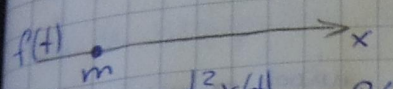
Пример 1

$m = 1$ – масса



$t \geq 0$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = f(t), & t>0 \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

– 2ой закон Ньютона

↑ типичная прямая задача (direct problem)

Пример 2 (ОЗ ≡ IP – inverse problem)

По $x(t)$ найти $f(t)$.

Пример 3 (системы ОДУ)

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \\ x_i(0) = x_i^0, \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

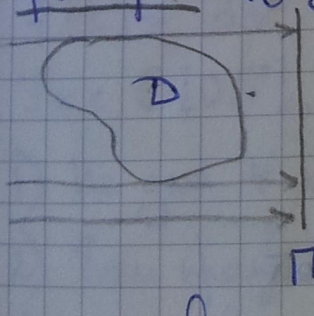
→ встречается в хим.кинетике, системах управл. самолетом

– ПЗ

Пример 4

ОЗ: найти матрицу $\{a_{ij}\}$ по вектору $\{x_i(t)\} = \vec{x}(t)$

Пример 5 (задача распознавания образов)



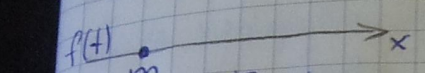
↙ – вся система может поворачиваться

Нужно восстановить D по ортогональным проекциям

Если D – невыпуклая ⇒ не восстановим.

Пример 1

$m = 1$ – масса



$t \geq 0$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = f(t), & t>0 \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$ – 2ой закон Ньютона

↑ типичная прямая задача (direct problem)

Пример 2 (ОЗ ≡ IP – inverse problem)

По $x(t)$ найти $f(t)$.

Пример 3 (системы ОДУ)

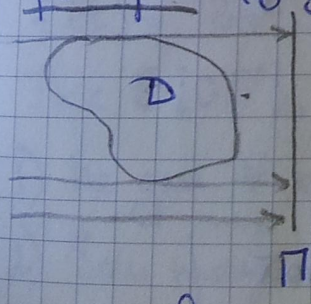
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \\ x_i(0) = x_i^0, \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$ – ПЗ

→ встречается в хим. кинетике, системах управл. самолетом

Пример 4

ОЗ: найти матрицу $\{a_{ij}\}$ по вектору $\{x_i(t)\} = \vec{x}(t)$

Пример 5 (задача распознавания образов)



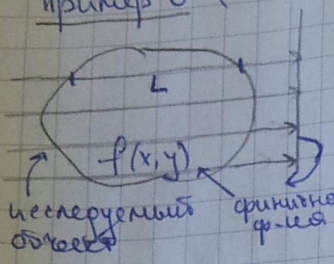
– вся система может поворачиваться

Нужно восстановить D по ортогональным проекциям

Если D – невыпуклая ⇒ не восстановим.

Если D - n-угольник, то сколько нужно проекций?

Пример 6 (комп. томография)

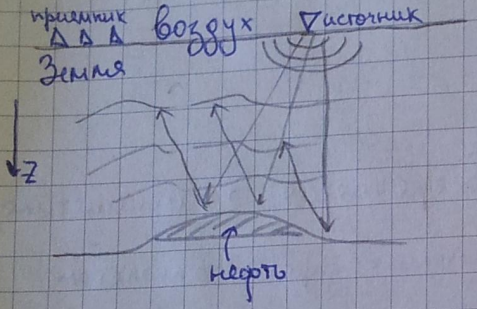


$\int_L f(x,y)\,d\ell$ = известен набор таких инт-лов

Осн. задача КТ (СТ) – восстановить ф-ию $f(x,y)$ по интегралам

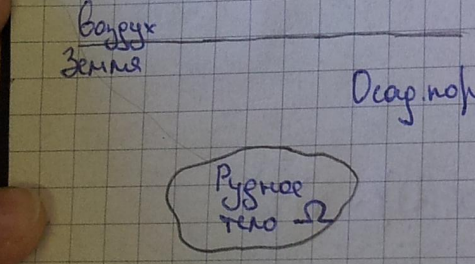
Пример 7 (ОЗ сейсмики)

упругость по



По полю смещений на $z=0$ нужно восстановить строение геолог. среды (н: восстан. плотность)

Пример 8



Рудное тело создает грав. поле:

$$u(x,y,z) = \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x',y',z')\,dx'dy'dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

u – потенциал поля

$u(x,y,z)$ наблюдается на некот. мн-ве M

ОЗ теории потенциала – определить ρ по $u(x,y,z)$.

Корректные и некорректные задачи

(1) $u = R(z)$, z - данные (исходные), u - результат

$z \in Z$, $u \in U$, Z, U - метр. пр-ва

Опр Задача (1) наз. корректной (по Адамару), если:

1) решение и $\exists$ для $\forall z \in Z$

2) решение и !

3) и непрерывно зависит от z

Если 1-3 не выполн., то задача некорректна.

Пример 1

$\dot{x}(t) = f(t)$, $t > 0$

$x(0) = \dot{x}(0) = 0$

$\exists t \in [0,T]$, $f \in C[0,T]$, $x \in C[0,T]$

$x(t) = \int_0^t f(\tau)(t-\tau)\,d\tau$, $0 \le t \le T$

1) x $\exists$ для $\forall f \in C[0,T]$ ⊕

2) единств. есть в силу мин. задачи ⊕

3) устойчивость есть: ⊕

$\|g\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |g(t)| \Rightarrow \|x\|_{C[0,T]} \le \frac{T^2}{2} \|f\|_{C[0,T]}$

↑ оценка устойчивости

$\Rightarrow$ задача корректна

Пример 2

ОЗ: найти $f(t)$ по $x(t)$

$f(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$, $0 \le t \le T$

$\exists x \in C[0,T]$, $f \in C[0,T]$

1) Не для $\forall x(t) \in C[0,T]$ $\exists f$! ⊖

2) Если функ. f есть, то она единств. ⊕

3) ⊖: возьмём $x_0(t) = 0$, $x_n(t) = \frac{1}{n}\sin(n^2 t)$

$\|x_n\|_c \to 0$, f_n – не сходится!

Пусть $x \in C^2[0,T]$ => задача оказ. корректной

Пример 3

$Ax = y$, $x, y \in \mathbb{R}^n$

A - пост. nxn м-ца

Найти x по y - ОЗ.

1) Если $\det A \neq 0$ => задача корректна : $x = A^{-1}y$,

$\|x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|y\|$

2) Если $\det A = 0$ => единств. нет => задача некорректна

Пример 4 (осн. пример некорр. задачи)

$$Az \equiv \int_a^b K(x,s)z(s)ds = u(x), \quad x \in [c,d]$$

(2) $Az = u$

z - неизв. $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ ур-ие Фредгольма 1го рода

$\exists z \in C[a,b]$, $u \in C[c,d]$, K, K_x, K_{xs} - непр. в $[c,d] \times [a,b]$

1) Реш-е z $\exists$ не для $\forall u \in C[c,d]$

Док-во: (от противного)

Пусть реш-е z $\exists$ $\Rightarrow \int_a^b K(x,s)z(s)ds$ - диффер-мая ф-ия

u

$u(x)$ - а это только непр. ф-ия ?!! =>

=> реш-е $\exists$ не для $\forall$ u, ч.т.д.

2) Единственность зависит от ядра $K(x,s)$:

если $K(x,s) = e^{x+s}$ => нет единств.

если $K(x,s) = e^{xs}$ => единств. есть

3) Устойчивости нет:

$\exists z_0(s) = 0$, $z_n(s) = n\sin(n^2 s)$

$\|z_n - z_0\|_{C[a,b]} \to \infty$, $n \to \infty$

$Az_n = \int_a^b K(x,s) z_n(s)\,ds = u_n(x)$

$u_0(x) = 0$

$\|u_n - u_0\|_{C[c,d]} = \max_{c\le x\le d} \left| \int_a^b K(x,s) z_n(s)\,ds \right| \le \max_{c\le x\le d} \left| \int_a^b K(x,s) n\sin(n^2 s)\,ds \right| \le$

по частям

$\le \max_{c\le x\le d} \left| -\frac{1}{n} K(x,s)\cos(n^2 s)\Big|_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b K_s(x,s)\cos(n^2 s)\,ds \right| \le$

$\max|K(x,s)|$ по $[]x[]$

$\le \frac{2}{n} M_0 + \frac{1}{n} M_1 \le \frac{1}{n}\cdot const$

$\Rightarrow \|u_n - u_0\|_{C[c,d]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, но $\|z_n - z_0\|$ расх-ся! $\Rightarrow$ устойч. нет!

Эта задача некорректна всегда (из-за 3)!

