© RB MSU CMC, 2011

# **[Вопросы]** Диффуры.
(2 Курс, IV Семестр)

1. Понятие ДУ. Мат. модели: движение точки, дин. популяций
2. Понятие реш. ОДУ I порядка. ОДУ в симм. форме. Общий интеграл
3. Теорема о сущ. общего интеграла для УПД. Критерий УПД
4. Задача Коши. Лемма Гронуолла-Беллмана
5. Единств. реш. задачи Коши для ДУ 1-го порядка, разр. отн. произв.
6. Сущ. реш. задачи Коши для ДУ 1-го порядка, разр. отн. произв.
7. ДУ 1-го порядка, неразр. отн. производной. Сущ. и единств. реш. задачи Коши
8. Особые решения ур-я 1-го порядка, неразр. отн. производной
9. Норм. системы ДУ. Единств. решения задачи Коши для НСДУ n-ого
10. Сущ. решения задачи Коши для НСДУ на всем отрезке
11. Сущ. и ед. реш. задачи Коши для ДУ n-ого порядка на всем отрезке
12. Сущ. и ед. реш. задачи Коши для СЛДУ и ЛДУ n-ого порядка на всем отрезке.
13. Общие свойства ЛДУ n-ого порядка
14. ЛЗ и ЛНЗ скалярных функций. Определитель Вронского. Примеры
15. ЛЗ и ЛНЗ реш. ЛОДУ n-ого порядка. Теор. об альт. для Det Вронского
16. ФСР для ЛОДУ. Теорема о сущ. ФСР. Теорема об общем реш. ЛОДУ
17. Общее решение ЛНДУ n-ого порядка. Метод вариации постоянных
18. Построение ФСР для ЛОДУ n-ого порядка с пост. коэф.
19. Построение ЛОДУ по заданной сист. реш. Формула Остроградского-Лиувилля
20. Общая теория СЛОДУ. Теор. об экв. СЛОДУ~МДУ. Св-ва реш. МДУ
21. ЛЗ и ЛНЗ вектор-функций. Опр. Вронского. Примеры
22. ЛЗ и ЛНЗ реш. СЛОДУ. Теорема об альт. для опр. Вронского
23. ФСР для СЛОДУ. Теор. о ∃ФСР. Теор. об общем решении СЛОДУ. Матрициант
24. Общее реш. СЛНДУ. Метод вариации пост.
25. Построение ФСР для сист. ур-й с пост. кф, когда сущ. базис из собств. век-в м-цы А
26. Построение ФСР для сист. ур-ий с пост. кф, когда не сущ. базис из собств. век-в м-цы А.

27. Непр. зависимость реш. задачи Коши от нач. усл. и правой части. Теорема сравнения
28. Непрерывная зав-ть реш. задачи Коши от параметра в нач. условии и правой части
29. Дифференцируемость решения задачи Коши по параметру
30. Основные понятия теории устойчивости. Теоремы об устойчивости и неустойчивости решения ЛСДУ. Теорема об исследовании устойчивости реш. системы по I приближению (формулировка)
31. Исследование устойчивости решения системы на основе функции Ляпунова
32. Исследование поведения решения системы в окрестности точек покоя
33. Постановка краевой задачи, краевые усл. Редукция к осн. краевой задаче с однородными краевыми усл.
34. Тождество Лагранжа, формула Грина, формула для определителя Вронского
35. Определение функции Грина. Существование и единственность функции Грина
36. Существование и единственность решения краевой задачи для любой правой части
37. Существование и ед. решения краевой задачи для нелинейного уравнения
38. Задача Штурма-Лиувилля. Свойства СЗ и СФ задачи Штурма-Лиувилля
39. I инт-лы СДУ. О представлении реш. задачи Коши через независимые I инт-лы
40. ЛОДУ в ЧП первого порядка. Связь решения с I инт-лом. Общее решение
41. Квазилинейные ур-ния в ЧП порядка. Теорема о неявном опр. решения через I интеграл. Характеристики. Необходимое и достаточное условие для реш. ур-ния
42. Задача Коши для квазилинейного ур-ния в ЧП 1-го порядка
43. Функционалы, примеры. Вариация ф-ла, необходимое условие экстремума ф-ла
44. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера
45. Необходимое усл. экстремума для функционала с производными высших порядков
46. Необходимое усл. экстремума для функционала, зависящего от ф-ции 2х переменных
47. Задача на условный экстремум
48. Вариационное свойство СЗ и СФ задачи Штурма-Лиувилля

# #1 Понятие ДУ. Мат. модели: движение точки, дин. популяций

**ОДУ** – ур-е, сод. произв. неизв. ф-ции только по одной незав. перем. **ДУ в частных производных** – по нескольким.
**Порядок ДУ** – наиб. порядок вх. в него производных.
ОДУ, разр. отн. старшей производной:

$$y^{(n)}(t) = F\big(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)\big) = 0, t \in [a, b].$$

Это ур-е м.б. сведено к нормальной системе ОДУ:
$y_1'(t) = f_1\big(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\big), \dots, y_n' = f_n$ и наоборот.
Всякое решение норм. системы можно интерпретировать геом. как кривую в (n+1)-мерном пр-ве. Кривая $(t, y_1, \dots, y_n)$ наз. **интегральной кривой;** $(y_1, \dots, y_n)$ – **фазовым пр-вом,** а кривая $\big(y_1(t), \dots, y_n(t)\big)$ – **фазовая траектория.**

**модели**

1) **движение мат. точки**

С единичной массой вдоль прямой $x$. Движение обусл. силой $f(t)$. Из 2 з-на Ньютона $\to$ ${d^2x}/{dt^2} = f(t) \Rightarrow$ $x(t) = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau} f(\theta)d\theta d\tau + c_1 + c_2 t, t_0$ – фикс.

2) **модели динамики популяций**

Изменение численности биологических объектов во времени. Пусть кол-во $u(t) \in C^1$. Пусть изм. кол-ва засчет рожд. и смерти, скорости рожд. (кф А) и смерти (кф Б) пропорциональны: $u_t' = au(t) - bu(t) \Rightarrow u(t) = Cexp\{(a-b)t\}$.

***модель жертвы-хищники:***

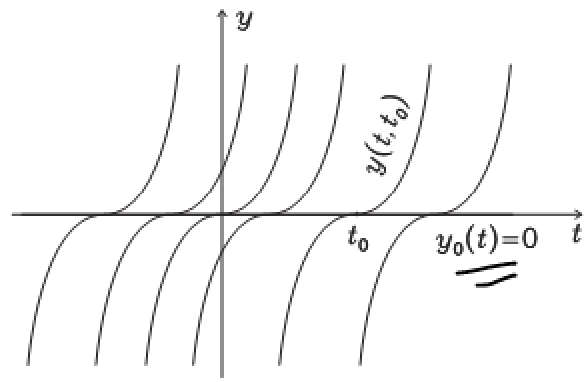
Кол-во жертв $u(t)$, хищников $v(t)$. Жертвы – корм для хищ. → ск. рожд. пропорц. Nжертв, ск. смерт. Nжертв × Nхищ ⇒ $u'(t) = au(t) - bu(t)v(t)$. С другой стороны $v'(t) = cu(t)v(t) - dv(t)$.
Для однозначного определения необх. задать кол-ва в нач. момент $t_0$.

3) **модели пространственного процесса**

Давление $p(z)$ и плотность воздуха $p(z)$ в атмосфере изм. с высотой $z$. Выделим мал. цил. объем в воздухе с высотой $dz$ и пл. сеч. $S$. Вес $P = mg = \rho Sg\, dz$. На цилиндр действ. $F = -Sdp$ (из разности давл. на разных концах цил). Условие равновесия $F = P$, т.е. $dp/dz = -g\rho(z)$.
Из ур-я Клайперона имеем $pV = \mu RT, \mu = \rho V \to \rho = p/RT$.
Получаем $p_z' = -\frac{g}{RT(z)}p(z) \Rightarrow p(z) = p_0 e^{-\frac{g}{R}\int_0^z dz/T(z)}, p_0 = p(z=0)$ – **барометрическая формула** – опр. убывание давления с высотой при известном распред. темп. $T(z)$.

# #2 Понятие реш. ОДУ I порядка. ОДУ в симм. форме. Общий интеграл

Рассмотрим ОДУ $y'(t) = f(t, y(t))$, $f(t, y) \in C\{D\}$.
Ф-ция $y(t)$ наз. **решением** на $[a, b]$, если: 1) она р/непр на нем, 2) $\big(t, y(t)\big) \in D \quad \forall t \in [a, b]$ , 3) $y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$ $\forall t \in [a, b]$. **Направляющий вектор** кас. к инт. кривой (и/к) равен $\Big(1, f\big(t_0, y(t_0)\big)\Big)$, т.к. $f\big(t_0, y(t_0)\big) = tg\ \alpha$ в этой точке.
Реш. **частное** – вып. усл-е единственности: этой и/к не кас. другие и/к. Решение **особое** – в кажд. точке и/к происх. кас. с другими и/к. (*прим.1:* $y'(t) = \sqrt[3]{y^2(t)}, y_0(t) = 0$ - особое)




**ДУ в симм. виде** наз. ур-е $M(t, y)dt + N(t, y)dy = 0$ (*), где $M, N$ опр. в $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и $|M| + |N| > 0$.
Пара ф-ций $t = \varphi(\tau), y = \psi(\tau)$ наз. **парам. решением ДУ в симм. виде** на $[\tau_1, \tau_2]$, если: 1) $\varphi, \psi \in C^1$ и $|\varphi'| + |\psi'| > 0$, 2) $(\varphi, \psi) \in D$, 3) при подстановки в исх. получ. тождество.
Из 1го усл $\Rightarrow \exists\ \tau = \varphi^{-1}$ либо $\tau = \psi^{-1} \Rightarrow$ возм. представить решение как $y = \psi(\varphi^{-1})$ в окр-ти $t_0 = \varphi(\tau_0)$.
(*прим.2:* $tdt + ydy = 0$ задает окружность целиком, при этом однозначной ф-ции $y(t), t(y)$ для описания дуги на $[0, 2\pi]$ не сущ. )

Пусть $\Phi(t, y, c)$ опр. и $\in C$ для $(t, y) \in D$ и для const $c \in C_0$.
Ур-е $\Phi(t, y, c) = 0$ наз. **интегралом ур-я** в обл. $D$, если $\forall c$ оно опр. решение симм ур-я (*). **Общий интеграл** – если опр. все реш: $\forall \varphi, \psi$ – реш. (и/к ∈ D) $\exists c \in C_0 \colon \Phi(\varphi, \psi, c) \equiv 0$.
(*пример:* $t^2 + y^2 - c = 0$ – общий для прим.1, $y - (t - c)^3/27 = 0$ - не общ. в $\mathbb{R}$ для прим.2, т.к. нельзя получ. 0, однако общий в области $y > 0$.)

# #3 Теорема о сущ. общего интеграла для УПД. Критерий УПД

(*) $M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0$

ДУ в симм. виде наз. **ур-ем в полн. дифф-лах (УПД)** в $D$, если сущ. $V(t,y) \in C^1\{D\}$, т.ч. $|V_t'(t,y)| + |V_y'(t,y)| > 0$; $M(t,y) = V_t', N = V_y', \forall (t,y) \in D$.

**$T_{1.4.1.}$ УПД (*) имеет** в $D$ **общий интегра**л $V(t,y) = C$.

[ Проверим, что ур-е явл. интегралом: рассм. (*) в окр. $(t_0, y_0) \in D$ и положим $V(t_0,y_0) = C_0$. Пусть для определенности $V_y' = N \neq 0$. Тогда по т. о неявной ф-ции в нек. окр. $t_0$ **!∃** $y = g(t) \in \boldsymbol{C^1}$: $y_0 = g(t_0), V(t, g(t)) = C_0$ → дифф-ем → $0 = Mdt + Ng'(t)dt \Rightarrow t = t, y = g(t)$ явл. парам. реш. ур-я по опр. ⇒ ур-е явл. интегралом.

Покажем, что явл. общим инт-лом: перейдем к парам. реш. $\varphi, \psi$ и покажем, что $\exists V(\varphi,\psi) = C$: имеем $\boldsymbol{V_\tau'} = M(\varphi,\psi)\varphi' + N(\varphi,\psi)\psi' = \mathbf{0} \Rightarrow V(\varphi,\psi) = C$ и ур-е явл. общ. инт-лом. ]

**→¹** Через ∀ точку $D$ проходит единств. инт/кривая УПД.

**→²** Если $\overline{\alpha}(t,y) = (M,N)$ - век. поле ⇒ $\overline{\alpha} = grad\, V(t,y)$.

**$T_{1.4.2.}$ (критерий)** Пусть $M, N$ и их ЧП 1го порядка непр. в прямоугольнике(стороны||к/осям) $D |M| + |N| > 0$. Тогда **ур-е (*) явл. УПД** ⇔ $\boldsymbol{M_y' = N_t'}$ $\forall (t,y) \in D$.

[ ⇒. УПД ⇒ $M_y' = V_{ty}'', N_t' = V_{yt}''$ (из непр-ти в кажд. точке).

⇐. Пусть $M_y' = N_t'$. Рассмотрим $V(t,y) = \int_{t0}^{t} M(\xi,y)d\xi + \int_{y0}^{y} N(t_0,\eta)d\eta$, $(t_0,y_0)$ – фикс. точка из $D$. Дифф-ем по $t$ → $V_t' = M$. И по $y$, учитывая усл. ⇒ $V_y' = \int_{t0}^{t} N_t'(\xi,y)d\xi + N(t_0,y) = N(t,y) \Rightarrow V(t,y)$ удовл. опр. → ур-е явл УПД. ]

*Пусть $\Phi(t,y,c)$ опр. и $\in C$ для $(t,y) \in D$ и для const $c \in C_0$. Ур-е $\Phi(t,y,c) = 0$ наз. **интегралом ур-я** в обл. $D$, если $\forall c$ оно опр. решение симм. ур-я (*). **Общий интеграл** – если опр. все реш: $\forall \varphi, \psi$ – реш. (и/к ∈ D) $\exists c \in C_0$: $\Phi(\varphi,\psi,c) \equiv 0$.

**$^*T_{2\text{ сем.}}$** ***(О сущ. и дифф-мости неявной ф-ции)***

Пусть 1) ф-ция $F(u,x) = F(u,x_1,\dots,x_n)$ дифф-ма в некоторой окр. $V(u_0,x_0)$; 2) $F(u_0,x_0) = 0, F_u'(u_0,x_0) \neq 0$; 3) $F_u'$ непр. в точке $(u_0,x_0)$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. в $W_\delta(x_0)$ опр. ед. образом ф-ция $\varphi(x) = \varphi(x_1,\dots,x_n)$: $F(\varphi(x),x) = 0$, и $\forall x \in W_\delta(x_0)$ $\|\varphi(x) - u_0\| < \varepsilon$. При этом ф-ция $\varphi(x)$ дифф-ма в $W_\delta(x_0)$, и её ч/п: $F_u'U_x' + F_x' = 0$.

**$^*T_{2\text{ сем.}}$ (дифф-е инт-лов)** Если $f(x) \in \mathcal{R}$ непр. в $\xi \in [a,b]$, то ф-ция $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ дифф-ма в точке $\xi$ и $F'(\xi) = f(\xi)$.

# #4 Задача Коши. Лемма Гронуолла-Беллмана

Пусть $f(t,y)$ опр. и непр. в прямоуг.

$\Pi = \{(t,y): |t-t_0| \le T, |y-y_0| \le A\}$.

**Рассм. ДУ** $y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$ на $[t_0-T, t_0+T]$ с условием $y(t_0) = y_0$. **Задача Коши** – опр-ть $y(t)$, удовл. ДУ+нач.усл.

Рассм. $t_0 - T \le t_1 < t_2 \le t_0 + T$.

Ф-ция $\overline{y}(t)$ наз. **реш. задачи Коши на $[\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}]$ ,** если $\overline{y}(t) \in \boldsymbol{C^1}[t_1,t_2], |\overline{y}(t) - y_0| \le A, \overline{y}(t)$ удов. ДУ $\forall t^{\in[t_1,t_2]}$+н/у.

**Редукция к инт. ур-ю.**

Рассм. на $[t_0-T, t_0+T]$ инт/ур $y(t) = y_0 + \int_{t0}^{t} f\big(\tau, y(\tau)\big) d\tau$.

**Л$_{2.1.1.}$** Ф-ция $\overline{y}(t)$ – **реш. задачи Коши** $\Leftrightarrow$

$\overline{y}(t) \in \boldsymbol{C}[t_1,t_2], |\overline{y}(t) - y_0| \le A, \overline{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t})$ **удовл. инт/уру**.

