ЛОДУ наз. реш. (зависит от от n ∀const), т.ч. ∀другое реш. м.б. получено выбором этих констант.

Т$_{3.4.2.}$ Пусть $y_1, \dots, y_n$ - ФСР ЛОДУ на $[a,b]$. Тогда общее реш. $y_{OO}(t) = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n, \forall c_j \in \mathbb{C}$.

[Т.к. ЛК реш. явл. реш. ⇒ y_{OO} - реш. $\forall c_k$.

!∃: Любое другое реш. м.б. получено выбором c_k:

Пусть $\tilde{y}$ - нек. решение. Рассм. СЛАУ отн. неизв. c_k:

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + \dots + c_n y_n(t_0) = \tilde{y}(t_0) \dots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) = \tilde{y}^{(n-1)}(t_0). \end{cases}$$

Опр. СЛАУ $= W[y_1, \dots, y_n](t_0) \neq 0$ (т.к. реш. y_i ЛНЗ) ⇒ сист. имеет ед. решение $\widetilde{c_1}, \dots, \widetilde{c_n}$.

Рассм. ф-цию $\hat{y}(t) = \widetilde{c_1} y_1 + \dots + \widetilde{c_n} y_n$ - реш. (*) ⇒ (т.к. $\widetilde{c_i}$ - реш. СЛАУ) $\hat{y}^{(k)}(t_0) = \tilde{y}^{(k)}(t_0)$ ⇒ $\tilde{y}, \hat{y}$ – реш. (*) и удовл. одним и тем же нач. усл ⇒ по т. о !∃ реш Коши $\tilde{y} = \hat{y}$.]

→[1] Ур-е не может иметь более n ЛНЗ реш.

#17 Общее решение лин. неодн. ДУ n-ого порядка. Метод вариации постоянных

Рассм. лин. неодн. ДУ с действ. кф $a_j(t) \in C[a,b]$:

$$a_0 y^{(n)} + \dots + a_{n-1}y' + a_n y = f(t) \in C[a,b] \text{ (*)}.$$

Общим решением ЛНДУ наз. завис. от n ∀конст. реш., т.ч. ∀другое реш. м.б. получено выбором этих констант.

Т$_{3.4.3.}$ Пусть $y_1, \dots, y_n$ - ФСР ЛОДУ на $[a,b]$, y_H – частное реш. Тогда общее реш. $y_{OH} = y_H + y_{OO}$, где $y_{OO}(t) = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n - \text{реш. одн.}, \forall c_j \in \mathbb{C}$.

[Для ∀набора констант ф-ла опр. реш. ЛНДУ в силу линейности. Осталось д-ть, что можно получить ∀реш. выбором const, т.е. ∀реш $\tilde{y}$ $\exists \widetilde{c_i}$: $\tilde{y} = y_H + \widetilde{c_1} y_1 + \dots + \widetilde{c_n} y_n$.

Пусть $\tilde{y}$ - реш. ЛНДУ. Разность двух реш. ЛНДУ $\tilde{y} - y_H$ явл. реш. ЛОДУ, для которого по т. об общем реш. ЛОДУ найдутся компл. константы $\widetilde{c_i}$ ⇒ $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n = \tilde{y} - y_H$ ⇒ вып. искомое равенство.]

метод вариации постоянных

Пусть известна ФСР ЛОДУ. Будем искать частное реш. $y_H = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ ЛНДУ, где константы → произв. непр. ф-ции $c_1(t), \dots, c_n(t)$. Пусть производные этих констант опр. из СЛАУ:

$$\begin{cases} c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n = 0, \dots, \\ c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} = f(t)/a_0(t) \end{cases} (**)$$

Т.к. y_k <u>обр. ФСР</u>, то для этой СЛАУ (для неизв. c_k') <u>det≠0</u> ни в одной точке ⇒ сист. имеет <u>ед. реш.</u> $c_k' = g_k$.