$Az = u$ (1)

$z \in Z$, $u \in U$

ОЗ: по $u \in U$, изв. A найти $z \in Z$

1) Пусть A – мин. непр., $A: Z \to U$, A взаимно одн. отобр. Z на U

Тогда A^{-1} существ. и непр., т.е. (1) – корректная задача!

↑ теорема Банаха

2) Пусть A – мин. вполне непр., $A: Z \to U$ (переводит огр. в компактное)

Если $\exists A^{-1}$ (вз. одн.), то он неограничен! $\Rightarrow$ (1) – некорректная задача

$\Rightarrow$

Пример

$\int_a^b K(x,s) z(s)\,ds = u(x)$, $c \le x \le d$ (2)

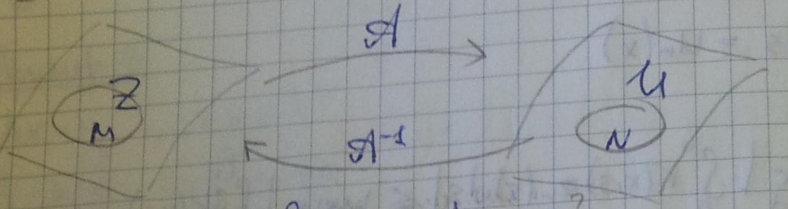
Пусть $K(x,s)$: $\int_c^d\int_a^b |K(x,s)|^2\,ds\,dx < \infty$, $u \in L_2[c,d]$

$\exists z(s) \in L_2(a,b)$

(2) $\mapsto Az = u$, причем A – вп. непр., $A: L_2(a,b) \to L_2(c,d)$

(см. ФА) $\Rightarrow$ задача на паре пр-в L_2 некорректна!

Опр Условно-корректная (корректная по Тихонову) задача



Z, U - метр. пр-ва, A - непр.

$\exists A^{-1}$

Введём M и N: A^{-1} там непр-ный, M - компакт в Z

Теорема

Пусть A - непрерывный на M оператор, отобр. M на N вз. однозн.

Тогда, если M - компакт в Z, то $A^{-1}: N \to M$ - непрерывно, $N = A(M)$.

Док-во: (от противного)

Предположим, что A^{-1} (он определён) не явл. непрерывным, т.е.:

$\exists \varepsilon > 0 \; \exists \{u_n\} \subset N, \; u_n \to \bar{u} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ и $\{z_{n_k}\} \subset \{z_n\}$,

$z_n = A^{-1} u_n$: $\rho_Z(z_{n_k}, \bar{z}) \geq \varepsilon$, где $\bar{z} = A^{-1}\bar{u}$.

Будем считать, что $z_{n_k} \in M$ - компакт $\Rightarrow z_{n_k} \to z^* \in M$ (на самом деле сх-ся подпосл-ть, но мы её не оф. обозн., считаем, что z_{n_k})

$Az_{n_k} = u_{n_k} \; | \lim_{k \to \infty}$, A - непр-ный $\Rightarrow$ можно $\lim$

$Az^* = \bar{u}$, но $A\bar{z} = \bar{u}$. A - вз. одн. $\Rightarrow z^* = \bar{z}$

Перейдем к пределу в $\rho_Z(z_{n_k}, \bar{z}) \geq \varepsilon$ (метрика непр-на) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \rho_Z(z^*, \bar{z}) \geq \varepsilon$, но $z^* = \bar{z}$?!! $\Rightarrow A^{-1}$ - непр-ный, ч.т.д.

Эта теорема позволяет сузить область в задаче.

Опр Задача $z = R(u)$ назыв. условно-корректной (корр. по Тихонову

на паре $M \subset Z$, $N \subset U$, если:

1) реш-е z $\exists$ для $\forall u \in N$ и $z \in M$

2) реш-е z единственно на M

3) реш-е z непр-но зависит от u в метриках Z, U

M назыв. множеством корректности (обычно берут компакт и пользуются теоремой)

Пример

Пусть $z \in L_2(a,b)$, z - огр. (по модулю) и монотонны, тогда они образуют компакт в $L_2(a,b)$

Для $C[a,b]$ пользуемся т-мой Арцела.

Задача определения правой части ОДУ

$\ddot{x}(t) = f(t)$

Рассмотрим более общий случай:

$y^{(n)}(x) + a_1(x) y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x) y(x) = F(x)$, $x \in [c,d]$

Дано: $y(x)$, $x \in [c,d]$

Найти: $F(x)$, $x \in [c,d]$

1) Пусть $y \in C^n[c,d]$, $F \in [c,d] \Rightarrow$ задача корр. (просто подставляем)

2) Пусть $y \in C^p[c,d]$, $p < n \Rightarrow$ задача некорректна (для некоторых y может $\nexists\, y^{(n)}$!; но тут ещё и устойчивости не будет)

Добавим КУ: $y^{(j)}(c) = 0$, $0 \le j \le k$,

$y^{(i)}(d) = 0$, $0 \le i \le m$, $k + m + 2 = n$

$\Downarrow$

$$y(x) = \int_c^d G(x,s) F(s)\, ds, \quad c \le x \le d$$

$G(x,s)$ - ф-ия Грина - известна, если $a_i(x)$ - известны

Задача численного дифференцирования

① $y'(x) = z(x)$, $c \le x \le d$

Пусть $\bar{y} \in C^1[c,d]$, но нам известно только её приближение $y_\delta(x) \in C[c,d]$:

$|y_\delta(x) - \bar{y}(x)| \le \delta$, $\forall x \in [c,d]$

Найти: приближенное значение $z(x) = \bar{y}'(x)$: $z_\delta(x) \rightrightarrows \bar{y}'$ при $\delta \to 0$

Известно: y_δ, δ

Алгоритм:

$z_{\delta h}(x) = \dfrac{y_\delta(x+h) - y_\delta(x)}{h}$ ← разделенные разности

( ] $y_\delta(x) \in C[c, d+\Sigma]$, $\Sigma > h$)

$|z_{\delta h}(x) - \bar{y}'(x)| \le \left| \dfrac{y_\delta(x+h) - y_\delta(x)}{h} - \dfrac{\bar{y}(x+h) - \bar{y}(x)}{h} + \dfrac{\bar{y}(x+h) - \bar{y}(x)}{h} - \bar{y}'(x) \right| \le$

$x \le \theta \le x+h$

$\le \left| \dfrac{y_\delta(x+h) - \bar{y}(x+h)}{h} \right| + \left| \dfrac{y_\delta(x) - \bar{y}(x)}{h} \right| + |\bar{y}'(\theta) - \bar{y}'(x)| \le$ $\{\bar{y}' \in C[c, d+h]\}$ $\Rightarrow$ равномерно непр.

$\sup\limits_{\substack{x,u \in [c,d] \\ |x-u| \le h}} |\bar{y}'(x) - \bar{y}'(u)| = \omega(h)$

$\le \dfrac{2\delta}{h} + \omega(h)$, $\omega(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ - модуль непр-ти

1) $\dfrac{\delta}{h} \to 0$ } тогда $|z_{\delta h} - \bar{y}'| \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$

2) $h \to 0$ }

но $\delta \to 0$ $\Rightarrow$ нужно $h = h(\delta)$: $h(\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$

$\dfrac{\delta}{h(\delta)} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$

Например: $h = \sqrt{\delta}$ $(h(\delta) = c\delta^p$, $0 < p < 1)$

Если $h = \delta$ $\Rightarrow$ оценка может быть слишком грубой

Возьмем $\bar{y}(x) = 0$, $y_\delta(x) = \delta \cdot \sin \dfrac{x}{\delta}$

$z_{\delta h}(0) = \dfrac{\delta \cdot \sin \frac{h}{\delta}}{\delta} = \sin 1$ | $\Rightarrow$ наша оценка не слишком грубая!

② $y''(x) = z(x)$, $x \in [c-\Sigma, d+\Sigma]$, $h \le \Sigma$

$z_{\delta h}(x) = R_h(y_\delta)$, $h = h(\delta)$

$z_{sh}(x) = \dfrac{y_s(x+h) - 2y_s(x) + y_s(x-h)}{h^2}$

По аналогии $|z_{sh}(x) - \bar{y}''(x)| \le \frac{4\delta}{h^2} + \omega_2(h)$, $\omega_2(h)$ - модуль непр-ти второй произв.

1) $h(\delta) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$
2) $\frac{\delta}{h^2} \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$

$h = \sqrt{\delta}$ уже скорее всего не подойдет!

Задача определения коэффициентов линейных дифф. ур-й и систем

$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$, $x \in [c,d]$

$a_0, a_1 = const$. Можно ли найти по реш-ю коэфф.?

1) Если $\bar{y}(x) = 0 \Rightarrow$ реш-е не единств!