[ $\Rightarrow$. Реш. Коши по опр. $\Rightarrow$ инт-ем ДУ от $t_0$ до $t$ + исп. нач. условие → удовл. инт/уру.

$\Leftarrow$. Кладем в инт/уре $t = t_0 \to y(t_0) = y_0$. Далее, т.к. $y(t) \in C$ на $[t_1,t_2] \Rightarrow$ правая часть$\in C^1 \Rightarrow y(t) \in C^1$. Тогда дифф-ем инт/ур → $y$ удовл. ДУ в опр. задачи Коши. ]

**Лемма Гронуолла-Беллмана**

Потребуется для док-ва единственности.

**Л$_{2.1.2}$.** Пусть $z(t) \in C[a,b]$ : $0 \le z(t) \le c + d\left|\int_{t0}^{t} z(\tau)d\tau\right|$, $t \in [a,b]$, где $c \ge 0, d > 0, t_0 \in [a,b]$. Тогда $\boldsymbol{z(t) \le ce^{d|t-t_0|}}$.

[ Рассм. $t \ge t_0$. Введем $p(t) = \int_{t0}^{t} z(\tau)d\tau$, $t \in [t_0,b]$. Тогда $p'(t) = z(t) \ge 0$ (т. о пр. инт-ла), $p(t_0) = 0$. По усл. $p'(t) \le c + dp(t)$. $\times\, e^{-d(t-t_0)}$. Оставляем $c$ справа (ост. под дифф-л) → инт-ем от $t_0$ до $t$, учитываем $p(t_0) = 0$: $p(t)e^{-d(t-t_0)}\big|_{t0}^{t} \le \frac{c}{d}\left(1 - e^{-d(t-t_0)}\right) \Rightarrow dp(t) \le ce^{d(t-t_0)} - c$ → нер-во доказано для $[t_0,b]$.

Для $t \le t_0$ : перепишем в виде $0 \le z(t) \le c + d\int_{t}^{t0}$. Обозначим $q(t) = \int_{t}^{t0}$. Тогда $q'(t) = -z(t) \le 0, q(t_0) = 0$. Далее аналогично 1му случаю. ]

# #5 Единств. реш. задачи Коши для ДУ 1-го порядка, разр. отн. произв.

**Условие Липшица:**

Ф-ция $f(t,y)$, зад. в прям**. удовл. в $\Pi$ усл-ю Липшица по $\boldsymbol{y}$**, если $|f(t,y_1)-f(t,y_2)| \le L|y_1-y_2|,\ \forall (t,y_1),(t,y_2) \in \Pi$, где $L \ge 0$ – const.

▲ Если $f, f'_y$ опр. и непр. в $\Pi \Rightarrow f$ удовл. усл-ю Липшица.
[ доказывается через т. Лагранжа ]

▲ Мб не дифф-ма, но удовл. усл-ю: $f=(t-t_0)|y-y_0|$.

▲ Мб непр, но не удовл. усл-ю: $\{\sqrt{y},[0,1]; -\sqrt{y},[-1,0]\}$.

**T$_{2.1.1.}$ (единственность)** Пусть $f$ непр. в $\Pi$ и $f \in Lip[y]$. Если $y_1, y_2$ - реш. Коши на $[t_1,t_2]$, то $y_1(t)=y_2(t)$.

[ Реш. коши $\Rightarrow$ реш. инт/ура $y(t)=t_0+I_{t_0}^t$. Выч. 2е из 1: $|y_1-y_2|=|I_1-I_2| \le |\int_{t_0}^t \left|f\big(\tau,y_1(\tau)\big)-f\big(\tau,y_2(\tau)\big)\right| d\tau \ \to$ по усл. Липшица $|y_1-y_2| \le L\left|\int_{t_0}^t |y_1(\tau)-y_2(\tau)|d\tau\right|$. Обозначим $z(t)=|y_1-y_2|$. Перепишем $0 \le z(t) \le L\left|\int_{t_0}^t z(\tau)d\tau\right|$, $t \in [t_1,t_2]$. Применим лемму Г-Б с $c=0, d=L \Rightarrow z(t)=0 \Rightarrow y_1=y_2$. ]

***Лемма Гронуолла-Беллмана:**

Пусть $z(t) \in C[a,b]$: $0 \le z(t) \le c + d\left|\int_{t0}^t z(\tau)d\tau\right|$, $t \in [a,b]$, где $c \ge 0, d>0, t_0 \in [a,b]$. Тогда $z(t) \le ce^{d|t-t_0|}$.

***Задача Коши** на $[t_0-T, t_0+T]$:
$y'(t)=f\big(t,y(t)\big), y(t_0)=y_0$

Можем д-ть теорему не на всем $[t_0-T, t_0+T]$, а на некотором, в.г., меньшем отрезке (поэтому т. – локальная).

**T2.1.2. (существование)** Пусть $f(t,y)\in C\{\Pi\}$, $\in Lip[y]$ и $|f|\le M$ в $\Pi \Rightarrow$ на $H=[t_0-h, t_0+h], h=\min\{T, A/M\}$,

$$\exists y(t)\in C^1\{H\}: |y(t)-y_0|\le A, t\in\{H\},$$
$$y'(t)=f\big(t,y(t)\big), t\in\{H\}; y(t_0)=y_0.$$

[ Реш задачи Коши $\leftrightarrow$ реш. интура $\Rightarrow$ дост. док-ть, что $\exists y\in C\{H\}^{(3)}: |y-y_0|\le A^{(4)}$ и $y=y_0+I^{(5)}$. Будем док-ть методом посл. приближений.

1) Рассм. посл-ть $y_k: y_0(t)=t_0, y_{k+1}=y_0+I_k$. По мат. инд. док-м, что $\forall k$ вып: $y_k\in C\{H\}, |y_k(t)-y_0|\le A$.
 $k=0$: $y_0(t)=y_0$. Пусть верно для $k=m$.
 $k=m+1$: рассм. $y_{m+1}=y_0+I_m$.

Т.к. $|y_m-y_0|\le A$, то $f(t,y_m(t))$ $(\sim f_m)$ опр. и непр. на $\{H\}\Rightarrow I_m$ опр. и непр. в $\{H\}\Rightarrow \boldsymbol{y_{m+1}}\in \boldsymbol{C}\{H\}$.

Оценим: $|\boldsymbol{y_{m+1}}-\boldsymbol{y_0}|\le |I_m|\le \left|\int_{t0}^t Md\tau\right|\le Mh\le \boldsymbol{A}$.

2) Док-м, что $|y_{k+1}-y_k|\le AL^k|t-t_0|^k/k!$ :
 $k=0$: $|y_1-y_0|=|I_0|\le Mh\le A$ *– ок.* Пусть k=m-1 ок.
 $k=m$: $|y_{m+1}-y_m|=|I_m-I_{m-1}|\le$ {исп. усл. Lip + нер-во для k=m-1} $\le L\left|\int_{t0}^t|y_m-y_{m-1}|d\tau\right|\le L\left|\int_{t0}^t AL^{m-1}\frac{|\tau-t_0|^{m-1}}{(m-1)!}d\tau\right| = ok.$

3) Представим $y_k(t)$ как ч/с: $y_k=y_0+\sum_{n=1}^k(y_n-y_{n-1})$. Р/сх $\sim$ сх-ти $\sum_{n=1}^\infty(y_n-y_{n-1})$ на $\{H\}$. По пр. Вейерштрасса $|y_n-y_{n-1}|\le c_n$ (оценка п.2), а $\sum c_n$ сх-ся по Даламберу $\Rightarrow$ ряд р/сх на $\{H\}\Rightarrow\{y_k\}\rightrightarrows y(t)$. А т.к. все $y_k\in C\{H\}\Rightarrow y\in C\{H\}$.

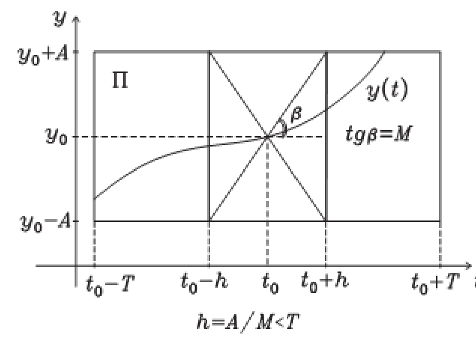
4) Покажем, что $|y-y_0|\le A$: дост. перейти к пределу в $|y_k-y_0|\le A$.

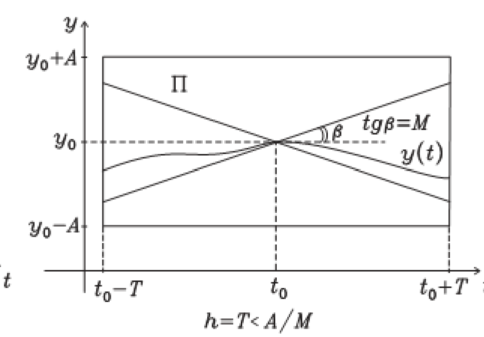
5) Покажем, что $y$ – реш. инт/ура $y=y_0+I$: в силу $y_k\rightrightarrows y \;\Rightarrow\; \forall\ \delta>0\ \exists k_0(\delta): \forall k\ge k_0: |y_k-y|<\delta \;\rightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ выбираем $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/Lh$ и $k_0=k_0\big(\delta(\varepsilon)\big)$, т.ч. при $k\ge k_0$ $|f_k-f|\le L|y_k-y|<\varepsilon/h, \tau\in\{H\}$.
 Тогда получаем $|I_k-I|<\frac{\varepsilon}{h}(t-t_0)<\varepsilon, t\in\{H\}$, что позволяет перейти к пределу в $y_{k+1}=y_0+I_k$, k→∞.
 Т.о. $y$ явл. решением инт/ура → реш. Коши на $\{H\}$.

]

▲Доказываем только на $\{H\}$, т.к. т. $\big(t,y(y)\big)$ не должна выходить за $\Pi$, т.к. чтобы $|y-y_0|\le A\longleftarrow$ необх, поскольку только в $\Pi$ $|f|\le M$ и $\in$Lip. Увеличивать $h$ засчет $A$ нельзя, т.к. при ↑A ↑M=tgβ.

*пример:* $a>0$; $y'=a(y^2+1), y(0)=0$ – ф-ция $f$ опр. $\forall t$, однако $y=tg(at)$ сущ. только на $[-h_1,h_1]\subset\left(-\frac{\pi}{2a},\frac{\pi}{2a}\right)$.




***Условие Липшица:**

Ф-ция $f(t,y)$, зад. в прям**. удовл. в $\Pi$ усл-ю Липшица по $y$**, если $|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\le L|y_1-y_2|$, $\forall(t,y_1),(t,y_2)\in\Pi$, где $L\ge 0$ – const.

# #7 ДУ 1-го порядка, неразр. отн. производной. Сущ. и единств. реш. задачи Коши

Рассм. (*) $\boldsymbol{F\big(t, y(t), y'(t)\big) = 0}$. Будем считать $F(t, y, p)$ опр. в параллелепипеде $D$ с центром в нек. т.$(t_0, y_0, y_0') \in \mathbb{R}$:

$$D = \{(t, y, p) \colon |t - t_0| \le a, |y - y_0| \le b, |p - y_0'| \le c\}$$

Ф-ция наз. реш. (*) на $[t_1, t_2]$, если: 1) $y \in C^1$, 2) $(t, y, y') \in D$, 3) вып. (*); $\forall t \in [t_1, t_2]$.
Если ур-е разр. отн. произв. $\sim F = p - f(t, y)$, то для получ. ед. решения дост. задать усл. прохождения соотв. и/к через нек. точку $(t_0, y_0) \to$ задача с доп. условием.
Однако для (*) характерна неединственность (напр. для $y'^2 - (t + y)y' + ty = 0 \to y_1 = t^2/2 + C_1$ и $y_2 = C_2 e^t \to$ 2 реш. при $y(0) = 1$, 4 реш. при $y(0) = 0$)
Необх. задать еще 1 условие: наклон касательный в заданной точке. Приходим к **задаче Коши для (*):**

$$(**)\ F\big(t, y(t), y'(t)\big) = 0, y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0'$$

**$T_{2.2.1.}$ (сущ и ед.)** Пусть $F(t, y, p)$ опр. в $D$ и
1) $F(t_0, y_0, y_0') = 0$; 2) $F, F_y', F_p' \in C\{D\}$; 3) $F_d'(t_0, y_0, y_0') \ne 0$.
$\Rightarrow \exists h$, т.ч. на $\{H\} = [t_0 - h, t_0 + h]$ !∃ реш. задачи Коши.

[ Рассм. в окр-ти $(t_0, y_0, y_0')$ ур-е $F(t, y, p) = 0$. Из условий и т. о неявной ф-ции ⇒ ∃ B-окрестность т.$(t_0, y_0)$, в кот. !∃ непр. ф-ция $p = f(t, y)$, им. в $B$ непр. ЧП $f_y' = F_y'/F_p'$ и явл. реш. ур-я. +Вып. равенство $y_0' = f(t_0, y_0)$.

В окр. $B$ ур-е (**) $\sim$ ДУ, разр. отн. произв. Рассм. задачу Коши в прям. $\Pi = \{(t, y) \colon |t - t_0| \le a_0, |y - y_0| \le b_0\}$, где $a_0, b_0 \colon \Pi \subset \mathrm{B}$.

Ф-ция $f \in C\{B\} \Rightarrow \in C\{\Pi\}$ и вып. усл-е Липшица с $L = \max_{\text{в }\Pi} |f_y'|$. Т.о. вып. все усл-я для т. о !∃ реш. Коши ⇒ $\exists h > 0$, т.ч. на $\{H\}$ !∃ реш. задачи Коши ⇒ !∃ и для задачи Коши (**). ]

***$T_{2\text{ сем.}}$ *(О сущ. и дифф-мости неявной ф-ции)***
Пусть 1) ф-ция $F(u, x) = F(u, x_1, \ldots, x_n)$ дифф-ма в некоторой окр. $V(u_0, x_0)$; 2) $F(u_0, x_0) = 0, F_u'(u_0, x_0) \ne 0$; 3) $F_u'$ непр. в точке $(u_0, x_0)$.
Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. в $W_\delta(x_0)$ опр. ед. образом ф-ция $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) \colon F(\varphi(x), x) = 0$, и $\forall x \in W_\delta(x_0)$ $\|\varphi(x) - u_0\| < \varepsilon$. При этом ф-ция $\varphi(x)$ дифф-ма в $W_\delta(x_0)$, и её ч/п: $F_u' U_x' + F_x' = 0$.

# #8 Особые решения ур-я 1-го порядка, неразр. отн. производной

Ф-ция $y = \xi(t)$ – **особое реш. (о/р) ДУ** $F\big(t, y(t), y'(t)\big) = 0$ на $[t_1, t_2]$, если оно явл. решением, и через кажд. т. соотв. и/к $\Gamma$ проходит другое реш., не отл. от данного в ск. угодно малой окр. точки.

Т.о. нарушаются усл-я т. !∃ реш. Коши.

Рассм. ситуации, приводящие к появлению о/р:

Среди реш., для кот. $\nexists F'_y$ (пример: $y' = \sqrt[3]{y^2}$, $y = 0$ - о/р).

Пусть вып. усл: $F, F'_y, F'_p \in C\{D\}$. Если сущ. особое реш. $\xi(t)$, то тройка $(t, \xi, \xi')$ при каждом $t$ явл. реш. системы $\{F(t, y, p) = 0; F'_p(t, y, p) = 0\}$. Исключая $p$ получаем ур-е $\Phi(t, y) = 0$ – его реш. задаются **дискриминантными кривыми (д/к).** ∃3 случая: 1) $\Phi = 0$ задает о/р; 2) $\Phi = 0$ задает не о/р; 3) $\Phi = 0$ задает ф-цию, не явл. реш. исх. ур-я.

*примеры:*

$y'^3 - y^2 = 0.$ Из сист. для д/к → $y(t) = 0$, совп. с реш→ о/р.

$y'^2 - y^2 = 0.$ Получаем $y(t) = 0$ – не касается семейств и/к решения $y_1 = c_1 e^{\pm t}$ ни в одной точке → не о/р.

$p^2 - (t + y)p + ty = 0.$ Сист. д/к → $y = t$ - не явл. реш.

*****Ф-ция наз. реш. $F\big(t, y(t), y'(t)\big) = 0$ на $[t_1, t_2]$, если: 1) $y \in C^1$, 2) $(t, y, y') \in D$, 3) вып. ур-е↑; $\forall t \in [t_1, t_2]$.