Интегрируем → $c_k(t) = \int_{t0}^{t} g_k(\tau) d\tau$. Выражения для производных част. реш. принимают вид

$$\begin{cases} y_H^{(k)} = c_1 y^{(k)}(t) + \dots + c_n y_n^{(k)}, k=\overline{1,n-1} \\ y_H^{(n)} = \sum c_k y_k^{(n)} + \sum c_k' y_k^{(n-1)} = \sum c_k y_k^{(n)} + f(t)/a_0(t) \end{cases}$$

(производная сложной ф-ции + учли **)

Подставляем y_H в левую часть (*) и перегруппируем → $\mathcal{L} y_H = f(t) + \sum c_k \mathcal{L} y_k = f(t) + 0 = f(t)$ (т.к. y_k явл. реш. ЛОДУ → $\mathcal{L} y_k = 0$).

Построили $y_H = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n = \sum y_k(t) \int_{t0}^{t} g_k(\tau) d\tau$ – решение ЛНДУ.

#18 Построение ФСР для лин. ОДУ n-ого порядка с пост. коэф.

Рассм. лин. одн. ДУ с вещ. пост. кф. $\alpha_i \in \mathbb{R}, a_0 \neq 0$:

$$a_0 y^{(n)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \ (*)$$

Это ур-е можем записать в операторном виде $\mathcal{L}y = 0$. Сопоставим дифф. оператору $\mathcal{L}$ **хар. многочлен** $M(\lambda) = a_0\lambda^n + \dots + a_n$. Решим **характеристическое ур-е** $M(\lambda) = 0$. Ф-ция $\exp\{\lambda_0 t\}$ явл. реш. ЛОДУ (*) $\Leftrightarrow$ λ_0 - корень х/ур. Справедливо равенство $M(\lambda) = a_0 \prod (\lambda - \lambda_i)^{k_i}$, λ_i – попарно разл. корни х/у, k_i - их кратности.

Л$_{3.4.1.}$ Для $\forall g(t) \in C^n$ и $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ справедливо $\mathcal{L}\big(\exp\{\lambda t\}\, g(t)\big) = \exp\{\lambda t\} \sum_{m=1}^{n} M^{(m)}(\lambda) g^{(m)}(t)/m!$.

[По ф-ле Лейбница $\big(\exp\{\lambda t\}\, g(t)\big)^p = \sum_{m=0}^{p} \frac{p \dots p-(m-1)}{m!} \lambda^{p-m} \exp\{\lambda t\}\, g^{(m)} = \exp\{\lambda t\} \sum_{m=0}^{p} (\lambda^p)^{(m)} g^{(m)}/m! \Rightarrow$ $\mathcal{L}\big(\exp\{\lambda t\}\, g(t)\big) = \sum_{p=0}^{n} (\cdot)^{(p)} = \exp\{\lambda t\} \sum_{p=0}^{n} a_{n-p} \sum_{m=0}^{p} (\lambda^p)^{(m)} g^{(m)}/m!$ Тут можем заменить сумму $\sum_{m=0}^{p} \to \sum_{m=0}^{n}$, т.к. $(\lambda^p)^{(m)} = 0$ при $m > p + 1$.

Меняем порядок: $= \exp\{\lambda t\} \sum_{m=0}^{n} \frac{g^{(m)}}{m!} \left(\sum_{p=0}^{n} a_{n-p} \lambda^p\right)^{(m)} = \exp\{\lambda t\} \sum_{m=0}^{n} \frac{g^{(m)}}{m!} M^{(m)}(\lambda)$, где M - х/м.]

Л$_{3.4.2.}$ Для каждого корня λ_j кратности k_j, ф-ции $\exp\{\lambda_j t\}, t\exp\{\lambda_j t\}, \dots, t^{kj-1}\exp\{\lambda_j t\}$(**) явл. реш. ЛОДУ(*).

[Справедливо равенство $M(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)^{(k_j)} R(\lambda)$, где R – многочлен ст. $n - k_j$. Производные порядка $m < k_j - 1$ $M^{(m)}(\lambda_j) = 0 \ \Rightarrow$ в силу пред. леммы для $g(t) = t^p$, $p = 0,1,\dots,k_j - 1$ имеем $\mathcal{L}\big(\exp\{\lambda_j t\}\, t^p\big) = 0$, т.е. перечисленные ф-ции явл. решениями ЛОДУ.]