2) $\bar{y}(x) = const = 1$

$0 + a_1 \cdot 0 + a_0 = 0 \Rightarrow$ реш-е не единств.! (a_1 - любое)

3) $\bar{y}(x) = e^x \Rightarrow 1 + a_1 + a_0 = 0$

Выбираем $a_0 = p(p-1) \Rightarrow a_1 = -(1+p) \Rightarrow$ реш-е не единств.!

Попробуем исправить ситуацию.

Пусть $x \in [c,d]$, $\exists x_1, x_2 \in [c,d]$: $\begin{vmatrix} \bar{y}'(x_1) & \bar{y}(x_1) \\ \bar{y}'(x_2) & \bar{y}(x_2) \end{vmatrix} \neq 0$, тогда реш-е обратной задачи единственно.

Док-во:

Запишем ур-ия в этих точках:

$$\begin{cases} a_1 \bar{y}'(x_1) + a_0 \bar{y}(x_1) = -\bar{y}''(x_1) \\ a_1 \bar{y}'(x_2) + a_0 \bar{y}(x_2) = -\bar{y}''(x_2) \end{cases}$$

- СЛАУ отн-но a_0, a_1, $\det \neq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ реш-е единств.!, ч.т.д.

Рассмотрим ур-ия n-го порядка:

$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = f(x)$, $x \in [c,d]$ (1)

ОЗ: найти $a_j(x)$, $j = \overline{0,n-1}$, $f(x)$ → (n+1) ф-ция

Теорема 1 (дост. усл-ие единств.)

Пусть на $[c,d]$ заданы (отр-ны Вронского) реш-я (1) $y_i(x)$, $i = \overline{0,n}$, такие, что $W(y_1, \dots, y_n)|_{x=c} \neq 0$, $y_0^{(i)}(c) = 0$, $i = \overline{0,n-1}$. Тогда $a_i(x)$, $i = \overline{0,n-1}$, $f(x)$ однозначно определяются на $[c,d]$.

Док-во:

Пусть $u_i(x) = y_i(x) - y_0(x)$, $i = \overline{1,n}$. Тогда $u_i(x)$ явл. реш-ем ур-ия

$u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) u^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) u'(x) + a_0(x) u(x) = 0$, $x \in [c,d]$ (2)

$W(u_1, \dots, u_n)|_{x=c} = W(y_1, \dots, y_n)|_{x=c}$ (т.к. $y_0^{(i)}(c) = 0$)

По теореме для ОДУ: $W(u_1, \dots, u_n) \neq 0$ на $[c,d]$

$$\begin{cases} u_1^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) u_1^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) u_1'(x) + a_0(x) u_1(x) = 0, \\ \dots \\ u_n^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) u_n^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) u_n'(x) + a_0(x) u_n(x) = 0 \end{cases}$$

Это СЛАУ отн-но $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x)$ при $\forall x \in [c,d]$

$\det = W(u_1, \dots, u_n)|_{x \in [c,d]} \neq 0 \Rightarrow$ для $\forall x \in [c,d]$ $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x)$ определяются ед. образом.

Возвращаемся к (1) и, подставляя $y(x)$ и $a_i(x)$, находим $f(x)$, ч.т.д.

Задача частичного определения коэффициентов

Рассматриваем ур-ие (1) и считаем, что известны $f(x)$, $a_i(x)$, $i = \overline{0,n-1}$, кроме $a_j(x), a_k(x)$. Пусть также заданы 2 реш-я $y_1(x), y_2(x)$. Подставим:

$$\begin{cases} a_j(x) y_1^{(j)}(x) + a_k(x) \cdot y_1^{(k)}(x) = F_1(x) \\ a_j(x) y_2^{(j)}(x) + a_k(x) \cdot y_2^{(k)}(x) = F_2(x) \end{cases}$$

Если $\det \neq 0$, то неясно, что делать.

Пример

$y^{(n)} + a_2(x)y''(x) + a_0(x)y(x) = 0$, $a_1, a_3 = 0$

$y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$

$W(y_1, y_2) = y_1' \cdot y_2 - y_2' \cdot y_1 = 1 + e^{-x} \cdot e^x = 2$

Подставим:

$1 + a_2 + a_0 = 0$. Возьмем $a_0 = p$ - любое $\Rightarrow a_2 = -(1+p) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ единств. нет . В этом случае и ЛНЗ не спасает!

Задача определения коэффициентов систем лин. дифф. ур-ий

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \qquad \bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Можем ли мы по заданному $\bar{x}(t)$ найти пост. коэфф.?

Пример

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} 3e^t \\ e^t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a_{11} + a_{12} = 3 \\ 3a_{21} + a_{22} = 1 \end{cases}$$ - реш-е не единств. отн. a_{ij}!

Теорема 2

Пусть $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$ - ~~сод~~ система , A - $n \times n$ мца , $A = const = \{a_{ij}\}$, $i,j = \overline{1,n}$

Если нам $t \in [c,d]$ заранее реш-е $\bar{x}(t)$: $\exists\, t_k \in [c,d]$, $k = \overline{1,n}$:

$\bar{x}(t_k)$ - ЛНЗ , тогда a_{ij} определяются однозначно.

Док-во:

Подставим реш-е в систему (первые ур-ия для всех t_k):

$$\begin{cases} a_{11}x_1(t_1) + \dots + a_{1n}x_n(t_1) = \dot{x}_1(t_1) \\ \dots \\ a_{11}x_1(t_n) + \dots + a_{1n}x_n(t_n) = \dot{x}_1(t_n) \end{cases} \qquad \bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x}^T(t) = (x_1(t) \dots x_n(t))$$

$\uparrow$ СЛАУ отн-но $a_{11}, \dots, a_{1n}$

Перепишем ~~ур-ие~~ сис-му в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}^T(t_1) \\ \vdots \\ \bar{x}^T(t_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_i(t_1) \\ \vdots \\ \dot{x}_i(t_n) \end{pmatrix}$$

м-ца B

По условию $\bar{x}(t_k)$ – ЛНЗ $\Rightarrow \det B \neq 0 \Rightarrow a_{i1}, \dots, a_{in}$ опред. однозначно

Аналогично док. для остальных строк, ч.т.д.

Рассмотрим сис-му с перем. коэфф.:

$\dot{\bar{x}}(t) = A(t)\bar{x}(t)$ (3)

Пусть $a_{ij} \in C[c,d]$.

Теорема 3

Пусть на $[c,d]$ заданы реш-я сис-мы (3): $\bar{x}^k(t)$, $k=\overline{1,n}$, такие, что система в-ров $\bar{b}^k = \bar{x}^k(c)$ – ЛНЗ. Тогда $a_{ij}(t)$ опр. дважды на $[c,d]$ единств. образом.

Док-во:

Выпишем i-ую строчку системы (для всех реш-й $\bar{x}^k(t)$):

$$\begin{cases} a_{i1}(t)\, x_1^1(t) + a_{i2}(t)\, x_2^1(t) + \dots + a_{in}(t)\, x_n^1(t) = \dot{x}_i^1(t) \\ \dots \\ a_{i1}(t)\, x_1^n(t) + a_{i2}(t)\, x_2^n(t) + \dots + a_{in}(t)\, x_n^n(t) = \dot{x}_i^n(t) \end{cases} \quad (4)$$

$$\det|_{t=c} = \det \begin{pmatrix} \bar{x}^{1T}(c) \\ \vdots \\ \bar{x}^{nT}(c) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \bar{b}^{1T} \\ \vdots \\ \bar{b}^{nT} \end{pmatrix} \neq 0 \text{ (по усл)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \det|_{t=c} \neq 0 \Rightarrow$ {по теор. из ОДУ} $\Rightarrow \det \neq 0, \forall t \in [c,d] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ коэфф. $a_{i1}(t), \dots, a_{in}(t)$ опр. однозначно для $\forall t \in [c,d]$.

Аналогично покаж. для остальных строк A, ч.т.д.

Задача определения коэфф. ОДУ (устойчивость)

Будем считать, что реш-е ОДУ задано приближенно:

$|\tilde{y}(x) - y_s(x)| \le \delta, \ \forall x \in [c,d]$

Пример

$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$

$a_0(x)$ - известно, $a_1(x)$ - надо найти. + изв. $y_s(x)$

$a_1(x) = -\dfrac{y_s''(x) + a_0(x)y_s(x)}{y_s'(x)}$. Предположим, что $\tilde{y}'(x) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ не факт, что $y_s'(x) \neq 0$!

Сведём задачу к $Az = u$ (z - изв.) $\Rightarrow Aa_1 = y$ (написать!)

непонятно, ур. обр. - можно написать или нет

Задачи для уравнения теплопроводности с обратным временем

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < \ell, \ t_0 < t \le T \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, & t_0 < t \le T \\ u(t_0,x) = \varphi(x), & 0 \le x \le \ell \end{cases}$$ - ПЗ (найти $u(x,t)$)

ГОЗ: $u(x,T) = g(x), \ 0 \le x \le \ell$ - дано

Найти: $\varphi(x)$, если $\varphi(x)$ - изв.