*****Задача Коши для неразр. отн. произв:

(**) $F\big(t, y(t), y'(t)\big) = 0, y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0$

# #9 Норм. системы ДУ. Единств. решения задачи Коши для НСДУ n-ого

Пусть ф-ции $f_i(t, y_1, \dots, y_n), i = 1,2, \dots, n$ опр. и непр. для $t \in [a, b], y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Требуется опр. ф-ции $y_1, \dots, y_n$, явл. реш. норм. сист. ДУ на $[a, b]$: $\{y_i'(t) = f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)$ и удовл. нач. условиям $y_i(t_0) = y_{01} \in \mathbb{R}$, где $t_0 \in [a, b]$ - **задача Коши для НСДУ.**

Ф-ции $y_1, \dots, y_n$ – **реш. задачи Коши(НСДУ) на $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$,** если: 1) $y_i(t) \in \boldsymbol{C^1}[a, b]$; 2) $y_i'(t) = f_i$; 3) $y_i(t_0) = y_{0i}$; $t \in [a, b]$.

**Условие Липшица:**

Ф-ция $f(t, y)$, **удовл. в $\Pi$ усл-ю Липшица по $\boldsymbol{y}$**, если $\exists L > 0$:
$|f(t, y) - f(t, \tilde{y})| \le L(|y_1 - \widetilde{y_1}| + \dots + |y_n - \widetilde{y_n}|)$,
$y = (y_1, \dots, y_n), \tilde{y} \in \mathbb{R}$.

**T$_{2.3.1.}$ (единственность)** Пусть $f_k(t, y), k = \overline{1, n}$ опр. и непр. при $t \in [a, b]$, $f \in Lip[y]$ с одной и той же константой $L$. Если $y, \tilde{y}$ - реш. Коши на $[a, b]$, то $y_i(t) = \widetilde{y_i}(t)$.

[ $y$ - реш. коши $\Rightarrow y_i(t) = f_i(t, y) \to$ инт-ем от $t_0$ до $t$ исп. нач. усл-е: $y_i(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, y) d\tau, t \in [a, b]$, аналогично $\widetilde{y_i}(t) = y_{0i} + I_{\tilde{y}}$. Выч. 2е из 1го и исп. $Lip$: $|y_i - \widetilde{y_i}| = \left|I_y - I_{\tilde{y}}\right| \le L \left|\int_{t_0}^{t} (|y_1 - \widetilde{y_1}| + \dots + |y_n - \widetilde{y_n}|) d\tau\right|$. Обозначим $z(t) = (\dots)$. Перепишем: $|y_i - \widetilde{y_i}| \le L \left|\int_{t_0}^{t} z(\tau) d\tau\right|$. Складывая нер-ва $i = \overline{1, n}$, имеем $z(t) \le nL \left|\int_{t_0}^{t} z(\tau) d\tau\right|$, $t \in [a, b]$. Применим лемму Г-Б с $c = 0, d = L \Rightarrow z(t) = 0 \Rightarrow y_i = \widetilde{y_i}, i = \overline{1, n}, t \in [a, b]$. ]

***Лемма Гронуолла-Беллмана:**

Пусть $z(t) \in C[a, b]$: $0 \le z(t) \le c + d \left|\int_{t0}^{t} z(\tau) d\tau\right|$, $t \in [a, b]$, где $c \ge 0, d > 0, t_0 \in [a, b]$. Тогда $z(t) \le c e^{d|t - t_0|}$.

# #10 Сущ. решения задачи Коши для НСДУ на всем отрезке

**T$_{2.3.2.}$ (существование)** Пусть $f_k(t,y)$ опр. и непр. при $t \in [a,b]$, $f_i \in Lip[y]$ с одной и той же конст. $L$
$\Rightarrow \exists y_1, \dots, y_n$, явл. реш. задачи Коши на всем $[a,b]$.

[ Рассм. на $[a,b]$ сист. интуров: $y_i = y_{0i} + I_y$. Покажем, что если $y_i \in C[a,b]$ и удовл. системе интуров, то они явл. реш. задачи Коши: выполнены ур-я $y_i' = f_i(t,y)$.

Докажем, что $\exists y_i \in C[a,b]$, удовл. системе интуров, используя метод посл. приближений: рассм. посл-ть ф-ций $y^k(t)$, т.ч. $y_i^{k+1} = y_{0i} + I_y^k, y_i^0(t) = y_{0i}$.

1) Докажем, что все $y_i^k$ опр. и непр. на $[a,b]$.

Для $y_i^0$ верно. Пусть верно для m, докажем для m+1: Т.к. $f_i(t,y) \in C$, то $y_i^{m+1} \in C$ (как левая часть равенства).

2) Обозначим $B = \max_{\mathrm{i=1,2\dots}} \max_{\mathrm{t\in[a,b]}} \left|\int_{t0}^t f_i(\tau, y_0)d\tau\right|$.
Покажем, что $\left|y_i^{k+1} - y_i^k\right| \le B(nL)^k|t-t_0|^k/k!$ :

*k=0* – верно, т.к. $\left|y_i^1 - y_i^0\right| = \left|\int_{t0}^t f_i(\tau, y_0)d\tau\right| \le B$. Пусть справедливо для m-1, докажем для m: $|y_i^{m+1} - y_i^m| \le \{Lip\} \le \left|\int_{t0}^t B(nL)^m \frac{|\tau - t_0|^{m-1}}{(m-1)!} d\tau\right| \le$.. - доказано по инд.

3) Рассм. ФР $y_i^0 + \sum_{m=0}^\infty (y_i^{m+1} - y_i^m)$ . Учитывая оценки из п.2, исп. пр. Вейерштрасса, заключаем, что ряды р/сх $\Rightarrow$ посл-ти непр. ф-ций $y_i^k \rightrightarrows y_i$. Переходим к пределу при $k \to \infty$. ]

▲Для вып. усл. Липшица $\Leftarrow$ все $f_k(t,y)$ имели р/огр ЧП: $\left|(f_k)'_{yj}\right| \le D = const$.

***Задача Коши для НСДУ.**
$\{y_i'(t) = f_1\big(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\big)$ и удовл. нач. условиям $y_i(t_0) = y_{01} \in \mathbb{R}$, где $t_0 \in [a,b]$.

# #11 Сущ. и ед. реш. задачи Коши для ДУ n-ого порядка на всем отрезке

Рассм. ОДУ n-го порядка, разр. отн. старшей производной: $y^{(n)}(t) = F\left(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right), t \in [a,b]$ **(*)**
Рассм. усл: $y(t_0) = y_{00}, y'(t_0) = y_{01}, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1}$, где $t_0 \in [a,b]$, а $y_{00}, \dots, y_{0n-1} \in \mathbb{R}$ - заданные числа.

**Задача Коши для ДУ n-го порядка** – отыскание $y(t)$.

Ф-ция $y$ наз. **решением задачи Коши(ДУ)** на $[a,b]$, если $y \in C^n[a,b]$, удовл. (*) и нач. условиям.
**T$_{2.3.3.}$ (сущ. и ед.)** Пусть $F$ опр. и непр. при $t \in [a,b]$, $F \in Lip[y]$ с $L_1 > 0$: $|F(t,y) - F(t,\tilde{y})| \le L_1 \sum_{i=1}^{n} |y_i - \tilde{y}_i|$.
$\Rightarrow$ !$\exists$ $y(t)$, явл. реш. задачи Коши на $[a,b]$.

[ Единственность: пусть $y(t)$ – реш. Коши. Введем $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{n-1} \to y_i$ – решения для норм. системы $\{y_1' = y_2, \dots, y_n' = F(t,y)\}$ с нач/у $y_i(t_0) = y_{0i-1}$. Эта система явл. частным случаем НС с ф-циями $f_i$, кот. опр. и непр. при $t \in [a,b]$ и удовл. $Lip$ с $L = \max\{1, L_1\} \Rightarrow$ задача удовл. усл. т. о ед. реш. для НС.

Существование: для Коши НС выполнены усл: $\exists y_i \in C^1[a,b]$, удовл. НС. Обозначив $y_1(t) = y(t)$ получим $y(t) \in C^n[a,b]$, $y^{(i-1)} = y_i$ и $y(t)$ удовл. (*) $\Rightarrow$ явл. реш. Коши. ]

***Усл. Липшица:** Ф-ция $f(t,y)$, **удовл. в $\Pi$ по $\boldsymbol{y}$**, если $\exists L > 0$: $|f(t,y) - f(t,\tilde{y})| \le L(|y_1 - \widetilde{y_1}| + \dots + |y_n - \widetilde{y_n}|)$, $y = (y_1, \dots, y_n), \tilde{y} \in \mathbb{R}$.

***един. Коши(НСДУ):** Пусть $f_k(t,y), k = \overline{1,n}$ опр. и непр. при $t \in [a,b]$, $f \in Lip[y]$ с одной и той же константой $L$. Если $y, \tilde{y}$ - реш. Коши на $[a,b]$, то $y_i(t) = \widetilde{y_i}(t)$.

***сущ. Коши(НСДУ):** Пусть $f_k(t,y)$ опр. и непр. при $t \in [a,b]$, $f_i \in Lip[y]$ с одной и той же конст. $L$
$\Rightarrow \exists y_1, \dots, y_n$, явл. реш. задачи Коши на всем $[a,b]$.

# #12 Сущ. и ед. реш. задачи Коши для СЛДУ и ЛДУ n-ого порядка на всем отрезке.

Рассм. на $[a,b]$ Коши для **СЛДУ n-го порядка**: $\{y_i'(t) = a_{i1}(t)y_1(t) + a_{i2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{in}(t)y_n(t) + \widehat{f_1}(t)$, *где* $a_{ij}(t), \widehat{f_i}(t)$ – заданные непр. ф-ции. Пусть дано начальное усл. $y_i(t_0) = y_{0i}$.

**T$_{2.3.4.}$ (сущ. и ед. СЛДУ)** Пусть $a_{ij}(t), \widehat{f_i}(t) \in C[a,b]$. Тогда !∃ набор ф-ций $y_1, \dots, y_n$, явл. реш. задачи Коши на $[a,b]$.

[ Система явл. частным случаем НСДУ, где $f_i$ опр. и непр., $\in Lip, L = \max_{1\le i,j\le n} \max_{t\in[a,b]} |a_{ij}(t)|$. ]

Рассм. Коши для **ЛДУ n-го порядка:** $a_0(t)y^{(n)} + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t)$, где $a_i(t), f(t)$ – заданные непр. ф-ции, $a_0(t) \neq 0$ на $[a,b]$. Начальные условия: $y^{(i)}(t_0) = y_{0i}$.

**T$_{2.3.5.}$ (сущ. и ед. ЛДУ)** Пусть $a_i(t), f(t) \in C[a,b]$. Тогда !∃$y(t)$, явл. реш. задачи Коши на $[a,b]$.

[ Явл. частным случаем ур-я ДУ n-го порядка с ф-цией $F(t,y) = \frac{f}{a_0} - \frac{a_n}{a_0}y_1 - \cdots - \frac{a_1}{a_0}y_n$ – опр. и непр. на $[a,b]$, $F \in Lip[y]$ с $L = \max_{1\le i\le n} \max_{t\in[a,b]} |a_i/a_0| \Rightarrow$ для задачи Коши(ДУ) вып. усл. т. о !∃ ед. реш. для ДУ. ]

***Усл. Липшица:** Ф-ция $f(t,y)$, **удовл. в** $\Pi$ **по** $\boldsymbol{y}$, если $\exists L > 0$: $|f(t,y) - f(t,\tilde{y})| \le L(|y_1 - \widetilde{y_1}| + \cdots + |y_n - \widetilde{y_n}|)$, $y = (y_1, \dots, y_n), \tilde{y} \in \mathbb{R}$.

***Задача Коши для НСДУ:** $\{y_i'(t) = f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)$ и удовл. нач. условиям $y_i(t_0) = y_{01} \in \mathbb{R}$, где $t_0 \in [a,b]$.

***Задача Коши для ДУ:** $y^{(n)}(t) = F\left(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$, удовл. нач. усл. $y(t_0) = y_{00}, y'(t_0) = y_{01}, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1}$ $t_0, t \in [a,b]$.

# #13 Общие свойства ЛДУ n-ого порядка

Рассм. **ЛДУ n-го порядка:** $a_0(t)y^{(n)} + \dots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t)$, где $a_i(t) \in C[a,b] - \mathbb{R}, f(t) \in C[a,b] - \mathbb{C}, a_0(t) \neq 0$.

**Линейным дифф-ным оператором n-го порядка** наз. $\mathcal{L}y = a_0(t)y^{(n)} + \dots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t)$. Опред. для всех $y(t) \in C^n[a,b]$, причем $\mathcal{L}y \in C[a,b] \to \mathcal{L}y = f(t)$.
Если $f(t) = 0$, то уравнение **однородное(ЛОДУ),** иначе **неоднородное(ЛНДУ).**

**Т$_{3.2.1.}$** Если $y_k$ явл. реш. ур-ний $\mathcal{L}y_k = f_k(t)$, то $y(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k y_k(t)$, где $c_k = const \in \mathbb{C}$, явл. реш. $\mathcal{L}y = f(t)$, где $f(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k(t)$.

[ Из линейности $\mathcal{L}$: $\mathcal{L}y = \sum c_k \mathcal{L}y_k = \sum c_k f_k = f(t)$. ]

$\to^{1}$ Л/к решений ЛОДУ явл. его решением.

**Т$_{3.2.2.}$** Решение задачи Коши $\mathcal{L}y = f(t)$, $y(t_0) = y_{00}, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1}$ представимо в виде $y(t) = v(t) + w(t)$, где $v(t)$ - реш. Коши для неоднородного ур-я $\mathcal{L}v = f(t)$ с нулевыми нач. условиями, а $w(t)$ – решение Коши для однородного ур-я с ненулевыми.

[ Сумма удовл. ЛНДУ в силу пред. теоремы для $y_1 = v, y_2 = w$. Для нач. условий $y^{(k)}(t_0) = v^{(k)}(t_0) + w^{(k)}(t_0) = y_{0k}$. ]

**Т$_{3.2.3.}$** Решение задачи Коши для одн. ур-я с нач. усл. $\mathcal{L}y = 0, y^{(i)}(t_0) = y_{0i}$ предст. в виде суммы $y(t) = \sum_{m=0}^{n-1} y_m(t) y_{0m}$, где $y_m(t)$ – решения зад. Коши $\mathcal{L}y_m = 0, y_m^{(m)}(t_0) = 1, y^{(k)}(t_0) = 0, \forall k \in \{0,1,\dots,n-1\} \backslash \{m\}$.

[ Ф-ция $y$ явл. реш. ЛОДУ как ЛК реш. $y_m$ однородного с пост. к/ф в силу т3.2.1. Нач. условия также выполнены: $y^{(k)}(t_0) = \sum_{m=0}^{n-1} y_m^{(k)}(t_0) y_0^{(m)} = y^{(k)}(t_0) y_{0k}$. ]

# #14 ЛЗ и ЛНЗ скалярных функций. Определитель Вронского. Примеры

Рассм. произ. скалярные ф-ции $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ на $[a, b]$.
**Ф-ции наз. ЛЗ** на $[a, b]$, если найдется нетривиальный набор кф $c_k \in \mathbb{C}$, т.ч. ЛК ф-ций с этими кф = 0. Если равенство вып. только для тривиального набора, то **ЛНЗ.**

(прим. $\varphi_1 = t^3, \varphi_2 = t^2|t|$: если $a < 0 < b$ - ЛНЗ)

**Опр. Вронского сист. ф-ций** $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C^{m-1}[a, b]$ наз. det (завис. от $t \in [a, b]$):

$W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](t) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_m \\ \varphi_1^{(m-1)} & \varphi_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$ - *порядка* $m$.

**Т**$_{3.3.1.}$ **(Н/у ЛЗ)** Система ф-ций $\in C^{m-1}$ явл. ЛЗ $\Rightarrow W = 0$.

[ Т.к. $\varphi_k$ - ЛЗ → сущ. нетрив. набор констант, для кот. справедливо $c_1\varphi_1 + \dots + c_m\varphi_m = 0$. Дифф-ем (m-1) раз ⇒ вектор-стб опр. Вронского ЛЗ ⇒ $det = 0$. ]

**→**[1] Если $W(t_0) \neq 0 \Rightarrow$ сист. ф-ций ЛНЗ.

Равенство W=0 – только необх. усл: прим:

$W[\varphi_1, \varphi_2] = \begin{vmatrix} t^3 & t^2|t| \\ 3t^2 & 3t|t| \end{vmatrix} \equiv 0$, *однако* ф-ции ЛНЗ на $[-1,1]$.