Т$_{3.4.4.}$ Сист. ф-ций (**) сост. ФСР ЛОДУ с пост. кф. на $\forall[a,b]$.

[Для док-ва дост., чтобы сист. ф-ций была ЛНЗ на $\forall[a,b]$. От противного: предположим НЕтривиальная ЛК ф-ций (**) обращается в ноль на нек. отрезке: $P_1(t)\exp\{\lambda_1 t\} + \dots + P_l(t)\{\lambda_l t\} \equiv 0$, где степень многочлена $\boldsymbol{s_j} = \deg P_j \leq k_j - 1, {}^{j=\overline{1,l}}$. Будем считать многочлен P_j <u>нетривиален.</u>

↻Выделяем многочлен 1го члена и забиваем его:

для $P_1(t)$: домножаем нашу ЛК на $\exp\{-\lambda_1 t\}$ и дифф-ем $s_1 + 1$ раз → $Q_2 \exp\{(\lambda_2 - \lambda_1)t\} + \dots + Q_l(t)\exp\{(\lambda_l - \lambda_1)t\} \equiv 0$, причем $Q_j = (\lambda_j - \lambda_1)^{s_1+1} p_j t^{s_j} \dots$

для $Q_2(t)$: $\times\exp\{(-\lambda_2 + \lambda_1)t\}$ и дифф-ем $s_2 + 1$ раз → $R_3 \exp\{(\lambda_3 - \lambda_2)t\} + \dots + R_l \exp\{(\lambda_l - \lambda_2)t\} \equiv 0$, $R_j = (\lambda_j - \lambda_2)^{s_2+1}(\lambda_j - \lambda_1)^{s_1+1} p_j t^{s_j} + \cdots$

и т.д., на последнем этапе $S_l \exp\{(\lambda_l - \lambda_{l-1})t\} \equiv 0 \Leftrightarrow S_l = 0$, что противоречит нетривиальности P_l со ст. кф $p_l \neq 0 \Rightarrow$ сист. ф-ций ЛНЗ.]

***Ф-ла Лейбница:** $(f \cdot g)^p = \sum_{m=0}^{p} C_n^p f^{(p-m)} \cdot g^{(m)}$

#19 Построение лин. ДУ по заданной сист. реш. Формула Остроградского-Лиувилля

Рассм. вопрос о построении лин. однородного ДУ $1 \times y^{(n)} + \boldsymbol{a_1} y^{(n-1)} \dots + a_{n-1}y' + a_n y = 0(*)$, реш. которого явл. зад. ф-ции.

Т3.5.1. (единственность) Пусть кф $a_m \in C[a,b] \Rightarrow$ ЛОДУ однозначно опр. ФСР.

[Пусть $y_1, \dots, y_n$ - ФСР ЛОДУ(*). Предположим сущ. другое ДУ n-го порядка с кф $b_m \in C[a,b]$, для кот. система также явл. ФСР.

Тогда ф-ции y_k явл. реш. обоих ДУ: вычитаем: $(a_1 - b_1)y_{k-1}^{(\boldsymbol{n-1})} + \dots + (a_n - b_n)y_k = 0$,$^{k=\overline{1,n}}$. Положим $\exists t_0 \in (a,b)$: $a_1(t_0) \neq b_1(t_0)$. Тогда в силу непр. a_1, b_1 $\exists \varepsilon > 0: a_1(t) \neq b_1(t), t \in B_\varepsilon(t_0) \subset (a,b)$. Делим на $a_1 - b_1$ и вводим $p_m = (a_m - b_m)/(a_1 - b_1) \rightarrow y_k^{(n-1)} + p_2 y_k^{(n-2)} + \dots + p_n y_k = 0, \boldsymbol{k = \overline{1,n}}$.