Хотим получить операторное ур-ие: $A\varphi = g$

Решим прямую задачу: $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ell}\left(\int\limits_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin\frac{\pi n \xi}{\ell} d\xi\right) \cdot e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 (t-t_0)} \cdot \sin\frac{\pi n x}{\ell}, \ 0 \le x \le \ell, \ t_0 \le t \le T$

Выразим ф-ию $g(x)$ через реш-е:

$g(x) = u(x,T) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ell}\left(\int\limits_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin\frac{\pi n \xi}{\ell} d\xi\right) e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 (T-t_0)} \cdot \sin\frac{\pi n x}{\ell}, \ 0 \le x \le \ell.$

получили $A\varphi = g$

Единственность

(A - линейный)

Предположим, что $\exists \varphi_1, \varphi_2$ - реш-ия, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \Rightarrow A\varphi = 0$.

Существует ли у такого ур-ния нетрив. реш-е. Если да $\Rightarrow$ единств. нет.

$A\varphi = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \varphi = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ell}\left(\int_0^\ell \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{\ell}d\xi\right) e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 \frac{1}{t}(T-t_0)} \cdot \sin\frac{\pi n x}{\ell} = 0 \quad \Big| \cdot \sin\frac{\pi k x}{\ell}, \int_0^\ell dx$

(сходимость такова, что ряд можно почленно проинтегрировать)

$\Downarrow$

$\frac{2}{\ell}\left(\int_0^\ell \varphi(\xi)\sin\frac{\pi k\xi}{\ell}d\xi\right) = 0 \quad , \forall k \in \mathbb{N}$

Система $\{\sin\frac{\pi n x}{\ell}\}$ полна в $L_2[0,\ell)$, а у нас $\varphi(\xi)$ ортогональна всем ф-циям из $\Rightarrow$ $\underline{\varphi \equiv 0 \text{ в } L_2(0,\ell)} \Leftrightarrow$ реш-е единственно в $L_2(0,\ell)$

Существование

Введём $\left\{\sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\frac{\pi n x}{\ell}\right\}$ – ОНС в $L_2(0,\ell)$

$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\int_0^\ell \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{\ell}d\xi$ – коэфф. Фурье

$\Downarrow$

$g_n = \varphi_n e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2(T-t_0)}$

Приведём контрпример:

$\exists\, g(x): g_n = e^{-n}$ $\left(g \in L_2(0,\ell) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 \text{ сх-ся}\right)$

↳ бесконечно дифф-ма (ряд $\sum n^k e^{-n}$ сх-ся)

$\Rightarrow \varphi_n = e^{a^2\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2\underbrace{(T-t_0)}_{>0}} \cdot e^{-n}$, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|^2$ ✗ $\Rightarrow \nexists$ реш-я из $L_2(0,\ell)$

$\Rightarrow$ реш-е из $L_2(0,\ell)$ может не существовать. (g_n должно убывать e^{n^2})

Устойчивость (в случае, когда реш-е $\varphi \exists$)

Приведём контрпример.

$\exists\, \varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} k \sin\frac{\pi k x}{\ell} \Rightarrow$ найден соотв. $g(x)$:

$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} k e^{-a^2\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2(T-t_0)} \cdot \sin\frac{\pi k x}{\ell}$ – беск. дифф. ф-ция

$\|\varphi\|_{L_2(0,\ell)} = k$, $\|g\|_{L_2(0,\ell)} = k e^{-a^2\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2(T-t_0)}$

Устремим $k \to \infty \Rightarrow g \underset{k\to\infty}{\to} 0$, но $\varphi \not\equiv 0 \Rightarrow$ нет устойчивости!

Устойчивости из $L_2(0,l)$ в $L_2(0,l)$ нет!

Исследуем подробнее оператор A:

$g(x) =$ {ряд сх-ся в среднем $\Rightarrow$ можно менять порядок Σ и $\int$} $=$

$$= \int_0^l \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n x}{l} \cdot \sin\frac{\pi n \xi}{l} \cdot e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 (T-t_0)} \cdot \varphi(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_0^l K(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = g(x), \quad \text{где } K(x,\xi) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 (T-t_0)} \cdot \sin\frac{\pi n x}{l} \sin\frac{\pi n \xi}{l}$$

↳ ур-ие Фредгольма 1го рода

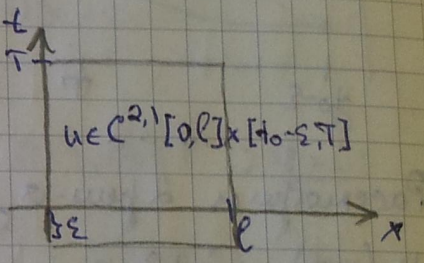
Ядро дифф-мо бесч. число раз и ряд сх-ся равномерно $\Rightarrow$ можно обратиться к примеру 4 $\Rightarrow$ устойчивости в $C[0,l]$ в $C[0,l]$ нет! (∃ тоже не для всех g)

Оценка устойчивости в случае компакта

$\exists a^2 = 1$

$u_t = u_{xx}, \quad 0 \le x \le l, \quad t_0 \le t \le T$

$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t_0 - \varepsilon \le t \le T$



$\forall f(t) = \int_0^l u^2(x,t)\,dx$

$f'(t) = 2\int_0^l u_t(x,t)\,u(x,t)\,dx$

$f''(t) = 2\int_0^l u_{tt}(x,t)\,u(x,t)\,dx + 2\int_0^l u_t^2(x,t)\,dx$

Найдём $u_{tt} = (u_{xx})_t = (u_t)_{xx} = u_{xxxx}$

$f''(t) = 2\int_0^l u_{xxxx}(x,t)\,u(x,t)\,dx + 2\int_0^l u_t^2\,dx =$ {инт-ем по частям} $=$

$$= 2u_{xxx}(x,t)\cdot u(x,t)\Big|_0^l - 2\int_0^l u_{xxx}\cdot u_x(x,t)\,dx + 2\int_0^l u_t^2(x,t)\,dx =$$

$$= -2u_{xx}(x,t)\cdot u_x(x,t)\Big|_0^l + 2\int_0^l u_{xx}^2(x,t)\,dx + 2\int_0^l u_t^2(x,t)\,dx =$$

$= \{u_{xx} = u_t\}$; $u_{xx}(0,t) = u_t(0,t) = \frac{\partial}{\partial t} u(0,t) = 0$, $-\!\!-$ ~~ucct~~ $u_{xx}(\ell,t) = 0\}$ =

$= 4\int_0^\ell u_t^2(x,t)\,dx = -f'(t)$

$\ne h(t) = \ln(-f(t))$ (она опр-на, т.к. $f(t) > 0$ при некотор. $u(x,t)$)

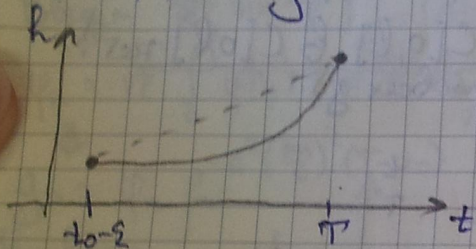
$h'(t) = \frac{-f'(t)}{f(t)}$

$h''(t) = \frac{-[f''(t)\cdot f(t) - [f'(t)]^2}{f^2(t)}$ $\star$

$f''\cdot f - (f')^2 = 4\int_0^t u_t^2(x,t)\,dx \cdot \int_0^t u^2(x,t)\,dx - 4\left(\int_0^\ell u_t(x,t)u(x,t)\,dx\right)^2 \ge$

$\ge \{$по нер-ву К.Б.$\} \ge 0$, т.е. $\underline{h''(t) \ge 0}$ на $[t_0 - \varepsilon; T]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow h(t)$ выпукла



$\Rightarrow h(t) \le h(t_0-\varepsilon)\frac{T-t}{T-(t_0-\varepsilon)} + h(T)\cdot\frac{t-(t_0-\varepsilon)}{T-(t_0-\varepsilon)}$

$\Downarrow$

$f(t) \le [f(t_0-\varepsilon)]^{\frac{T-t}{T-(t_0-\varepsilon)}} \cdot [f(T)]^{\frac{t-(t_0-\varepsilon)}{T-(t_0-\varepsilon)}}$,

$t \in [t_0-\varepsilon, T]$

Рассмотрим 2 вспом-е задачи:

$u_j(x,t)$, $j = 1,2$: $\int_0^\ell u_j^2(x,t)\Big|_{t=t_0-\varepsilon} dx \le c^2$

$\star u_1(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$:

$\int_0^\ell [u_1(x,t) - u_2(x,t)]^2 dx \le \{$нер-во дне-ф$\} \le \left(\int_0^\ell [u_1(x,t_0-\varepsilon) - u_2(x,t_0-\varepsilon)]^2 dx\right)^{\frac{T-t}{T-(t_0-\varepsilon)}}$