*$W = 0$ это $W[y_1, \dots, y_n](t) = 0 \ \forall t \in [a, b]$

# #15 ЛЗ и ЛНЗ реш. ЛОДУ n-ого порядка. Теор. об альт. для Det Вронского

Рассм. **ЛОДУ порядка n** с действ. кф $a_j(t) \in C[a,b]$:

$a_0 y^{(n)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ *(*)*

Рассм. сист. ск. ф-ций $y_1, \dots, y_n$ - решение ОДУ.

**Т$_{3.3.2.}$ (Критерий ЛЗ)** Для $y_1, \dots, y_n$ - реш. ЛОДУ, $\forall t \in [a,b]$

либо $W[y_1, \dots, y_n](t) \equiv 0$ и $y_1, \dots, y_n$ ЛЗ;

либо $W[y_1, \dots, y_n](t) \neq 0$ и $y_1, \dots, y_n$ ЛНЗ;

[ 1) Пусть в какой-то точке $W(t_0) = 0$. Рассм. СЛАУ, сост. из ЛК столбцов $W$. Т.к. её det=W=0 → система имеет нетрив. решение $c_1, \dots, c_n$ → ЛЗ по опр.

Рассм. ф-цию $y(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(t)$. Т.к. $\mathcal{L} y_k = 0$, то из т.3.2.1 ⇒ ф-ция $y$ явл. реш. (*), а из СЛАУ ⇒ удовл. нач. усл. $y^{(m)}(t_0) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k^{(m)}(t_0) = 0,^{m=0\dots n-1}$ ⇒ по т. о ед. реш. задачи Коши для ЛОДУ $!\exists\ y(t) = 0 = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k \Rightarrow y_k$ ЛЗ на $[a,b]$. (⇒ W=0 на всем $[a,b]$ по т3.3.1).

2) Пусть найдется точка, т.ч. $W(t_0) \neq 0$. Тогда из. след.т3.3.1 ⇒ система ф-ций $y_k$ ЛНЗ и $W \neq 0$ ни в одной точке $[a,b]$ (иначе ЛЗ по пред.). ]

(прим. $\varphi_1 = t^3, \varphi_2 = t^2|t|$: не могут явл. реш. ЛОДУ 2-го порядка, т.к. $W \equiv 0 \Rightarrow$ сист. $y_k$ ЛЗ → не реш.)

***Т$_{3.2.1.}$** Если $y_k$ явл. реш. ур-ний $\mathcal{L} y_k = f_k(t)$, то $y(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k y_k(t)$, где $c_k = const \in \mathbb{C}$, явл. реш. $\mathcal{L} y = f(t)$, где $f(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k(t)$.

***Опр. Вронского сист. ф-ций** $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C^{m-1}[a,b]$ наз. det (завис. от $t \in [a,b]$):

$W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](t) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_m \\ \varphi_1^{(m-1)} & \varphi_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$ - *порядка $m$.*

***Т$_{3.3.1.}$ (Н/у ЛЗ)** Система ф-ций $\in C^{m-1}$ явл. ЛЗ ⇒ $W = 0$.

**→[1]** Если $W(t_0) \neq 0 \Rightarrow$ сист. ф-ций ЛНЗ.

# #16 ФСР для ЛОДУ. Теорема о сущ. ФСР. Теорема об общем реш. ЛОДУ

Рассм. ЛОДУ порядка n с действ. кф $a_j(t) \in C[a,b]$:

$$a_0 y^{(n)} + \dots + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \ (*)$$

**ФСР ЛОДУ** n-го порядка на $[a,b]$ наз. система из n ЛНЗ реш.

**Т$_{3.4.1.}$** У ∀ЛОДУ сущ. ФСР на $[a,b]$.

[ Рассм. м-цу $B = \{b_{ij}\}$, т.ч. $detB \neq 0$. Обозн. через $y_j(t)$ решения задачи Коши для (*) с нач. усл. $y_j = b_{1j}, \dots, y_j^{(n-1)} = b_{nj}, j = \overline{1,n}$. По т. о !∃ реш. Коши для ЛОДУ, $y_j$ сущ. и опр. однозначно. Опр. Вронского $W[y_1, \dots, y_n](t_0) = detB \neq 0$ ⇒ по т3.3.2 он ≠0 ни в одной точке $[a,b]$ и $y_j$ ЛНЗ ⇒ они обр. ФСР. ]

▲ Выбирая разл. м-цы $B$: $detB \neq 0$ получаем разл. ФСР ур-я(*) ⇒ ФСР опр. неоднозначно.

▲Т.к. к/ф $a_j \in \mathbb{R}$, то ФСР реш. ЛОДУ м.б. выбрана $\mathbb{R}$.

**Общим решением ЛОДУ** наз. реш. (зависит от от $n$ ∀const), т.ч. ∀другое реш. м.б. получено выбором этих констант.

**Т$_{3.4.2.}$** Пусть $y_1, \dots, y_n$ - ФСР ЛОДУ на $[a,b]$. Тогда общее реш. $y_{OO}(t) = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n, \forall c_j \in \mathbb{C}$.

[ Т.к. ЛК реш. явл. реш. ⇒ $y_{OO}$ - реш. $\forall c_k$.

!∃: Любое другое реш. м.б. получено выбором $c_k$:

Пусть $\tilde{y}$ - нек. решение. Рассм. СЛАУ отн. неизв. $c_k$:

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + \dots + c_n y_n(t_0) = \tilde{y}(t_0) \dots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) = \tilde{y}^{(n-1)}(t_0). \end{cases}$$

Опр. СЛАУ $= W[y_1, \dots, y_n](t_0) \neq 0$ (т.к. реш. $y_i$ ЛНЗ) ⇒ сист. имеет ед. решение $\widetilde{c_1}, \dots, \widetilde{c_n}$.

Рассм. ф-цию $\hat{y}(t) = \widetilde{c_1} y_1 + \dots + \widetilde{c_n} y_n$ - реш. (*) ⇒ (т.к. $\widetilde{c_i}$ - реш. СЛАУ) $\hat{y}^{(k)}(t_0) = \tilde{y}^{(k)}(t_0)$ ⇒ $\tilde{y}, \hat{y}$ – реш. (*) и удовл. одним и тем же нач. усл ⇒ по т. о !∃ реш Коши $\tilde{y} = \hat{y}$. ]

→[1] Ур-е не может иметь более n ЛНЗ реш.

***Т$_{3.3.2.}$** **(Критерий ЛЗ)** Для $y_1, \dots, y_n$ - реш. ЛОДУ, $\forall t \in [a,b]$
либо $W[y_1, \dots, y_n](t) \equiv 0$ и $y_1, \dots, y_n$ ЛЗ;
либо $W[y_1, \dots, y_n](t) \neq 0$ и $y_1, \dots, y_n$ ЛНЗ;

# #17 Общее решение ЛНДУ n-ого порядка. Метод вариации постоянных

Рассм. ЛНДУ с действ. кф $a_j(t) \in C[a,b]$:

$$a_0 y^{(n)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t) \in C[a,b] \text{ (*)}.$$

**Общим решением ЛНДУ** наз. завис. от $n$ ∀конст. реш., т.ч. ∀другое реш. м.б. получено выбором этих констант.

**Т$_{3.4.3.}$** Пусть $y_1, \ldots, y_n$ - ФСР ЛОДУ на $[a,b]$, $y_H$ – частное реш. Тогда общее реш. $y_{OH} = y_H + y_{OO}$, где $y_{OO}(t) = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n - \text{реш. одн.}, \forall c_j \in \mathbb{C}$.

[ Для ∀набора констант ф-ла опр. реш. ЛНДУ в силу линейности. Осталось д-ть, что можно получить ∀реш. выбором const, т.е. ∀реш $\tilde{y}$ $\exists \widetilde{c_i}$: $\tilde{y} = y_H + \widetilde{c_1} y_1 + \cdots + \widetilde{c_n} y_n$.

Пусть $\tilde{y}$ - реш. ЛНДУ. Разность двух реш. ЛНДУ $\tilde{y} - y_H$ явл. реш. ЛОДУ, для которого по т. об общем реш. ЛОДУ найдутся компл. константы $\widetilde{c_i} \Rightarrow y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n = \tilde{y} - y_H \Rightarrow$ вып. искомое равенство. ]

**метод вариации постоянных**

Пусть известна ФСР ЛОДУ. Будем искать частное реш. $y_H = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$ ЛНДУ, где константы → произв. непр. ф-ции $c_1(t), \ldots, c_n(t)$. Пусть производные этих констант опр. из СЛАУ:

$$\begin{cases} c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n = 0, \ldots, \\ c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} = f(t)/a_0(t) \end{cases} \text{(**)}$$

Т.к. $y_k$ <u>обр. ФСР</u>, то для этой СЛАУ (для неизв. $c_k'$) <u>$\det \neq 0$</u> ни в одной точке ⇒ сист. имеет <u>ед. реш.</u> $c_k' = g_k$.

Интегрируем → $c_k(t) = \int_{t0}^{t} g_k(\tau) d\tau$ . Выражения для производных част. реш. принимают вид

$$\begin{cases} y_H^{(k)} = c_1 y^{(k)}(t) + \cdots + c_n y_n^{(k)}, k = \overline{1, n-1} \\ y_H^{(n)} = \sum c_k y_k^{(n)} + \sum c_k' y_k^{(n-1)} = \sum c_k y_k^{(n)} + f(t)/a_0(t) \end{cases}$$

(производная сложной ф-ции + учли **)

Подставляем $y_H$ в левую часть (*) и перегруппируем → $\mathcal{L} y_H = f(t) + \sum c_k \mathcal{L} y_k = f(t) + 0 = f(t)$ (т.к. $y_k$ явл. реш. ЛОДУ → $\mathcal{L} y_k = 0$).

Построили $y_H = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n = \sum y_k(t) \int_{t0}^{t} g_k(\tau) d\tau$ – решение ЛНДУ.

# #18 Построение ФСР для ЛОДУ n-ого порядка с пост. коэф.

Рассм. ЛОДУ с вещ. пост. кф. $\alpha_i \in \mathbb{R}, a_0 \neq 0$:

$$a_0 y^{(n)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \ (*)$$

Это ур-е можем записать в операторном виде $\mathcal{L}y = 0$. Сопоставим дифф. оператору $\mathcal{L}$ **хар. многочлен** $M(\lambda) = a_0\lambda^n + \dots + a_n$. Решим **характеристическое ур-е** $M(\lambda) = 0$. Ф-ция $\exp\{\lambda_0 t\}$ явл. реш. ЛОДУ (*) $\Leftrightarrow \lambda_0$ - корень х/ур. Справедливо равенство $M(\lambda) = a_0 \prod (\lambda - \lambda_i)^{k_i}$, $\lambda_i$ – попарно разл. корни х/у, $k_i$ - их кратности.

**Л$_{3.4.1.}$** Для $\forall g(t) \in C^n$ и $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ справедливо $\mathcal{L}\big(\exp\{\lambda t\}\, g(t)\big) = \exp\{\lambda t\} \sum_{m=1}^{n} M^{(m)}(\lambda) g^{(m)}(t)/m!$.

[ По ф-ле Лейбница $\big(\exp\{\lambda t\}\, g(t)\big)^p = \sum_{m=0}^{p} \frac{p \dots p-(m-1)}{m!} \lambda^{p-m} \exp\{\lambda t\}\, g^{(m)} = \exp\{\lambda t\} \sum_{m=0}^{p} (\lambda^p)^{(m)} g^{(m)}/m! \Rightarrow \mathcal{L}\big(\exp\{\lambda t\}\, g(t)\big) = \sum_{p=0}^{n} (\cdot)^{(p)} = \exp\{\lambda t\} \sum_{p=0}^{n} a_{n-p} \sum_{m=0}^{p} (\lambda^p)^{(m)} g^{(m)}/m!$ Тут можем заменить сумму $\sum_{m=0}^{p} \to \sum_{m=0}^{n}$, т.к. $(\lambda^p)^{(m)} = 0$ при $m > p + 1$.

Меняем порядок: $= \exp\{\lambda t\} \sum_{m=0}^{n} \frac{g^{(m)}}{m!} \left(\sum_{p=0}^{n} a_{n-p} \lambda^p\right)^{(m)} = \exp\{\lambda t\} \sum_{m=0}^{n} \frac{g^{(m)}}{m!} M^{(m)}(\lambda)$, где $M$ - х/м. ]

**Л$_{3.4.2.}$** Для каждого корня $\lambda_j$ кратности $k_j$, ф-ции $\exp\{\lambda_j t\}, t\exp\{\lambda_j t\}, \dots, t^{kj-1}\exp\{\lambda_j t\}$(**) явл. реш. ЛОДУ(*).

[ Справедливо равенство $M(\lambda) = \left(\lambda - \lambda_j\right)^{(k_j)} R(\lambda)$, где $R$ – многочлен ст. $n - k_j$. Производные порядка $m < k_j - 1$ $M^{(m)}(\lambda_j) = 0 \Rightarrow$ в силу пред. леммы для $g(t) = t^p$, $p = 0,1,\dots,k_j - 1$ имеем $\mathcal{L}\left(\exp\{\lambda_j t\}\, t^p\right) = 0$, т.е. перечисленные ф-ции явл. решениями ЛОДУ. ]

**Т$_{3.4.4.}$** Сист. ф-ций (**) сост. ФСР ЛОДУ с пост. кф. на $\forall[a,b]$.

[ Для док-ва дост., чтобы сист. ф-ций была ЛНЗ на $\forall[a,b]$. От противного: предположим НЕтривиальная ЛК ф-ций (**) обращается в ноль на нек. отрезке: $P_1(t)\exp\{\lambda_1 t\} + \dots + P_l(t)\{\lambda_l t\} \equiv 0$, где степень многочлена $\boldsymbol{s_j} = \deg P_j \leq k_j - 1, ^{j=\overline{1,l}}$. Будем считать многочлен $P_j$ нетривиален.

↻Выделяем многочлен 1го члена и забиваем его:

для $P_1(t)$: домножаем нашу ЛК на $\exp\{-\lambda_1 t\}$ и дифф-ем $s_1 + 1$ раз $\to Q_2 \exp\{(\lambda_2 - \lambda_1)t\} + \dots + Q_l(t)\exp\{(\lambda_l - \lambda_1)t\} \equiv 0$, причем $Q_j = \left(\lambda_j - \lambda_1\right)^{s_1+1} p_j t^{s_j} \dots$

для $Q_2(t)$: $\times\exp\{(-\lambda_2 + \lambda_1)t\}$ и дифф-ем $s_2 + 1$ раз $\to$ $R_3\exp\{(\lambda_3 - \lambda_2)t\} + \dots + R_l\exp\{(\lambda_l - \lambda_2)t\} \equiv 0$, $R_j = \left(\lambda_j - \lambda_2\right)^{s_2+1}\left(\lambda_j - \lambda_1\right)^{s_1+1} p_j t^{s_j} + \cdots$

и т.д., на последнем этапе $S_l \exp\{(\lambda_l - \lambda_{l-1})t\} \equiv 0 \Leftrightarrow S_l = 0$, что противоречит нетривиальности $P_l$ со ст. кф $p_l \neq 0 \Rightarrow$ сист. ф-ций ЛНЗ. ]

***Ф-ла Лейбница:** $(f \cdot g)^p = \sum_{m=0}^{p} C_n^p f^{(p-m)} \cdot g^{(m)}$

# #19 Построение ЛОДУ по заданной сист. реш. Формула Остроградского-Лиувилля

Рассм. вопрос о построении ЛОДУ $1 \times y^{(n)} + \boldsymbol{a_1} y^{(n-1)} \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0(*)$, реш. которого явл. зад. ф-ции.

**Т3.5.1. (единственность)** Пусть кф $a_m \in C[a,b] \Rightarrow$ ЛОДУ однозначно опр. ФСР.

[ Пусть $y_1, \ldots, y_n$ - ФСР ЛОДУ(*). Предположим сущ. другое ДУ n-го порядка с кф $b_m \in C[a,b]$, для кот. система также явл. ФСР.