Т.о. получили n ЛНЗ ф-ций $y_1, \dots, y_n$ явл. реш. ЛОДУ (n-1)-го порядка с непр. кф p_m. Но была теорема: ЛОДУ (n-1)-го порядка имеет только n-1 ЛНЗ реш. (?!) $\Rightarrow a_1 = b_1$. Док-во равенства ост. ф-ций аналогично.]

Т3.5.2. (существование) Пусть $y_1, \dots, y_n \in C^n[a,b]$: $W[y_1, \dots, y_n](t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b] \Rightarrow \exists$ЛОДУ порядка n, т.ч. эти ф-ции явл. его ФСР.

[Рассм. на $[a,b]$ ЛОДУ порядка n для неизв. ф-ции $y(t)$:

$$\det\begin{bmatrix} y_1 \dots & y_n & y \\ y_1' \dots & y_n{}' & y' \\ y_1^{(n)} \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{bmatrix} = 0 \ (**)$$

Раскладываем опр. по последнему столбцу. Коэфф. при $y(t)$ - это опр. Вронского. (по усл. $W[y_1, \dots, y_n] \neq 0$). Поделив на W получ. ДУ вида (*) с непр. на $[a,b]$ кф. Все y_i явл. реш. получ. ур-я, т.к. при подстановке $y = y_k$ имеем опр. с двумя одинак. столбцами (→0).]

ф-ла Остроградского-Лиувилля

Введем правило дифф-я функ. определителей: пусть $D(t)$ – det n-го порядка, эл-тами кот. явл ф-ции $y_1, \dots, y_n \in C^n[a,b]$. Производная $D'(t) = \sum_n det$, каждый из кот. получен из D путем замены одной из его строк на строку из производных.

Тогда найдем производную **определителя Вронского** $\boldsymbol{\Delta = W}[y_1, \dots, y_n]$, сост. из $y_1, \dots, y_n \in C^n[a,b]$.

$$\Delta' = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_n' \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & y_n^{(n)} \end{bmatrix}^{(\boldsymbol{n-1})\times(\boldsymbol{n-1})}$$

(все det, в кот. на пр. зам. ∀ строка, кроме посл., равны нулю, как опр. с одинак. строками ⇒ только посл. det, у кот. на пр. заменена посл. строка и есть Δ')

Пусть $y_1, \dots, y_n$ – ФСР ЛОДУ(*). По т3.5.1. это ДУ однозначно опр. своей ФСР ⇒ поделив (**) на Δ → (*). Тогда кф $\boldsymbol{a_1} = -\Delta'/\Delta$.

Интегрируем от t_0 до t → иск. формула:

$$\Delta(t) = \Delta(t_0) \exp\left\{-\int_{t0}^{t} a_1(\tau)d\tau\right\}, t \in [a,b].$$

→¹ Если кф $a_1 = 0$, то $W[y_1, \dots, y_n] = const$ на $[a,b]$.

#20 Общая теория одн. лин. сист. ОДУ. Теорема об экв. лин. сист. ОДУ матричному ОДУ. Св-ва реш. матричного ОДУ

Рассм. на $[a,b]$ **норм. систему ОДУ 1-го порядка в векторной форме** (далее везде черточки) с действ. кф $a_{i,j} \in C[a,b]$ и комплекснозначными(к/з) $f_k \in C$:

$$d\overline{y}/_{dt} = A(t)\overline{y}(t) + \overline{f}(t), t \in [a,b] \ (*),$$

$$где\ A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix}, \overline{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Решение $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ явл. **к/з век-тор ф-цией** $y = u + iv$, где u, v имеют $\mathbb{R}$ компоненты.

Система (*) наз. **однородной,** если $f(t) \equiv \theta$ на $[a,b]$.

T$_{4.1.1.}$ Если y - реш. ЛОСДУ, то αy тоже $\forall \alpha \in \mathbb{C}$. Если y_1, y_2 – реш., то $y = y_1 + y_2$ тоже.

[В силу линейности оп-ра дифф-я (лучше расписать).]