$\cdot \left[\int_0^\ell [u_1(x,T) - u_2(x,T)]^2 dx\right]^{\frac{t-(t_0-\varepsilon)}{T-(t_0-\varepsilon)}} \le$

$\le (4c^2)^{\frac{T-t}{T-(t_0-\varepsilon)}} \cdot \left(\int_0^\ell [u_1(x,T) - u_2(x,T)]^2 dx\right)^{\frac{t-(t_0-\varepsilon)}{T-(t_0-\varepsilon)}}$

$\|u_1 - u_2\|_{L_2(0,\ell)} \le (2c)$

$\|u_1(x,t_0) - u_2(x,t_0)\|_{L_2(0,\ell)} \le (2c)^{\frac{T-t_0}{T-(t_0-\varepsilon)}} \cdot \|u_1(x,T) - u_2(x,T)\|^{\frac{\varepsilon}{T-(t_0-\varepsilon)}}$

$= \{ u_{xx} = u_t$; $u_{xx}(0,t) = u_t(0,t) = \frac{\partial}{\partial t} u(0,t) = 0$, $-$ и $-$ $u_{xx}(\ell,t) = 0 \} =$

$= 4 \int_0^\ell u_t^2(x,t)\,dx = -f''(t)$

$\ast\, h(t) = \ln(f(t))$ (она опр-на, т.к. $f(t) > 0$ при нетрив. $u(x,t)$)

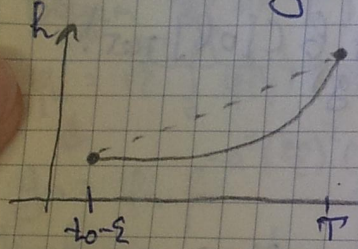
$h'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$

$h''(t) = \frac{f''(t)\cdot f(t) - [f'(t)]^2}{f^2(t)}$ $\ast$

$f'' \cdot f - (f')^2 = 4 \int_0^t u_t^2(x,t)\,dx \cdot \int_0^t u^2(x,t)\,dx - 4\left(\int_0^\ell u_t(x,t)u(x,t)\,dx\right)^2 \geq$

$\geq$ {по нер-ву К.Б.} ≥ 0 , т.е. $h''(t) \geq 0$ на $[t_0 - \varepsilon; T]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow h(t)$ выпукла



$\Rightarrow h(t) \leq h(t_0-\varepsilon)\frac{T-t}{T-(t_0-\varepsilon)} + h(T)\cdot\frac{t-(t_0-\varepsilon)}{T-(t_0-\varepsilon)}$

$\Downarrow$

$f(t) \leq [f(t_0-\varepsilon)]^{\frac{T-t}{T-(t_0-\varepsilon)}} \cdot [f(T)]^{\frac{t-(t_0-\varepsilon)}{T-(t_0-\varepsilon)}}$,

$t \in [t_0-\varepsilon, T]$

Рассмотрим 2 реш-я задачи:

$u_j(x,t)$, $j = 1,2$: $\int_0^\ell u_j^2(x,t)\Big|_{t=t_0-\varepsilon} dx \leq c^2$

$\ast\, u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$:

$\int_0^\ell [u_1(x,t) - u_2(x,t)]^2 dx \leq$ {инт. нер-во для f} $\leq \left(\int_0^\ell [u_1(x,t_0-\varepsilon) - u_2(x,t_0-\varepsilon)]^2 dx\right)^{\frac{T-t}{T-(t_0-\varepsilon)}}$

$\cdot \left[\int_0^\ell [u_1(x,T) - u_2(x,T)]^2 dx\right]^{\frac{t-(t_0-\varepsilon)}{T-(t_0-\varepsilon)}} \leq$

$\leq (4c^2)^{\frac{T-t}{T-(t_0-\varepsilon)}} \cdot \left(\int_0^\ell [u_1(x,T) - u_2(x,T)]^2 dx\right)^{\frac{t-(t_0-\varepsilon)}{T-(t_0-\varepsilon)}}$

$\|u_1 - u_2\|_{L_2(0,\ell)} \leq (2c)$

$\|u_1(x,t_0) - u_2(x,t_0)\|_{L_2(0,\ell)} \leq (2c)^{\frac{T-t_0}{T-(t_0-\varepsilon)}} \cdot \|u_1(x,T) - u_2(x,T)\|^{\frac{\varepsilon}{T-(t_0-\varepsilon)}}$

$\|\varphi\|_{L_2} \le const \cdot \|g\|_{L_2}^{\frac{\varepsilon}{T-(t_0-\varepsilon)}}$ — оценка устойчивости (условной!)

Введём мн-во ф-ий $M_{t_0-\varepsilon} = \{ u(x,t_0-\varepsilon) \mid \|u(x,t_0-\varepsilon)\|_{L_2(0,\ell)} \le C \}$

$A_\varepsilon M_{t_0-\varepsilon} = M_{t_0}$, $A_\varepsilon \varphi = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n x}{\ell} \cdot \sin\frac{\pi n \xi}{\ell} \cdot e^{-(\frac{\pi n}{\ell})^2 \varepsilon} \cdot \varphi(\xi) d\xi$

A_ε – вполне непр. оператор, т.е. он переводит огр. мн-во $M_{t_0-\varepsilon}$ (комп в $L_2(0,\ell)$) в компакт M_{t_0}

Оценка получена на компакте M_{t_0}

Задача определения начального распределения температуры по измерению температуры в точке

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0<x<\ell, \quad 0<t\le T \\ u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0 \quad \text{– теплоизол. концы} \quad 0\le t\le T \quad \text{– ПЗ} \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0\le x\le \ell \end{cases}$$

ОЗ: φ – неизвестна; дано $u(x_0,t) = g(t)$, $0<t_1\le t\le T$; $\varphi = ?$

Решение ПЗ:

$$u(x,t) = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell \varphi(\xi)d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(\xi)\cos\frac{\pi n\xi}{\ell}d\xi \cdot e^{-(\frac{\pi n}{\ell})^2 a^2 t} \cdot \cos\frac{\pi n x}{\ell}, \quad 0\le x\le\ell, \ 0\le t\le T$$

$$u(x_0,t) = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell \varphi(\xi)d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(\xi)\cos\frac{\pi n\xi}{\ell}d\xi \cdot e^{-(\frac{\pi n}{\ell})^2 a^2 t} \cdot \cos\frac{\pi n x_0}{\ell} = g(t), \quad 0<t_1\le t\le T$$

Ряд сх-ся равномерно по t (φ_n – коэф Фурье, φ_n кол. $\to 0 \Rightarrow$ огр., $e^{-\dots} \Rightarrow 0$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ можем переставить Σ и $\int$

$$\int_0^\ell K(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi = g(t), \quad t\in[t_1,T] \quad (1)$$

$$K(t,\xi) = \frac{1}{\ell} + \frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\pi n}{\ell})^2 a^2 t} \cdot \cos\frac{\pi n\xi}{\ell} \cdot \cos\frac{\pi n x_0}{\ell}, \quad 0\le\xi\le\ell, \ t_1\le t\le T$$

↖ по т. Вейерштрасса сх-ся равномерно $\Rightarrow$

$\Rightarrow K \in C([t_1,T]\times[0,\ell]) \Rightarrow$ (1) – ур-ие Фредгольма 1го рода

с непрерывным ядром ~ некорректная задача (уст. точно нет)

Заметим, что (1) – линейная по φ $\Rightarrow$ единственность имеет место

$\Leftrightarrow \int_0^\ell K(t,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = 0 \overset{(2)}{,}\ t\in[t_1,T]$ имеет только тривиальное решение

Теорема №1

Пусть $\cos\frac{\pi n x_0}{\ell} \neq 0,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Тогда реш-ие (1) единственно в $L_2(0,\ell)$.