Тогда ф-ции $y_k$ явл. реш. обоих <u>ДУ</u>: вычитаем: $(a_1 - b_1)y_{k-1}^{(\boldsymbol{n-1})} + \cdots + (a_n - b_n)y_k = 0\ ,^{k=\overline{1,n}}$ . Положим $\exists t_0 \in (a,b)\colon a_1(t_0) \neq b_1(t_0)$. Тогда в силу непр. $a_1, b_1$ $\exists \varepsilon > 0\colon a_1(t) \neq b_1(t), t \in B_\varepsilon(t_0) \subset (a,b)$ . Делим на $a_1 - b_1$ и вводим $p_m = (a_m - b_m)/(a_1 - b_1)$ $\rightarrow$ $y_k^{(n-1)} + p_2 y_k^{(n-2)} + \cdots + p_n y_k = 0, \boldsymbol{k} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{n}}$.

Т.о. получили <u>n ЛНЗ ф-ций</u> $y_1, \ldots, y_n$ явл. реш. ЛОДУ (n-1)-го порядка с непр. кф $p_m$. Но была теорема: ЛОДУ (n-1)-го порядка имеет только <u>n-1 ЛНЗ реш.</u> (?!) $\Rightarrow a_1 = b_1$. Док-во равенства ост. ф-ций аналогично. ]

**Т3.5.2. (существование)** Пусть $y_1, \ldots, y_n \in C^n[a,b]$ : $W[y_1, \ldots, y_n](t) \neq 0\ \forall t \in [a,b] \Rightarrow \exists$ЛОДУ порядка n, т.ч. эти ф-ции явл. его ФСР.

[ Рассм. на $[a,b]$ ЛОДУ порядка n для неизв. ф-ции $y(t)$:

$$\det\begin{bmatrix} y_1 \ldots & y_n & y \\ y_1' \ldots & y_n{}' & y' \\ y_1^{(n)} \ldots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{bmatrix} = 0\ (**)$$

Раскладываем опр. по последнему столбцу. Коэфф. при $y(t)$ - это опр. Вронского. (по усл. $W[y_1, \ldots, y_n] \neq 0$). Поделив на $W$ получ. ДУ вида (*) с непр. на $[a,b]$ кф. Все $y_i$ явл. реш. получ. ур-я, т.к. при подстановке $y = y_k$ имеем опр. с двумя одинак. столбцами ($\rightarrow$0). ]

### ф-ла Остроградского-Лиувилля

Введем правило дифф-я функ. определителей: пусть $D(t)$ – det n-го порядка, эл-тами кот. явл ф-ции $y_1, \ldots, y_n \in C^n[a,b]$. Производная $D'(t) = \sum_n det$, каждый из кот. получен из $D$ путем замены одной из его строк на строку из производных.

Тогда найдем производную **определителя Вронского** $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{W}[y_1, \ldots, y_n]$, сост. из $y_1, \ldots, y_n \in C^n[a,b]$.

$$\Delta' = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_n' \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & y_n^{(n)} \end{bmatrix}^{(\boldsymbol{n-1})\times(\boldsymbol{n-1})}$$

(все det, в кот. на пр. зам. $\forall$ строка, кроме посл., равны нулю, как опр. с одинак. строками $\Rightarrow$ только посл. det, у кот. на пр. заменена посл. строка и есть $\Delta'$)

Пусть $y_1, \ldots, y_n$ – ФСР ЛОДУ(*). По т3.5.1. это ДУ однозначно опр. своей ФСР $\Rightarrow$ поделив (**) на $\Delta \rightarrow$ (*). Тогда кф $\boldsymbol{a_1} = -\Delta'/\Delta$.

Интегрируем от $t_0$ до $t \rightarrow$ иск. формула:

$$\Delta(t) = \Delta(t_0)\exp\left\{-\int_{t0}^{t} a_1(\tau)d\tau\right\}, t \in [a,b].$$

$\rightarrow^{1}$ Если кф $a_1 = 0$, то $W[y_1, \ldots, y_n] = const$ на $[a,b]$.

# #20 Общая теория СЛОДУ. Теор. об экв. СЛОДУ~МДУ. Св-ва реш. МДУ

Рассм. на $[a,b]$ **норм. систему ОДУ 1-го порядка в векторной форме** (далее везде черточки) с действ. кф $a_{i,j} \in C[a,b]$ и комплекснозначными(к/з) $f_k \in C$:

$$d\overline{y}/_{dt} = A(t)\overline{y}(t) + \overline{f}(t), t \in [a,b] \text{ (*)},$$

$$\text{где } A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix}, \overline{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Решение $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ явл. **к/з век-тор ф-цией** $y = u + iv$, где $u, v$ имеют $\mathbb{R}$ компоненты.

Система (*) наз. **однородной,** если $f(t) \equiv \theta$ на $[a,b]$.

**T$_{4.1.1.}$** Если $y$ - реш. СЛОДУ, то $\alpha y$ тоже $\forall \alpha \in \mathbb{C}$. Если $y_1, y_2$ – реш., то $y = y_1 + y_2$ тоже.

[ В силу линейности оп-ра дифф-я (лучше расписать). ]

→[1] Если $y_l, ^{l=\overline{1,m}}$ – реш., то $y = \sum_{l=1}^{m} \alpha_l y_l$ - реш. для $\alpha_l \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим **СЛОДУ $d\overline{y}/dt = A(t)\overline{y}(t)$** (**)

Пусть есть n вектор-ф-ций $y_j = \left(y_{1j}, \dots, y_{nj}\right)^T, j = \overline{1,n}$.

Составим м-цу $Y(t)$ с ф-циями в стб: $Y(t) = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{1n} \\ y_{n1} & y_{mn} \end{bmatrix}$.

Сопоставим (**) **матричное ОДУ $dY(t)/dt = A(t)Y(t)$**, где производная матр. ф-ции равна м-це из производных.(МДУ)

**Решением МДУ** наз. $Y(t) \in C^1[a,b]$, обращ. ↑ в тождество.

**T$_{4.1.1.}$ (об экв.)** Вектор-ф-ции $y_1, \dots, y_n$ явл. реш. СЛОДУ ⇔ м-ца $Y(t)$ явл. реш. МДУ.

[ ⇒. Составим матрицу $Y(t)$ . $\frac{dY}{dt} = \left(\frac{dy_1}{dt}, \dots, \frac{dy_n}{dt}\right) = (Ay_1, \dots, Ay_n) = AY$, т.е. вып. матр. ур-е.

⇐. Аналогично, расписывая матр. ур-е по столбцам. ]

**T$_{4.1.2.}$ (св-ва МДУ)** Пусть $Y(t)$ - реш. МДУ. Тогда 1) ∀вектора конст. $\overline{c}$ из $c_j \in \mathbb{C}$, вектор-ф-ция $\overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}$ удовл. СЛОДУ;

2) ∀м-цы конст. $B = \left(b_{ij}\right)^{\in \mathbb{C}^{m \times n}}$, матр-ф $X = YB$ удовл. МДУ.

[ 1) Если $Y$ – реш. МДУ ⇒ по т4.1.1 век-стб. явл. реш СЛОДУ, также как и их ЛК $\overline{y} = Y\overline{c} = \sum c_j \overline{y}_j$.

2) В силу линейности дифф-я и ассоц. × м-ц: $X_t' = (YB)_t' = Y_t' B = \{AY\}B = A\{YB\} = AX$. ]

# #21 ЛЗ и ЛНЗ вектор-функций. Опр. Вронского. Примеры

Рассм. $\forall$ к/з вектор-ф-ции $y_1, \ldots, y_n$, опр. на $[a, b]$. Никакой связи с реш. ДУ и непрерывностью.

**Вф-ции** $y_1, \ldots, y_n$ наз. **ЛЗ** на $[a, b]$, если $\exists c_i \in \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{m} |c_j| > 0$: $c_1 y_1 + \ldots + c_m y_m = \theta$ ($\exists$нетрив. набор конст, т.ч. ЛК=θ). Если вып. только для трив. набора – **ЛНЗ.**

Экв. **век. форма**: $Y(t)\overline{c} = \overline{\theta}$ хотя бы для 1го набора конст.

**Опр. Вронского сист. вф-ции** $y_1, \ldots, y_n$ наз опр. мф-ции (завис. от $t$) $Y(t) = (y_1, \ldots, y_m)$: $\Delta(t) = \det Y(t)$.

**T$_{4.2.1.}$ (н/у лз)** Система вф-ций ЛЗ на $[a, b] \Rightarrow \Delta(t) = 0,^{t \in [a,b]}$.

[ Из усл. ЛЗ $\Rightarrow$ $\exists$ненулевой вектор $c$, т.ч. для фикс. $t_0 \in [a, b]$ $Y(t_0)c = \theta$ → одн. СЛАУ имеет нетрив. реш. $c$ – возможно только для вырожд. м-цы → $\det Y(t_0) = 0$.
Либо: из опр. ЛЗ → ЛЗ стб. $Y(t), \forall t \in [a, b]$. ]

**пример:** $m = 2$, рассм. на $[-1,1]$ две вф-ции.
$y_1 = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}, y_2 = \begin{pmatrix} t^2|t| \\ t|t| \end{pmatrix}, \Delta(t) = \begin{vmatrix} t^3 & t^2|t| \\ t^2 & t|t| \end{vmatrix} \equiv 0$ – ЛНЗ: $c_1 = c_2 = 0$

## #22 ЛЗ и ЛНЗ реш. СЛОДУ. Теорема об альт. для опр. Вронского

Рассм. систему из вф-ций $y_1, \dots, y_m$, явл. реш. СЛОДУ $\boldsymbol{d\overline{y}/dt = A(t)\overline{y}(t)}$ на $[a,b]$, $Y(t)$ - соотв. мф-ция из МДУ. Кол-во вф-ций сопв. с порядком системы.

**Т$_{4.2.2.}$** Пусть $y_1, \dots, y_n$ - реш. СЛОДУ на $[a,b]$. Если $\exists\, t_0 \in [a,b]$, для кот. $\det Y(t_0) = 0 \Rightarrow$ система вф-ций ЛЗ и $\det Y = 0$ на всем отрезке.

[ Однородная СЛАУ $Y(t_0)\overline{c} = \theta$ имеет. ненул. реш $\overline{c_0}$ в силу выр. $Y(t_0)$ (след. т. о ФСР).
Положим $y(t) = Y(t)c_0$ – будет реш. СЛОДУ и $y(t_0) = \theta$. Т.о. $y$ явл. реш. з.Коши с нул. нач. усл. $\Rightarrow$ по т. о !∃ имеет только одно реш. – нулевое: $\theta = y(t) = Y(t)c_0 = c_1^0 y_1 + \dots + c_n^0 y_n$, $\forall t \in [a,b] \Rightarrow$ рассм. сист. вф-ций явл. ЛЗ $\Rightarrow$ т.4.2.1 опр. Вронского $\Delta = \det Y(t) = 0$. ]

**Т$_{4.2.3.}$ (альт.)** Опр. Вронского для сист. вф-ций $y_1, \dots, y_n$, явл. реш. СЛОДУ на $[a,b]$, либо 1) $\det Y(t) \equiv 0$ и ЛЗ; либо 2) $\det Y(t) \neq 0$ ни в одной точке и ЛНЗ.

[ без док-ва ]

***Т$_{4.2.1.}$ (н/у лз)** Сист. вф-ций ЛЗ на $[a,b] \Rightarrow \Delta(t) = 0,^{t \in [a,b]}$.

# #23 ФСР для СЛОДУ. Теор. о ∃ФСР. Теор. об общем решении СЛОДУ. Матрициант

**ФСР СЛОДУ** $\boldsymbol{d\overline{y}/dt = A(t)\overline{y}(t)}$ порядка n на $[a,b]$ наз. совокупность n ЛНЗ реш. $\overline{y_1},\dots,\overline{y_n}$ этой системы (ВЕКТОРа). Соотв. этим реш. фм-ца $Y(t)=(\overline{y_1},\dots,\overline{y_n})$ наз. **фунд. м-цей //** явл. реш. МДУ и имеет $\det Y(t)\neq 0$ на $[a,b]$ (по т4.2.3).

**T**$_{4.3.1.}$ **(о ∃ФСР)** ∀СЛОДУ с непр. кф на $[a,b]$ ∃ ФСР.

[ Фикс. ∀ $t_0\in[a,b]$ и рассм. задачу Коши для МДУ $Y_t'(t)=A(t)Y(t), Y(t_0)=I$. Расписывая по стб. получаем ~ задачам: $d\overline{y_j}/dt = A(t)\overline{y_j}, \overline{y_j}(t_0)=(0,\dots,1,\dots,0)^T, j=\overline{1,n}$, отлич. нач. данными. Из т. о ∃реш. з.Коши для ДУ 1-го порядка ⇒ ∃реш. МДУ. Поскольку $\det Y=\det Y(t_0)=1$, то из т. об альт. для опр. Вронского ⇒ ЛНЗ сист. реш. ⇒ $\overline{y_1},\dots,\overline{y_n}$ обр. ФСР, а $Y(t)$ - фундаментальная м-ца. ]

▲ ФСР неединственна: полагая $Y(t_0)=B, \det B\neq 0$ получим другую ФСР.

▲ $a_{ij}(t)\in\mathbb{R}$ ⇒ ФСР м.б. выбрана вещ.

**Общим решением** наз. реш. (завис. от n ∀const), т.ч. ∀другое реш. м.б. получено из него выбором const.

**T**$_{4.3.2.}$ **(об общ. реш)** Пусть $Y(t)$ – фунд. м-ца СЛОДУ. Тогда общ. реш. представимо в виде $\overline{y_{OO}} = c_1\overline{y_1}+\dots+c_n\overline{y_n} = Y\overline{c}$.

[ Из св-в МДУ вф-ция $Yc$ явл. реш. СЛОДУ $\forall c\in C^n$. Ост. показать, что ∀реш. $\overline{y}$ $\exists\tilde{c}\in C^n$: $\overline{y}(t)=Y(t)\tilde{c}$ (*).
Фикс. $t_0\in[a,b]$ и выч. $y^0=y(t_0)$. Рассм. СЛАУ отн. $\tilde{c}$: $Y(t_0)\tilde{c}=y^0$ → !∃ реш. $\tilde{c}$ (т.к. $\det Y(t_0)\neq 0$ - опр. м-цы кф СЛАУ) ⇒. ф-ции $\tilde{y}=Y(t)\tilde{c}$ и $\overline{y}$ явл. реш. одной и той же задачи Коши: $d\overline{y}/dt = A(t)\overline{y}(t), \overline{y}(t_0)=\overline{y}^{\boldsymbol{0}}$, у кот. по т. !∃ реш. ⇒ $\tilde{y}=\overline{y}$. Это доказывает (*).
Для фикс. реш. $\overline{y}$ вектор конст. $\tilde{c}$ опр. однозначно. ]

**→**[1] Ф-ла для реш. з.Коши с нач. условием: $\tilde{c}=Y^{-1}(t_0)y^0$, $\overline{y}(t)=Y(t)\tilde{c} \Rightarrow \overline{y}(t)=Z(t,t_0)\overline{y}^0$, $Z(t,t_0)=Y(t)Y^{-1}(t_0)$, где $Z$ – **матрициант** – явл. реш. Коши: $Z_t'(t,t_0)=A(t)Z(t,t_0), Z(t_0,t_0)=Y(t_0)Y^{-1}(t_0)=I$.

***T**$_{4.2.3.}$ **(альт.)** Опр. Вронского для сист. вф-ций $y_1,\dots,y_n$, явл. реш. СЛОДУ на $[a,b]$, либо 1) $\det Y(t)\equiv 0$ и ЛЗ; либо 2) $\det Y(t)\neq 0$ ни в одной точке и ЛНЗ.

# #24 Общее реш. СЛНДУ. Метод вариации пост.

Рассм. **систему линейных неоднородных ДУ:**
(*) $d\overline{y}/dt = A(t)\overline{y}(t) + \overline{f}(t), t \in [a,b], f \in C.$
$Y(t)$ – фунд. м-ца соотв. СЛОДУ $d\overline{y}/dt = A(t)\overline{y}(t).$

**Общим решением** наз. реш. (завис. от n ∀const), т.ч. ∀другое реш. м.б. получено из него выбором const.

**Т$_{4.3.3.}$** Общ. реш. представимо в виде: $\overline{y_{OH}}(t) = Y(t)\overline{c} + \overline{y_H}(t), \forall\overline{c} \in \mathbb{C}^n$, где $\overline{y_H}$ - частное реш.