→[1] Если $y_l, {}^{l=\overline{1,m}}$ – реш., то $y = \sum_{l=1}^m \alpha_l y_l$ - реш. для $\alpha_l \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим **ЛОСДУ** $\boldsymbol{d\overline{y}/dt = A(t)\overline{y}(t)}$ (**)

Пусть есть n вектор-ф-ций $y_j = \left(y_{1j}, \dots, y_{nj}\right)^T, j = \overline{1,n}$.

Составим м-цу $Y(t)$ с ф-циями в стб: $Y(t) = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{1n} \\ y_{n1} & y_{mn} \end{bmatrix}$.

Сопоставим (**) **матричное ОДУ** $\boldsymbol{dY(t)/dt = A(t)Y(t)}$, где производная матр. ф-ции равна м-це из производных.

Решением МДУ наз. $Y(t) \in C^1[a,b]$, обращ. ↑ в тождество.

T$_{4.1.1.}$ **(об экв.)** Вектор-ф-ции $y_1, \dots, y_n$ явл. реш. ЛОСДУ ⇔ м-ца $Y(t)$ явл. реш. МДУ.

[⇒. Составим матрицу $Y(t)$. $\frac{dY}{dt} = \left(\frac{dy_1}{dt}, \dots, \frac{dy_n}{dt}\right) = (Ay_1, \dots, Ay_n) = AY$, т.е. вып. матр. ур-е.
⇐. Аналогично, расписывая матр. ур-е по столбцам.]

T$_{4.1.2.}$ **(св-ва МДУ)** Пусть $Y(t)$ - реш. МДУ. Тогда 1) ∀вектора конст. $\overline{c}$ из $c_j \in \mathbb{C}$, вектор-ф-ция $\overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}$ удовл. ЛОСДУ;

2) ∀м-цы конст. $B = \left(b_{ij}\right)^{\in \mathbb{C}^{m \times n}}$, матр-ф $X = YB$ удовл. МДУ.

[1) Если Y – реш. МДУ ⇒ по т4.1.1 век-стб. явл. реш ЛОСДУ, также как и их ЛК $\overline{y} = Y\overline{c} = \sum c_j \overline{y}_j$.

2) В силу линейности дифф-я и ассоц. × м-ц: $X_t' = (YB)_t' = Y_t'B = \{AY\}B = A\{YB\} = AX$.]

#21 ЛЗ и ЛНЗ вектор-функций. Опр. Вронского. Примеры

Рассм. ∀ к/з вектор-ф-ции $y_1, \dots, y_n$, опр. на $[a, b]$. Никакой связи с реш. ДУ и непрерывностью.

Вф-ции $y_1, \dots, y_n$ наз. **ЛЗ** на $[a, b]$, если $\exists c_i \in \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{m} |c_j| > 0$: $c_1 y_1 + \ldots + c_m y_m = \theta$ (∃нетрив. набор конст, т.ч. ЛК=θ). Если вып. только для трив. набора – **ЛНЗ.**

Экв. **век. форма**: $Y(t)\overline{c} = \overline{\theta}$ хотя бы для 1го набора конст.

Опр. Вронского сист. вф-ции $y_1, \dots, y_n$ наз опр. мф-ции (завис. от t) $Y(t) = (y_1, \dots, y_m)$: $\Delta(t) = \det Y(t)$.

$\text{Т}_{4.2.1.}$ (н/у лз) Система вф-ций ЛЗ на $[a, b] \Rightarrow \Delta(t) = 0,^{t \in [a,b]}$.

[Из усл. ЛЗ ⇒ ∃ненулевой вектор c, т.ч. для фикс. $t_0 \in [a, b]$ $Y(t_0)c = \theta$ → одн. СЛАУ имеет нетрив. реш. c – возможно только для вырожд. м-цы → $\det Y(t_0) = 0$.

Либо: из опр. ЛЗ → ЛЗ стб. $Y(t), \forall t \in [a, b]$.]

пример: $m = 2$, рассм. на $[-1,1]$ две вф-ции.