Док-во:

Перепишем (2) в след. виде:

$$\varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2 t}\cdot\cos\frac{\pi n x_0}{\ell} = 0,\quad t\in[t_1,T] \quad (\varphi_i - \text{коэф. Фурье}) \quad (4)$$

Докажем, что $\varphi_j = 0,\ j = 0,1,2,\dots$

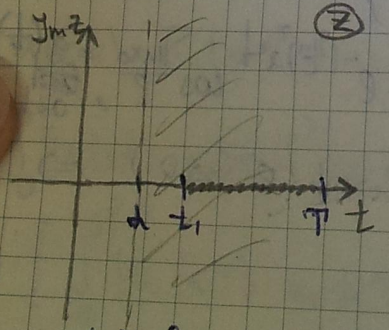
Введём ф-ию $F(z) = \varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2 z}\cdot\cos\frac{\pi n x_0}{\ell}$ (3) и рассм. её на компл. полупл-ти: $\operatorname{Re} z \geq \alpha$, где $0<\alpha<t_1$

Сначала докажем, что $\sum$ в $F(z)$ сх-ся $\Rightarrow$ $F(z)$ огр-на. $=1$

$$\left|\varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2 z}\cdot\cos\frac{\pi n x_0}{\ell}\right| \leq \underbrace{|\varphi_n|}_{\text{огр.}}\cdot\left|e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2\cdot\operatorname{Re} z}\right|\cdot\left|e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2\cdot i\operatorname{Im} z}\right| \leq$$

$\leq \text{const}\cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2\alpha}$; числ. мажорир. ряд сх-ся $\Rightarrow$ по т-ме Вейерштрасса

$\Rightarrow$ (3) сх-ся равномерно при $\operatorname{Re} z \geq \alpha$ $\Rightarrow$ $F(z)$ аналитична при $\operatorname{Re} z \geq \alpha$



$F(z) = 0$ при $z = t \in [t_1; T]$ и при этом аналитична $\Rightarrow$ в силу т-мы единств. аналит. ф-ий $\Rightarrow$ $F(z) = 0$ при $\operatorname{Re} z > \alpha$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow F(t) = 0$ при $t \geq t_1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (4) выполн. при $t \geq t_1$

Устремим $t \to +\infty$. Т.к. $\sum \Rightarrow \Rightarrow$ переходим к $\lim$ под $\sum$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_0 = 0$.

Умножим (4) на $e^{\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 a^2 t}$

$$\Rightarrow \varphi_1\cdot\cos\frac{\pi x_0}{\ell} + \sum_{n=2}^{\infty}\varphi_n\cdot\exp\{\dots\}z = 0$$

$\to 0$ при $t\to\infty$

$\Rightarrow \varphi_1 \cdot \underbrace{\cos\frac{\pi x_0}{\ell}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_n = 0, \forall n \geq 0$ ✓ в силу полноты б.с.в. ч.т.д.

Выбор x_0:

Если $x_0 = 0$ или $x_0 = \ell \Rightarrow \cos\frac{\pi n x_0}{\ell} \neq 0 \Rightarrow$ можно мерить на концах ✓

$\exists x_0 = \frac{\ell}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\frac{\pi n x_0}{\ell} \neq 0, \forall n$ ✓

$\exists x_0 = \frac{p}{q}\ell \Rightarrow \cos\frac{\pi n p}{q} \overset{?}{=} 0 \Rightarrow \frac{\pi n p}{q} = \frac{\pi}{2}(2s+1) \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{2s+1}{2n}$

Если p - нечетное, q - четное $\Rightarrow \cos\frac{\pi n x_0}{\ell} = 0$ при каком-то n ✓

Возьмем $\varphi(x) = \cos\frac{\pi x}{\ell} \Rightarrow u(x,t) = \cos\frac{\pi x}{\ell} \cdot e^{-(\frac{\pi}{\ell})^2 a^2 t}$, возьмем $x_0 = \frac{\ell}{2}$

$g(t) = u(x_0, t) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot e^{-(\frac{\pi}{\ell})^2 a^2 t} = 0 \to \varphi(x) \equiv 0$ (единств. пропадает!)

Задача определения источника в уравнении теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x)g(t), & 0 < x < \ell,\ 0 < t \leq T \\ u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0, & 0 < t \leq T \\ u(x,0) = \varphi(x) = 0, & 0 \leq x \leq \ell \end{cases}$$

← мультипликативный источник

Две обратные задачи:

1) Пусть известно $f(x)$, $u(x_0,t) = h(t)$, $0 \leq t \leq T$ — 031

Найти: $g(t)$

2) Пусть известно $g(t), h(t)$; Найти: $f(x)$, $0 \leq x \leq \ell$ — 032

031

$$u(x,t) = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell f(\xi)d\xi \int_0^t g(\tau)d\tau + \frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\ell f(\xi)\cos\frac{\pi n \xi}{\ell}d\xi \int_0^t e^{-(\frac{\pi n}{\ell})^2 a^2 (t-\tau)} \cdot g(\tau)d\tau \cdot \cos\frac{\pi n x}{\ell}, \quad 0 \leq x \leq \ell,\ 0 \leq t \leq T$$

(f_0 — первое слагаемое, f_n — второе)

Положим $x = x_0 \Rightarrow u(x_0,t) = h(t)$

В силу равномерной сх-ти $\sum$ меняем $\int$ и $\sum$:

$\int_0^t K(t,\tau)g(\tau)d\tau = h(t)$, $0 \leq t \leq T$, где

$K(t,\tau) - K(t-\tau) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos\frac{\pi n x_0}{\ell} \cdot e^{-(\frac{\pi n}{\ell})^2 a^2 (t-\tau)}$

$f_n \to 0$ как коэф. Фурье $\Rightarrow$ огр-ен ; $\cos\frac{\pi n x_0}{\ell}$ – огр.

$|e^{-(\frac{\pi n}{\ell})^2 a^2 \theta}| \le e^{-(\frac{\pi n}{\ell})^2 b^2 \varepsilon}$ при всех $\theta \ge \varepsilon$ $\Rightarrow$ K – непрерывна, но к нулю подбирается немного

↑ такой исп. мод сх-ся

Теорема 2

Пусть $f \in C^4[0,\ell]$ и $f'(0) = f'(\ell) = 0$, $f(x_0) \neq 0$. Тогда если $h(t) \in C^1[0,T]$ и $h(0) = 0$, то реш-ие $ОЗ_1$ $\exists!$ и принадлежит $C_t[0,T]$.

Док-во:

$f \in C^4[0,\ell]$. Докажем, что $|f_n| \le \frac{c}{n^4}$

$f_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(\xi)\cos\frac{\pi n \xi}{\ell} d\xi = \frac{2}{\ell} f(\xi)\cdot\frac{\ell}{\pi n}\sin\frac{\pi n \xi}{\ell}\Big|_0^{\ell} - \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f'(\xi)\frac{\ell}{\pi n}\sin\frac{\pi n \xi}{\ell} d\xi =$

$= \frac{2}{\ell}\left(\frac{\ell}{\pi n}\right)^2 f'(\xi)\cos\frac{\pi n \xi}{\ell}\Big|_0^{\ell} - \frac{2}{\ell}\left(\frac{\ell}{\pi n}\right)^2 \int_0^{\ell} f''(\xi)\cos\frac{\pi n \xi}{\ell} d\xi = \ldots =$

(в силу усл-ий)

$\le \frac{c}{n^4}$

Докажем, что $K(\theta) \in C^1[0,T]$

$K_t(\theta) = \{\text{формально дифф-ем}\} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos\frac{\pi n x}{\ell}\left(-\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2 e^{-(\frac{\pi n}{\ell})^2 a^2 \theta}$

$|f_n| \le \frac{c}{n^4}$ $\Rightarrow$ мажоранта: $\frac{1}{n^2}\cdot e^{-(\frac{\pi n}{\ell})^2 a^2 \theta} \xrightarrow[\theta \ge 0]{n\to\infty} \Rightarrow$, а ряд в $K(\theta)$ сх-ся хотябы в 1 точке $\Rightarrow K(\theta) \in C^1[0,T]$.

$\int_0^t K(t,\tau) g(\tau) d\tau = h(t)$, $0 \le t \le T$ – интегр. ур-ие Вольтерра I рода

(h(0)=0 – необх. усл-ие реш-ия)

Продиффер-ем ур-ие по t:

$K(t,t)\cdot g(t) + \int_0^t K_t(t,\tau) g(\tau) d\tau = h'(t)$

$K(t,t) = k(t-t) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos\frac{\pi n x_0}{\ell} = f(x_0) \neq 0$

$\Downarrow$

$g(t) + \frac{1}{f(x_0)}\int_0^t \underbrace{K_t(t,\tau)}_{k'(t-\tau)} g(\tau) d\tau = \frac{1}{f(x_0)}\cdot h'(t)$, $0 \le t \le T$

↳ ур-ие Вольтерра II рода

По усл. теоремам реш-ие этого ур-ия $\exists!$ (принцип сжим. отобр.) $u \in C([0,T])$, т.т.д.