[ В силу лин. $\overline{y_{OH}}$ явл. реш. (*). Ост. показать, что ∀реш. $\tilde{y}(t)\ \exists\tilde{c} \in C^n$: $\tilde{y}(t) = Y(t)\tilde{c} + \overline{y_H}$.
Пусть $\tilde{y}$ - реш. (*). Разность двух реш. НСДУ явл. реш. одн. $\Rightarrow \overline{y_t} = \tilde{y} - \overline{y_H}$ - реш. $d\overline{y}/dt = A(t)\overline{y}(t)$. Тогда по т. об общ. реш. однородной $\exists\tilde{c} \in C^n$, т.ч. вып $\overline{y_t}(t) = Y(t)\tilde{c} \Rightarrow \tilde{y}(t) = Y(t)\tilde{c} + \overline{y_H}$. ]

**метод вариации пост.** для построения част. реш:

**Т$_{4.3.4.}$** $\forall t_0 \in [a,b]$: $\overline{y_H}(t) = \int_{t0}^{t} Z(t,\tau)\overline{f}(t)d\tau, t \in [a,b]$ задает частное решение НСЛДУ, удовл. усл. $\overline{y_H}(t_0) = 0$.

[ Восп. мтдом вариации пост., в кот. $\overline{y_H}$ ищется в виде, повт. структуру общ. реш. однородной сист, где $\overline{c} \in C^1$ вектор-ф-ция: $\overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}(t)$.
Поскольку фунд. м-ца удовл. одн. ур-ю $Y_t' = AY$, имеем $y_t' = Y_t'c + Yc_t' = AYc + Yc_t' \Rightarrow Yc_t' = f$. В силу невыр. фунд. м-цы можем переписать: $c_t' = Y^{-1}f$ и проинтегр. от $t_0$ до $t$: $c = \int_{t0}^{t} Y^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$. Окончательно $y = Yc = Y\int_{t0}^{t} Y^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau = \int_{t0}^{t} Z(t,\tau)f(\tau)d\tau$. ]

**→**[1] Реш. $y(t) = y(t, y_0)$ з. Коши для ЛНСДУ $y_t' = Ay + f$ с зад. в $t_0 \in [a,b]$ нач. усл $y(t_0) = y_0$ имеет вид $y(t, y_0) = Z(t,t_0)y_0 + \int_{t0}^{t} Z(t,\tau)f(\tau)d\tau$.

* $Z$ – **матрициант** – явл. реш. Коши: $Z_t'(t,t_0) = A(t)Z(t,t_0), Z(t_0,t_0) = Y(t_0)Y^{-1}(t_0) = I$.

# #25 Построение ФСР для сист. ур-й с пост. кф, когда сущ. базис из собств. век-в м-цы A

Рассм. СЛОДУ $d\overline{y}/dt = A\overline{y}(t)$ (*) с вещ. м-цей $A$.
По аналогии со ск. ур-ем $y'(t) = \alpha y(t)$, будем иск. нетрив. реш. в виде $y = h\exp\{\lambda t\}, h \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}$. Подставляя в сист. получ. задачу нах. $\lambda \in \mathbb{C}$, при кот. $(A - \lambda I)h = \theta$ (**).

Пусть кол-во ЛНЗ с/в **= n** (сост. базис $\mathbb{C}^n$).

**T$_{4.4.1.}$** Пусть у м-цы $A$ ровно n ЛНЗ с/в $h_i$, отв. с/з $\lambda_i$. Тогда вф-ции $y_i = h_i\exp\{\lambda_i t\}$ обр. ФСР на $\forall[a,b]$.

[ Любое с/з $\lambda_j$ и соотв. с/в $h_j$ удовл. (**) ⇒ кажд. ф-ция $y_i$ явл. реш. (*).
Докажем ЛНЗ: дост. п-ть, что $\det Y \neq 0$ - опр. Вронского. Рассм. $[c,d]$: $[a,b] \subseteq [c,d] \ni 0$. Вф-ции $y_i$ явл. реш. (*) на $[c,d]$. Но т.к. $0 \in [c,d]$ имеем $\det Y(0) = \det(h_1, \dots, h_n) \neq 0$, т.к. иначе с/в были бы ЛЗ. Тогда по т. об альтернативе для опр. Вронского $\det Y(t) \neq 0$ на всем $[c,d]$, а значит и на его части $[a,b]$. ]

# #26 Построение ФСР для сист. ур-ий с пост. кф, когда не сущ. базис из собств. век-в м-цы A.

Рассм. СЛОДУ $d\overline{y}/dt = A\overline{y}(t)$ с вещ. м-цей $A$.
По аналогии со ск. ур-ем $y'(t) = \alpha y(t)$, будем иск. нетрив. реш. в виде $y = h\exp\{\lambda t\}, h \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}$. Подставляя в сист. получ. задачу нах. $\lambda \in \mathbb{C}$, при кот. $(A - \lambda I)h = \theta$.

Пусть кол-во ЛНЗ с/в **< n**.

**T$_{4.4.1.}$** Сист. n вф-ций, сост. из объединения реш. (*) для всех разл. с/з, явл. ФСР ЛСОДУ на $\forall[a,b]$.

[ Выпишем попарно разл. с/з с соотв. кратностями. ]

Пусть далее $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell\}$ обозначает одно из собственных значений с соответствующей кратностью $k$. Покажем, что каждому такому собственному значению можно сопоставить ровно $k$ вектор-функций, являющихся решениями однородной системы (4.23). Если размерность $s = \dim\operatorname{Ker}(A - \lambda E)$ собственного подпространства, определяющая количество линейно независимых собственных векторов для данного собственного значения, равна кратности собственного значения, $s = k$, то искомые функции строятся согласно (4.27).

Если размерность собственного подпространства меньше кратности собственного значения, $s < k$, то, как известно из курса линейной алгебры, можно выбрать собственные векторы $\overline{h}_1^1, \overline{h}_2^1, \dots, \overline{h}_s^1$ так, что состоящая ровно из $k$ векторов система собственных векторов $\overline{h}_j^1$ и присоединенных векторов $\overline{h}_j^m$, $m = 2, \dots, p_j$, $j = 1, \dots, s$, $p_j \geqslant 1$, $p_1 + p_2 + \dots + p_s = k$, которую запишем в виде

$$\begin{array}{ccccc} \overline{h}_1^1, & \dots & \overline{h}_j^1, & \dots & \overline{h}_s^1, \\ \overline{h}_1^2, & \dots & \overline{h}_j^2, & \dots & \overline{h}_s^2, \end{array}$$

удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} A\overline{h}_j^1 &= \lambda\overline{h}_j^1, \\ A\overline{h}_j^2 &= \lambda\overline{h}_j^2 + \overline{h}_j^1, \\ &\dots \\ A\overline{h}_j^m &= \lambda\overline{h}_j^m + \overline{h}_j^{m-1}, \\ &\dots \\ A\overline{h}_j^{p_j} &= \lambda\overline{h}_j^{p_j} + \overline{h}_j^{p_j-1}. \end{aligned} \qquad (4.28)$$

С помощью собственных и присоединенных векторов построим семейство из следующих $k$ функций

$$\begin{aligned} \overline{y}_j^1(t) &= \overline{h}_j^1 \exp\{\lambda t\}, \\ \overline{y}_j^2(t) &= \left(\overline{h}_j^2 + \frac{t}{1!}\overline{h}_j^1\right)\exp\{\lambda t\}, \end{aligned} \qquad (4.29)$$

$$\overline{y}_j^{p_j}(t) = \left(\overline{h}_j^{p_j} + \frac{t}{1!}\overline{h}_j^{p_j-1} + \frac{t^2}{2!}\overline{h}_j^{p_j-2} + \dots + \frac{t^q}{q!}\overline{h}_j^{p_j-q} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \frac{t^{p_j-1}}{(p_j-1)!}\overline{h}_j^1\right)\exp\{\lambda t\},$$

Докажем, что все функции из построенного семейства являются решениями линейной однородной системы (4.23). Рассмотрим функцию $\overline{y}_j^m(t)$, вычислим ее производную $d\overline{y}_j^m(t)/dt$ и сгруппируем результат так, чтобы удобно было воспользоваться соотношениями (4.28). Име-

Докажем, что система из $n$ вектор-функций, состоящая из объединения построенных для всех $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell\}$ решений вида (4.29), является линейно независимой на произвольном отрезке $[a,b]$. Рассмотрим отрезок $[c,d]$, $[a,b] \subseteq [c,d]$, $0 \in [c,d]$. Вектор-функции из (4.29) являются решениями системы (4.23) на отрезке $[c,d]$. В принадлежащей этому отрезку точке $t = 0$ определитель Вронского этой системы отличен от нуля, поскольку соответствующая матрица $Y(0)$ составлена из столбцов, являющихся собственными и присоединенными векторами матрицы $A$, совокупность которых линейно независима и образует базис в $\mathbb{C}^n$. Согласно теореме 4.2.3 об альтернативе для определителя Вронского, $\det Y(t) \neq 0$ на всем отрезке $[c,d]$, а значит и на его части $[a,b]$. Поэтому рассматриваемая система решений (4.23) является линейно независимой на $[a,b]$ и, следовательно, составляет фундаментальную систему решений на этом отрезке. Тем самым установлена справедливость следующей теоремы.

**Теорема 4.4.2.** *Система из $n$ вектор-функций, состоящая из объединения построенных для всех различных собственных значений $\lambda_1$, $\lambda_2$, … $\lambda_\ell$ решений вида (4.29), является фундаментальной системой решений (4.23) на произвольном отрезке $[a,b]$.*

# #27 Непр. зависимость реш. задачи Коши от нач. усл. и правой части. Теорема сравнения

Рассм. задачу Коши для ДУ 1-го порядка, разр. отн. произв.
$y' = f\big(t, y(t)\big), t \in [t_0 - T, t_0 + T], y(t_0) = y_0$.
Пусть $f(t,y) \in C\{(t,y): |t - t_0| \leq T, A \leq y \leq B\} = Q$.
**Реш.на отрезке** наз. $y(t) \in C^1$, $A \leq y \leq B$, и $y$ удовл. (*).
Нач. условие $y_0$ наз. **исходными данными.**

Далее везде $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$.
**Т$_{5.1.1.}$** Пусть $f_1, f_2 \in C\{Q\}$, $f_1 \in Lip(y)$: $\exists L > 0$, т.ч. $|f_1(t,y) - f_1(t,\bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|$ в $Q$. Если $y_1, y_2$ – реш. задачи Коши $\begin{cases} y_1' = f_1 \\ y_1 = y_{01} \end{cases}, \begin{cases} y_2' = f_2 \\ y_2 = y_{02} \end{cases} \Rightarrow \max_t |y_1 - y_2| \leq (|y_{01} - y_{02}| + T \max|f_1 - f_2|) \exp\{LT\}$.
[ Исп. лемму об эквивалентности з. Коши инт ур-ю. ]

При каких усл. реш. одной з. Коши будет ≥ реш. другой?
Будем в прямоугольнике $Q_+ = [t_0, t_0 + T] \times [A, B]$.

**Л$_{5.1.1.}$** (из матана) Пусть $f, f_y' \in C\{Q_+\} \Rightarrow \forall (t, y_1), (t, y_2) \in Q_+$
$f(t,y_1) - f(t,y_2) = \int_0^1 f_y\left(t, y_2 + \theta(y_1 - y_2)\right) d\theta (y_1 - y_2)$
[ h ]

**Т$_{5.1.2.}$** (сравнения) Пусть $f_1, f_2, {f_1}'_y \in C\{Q_+\}$. Если $y_1, y_2$ – реш. задач Коши и $f_1 \geq f_2, y_{01} \geq y_{02} \Rightarrow y_1 \geq y_2$.
[ h ]

# #28 Непрерывная зав-ть реш. задачи Коши от параметра в нач. условии и правой части

Рассм. задачу Коши для ДУ 1-го порядка, разр. отн. произв., в кот. правая часть ур-я и нач. усл. зависят от параметра $\mu$.

Рассмотрим $Q_\mu = [t_0 - T, t_0 + T] \times [A, B] \times [\mu_1, \mu_2]$.
Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), \mu), \\ \quad y(t_0) = y_0(\mu). \end{cases}$$

При каких усл. решение $y(t,\mu) \in C^1\{\mu\}$?
**T**$_{\mathbf{5.2.1.}}$ Пусть $f(t,y,\mu) \in C\{Q_\mu\}$ и $f \in Lip\{y\}$, т.е. $|f(y_1) - f(y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ в $Q_\mu$. Тогда если $y(t,\mu)$ – реш. задачи Коши на $[t_0 - T, t_0 + T]$ $\forall \mu \in [\mu_1, \mu_2] \Rightarrow$ там ф-ция $y \in C\{\mu\}$.
[ h ]
*Фактически док-на равномерная непр-ть на $[t_0 - T, t_0 + T] \times [\mu_1, \mu_2] \rightarrow$ непр. по совокупности $(t, \mu)$.

# #29 Дифференцируемость решения задачи Коши по параметру

Рассмотрим $Q_\mu = [t_0 - T, t_0 + T] \times [A, B] \times [\mu_1, \mu_2]$.
Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), \mu), \\ \quad y(t_0) = y_0(\mu). \end{cases}$$

При каких усл. решение $y(t,\mu) \in D^1\{\mu\}$?

**T$_{5.2.2.}$** Пусть $f, f'_y, f'_\mu \in C\{Q_\mu\}$ и $y_0(\mu) \in C^1[\mu_1, \mu_2]$. Тогда если $y(t,\mu)$ – реш. задачи Коши на $[t_0 - T, t_0 + T]$ $\forall \mu \in [\mu_1, \mu_2]$ $\Rightarrow$ там $y$ имеет производную по $\mu$.

[ h ]

# #30 Основные понятия теории устойчивости. Теоремы об устойчивости и неустойчивости решения ЛСДУ. Теорема об исследовании устойчивости реш. системы по I приближению (формулировка)

В т. устойчивости изучается вопрос о зав-ти решения задач Коши для ДУ (СДУ) от заданных при $t = t_0$ нач. усл. для $t \geq t_0$.

Рассм. **задачу Коши для НСДУ 1-го порядка:**

$$\begin{cases} y_i'(t) = f_i\big(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\big), \\ y_i(t_0) = y_{0i}. \end{cases}$$

где $f_i, f_i' \in C\{\Pi\}$, $\Pi = [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$.

Решение $\bar{y}(t, \overline{y_0})$ наз. **устойчивым по Ляпунову (У),** если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon, \overline{y_0})$: $\forall \widetilde{y_0}$, $\|\overline{y_0} - \widetilde{y_0}\| < \delta \to$ решение з. Коши $y(t, \widetilde{y_0})$ сущ. $\forall t \geq 0$ и $\|\bar{y}(t, \overline{y_0}) - y(t, \widetilde{y_0})\| < \varepsilon$ сразу $\forall t \geq 0$.

Решение $\bar{y}(t, \overline{y_0})$ наз. **асимптотически устойчивым (АУ),** если оно устойчиво по Ляпунову и $\exists \delta_0 > 0$: $\forall \widetilde{y_0}$, $\|\overline{y_0} - \widetilde{y_0}\| < \delta$ и $\exists \lim_{t\to\infty} \|\bar{y}(t, \overline{y_0}) - y(t, \widetilde{y_0})\| = 0$.
Иначе решение наз. **неустойчивым (НУ).**

Рассм. **ЛСДУ с пост. вещ. кф** $\bar{y}' = A\bar{y}$, $A = (a_{ij})$.
Пусть $\lambda_i$ – с/з м-цы $A$.

**Т$_{6.2.1.}$ (АУ)** $Re\,\lambda_k < 0 \Rightarrow$ нулевое реш. $\bar{y}(t, \bar{\theta}) = \bar{\theta}$ – АУ.
[ h ]

**Т$_{6.2.2.}$ (У)** $Re\,\lambda_k \leq 0$ , $\exists$с/з с нулевой вещ. частью, и размерность соотв. собств. подпространств совп. с его кратностью $\Rightarrow$нулевое реш. – У, но не асимптотически.
[ h ]

**Т$_{6.2.3.}$ (НУ)** Пусть вып. хотя бы одно из условий:
1. A имеет с/з $\lambda_m$, $Re\,\lambda_m > 0$;
2. A имеет с/з $\lambda_m$: $Re\,\lambda_m = 0$, dim соотв. с/п/п < кратн.