$y_1 = \binom{t^3}{t^2}, y_2 = \binom{t^2|t|}{t|t|}, \Delta(t) = \begin{vmatrix} t^3 & t^2|t| \\ t^2 & t|t| \end{vmatrix} \equiv 0$ – ЛНЗ: $c_1 = c_2 = 0$

#22 ЛЗ и ЛНЗ реш. лин. одн. сист. ОДУ. Теорема об альт. для определителя Вронского

Рассм. систему из вф-ций $y_1, \dots, y_m$, явл. реш. ЛОСДУ $\boldsymbol{d\overline{y}/dt = A(t)\overline{y}(t)}$ на $[a,b]$, $Y(t)$ - соотв. мф-ция из МДУ. Кол-во вф-ций сопв. с порядком системы.

T$_{4.2.2.}$ Пусть $y_1, \dots, y_n$ - реш. ЛОСДУ на $[a,b]$. Если $\exists t_0 \in [a,b]$, для кот. $\det Y(t_0) = 0 \Rightarrow$ система вф-ций ЛЗ и $\det Y = 0$ на всем отрезке.

[Однородная СЛАУ $Y(t_0)\overline{c} = \theta$ имеет. ненул. реш $\overline{c_0}$ в силу выр. $Y(t_0)$ (след. т. о ФСР).
Положим $y(t) = Y(t)c_0$ – будет реш. ЛОСДУ и $y(t_0) = \theta$. Т.о. y явл. реш. з.Коши с нул. нач. усл. ⇒ по т. о !∃ имеет только одно реш. – нулевое: $\theta = y(t) = Y(t)c_0 = c_1^0 y_1 + \dots + c_n^0 y_n$, $\forall t \in [a,b] \Rightarrow$ рассм. сист. вф-ций явл. ЛЗ ⇒ т.4.2.1 опр. Вронского $\Delta = \det Y(t) = 0$.]

T$_{4.2.3.}$ **(альт.)** Опр. Вронского для сист. вф-ций $y_1, \dots, y_n$, явл. реш. ЛОСДУ на $[a,b]$, либо 1) $\det Y(t) \equiv 0$ и ЛЗ; либо 2) $\det Y(t) \neq 0$ ни в одной точке и ЛНЗ.

[без док-ва]

***T**$_{4.2.1.}$ **(н/у лз)** Сист. вф-ций ЛЗ на $[a,b] \Rightarrow \Delta(t) = 0,^{t\in[a,b]}$.

#23 ФСР для лин. одн. сист. ОДУ. Теор. о ∃ФСР. Теор. об общем решении лин. одн. системы ОДУ. Матрициант

ФСР ЛОСДУ $\boldsymbol{d\overline{y}/dt = A(t)\overline{y}(t)}$ порядка n на $[a, b]$ наз. совокупность n ЛНЗ реш. $\overline{y_1}, \dots, \overline{y_n}$ этой системы (ВЕКТОРа). Соотв. этим реш. фм-ца $Y(t) = (\overline{y_1}, \dots, \overline{y_n})$ наз. **фунд. м-цей //** явл. реш. МДУ и имеет $\det\, Y(t) \neq 0$ на $[a, b]$ (по т4.2.3).

$T_{4.3.1.}$ (о ∃ФСР) ∀ЛОСДУ с непр. кф на $[a, b]$ ∃ ФСР.

[Фикс. ∀ $t_0 \in [a, b]$ и рассм. задачу Коши для МДУ $Y_t'(t) = A(t)Y(t), Y(t_0) = I$. Расписывая по стб. получаем ~ задачам: $d\overline{y_j}/dt = A(t)\overline{y_j}, \overline{y_j}(t_0) = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T, ^{j=\overline{1,n}}$, отлич. нач. данными. Из т. о ∃реш. з.Коши для ДУ 1-го порядка ⇒ ∃реш. МДУ. Поскольку $\det Y = \det Y(t_0) = 1$, то из т. об альт. для опр. Вронского ⇒ ЛНЗ сист. реш. ⇒ $\overline{y_1}, \dots, \overline{y_n}$ обр. ФСР, а $Y(t)$ - фундаментальная м-ца.]