ОЗ 2

$g(t)$: усл., $f(t) = ?$

Будем считать, что $g(t) = 1$

$$u(x_0,t) = h(t) = \frac{t}{\ell}\int_0^\ell f(\xi)d\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(\xi)\cos\frac{\pi n\xi}{\ell}d\xi \cdot \left(\frac{\ell}{\pi n a}\right)^2\left[1 - e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2 t}\right] \cdot \cos\frac{\pi n x_0}{\ell}$$

$$\int_0^\ell K(t,\xi) f(\xi) = h(t), \quad t \in [0,T], \text{ где:}$$

$$K(t,\xi) = \frac{t}{\ell} + \frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ell}{\pi n a}\right)^2 \cos\frac{\pi n x_0}{\ell}\cdot\cos\frac{\pi n\xi}{\ell}\cdot\left[1 - e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2 t}\right]$$

Мажорирующий ряд $\sim \frac{1}{n^2} \Rightarrow K$ - непр. ф-ия в $[0,T]\times[0,\ell] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ получили ур-ие Фредгольма I-го рода с непр. ядром $\Rightarrow$ некорр. задача

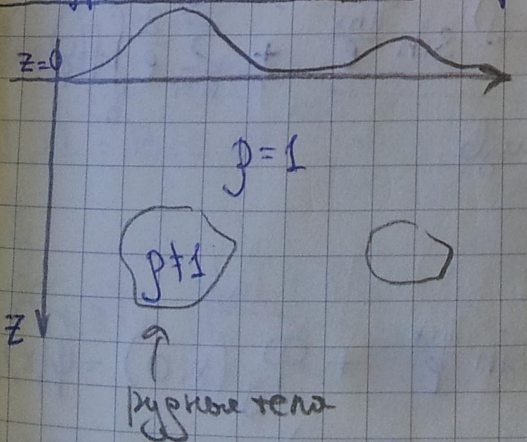
Единственность зависит от т. x_0!

$u_t = a^2 u_{xx} + f(x)g(t)$

$u(x_0,t) = h(t)$

- $g(t) \to$ ур-ие Вольтерра II рода; задача корректна
- $f(x) \to$ ур-ие Фредгольма I рода; задача некорректна

Некорректные и ОЗ теории потенциалов



- типичная задача теории потенц. (поиск глубины?)

← задача продолж. потенциалов с нов-ти?

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & |x| < \infty,\ y > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_y(x,0) = \psi(x), & |x| < \infty \end{cases}$$

$\exists\ \varphi = \bar{\varphi}(x) = 0,\ \psi = \bar{\psi}(x) = 0 \Rightarrow \bar{u}(x,y) = 0,\ |x| < \infty,\ y > 0$

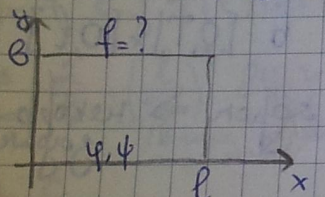
$\not\exists\ \varphi_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx),\ \psi_n(x) = 0$

$\Rightarrow u_n(x,y) = \frac{1}{n}\sin(nx)\cdot ch(ny)$ (единственность док., все нули)

Оценим: $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\bar{u}(x,y) - u_n(x,y)| = \frac{1}{n}\cdot ch(ny) \xrightarrow[\text{при } y}{n\to\infty} \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ отсутствует устойчивость по нач. данным! $|\varphi_n(x) - \bar{\varphi}(x)| \to 0$

Задача на отрезке для ур-ия Лапласа



$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < \ell,\ y > 0 \\ u(0,y) = u(\ell,y) = 0, & y \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_y(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq \ell \end{cases}$$

Задача: найти $u(x,B) = f(x)$, $0 \leq x \leq \ell$

$\exists$ известны f и $\varphi \Rightarrow$ получаем задачу Дирихле, решаем.

Хотим в итоге получить: $Af = \{\varphi, \psi\}$.

Решаем задачу Дирихле ①–④:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{\ell}\,d\xi \cdot \frac{sh\frac{\pi n}{\ell}(B-y)}{sh\frac{\pi n}{\ell}B}\sin\frac{\pi n x}{\ell} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{\ell}\,d\xi \cdot \frac{sh\frac{\pi n}{\ell}y}{sh\frac{\pi n}{\ell}B}\cdot\sin\frac{\pi n x}{\ell}, \quad 0 \leq x \leq \ell,\ 0 \leq y \leq B$$

$\Phi(x,y)$ – ууб.

Найдем $u_y(x,0)$:

$$u_y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi n}{\ell^2}\int_0^{\ell} f(\xi)\frac{\sin\frac{\pi n\xi}{\ell}}{\sin\frac{\pi n}{\ell}}\,d\xi \cdot \frac{1}{sh\frac{\pi n B}{\ell}}\cdot\sin\frac{\pi n x}{\ell} + \Phi_y(x,0) = \psi(x)$$

(ууб, ууб, ууб)

Получили ур-ие отн-но f (ур-ие Фредгольма I рода):

$$\int_0^{\ell} K(x,\xi)f(\xi)\,d\xi = \Psi(x),\ 0 \leq x \leq \ell, \text{ где } (\bar{5})$$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & |x| < \infty,\ y > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_y(x,0) = \psi(x) \end{cases}, \quad |x| < \infty$$

$\exists\ \varphi = \bar{\varphi}(x) = 0,\ \psi = \bar{\psi}(x) = 0 \Rightarrow \bar{u}(x,y) = 0,\ |x| < \infty,\ y > 0$

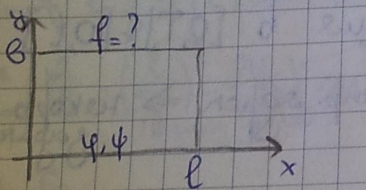
$\star\ \varphi_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx),\ \psi_n(x) = 0$

$\Rightarrow u_n(x,y) = \frac{1}{n}\sin(nx)\cdot ch(ny)$ (единственность док., все норм.)

Оценим: $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\bar{u}(x,y) - u_n(x,y)| = \frac{1}{n}\cdot ch(ny) \xrightarrow[\text{равн. } y]{n\to\infty} \infty$ при $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ отсутствует устойчивость по нач. данным! $|\varphi_n(x) - \bar{\varphi}(x)| \to 0$

Задача на отрезке для ур-ия Лапласа



$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < \ell,\ y > 0 \\ u(0,y) = u(\ell,y) = 0, & y \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_y(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq \ell \end{cases}$$

Задача: найти $u(x,B) = f(x)$, $0 \leq x \leq \ell$

Известны f и $\varphi \Rightarrow$ получаем задачу Дирихле, решаем.

Хотим в итоге получить: $Af = \{\varphi, \psi\}$.

Решаем задачу Дирихле ①–④:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{\ell}\xi\, d\xi \cdot \frac{sh\frac{\pi n}{\ell}(B-y)}{sh\frac{\pi n}{\ell}B}\sin\frac{\pi n x}{\ell} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(\xi)\sin\frac{\pi n}{\ell}\xi\, d\xi \cdot \frac{sh\frac{\pi n}{\ell}y}{sh\frac{\pi n}{\ell}B}\cdot\sin\frac{\pi n x}{\ell}, \quad 0 \leq x \leq \ell,\ 0 \leq y \leq B$$

$\Phi(x,y)$ – куб.

Найдем $u_y(x,0)$: (ℓ – кольц.)

$$u_y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{\ell^2}\int_0^{\ell} f(\xi)\frac{\sin\frac{\pi n}{\ell}\xi}{\sin\frac{\pi n}{\ell}\xi}\, d\xi \cdot \frac{1}{sh\frac{\pi n B}{\ell}}\cdot\sin\frac{\pi n x}{\ell} + \Phi_y^{\text{куб}}(x,0) = \overline{\psi(x)}^{\text{куб}}$$

Получили ур-ие отн-но f (ур-ие Фредгольма I рода):

$$Af = \int_0^{\ell} K(x,\xi)\cdot f(\xi)\, d\xi = \Psi(x),\ 0 \leq x \leq \ell, \text{ где } \boxed{5}$$

$$K(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi n}{\ell^2}\sin\frac{\pi n x}{\ell}\cdot\sin\frac{\pi n\xi}{\ell}\cdot\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\pi n b}{\ell}},$$

$$\Psi(x)=\psi(x)-\Phi_y(x,0)$$

Менять местами Σ и $\int$ можно, если ряд сх-ся равномерно

(член мажорир. ряда $a_n \sim \frac{n}{e^{\frac{\pi n b}{\ell}}}$ для $K(x,\xi)$, такой ряд сх-ся $\Rightarrow$ ✓) $\Rightarrow$

$\Rightarrow K(x,\xi)\in C([0,\ell]\times[0,b])$ $\Rightarrow$ оператор A - вполне непр. из $L_2\to L_2$, $C\to C$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ задача некорректна! ☹

Исследуем отдельно единственность решения: $Af=0$ (6)

$\exists!\, f$ для (5) $\Leftrightarrow f=0$ для (6)

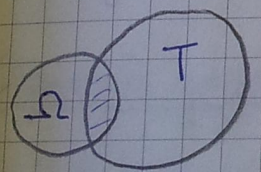
$$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{2\pi n}{\ell^2\operatorname{sh}\left(\frac{\pi n b}{\ell}\right)}}_{=c_n\neq 0,\ \forall n}\cdot f_n\cdot\sin\frac{\pi n x}{\ell}=0$$

В силу полноты $\left\{\sin\frac{\pi n x}{\ell}\right\}$: $c_n f_n=0$, $\Rightarrow f_n=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow$ ед. есть!