$\Rightarrow$ нулевое реш. – **НУ.**
[ h ]

//далее речь о векторах $y = (y_1, \dots, y_n)^T$

Рассм**. автономную СДУ** $y' = f\big(y(t)\big)$, $f(\theta) = \theta \Rightarrow$ система имеет нулевое реш. $y(t) = \theta$, кот. иссл. на устойчивость:: пусть $f_j(y) \in C^2$ в нек. окр-ти нач. координат $\Rightarrow$

$$f(y) = Ay + R(y),\ A = \left(\frac{\partial f_i'}{\partial y_j}(0, \dots, 0)\right), R(y) = \bar{o}(\|\bar{y}\|)$$ **(*)**

**Л$_{6.3.1.}$** Пусть вып. (*) и все с/з A им. Re <0 $\Rightarrow$ найдутся $\delta_0, \rho_0 \geq \delta_0 > 0 = const$ : $\forall$реш. $y' = Ay + R\big(y(t)\big), y(0) = y_0$, где $\|y_0\| \leq \delta_0, \|y(y, y_0)\| < \rho_0\ \forall t \geq 0$.
[ h ]

**Т$_{6.3.1.}$ (1й мтд. Ляпунова)** Пусть $f_j(y) \in C^2\{U(\theta)\}$.
Если все с/з A им. Re <0 $\Rightarrow$ нул. реш. $y(t, 0)$ – АУ.
Если хотя бы одно с/з A им. Re >0 $\Rightarrow$ нул. реш – НУ.
[ h ]

*****$\forall \sigma > 0\ \exists \rho > 0$: $\|\bar{y}\| < \rho \Rightarrow \|R(\bar{y})\| \leq \sigma \|\bar{y}\|$.

# #31 Исследование устойчивости решения системы на основе функции Ляпунова

Рассм. **задачу Коши для НСДУ 1-го порядка:**
$\begin{cases} y_i'(t) = f_i\big(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\big), \\ y_i(t_0) = y_{0i}. \end{cases}$ или $\begin{cases} \bar{y}'(t) = \bar{f}\big(t, \bar{y}(t)\big), \\ \bar{y}(0) = \bar{y}_0 \in \Omega. \end{cases}$
где $f_i \in C\{\Pi\}$, $\Pi = [0, +\infty) \times \Omega$, $f_j(t, 0, \dots, 0) = 0$.
Такая система имеет нул. решение $\bar{y}(t, \bar{\theta}) = \bar{\theta}$.

Ф-ция $\boldsymbol{V(\bar{y})} \in C^1\{\Omega\}, V \geq 0$ наз. **ф-цией Ляпунова,** если $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\bar{y})}{\partial y_j} f_j(t, \bar{y}) \leq 0, \forall \bar{y} \in \Omega, t \geq 0$.

**Т$_{6.4.1.}$ (У)** Пусть на $\Omega$ $\exists V(y) \Rightarrow$ нул. решение $y(t;\theta)$ – У.
[ h ]

**Т$_{6.4.2.}$ (АУ)** Пусть на $\Omega$ $\exists V(y)$: $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\bar{y})}{\partial y_j} f_j(t, \bar{y}) \leq -W(\bar{y})$, $W(\bar{y}) \in C\{\Omega\}, W \geq 0 \Rightarrow$ нулевое реш. – АУ.
[ h ]

**Т$_{6.4.3}$ (Четаева)** ?
[ h ]

*Ф-ция $V(y): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ наз. положительно определенной на $\Omega(\theta \in \Omega)$, если вып. след. усл.:
1) $V(y) \geq 0, \forall y \in \Omega$;
2) $V(y) = 0 \leftrightarrow y = \theta$.

**Л$_{6.4.1.}$** Пусть $V(y) \in C(\Omega), V \geq 0 \Rightarrow$
1. $\forall e_1 > 0\ \exists e_2 > 0$: $\|y\| \geq e_1 \Rightarrow V(y) \geq e_2$;
2. $\forall e_2 > 0\ \exists e_3 > 0$: $V(y) \geq e_2 \Rightarrow \|y\| \geq e_3$.

[ h ]

# #32 Исследование поведения решения системы в окрестности точек покоя

Точка $y_0 \in \mathbb{R}^n$ наз. **точкой покоя** автономной СДУ $y' = f\big(y(t)\big)$, если $f(y_0) = \theta$. Если $y_0$ – т. покоя, то ф-ция $y(t) = y_0$ не зависящее от $t$ решение сист.
Для иссл. устойчивости делаем ЗП $\bar{y}(t) = \hat{y}(t) + \overline{y_0}$ . Вычисляем эл-ты м-цы производных $A = (\frac{\partial f_i(y_0)}{\partial y_j})$.

**Т$_{6.4.4.}$** Пусть $y_0$ – т. покоя АСДУ, ф-ции $f_j \in C^2\{U(y_0)\}$. Если все с/з м-цы $A$ им. Re <0 ⇒ $y_0$ – У (по Ляпунову);
если хотя бы 1 с/з им. Re >0 ⇒ $y_0$ – НУ.
[ h ]

Можем исследовать на устойчивость точки покоя ЛСДУ с пост. кф. Что происх. со стартующей из окр. т. покоя точкой при $t \to +\infty$ (остается или покидает за конеч. время)?

Исследуем **фазовые** (в пл-ти $(y_1, y_2)$) траектории – инт. кривые ОДУ $\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}$. Тут (0,0) – особая, т.к. нарушены усл. т. о ∃ и !∃ з. Коши.

СЗ $A$ ЛНЗ и образуют базис в $\mathbb{C}^2$.

**классификация точек покоя (для n=2)**

1. Узел
$$(\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \times \lambda_2 > 0)$$
2. Дикритический узел
$$(\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0, \dim\ker(A - \lambda_1 E) = 2)$$
3. Вырожденный узел
$$(\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0, \dim\ker(A - \lambda_1 E) = 1)$$
4. Седло
$$\big(\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_2 < 0 < \lambda_1\big)$$
5. Фокус
$$\big(\lambda_{1,2} = a \pm ib \in \mathbb{C}, \omega \neq 0, \delta \neq 0\big)$$
6. Центр
$$\big(\lambda_{1,2} = \pm ib \in \mathbb{C}, \omega \neq 0\big)$$
7. Выр. м-ца
$$(\det A = 0)$$

# #33 Постановка краевой задачи, краевые усл. Редукция к осн. краевой задаче с однородными краевыми усл.

**Краевой задачей** для ДУ n-го порядка, разр. отн. старшей производной на $[0, l]$, наз. задача, где значение $y(x)$ задается как в $x = 0$, так и в $x = l$.

Рассм**. краевую задачу для ЛОДУ 2-го порядка:**

$$\begin{cases} a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1, 0 \le x \le l \\ \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = u_0 \\ \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = u_1 \end{cases}$$

где $a_i(x), f_1(x) \in C[0, l]$ заданы, $a_0, \alpha, \beta \ne 0$ одновременно. Если $u_0 = u_1 = 0$ – краевые усл. наз. **однородными.**

**редукция к однородным кр. условиям**

Преобр. исходную задачу: $\div\, a_0$, $\times\, p(x) = \exp\left\{\int_0^x \frac{a_1(s)}{a_0(s)} ds\right\}$ → выделяем полную произв. → $(py')' - qy = f_2$ **(*)**, где $p \in C^1[0, l], p(x) > 0, q(x) = -\frac{pa_2}{a_0}, f_2 = \frac{pf_1}{a_0}$.

Рассм. $z(x) = y(x) - v(x)$, где $v(x) \in C^2$ – удовл. кр. усл. Подставляем в кр. задачу (*) $y = z + v$ → получим для $z$ кр. задачу с однородными кр. условиями:
$(pz')' - qz = f, f = f_2 - (pv')' + qv$. Обычно ф-цию $v(x)$ ищут в виде многочлена. Далее **осн. краевой задачей** будет

$$\begin{cases} (p(x)y')' - q(x)y = f(x), 0 \le x \le l \\ \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0 \\ \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0 \end{cases}$$

**- однородная,** если $f(x) = 0$.

# #34 Тождество Лагранжа, формула Грина, формула для определителя Вронского

Введем дифференциальный оператор $Ly = (py')' - qy$.
Пусть $y, z \in C^2[0, l]$ $\Rightarrow$ можем вычислить $zLy - yLz$ $\rightarrow$ $z(py')' - y(pz')' = (zpy')' - (ypz')' = [p(zy' - yz')]'$ $\rightarrow$ **тождество Лагранжа:** $zLy - yLz = [p(zy' - yz')]'$.

Пусть $y_1, y_2$ – ЛНЗ реш. ОДУ $Ly = 0 \leftrightarrow Ly_1 = Ly_2 = 0$. Пишем для них тождество Лагранжа: $[p(y_1 y_2' - y_2 y_1')]' = 0$ $\Rightarrow$ для **определителя Вронского** $W[y_1, y_2](x) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ справедливо $p(x)W(x) = c$ или $W[y_1, y_2](x) = \frac{c}{p(x)}$.

Проинтегрируем тождество Лагранжа по $[0, l]$ $\rightarrow$
$\int_0^l zLy - yLz\, dx = p(zy' - yz')|_{x=0}^{x=l}$ – **формула Грина.**

**→**1 Если $y, z$ удовл. одним и тем же краевым усл. $\Rightarrow = 0$.

[ Пишем для граничные условия, первое $\times\, z(0)$, второе $\times\, y(0)$ → вычитаем: $\alpha_1 (zy' - yz')|_{x=0} = 0$. ]

# #35 Определение функции Грина. Существование и единственность функции Грина

Рассмотрим **краевую задачу:**

$$(*)\begin{cases} Ly \equiv (p(x)y')' - q(x)y = f(x), 0 \le x \le l \\ \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0 \\ \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0 \end{cases}$$

где $p, q, f$ – известные, $\alpha, \beta = const$: $p(x) \in C^1[0,l], p > 0$, $q, f \in C[0,l], \alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$.

Ф-ция $y(x)$ наз. **решением краевой задачи,** если $y(x) \in C^2[0,l]$ и удовл (*).

Ф-ция $G(x,\xi)$ наз. **ф-цией Грина краевой задачи,** если она определенеа в $[0,l] \times [0,l]$ и удовл. след. условиям:

1. $\forall \xi \in (0,l)$, $G \in C^2[0,\xi) \cup (\xi, l]$ по $x$ и удовл. одн. ур-ю $(pG_x')_x' - qG = 0, 0 \le x \le l, x \ne \xi$.
2. $G(x,\xi)$ удовл. одн. краевым условиям по $x$: $\alpha_1 G_x'(0,\xi) + \beta_1 G(0,\xi) = 0$, $\alpha_1 G_x'(l,\xi) + \beta_1 G(l,\xi) = 0$
3. $G \in C[0,l] \times [0,l]$, $G_x'(x,\xi)$ при $x = \xi$ имеет конечные предельные знач. $G_x'(\xi+0,\xi) = \lim_{x\to\xi+0} \ldots$, причем $G_x'(\xi+0,\xi) - G_x'(\xi-0,\xi) = \frac{1}{p(\xi)}, \forall \xi \in (0,l)$.

**T$_{7.2.1.}$ (сущ. и ед.)** Если однородная краевая задача имеет только нулевое решение, то ф-ция Грина краевой задачи сущ. и единственна.

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)y_2(\xi)}{g_0}, 0 \le x \le \xi, \\ \dfrac{y_1(\xi)y_2(x)}{g_0}, \xi \le x \le l. \end{cases}$$

[ h ]

# #36 Существование и единственность решения краевой задачи для любой правой части

*Рассмотрим **краевую задачу:**

$$(*)\begin{cases} Ly \equiv (p(x)y')' - q(x)y = f(x), 0 \le x \le l \\ \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0 \\ \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0 \end{cases}$$

где $p, q, f -$ известные, $\alpha, \beta = const: p(x) \in C^1[0, l], p > 0$, $q, f \in C[0, l], \alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$.

**∃ и !∃ в неодн. ДУ**

**T7.2.3.** Если однородная краевая задача имеет только нул. решение, то реш. неоднородной (*) сущ. и единственно и задается как $y(x) = \int_0^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi$ , $0 \le x \le l$.

[ h ]

# #37 Существование и ед. решения краевой задачи для нелинейного уравнения

*Рассмотрим **краевую задачу:**

$$(*)\begin{cases} y''(x) + a^2 y(x) = F\big(x, y(x)\big), 0 \le x \le l \\ y(0) = y(l) = 0. \end{cases}$$

**построение ф-ции Грина для неодн. кр. задачи**

Обозначим $f(x) = F\big(x, y(x)\big)$.
Возьмем $y_1(x) = \sin ax\,, y_2(x) = \sin a(x - l) \to$
$y_i''(x) + a^2 y_i(x) = 0, y_1(0) = y_2(0) = 0.$
Далее, $pW[y_1, y_2] = g_0 = y_1 y_2' - y_2 y_1' = a \sin al \Rightarrow$

$$G_a(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x) y_2(\xi)}{g_0} = \dfrac{\sin ax \sin a(\xi - l)}{a \sin al}, 0 \le x \le \xi, \\ \dfrac{y_1(\xi) y_2(x)}{g_0} = \dfrac{\sin a\xi \sin a(x - l)}{a \sin al}, \xi \le x \le l. \end{cases}$$

**∃ и !∃ в нелин. ДУ**

**Т$_{7.2.3.}$** Пусть $F(x, y) \in [0, l], y \in \mathbb{R}$ и $F \in Lip\{y\}$: $\forall x \in [0, l]$ $|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$. Если $\frac{lL}{a|\sin al|} < 1 \Rightarrow$ реш. краевой задачи (*) сущ. и единственно.
Оно явл. решением инт-ура $y(x) = \int_0^l G_a(x, \xi) F\big(\xi, y(\xi)\big) d\xi$.
[ h ]

# #38 Задача Штурма-Лиувилля. Свойства СЗ и СФ задачи Штурма-Лиувилля

Рассмотрим **краевую задачу:**

$$(*)\begin{cases} Ly \equiv (p(x)y')' - q(x)y = -\lambda y, 0 \le x \le l \\ \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0 \\ \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0 \end{cases}$$

где $p(x), q(x) \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta = const \in \mathbb{R}: p, q \in C^1[0, l]$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $p > 0, \alpha^2 + \beta^2 > 0$.

Если для нек. $\lambda_1$ краевая задача имеет нетрив. реш. $y_1$ → $\lambda_1$ наз. **собственным значением,** а $y_1(x)$ – **соб. ф-цией.**

Задача **Штурма-Лиувилля** – поиск СЗ и СФ.

**свойства СЗ и СФ**

**T$_{7.3.1.}$** Все СФ и СЗ задачи Ш-Л действительны.

[ h ]

**T$_{7.3.2.}$** Каждому СЗ соотв. только одна СФ.

[ Пусть СЗ соотв. два реш. Оба удовл. (*) → $W[y_1, y_2](0) = 0 \Rightarrow y_2 = cy_1$. ]

Введем ск.П ф-ций $v(x), w(x)$: $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \int_0^l v(x)w(x)dx$.

Ф-ции **ортогональны,** если их ск.П. равно нулю.

**T$_{7.3.3.}$** СФ соотв. разл. СЗ ортогональны.

[ Из следствия ф-лы Грина → $(Ly_1, y_2) - (y_1, Ly_2) = 0$, но $Ly_1 = -\lambda_1 y_1, Ly_2 = -\lambda_2 y_2 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(y_1, y_2) = 0 \Rightarrow (y_1, y_2) = 0$. ]

**T$_{7.3.4.}$** Пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Если $\lambda$ – СЗ ⇒ $\lambda \ge \min_x q(x)$.

[ h ]

Занумеруем СФ $y_n$ задачи Ш-Л. Введем $f_n = \int_0^l f y_n \, dx$.

**T$_{7.3.5.}$** **(Стеклова)** Если $f(x) \in C^2[0, l]$ и удовл. кр. усл. ⇒ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[0, l]$.

[ h ]

# #39 I инт-лы СДУ. О представлении реш. задачи Коши через независимые I инт-лы

**Рассмотрим НСДУ порядка $\boldsymbol{n}$:**

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1\big(t, x_1(t), \dots, x_n(t)\big), \\ x_n'(t) = f_n\big(t, x_1(t), \dots, x_n(t)\big). \end{cases}$$

*где* $f_i(t, \bar{x}), \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C\{D_1\}, D_1 \in \mathbb{R}^{n+1}$.

**Первым инт-лом** в $D_1$ наз. ф-ция $v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$ сохр. пост. значение вдоль каждой лежащей в $D_1$ ИК.
Т.о. для каждого реш. $x(t)$ найдется $C$: $v(t,x) \equiv C$.
Геом: опр. $\mathbb{R}^{n+1}$-мерную пов-ть из ИК системы.
**Производной I инт-ла** наз. $v_t' = v_t' + \sum_{j=1}^{n} v_{xj}' f_j$.
**Л$_{8.1.1.}$** Ф-ция $v \in C^1(D_1)$ явл. I-м инт-лом $\Leftrightarrow$ ее производная равна нулю в $D_1$.
[ h ]

Ф-ция явл. суперпозицией I-х инт-лов явл. I-м инт-лом.