▲ ФСР неединственна: полагая $Y(t_0) = B, \det B \neq 0$ получим другую ФСР.

▲ $a_{ij}(t) \in \mathbb{R}$ ⇒ ФСР м.б. выбрана вещ.

Общим решением наз. реш. (завис. от n ∀const), т.ч. ∀другое реш. м.б. получено из него выбором const.

$T_{4.3.2.}$ (об общ. реш) Пусть $Y(t)$ – фунд. м-ца ЛОСДУ. Тогда общ. реш. представимо в виде $\overline{y_{OO}} = c_1\overline{y_1} + \dots + c_n\overline{y_n} = Y\overline{c}$.

[По т4.1.2 вф-ция Yc явл. реш. ЛОСДУ $\forall c \in C^n$. Ост. показать, что ∀реш. $\overline{y}$ $\exists \tilde{c} \in C^n$: $\overline{y}(t) = Y(t)\tilde{c}$ (*).

Фикс. $t_0 \in [a, b]$ и выч. $y^0 = y(t_0)$. Рассм. СЛАУ отн. $\tilde{c}$: $Y(t_0)\tilde{c} = y^0$ → !∃ реш. $\tilde{c}$ (т.к. $\det Y(t_0) \neq 0$ - опр. м-цы кф СЛАУ) ⇒. ф-ции $\tilde{y} = Y(t)\tilde{c}$ и $\overline{y}$ явл. реш. одной и той же задачи Коши: $d\overline{y}/dt = A(t)\overline{y}(t), \overline{y}(t_0) = \overline{y}^{\mathbf{0}}$, у кот. по т. !∃ реш. ⇒ $\tilde{y} = \overline{y}$. Это доказывает (*).

Для фикс. реш. $\overline{y}$ вектор конст. $\tilde{c}$ опр. однозначно.]

→[1] Ф-ла для реш. з.Коши с нач. условием: $\tilde{c} = Y^{-1}(t_0)y^0$, $\overline{y}(t) = Y(t)\tilde{c} \Rightarrow \overline{y}(t) = Z(t, t_0)\overline{y}^0$, $Z(t, t_0) = Y(t)Y^{-1}(t_0)$, где Z – **матрициант** – явл. реш. Коши: $Z_t'(t, t_0) = A(t)Z(t, t_0), Z(t_0, t_0) = Y(t_0)Y^{-1}(t_0) = I$.

***$T_{4.2.3.}$ (альт.)** Опр. Вронского для сист. вф-ций $y_1, \dots, y_n$, явл. реш. ЛОСДУ на $[a, b]$, либо 1) $\det Y(t) \equiv 0$ и ЛЗ; либо 2) $\det Y(t) \neq 0$ ни в одной точке и ЛНЗ.

#24 Общее реш. лин. неодн. сист. ОДУ. Метод вариации пост.

Рассм. **ЛНСДУ**(*) $d\overline{y}/dt = A(t)\overline{y}(t) + \overline{f}(t), t \in [a,b], f \in C$.
$Y(t)$ – фунд. м-ца соотв. ЛОСДУ $d\overline{y}/dt = A(t)\overline{y}(t)$.

Общим решением наз. реш. (завис. от n ∀const), т.ч. ∀другое реш. м.б. получено из него выбором const.

T$_{4.3.3.}$ Общ. реш. представимо в виде: $\overline{y_{OH}}(t) = Y(t)\overline{c} + \overline{y_H}(t), \forall\overline{c} \in \mathbb{C}^n$, где $\overline{y_H}$ - частное реш.