Первые инт-лы наз. **функционально незав.** в $D_1$, если ранг м-цы производных равен кол-ву ф-ций $k$: $rang\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = k$.
**Т$_{8.1.1.}$** Пусть в $D_1$ сущ. n ФНЗ I-х инт-лов $v_1, \dots, v_n$.
Тогда $\forall (t_0, x_0) \in D_1$ решение $x(t)$ з. Коши $\begin{cases} x_k'(t) = f_k(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ однозначно опред. как неявная ф-ция из СУ $\begin{cases} v_1 = c_1^0, \\ v_n = c_n^0, \end{cases}$ где $c_j^0 = v_j(t_0, x_0)$.
[ h ]

***Т$_{8.1.2.}$** В случае автономной системы (не зав. от $t$) в окр-ти $\forall$ точки: $\sum f_j^2(x_0) \neq 0$ сущ. ровно $n-1$ ФНЗ I-х инт-лов.

# #40 ЛОДУ в ЧП первого порядка. Связь решения с I инт-лом. Общее решение

Пусть $u(x)$ – ф-ция от $x \in D_0 \in \mathbb{R}^n$.
Ур-ние $F(x, u, u'_x)$ наз. **ДУ в ЧП 1-го порядка,** если $F$ сущ-но зависит от последних $n$ аргументов (производных).

ДУ – **квазилинейное (КЛУ),** если ЧП входят линейно:
$$\sum_{j=1}^{n} a_j\big(x, u(x)\big)\, u'_{xj}(x) = b\big(x, u(x)\big).$$
ДУ – **линейное однородное,** если кф не зав. от $u$, правая=0:
$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\, u'_{xj}(x) = 0.$$
Ф-ция наз. **реш. КЛУ** в ЧП 1-го порядка в $D_0 \in \mathbb{R}^n$, если:

1. $u(x) \in C^1(D_0)$;
2. $\forall x \in D_0$ точка $\big(x, u(x)\big) \in D_1$;
3. при подставновке $u(x)$ в КЛУ получаем тождество.

Рассмотрим ЛОДУ в ЧП в обл. $D_0 \subset \mathbb{R}^n$:
$a_1 u'_{x1} + \cdots + a_n u'_{xn} = 0, a_j(x) \in C^1(D_0), \sum a_j^2 \neq 0.$
По КФ ур-ния строим СДУ n-го порядка:
$$\begin{cases} x_1'(t) = a_1\big(x(t)\big), \\ x_n'(t) = a_n\big(x(t)\big). \end{cases}$$
**Л$_{8.2.1.}$ (связь с I-м инт-лом)** Ф-ция $u(x) \in C^1(D_0)$ явл. реш. ЛОДУ в ЧП $\Leftrightarrow$ $u(x)$ явл. не содержащим $t$ I-м инт-лом системы в $D_0$.

**Т$_{8.2.1.}$ (общ. решение)** Пусть в $D_0$ сист. имеет ровно $n-1$ не содержащих $t$ ФНЗ I-х инт-лов $\{v_n\}$. Тогда в нек. окр-ти $M_0 \in D_0$ общ. реш. ЛОДУ в ЧП $u(x) = F(v_1, \dots, v_{n-1}) \in C^1$.
[ h ]

## #41 Квазилинейные ур-ния в ЧП порядка. Теорема о неявном опр. решения через I интеграл. Характеристики. Необходимое и достаточное условие для реш. ур-ния

*ДУ – **квазилинейное (КЛУ),** если ЧП входят линейно:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j\big(x, u(x)\big)\, u'_{xj}(x) = b\big(x, u(x)\big).$$

Рассмотрим КЛУ в ЧП в обл. $D_0 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$:
$a_1 u'_{x1} + \dots + a_n u'_{xn} = b\big(x, u(x)\big), \qquad a_j\big(x, u(x)\big), b \in C^1(D_0)$, $\sum a_j^2 \neq 0$. По кф и правой части строим СДУ (n+1)-го порядка:

$$(*)\begin{cases} x'_1(t) = a_1(x,u), \\ x'_n(t) = a_n(x,u), \\ \quad u'_t = b(x,u). \end{cases}$$

Решения $(x, u)$ системы опр. **фазовые кривые** в $\mathbb{R}^{n+1}$ кот. наз. **характеристиками ур-я** в ЧП.

**T$_{8.2.2.}$ (о неявном реш)** Пусть $v(x,u)$ – не сод. $t$ I-й инт-л в обл-ти $D$, в окр-ти нек. $N_0 \in D$ $v(N_0) = C_0, v'_u(N_0) \neq 0 \Rightarrow$ ур-е $v(x,u) = C_0$ опр. неявную ф-цию $u(x)$, явл. решением КЛУ.

[ h ]

График реш. КЛУ явл. n-мерной пов-тью в пр-ве $(x, u)$.

**T$_{8.2.3.}$** Ф-ция $u = f(x) \in C^1(D_0)$ явл. реш. КЛУ в ЧП $\Leftrightarrow$ пов-ть целиком сост. из характеристик, опр. системой (*).
//т.е. через ∀ точку проходит хар-ка целиком ∈ пов-ти.

[ h ]

# #42 Задача Коши для квазилинейного ур-ния в ЧП 1-го порядка

Рассмотрим КЛУ в ЧП в случае $n = 2$:

$$a_1(x,y,u)u'_x + a_2(x,y,u)u'_y = b(x,y,u),$$

где $b, a_j \in C^1(D), D \subset \mathbb{R}^3, a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ в $D$.

Задача Коши сост. в нахождении пов-ти $u = f(x,y)$, зад. решением КЛУ, проходящей через зад. линию $l = \{(x,y,u) = (\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s)), s \in [s_0, s_1]\} \subset D$, т.е. $\psi_3(s) = f(\psi_1(s), \psi_2(s))$.

**T$_{8.2.3.}$ (о ед. реш)** Пусть вып. условие $\det\begin{pmatrix} a_1 & \psi_1' \\ a_2 & \psi_2' \end{pmatrix} \neq 0$, $a_j(s) = a_j(\psi_1, \psi_2, \psi_3) \Rightarrow$ в нек. окр-ти каждой точки $l$ $!\exists$ реш. задачи Коши.

//проекции линии $l$ и пересек. её хар-к не должны касаться.

[ h ]

# #43 Функционалы, примеры. Вариация ф-ла, необходимое условие экстремума ф-ла

Рассмотрим мн-во $M$, явл. подм-вом непр. ф-ций $C[x_0, x_1]$.
**Функционалом** наз-ся отображение $M \to \mathbb{R}$.

***примеры***

1) Пусть $M = C[x_0, x_1]$, $\Phi[y(x)] = y(x_0) + 2y(x_1)$;
2) $\Phi[y(x)] = \int_{x0}^{x1} y(x)dx$;
3) Пусть $M = C^1[x_0, x_1]$: $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$, $y_{0,1} = const$. $\Phi[y(x)] = \int_{x0}^{x1} \left[y(x) + 2\left(y'(x)\right)^2\right] dx$.

**Допустимой вариацией** ф-ции $y_0(x) \in M$ наз. $\forall$ф-ция $\delta y(x)$: $y_0(x) + \delta y(x) \in M$. (св-во: $t\delta y$ –тоже ДВ)
**Вариацией ф-ла** $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)]$ на функции $y_0(x) \in M$ наз-ся $\Phi_t'[y_0(x) + t\delta y(x)]|_{t=0}$. (может не существовать)

Ф-л $\Phi[y(x)]$ достигает на ф-ции $y_0(x) \in M$ **глоб. min (max),** если $\forall y(x) \in M$ $\Phi[y_0(x)] \le \Phi[y(x)]$ (≥).

Введем на $M$ норму ф-ции $\|y(x)\| = \max_{[x_0, x_1]}|y(x)|$.

Ф-л $\Phi[y(x)]$ достигает на ф-ции $y_0(x) \in M$ **лок. min (max),** если $\exists\varepsilon > 0: \forall y(x) \in M, \|y(x) - y_0(x)\| < \varepsilon \Rightarrow \Phi[y_0(x)] \le \Phi[y(x)]$ (≥).
**Экстремумами** называют max, min функционала.

**T$_{9.1.1.}$ (н/у экстр)** Если $\Phi[y(x)]$ достигает на $y_0(x)$ лок. max/min на $M$ и вариация ф-ла на $y_0(x)$ существует $\Rightarrow$ вариация ф-ла $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = 0$ $\forall$допустимой $\delta y(x)$.

[ h ]

# #44 Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера

Пусть $C_n^0[x_0, x_1]$ – мн-во ф-ций $y(x) \in C^n[x_1, x_n]$: $y^{(m)}(x_0) = y^{(m)}(x_1) = 0, m = \overline{1, n-1}$.

**Л9.1.1. (осн.лемма)** Пусть $f(x) \in C[x_0, x_1]$: $\int_{x0}^{x1} f(x)y(x)dx = 0 \ \forall y(x) \in C_0^n[x_0, x_1] \Rightarrow f(x) \equiv 0$ на $[x_0, x_1]$.

[ h ]

Рассм. мн-во $M \in C^1[x_0, x_1]$ ф-ций: $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$. Определим ф-л $\Phi[y(x)] = \int_{x0}^{x1} F\big(x, y(x), y'(x)\big)dx$.

**Т9.2.1. (н/у экстр ф-ла)** Пусть при $(y, p) \in \mathbb{R}^2$ $F \in C^2[x_0, x_1]$. Если ф-л достиг. лок. экстр. на $y_0(x) \in M$, им. непр. вторую пр. $\Rightarrow y_0(x)$ – решение ДУ

$$F_y'(x, y, y') - \left[F_p'(x, y, y')\right]_x' = 0$$ – ***ур-е Эйлера.***

[ h ]

Во многих приложениях требуется приблизить $f(x)$ более гладкой $y(x) \rightarrow$ производная не должна иметь слишком большие значения. Для реш. такой задачи прим. вариац. исчисление.

# #45/46 Необходимое усл. экстремума для функционала с производными высших порядков<br>Необходимое усл. экстремума для функционала, зависящего от ф-ции 2х переменных

Рассм. мн-во $M$ ф-ций $y(x) \in C^n[x_0, x_1]$:

$$y(x_0) = y_{00}, y(x_0) = y_{01}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0(n-1)},$$
$$y(x_1) = y_{10}, y(x_0) = y_{11}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{1(n-1)}.$$

Опрелелим на нем ф-л $\Phi[y(x)] = \int_{x0}^{x1} F\left(x, \dots, y^{(n)}(x)\right) dx$.

**Т$_{9.3.1.}$** (н/у экстр) Пусть $F$ при $x \in [x_0, x_1]$ имеет непр. ЧП порядка $2n$. Если ф-ция $y(x) \in M \in C^{2n}$ и на ней достиг. экстр. ф-ла $\Rightarrow$ $y(x)$ явл. реш. уравнения

$$F'_y - \left[F_{p1}\right]'_x + \dots + (-1)^n \left[F_{pn}\right]^{(n)}_{x^n} = 0.$$

[ h ]

Рассм. ф-л, зависящий от ф-ции двух переменных:

$\Phi[u(x,y)] = \iint_D F\left(x, y, u(x,y), u'_x, u'_y\right) dxdy,$ где $D -$ обл-ть огр. контуром $L$. Положим $F$ им. непр. ЧП 2-го порядка.

Пусть $M$ – мн-во ф-ций $u(x,y) \in C^1(\overline{D})$ и принимающих на $L$ зад. значения. Вариация такой ф-ции, не выводящая ее из $M$ – это $\delta u \in C^1(\overline{D})$ и $\delta u = 0$ на $L$.

**Л$_{9.3.1.}$** Пусть $f(x,y) \in \overline{D}$. Если $\iint_D fv\, dxdy = 0 \quad \forall v \in C^1$, $v = 0$ на $L \Rightarrow f(x,y) = 0$ в $\overline{D}$.

[ h ]

**Т$_{9.3.2.}$** Положим $F(x, y, u, p, q) \in C^2(\overline{D}), (u, p, q) \in \mathbb{R}^3$. Если экстремум ф-ла достиг. на ф-ции $u(x,y) \in M \in C^2(\overline{D}) \Rightarrow$ ф-ция явл. реш. ДУ в ЧП $F'_u - \left[F'_p\right]'_x - \left[F'_q\right]'_y = 0$.

[ h ]

# #47 Задача на условный экстремум

Рассмотрим 2 функционала:

$$\Phi[y(x)] = \int_{x0}^{x1} F\big(x, y(x), y'(x)\big)dx,$$

$$\Psi[y(x)] = \int_{x0}^{x1} G\left(x, \dots, y^{(n)}(x)\right)dx,$$

где $F, G \in C^2$.

Рассм. экстремальную **задачу на условный экстремум:** треб. найти экстремум ф-ла на мн-ве ф-ций $M_\Psi = \{y(x) \in C^1[x_0, x_1]: y(x_0) = 0, y(x_1) = y_1, \Psi[y(x)] = \ell\}$.
//функционал принимает на мн-ве пост. значение

Найдем вариацию ф-ла на $M = \{y(x) \in C^1[x_0, x_1]: y(x_0) = 0, y(x_1) = y_1\}$. Пусть $\delta y(x)$ – допустимая вариация ф-ции на $M: \delta y \in C^1, \delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0 \Rightarrow$ вар. ф-ла равна

$$\delta\Psi[y(x), \delta y(x)] = \Psi_t'[y(x) + t\delta y(x)]|_{t=0}.$$

Дифф. по $t \to \delta\Psi[y(x), \delta y(x)] = \int_{x0}^{x1}\left\{G_y'\delta y + G_p'(\delta y)_p'\right\}dx.$

**T$_{9.4.1.}$ (н/у экстр)** Пусть на $y(x) \in M_\Psi, y(x) \in C^2[x_0, x_1]$ достиг. экстр. ф-ла. Если $\exists \delta y_0 \in C^1, \delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$, т.ч. вариация $\delta\Psi[y(x), \delta y(x)] \neq 0 \Rightarrow \exists\lambda$, т.ч. $y$ – удовл. ДУ

$$L_y'(x, y, y') - \left[L_p'(x, y, y')\right]_x' = 0,$$

где $L(x, y, p) = F(x, y, p) + \lambda G(x, y, p)$.

[ h ]

# #48 Вариационное свойство СЗ и СФ задачи Штурма-Лиувилля

Рассмотрим **краевую задачу:**

$$(*)\begin{cases} Ly \equiv (p(x)y')' - q(x)y = -\lambda y, 0 \leq x \leq l \\ y(0) = 0, y(l) = 0. \end{cases}$$

где $p(x), q(x) \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta = const \in \mathbb{R}$: $p, q \in C^1[0, l]$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $p > 0, \alpha^2 + \beta^2 > 0$.

Если для нек. $\lambda_1$ краевая задача имеет нетрив. реш. $y_1 \to \lambda_1$ наз. **собственным значением,** а $y_1(x)$ – **соб. ф-цией.**

Рассмотрим задачу **Штурма-Лиувилля** – поиск СЗ и СФ.
СФ опр. с точностью до ∀пост. сомножителя → для устранения неоднозначности введем усл $\int_0^l \big(y_n(x)\big)^2 dx = 1$.
Рассм. ф-л $\Phi[y(x)] = \int_0^l (k(y')^2 + qy^2)dx$.
Покажем, что если $y_n(x)$ – СФ задачи Ш-Л ⇒ $\Phi[y(x)] = \lambda_n$.

Рассм. задачу минимизации ф-ла на мн-ве ф-ций $M = \left\{y(x) \in C^2[x_0, x_1]: y(0) = 0, y(l) = 0, \int_0^l \big(y(x)\big)^2 dx = 1\right\}$.
Перепишем усл: $\Psi[y(x)] = 1, \Psi[y(x)] = \int_0^l \big(y(x)\big)^2 dx$.
Пусть мин достигается на $y(x) \in C^2[0, l]$. Из н/у экстр. ⇒ $y$ – реш. $L'_y - \left[L'_p\right]'_x = 0, 0 \leq x \leq l$, где $L = kp^2 + qy^2 - \lambda y^2$ ⇒ $y$ явл. реш. (*) и $y \not\equiv 0 \Rightarrow \Phi[y(x)] = \lambda_n$.

Показали, что **реш. задачи на усл. экстремум явл. СФ задачи Ш-Л, а СЗ – величина ф-ла еа этой СФ.**