[В силу лин. $\overline{y_{OH}}$ явл. реш. (*). Ост. показать, что ∀реш. $\tilde{y}(t)\ \exists\tilde{c} \in C^n$: $\tilde{y}(t) = Y(t)\tilde{c} + \overline{y_H}$.
Пусть $\tilde{y}$ - реш. (*). Разность двух реш. НСДУ явл. реш. одн. $\Rightarrow \overline{y_t} = \tilde{y} - \overline{y_H}$ - реш. $d\overline{y}/dt = A(t)\overline{y}(t)$. Тогда по т. об общ. реш. однородной $\exists\tilde{c} \in C^n$, т.ч. вып $\overline{y_t}(t) = Y(t)\tilde{c} \Rightarrow \tilde{y}(t) = Y(t)\tilde{c} + \overline{y_H}$.]

метод вариации пост. для построения част. реш:

T$_{4.3.4.}$ $\forall t_0 \in [a,b]$: $\overline{y_H}(t) = \int_{t0}^{t} Z(t,\tau)\overline{f}(t)d\tau\,, t \in [a,b]$ задает частное решение НСЛДУ, удовл. усл. $\overline{y_H}(t_0) = 0$.

[Восп. мтдом вариации пост., в кот. $\overline{y_H}$ ищется в виде, повт. структуру общ. реш. однородной сист, где $\overline{c} \in C^1$ вектор-ф-ция: $\overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}(t)$.
Поскольку фунд. м-ца удовл. одн. ур-ю $Y_t' = AY$, имеем $y_t' = Y_t'c + Yc_t' = AYc + Yc_t' \ \Rightarrow\ Yc_t' = f$. В силу невыр. фунд. м-цы можем переписать: $c_t' = Y^{-1}f$ и проинтегр. от t_0 до t: $c = \int_{t0}^{t} Y^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$. Окончательно $y = Yc = Y\int_{t0}^{t} Y^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau = \int_{t0}^{t} Z(t,\tau)f(\tau)d\tau$.]

→[1] Реш. $y(t) = y(t,y_0)$ з. Коши для ЛНСДУ $y_t' = Ay + f$ с зад. в $t_0 \in [a,b]$ нач. усл $y(t_0) = y_0$ имеет вид $y(t,y_0) = Z(t,t_0)y_0 + \int_{t0}^{t} Z(t,\tau)f(\tau)d\tau$.

* Z – **матрициант** – явл. реш. Коши: $Z_t'(t,t_0) = A(t)Z(t,t_0), Z(t_0,t_0) = Y(t_0)Y^{-1}(t_0) = I$.

#25 Построение ФСР для сист. ур-й с пост. кф, когда сущ. базис из собств. век-в м-цы A

Рассм. ЛСОДУ $d\overline{y}/dt = A\overline{y}(t)$ с вещ. м-цей A.
По аналогии со ск. ур-ем $y'(t) = \alpha y(t)$, будем иск. нетрив. реш. в виде $y = h\exp\{\lambda t\}, h \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}$. Подставляя в сист. получ. задачу нах. $\lambda \in \mathbb{C}$, при кот. $(A - \lambda I)h = \theta$.

Пусть кол-во ЛНЗ с/в **= n** (сост. базис $\mathbb{C}^n$).

T$_{4.4.1.}$ Пусть у м-цы A ровно n ЛНЗ с/в h_i, отв. с/з λ_i. Тогда вф-ции $y_i = h_i \exp\{\lambda_i t\}$ обр. ФСР на $\forall[a, b]$.

[h]

#26 Построение ФСР для сист. ур-ий с пост. кф, когда не сущ. базис из собств. век-в м-цы A.

Рассм. ЛСОДУ $d\overline{y}/dt = A\overline{y}(t)$ с вещ. м-цей A.
По аналогии со ск. ур-ем $y'(t) = \alpha y(t)$, будем иск. нетрив. реш. в виде $y = h\exp\{\lambda t\}, h \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}$. Подставляя в сист. получ. задачу нах. $\lambda \in \mathbb{C}$, при кот. $(A - \lambda I)h = \theta$.

Пусть кол-во ЛНЗ с/в **< n**.

$\text{T}_{4.4.1.}$ Сист. n вф-ций, сост. из объединения реш. (*) для всех разл. с/з, явл. ФСР ЛСОДУ на $\forall[a, b]$.

[h]