Обратные задачи теории потенциала

Будем рассматривать задачи в $\mathbb{R}^3$.

Ньютонов потенциал: $$v(x,y,z)=\iiint_{\Omega}\frac{\rho(x',y',z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\,dx'dy'dz'$$

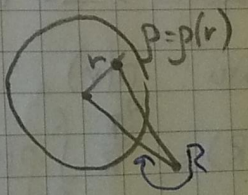


$\exists$ в T нам известно v

Найти: Ω (или $\partial\Omega=\Sigma$), ρ

Исследуем задачу с точки зрения корректности:

$\exists\ \Omega=B(0,a)$, $\rho(x,y,z)=\rho(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$



$$\Downarrow$$

$$v(x,y,z)=\iiint_{B(0,a)}\frac{\rho\left(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$ (=)

В силу сферической симметрии $v=v(R)$, где $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$v(R)=\int_0^a\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho(r)}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}}\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$|t| = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta}$ и перейдём от θ к t $\Rightarrow$

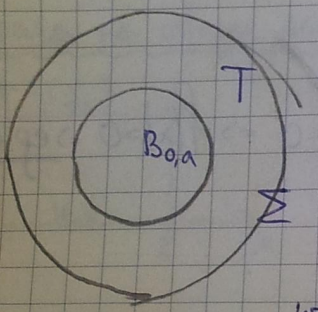
$\Rightarrow d\varphi\, d\theta\, dr = \left|\frac{D(r,\varphi,\theta)}{D(r,\varphi,t)}\right| d\varphi\, dt\, dr$

$\left|\frac{D(\theta,r)}{D(t,r)}\right| = \left|\frac{D(t,r)}{D(\theta,r)}\right|^{-1} = \left|\frac{D(r,\theta)}{D(r,t)}\right| = \text{abs}\begin{vmatrix} -t_0 r^{-1} & \bullet \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |t_0| = \left|\frac{Rr\sin\theta}{t}\right|^{-1}$

(V) $2\pi \int_0^a \int_{R-r}^{R+r} \frac{\rho(r)\, r^2 \sin\theta \cdot t}{t \cdot Rr\sin\theta}\, dt\, dr = 2\pi \int_0^a \int_{R-r}^{R+r} \frac{\rho(r)\cdot r}{R}\, dt\, dr =$

$= \boxed{\frac{4\pi}{R}\int_0^a \rho(r)\cdot r^2\, dr = v(R)}$ – вн. потенц. для шарика с $\rho = \rho(r)$

~~$O3_1'$~~ $O3_1$



Найти: $B_{0,a}$ (форму тела), $\rho(r) = const = \rho_0$

Известно: $v(R)$ ~~$\rho = \rho_0$~~ вне Σ

Замечание Если потенц. известен на сфере Σ, то он известен изнутри (из ед. реш. зад. Дирихле для ур-ия Лапласа)

$v|_{\Sigma_R} = v(R) = \frac{4\pi}{R}\int_0^a \rho_0 r^2\, dr = \frac{4\pi}{3}\frac{\rho_0 a^3}{R} = \frac{M}{R}$ ← масса шарика – известно $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ известно и $\rho_0 a^3$ (ρ_0 и a не опред. единств. образом, только $\rho_0 a^3$!!) $\Rightarrow$

$\Rightarrow O3_1$ не имеет единств. реш-ия!

$O3_2$

Известно: Ω (обл., в кот. сосредоточ. масса), $v(R)$ (т.е. изв. a)

Найти: $\rho(r)$

$v(R) = \frac{4\pi}{R}\int_0^a \rho(r)\cdot r^2\, dr$ $\Rightarrow$ нам изв. $\int_0^a \rho(r) r^2\, dr = A$

$\rho(r)$ отсюда единств. образом не определить!

Например: $\rho(r) = cr + d$ $\Rightarrow$ $A = \frac{c}{4}a^4 + \frac{d}{3}a^3$ $\Rightarrow$ c и d не опр. единств. образом! $\Rightarrow$ $O3_2$ некорректна!

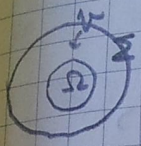
(03)

Известно: ρ, $v(x)$ — Найти: Ω (форму обл-ти), т.е. a

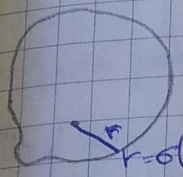
Теорема (Новикова)

Если Ω - звездное тело, то при $\rho = \frac{\rho_0}{\text{const}}$ его форма однозначно определяется внешними потенциалами.

Док-во:



Опр Область Ω наз. звездной отн-но точки M, если $\forall$ луч MP пересекает $\partial\Omega$ в единств. точке. Звездной наз. обл., для кот. $\exists$ т. $M \in \Omega$, отн-но кот. область будет звездной



Выберем $\forall$ т., отн-но кот. тело звездно. $\Rightarrow$ его граница описывается ур-ем $r = \sigma(\varphi, \theta)$.

потенц.

$$u(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\sigma(\varphi,\theta)} \frac{\rho_0 r^2 \sin\theta \, dr\,d\theta\,d\varphi}{\sqrt{(x - r\cos\varphi\sin\theta)^2 + (y - r\sin\varphi\sin\theta)^2 + (z - r\cos\theta)^2}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{u(x,y,z)}_{\text{изв.}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F(\underbrace{\sigma(\theta,\varphi)}_{\text{неизв.}}, \theta, \varphi)\, d\varphi\, d\theta$$

↑ не будем док-ть, что реш-ие единств., т.к.

Обратные задачи для ур-я колебаний

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \ t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l \\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le l \end{cases}$$

03: дано $u(x,T) = g(x)$, $0 \le x \le l$;

1) изв. $\psi(x)$, $g(x)$, $0 \le x \le l$; найти $\varphi(x)$

2) изв. $\varphi(x)$, $g(x)$, $0 \le x \le l$; найти $\psi(x)$

$O3_1$ Пусть $\psi = 0$

Реш-ие ПЗ: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin\frac{\pi n \xi}{\ell} d\xi \cdot \cos\frac{\pi n a t}{\ell} \cdot \sin\frac{\pi n x}{\ell}$

$u(x,T) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin\frac{\pi n \xi}{\ell} d\xi \cdot \cos\frac{\pi n a T}{\ell} \cdot \sin\frac{\pi n x}{\ell}$ (1), $0 \le x \le \ell$

$\Leftrightarrow A_T \varphi = g$, $A_T: L_2(0,\ell) \to L_2(0,\ell)$ (1')

Заметим, что если $\cos\frac{\pi n a T}{\ell} = 1 \Rightarrow g(x) = \varphi(x)$ ($n: T = \frac{2\ell}{a}$)

$\exists T_{p,q} = \frac{2p}{2q-1}\cdot\frac{\ell}{a}$, $p,q \in \mathbb{N} \Rightarrow \cos\frac{\pi n a T_{p,q}}{\ell} \ne 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_n \cdot \cos\frac{\pi n a T_{p,q}}{\ell} = g_n \Rightarrow$ ед. реш-ие $O3_1$ (если $\cos \ne 0$)

Докажем, что $\cos\frac{\pi n a T_{p,q}}{\ell} \ne 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (от противного)

$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \cos\frac{\pi n_0 a \cdot 2p}{\ell(2q-1)}\cdot\frac{\ell}{a} = 0 \Rightarrow \frac{2\pi n_0 p}{2q-1} = \frac{\pi}{2}(2k-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4n_0 p = (2k-1)(2q-1)$?!! $\Rightarrow \cos\frac{\pi n a T_{p,q}}{\ell} \ne 0$

(чет. · нечет. = нечет.)

$\ne f(n) = \cos\frac{\pi n a T_{p,q}}{\ell} = \cos\frac{2\pi n p}{2q-1}$

$f(n)$ – целочисл. ф-ия (ф-ия целого арг.), периодическая, $\ne 0$, период $= 2q-1$ при p,q – фикс.

$\exists c > 0: \left|\cos\frac{2\pi n p}{2q-1}\right| \ge c, \forall n \in \mathbb{N}$

$\left\{\sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\frac{\pi n x}{\ell}\right\}$ – ОНБ в $L_2(0,\ell) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ из (1) $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{\cos\frac{\pi n a T_{p,q}}{\ell}} \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cdot \sin\frac{\pi n x}{\ell}$ (ряд сх-ся и опред. верно)

$O3_1$: единственность ⊕

Существование реш-ия:

$\exists g \in L_2(0,\ell) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 < \infty$

Если $\sum \varphi_n^2 < \infty$, то реш-ие $\circ O3_1 \exists$ в $L_2(0,\ell)$

$|\varphi_n| \le \frac{|g_n|}{c} \Rightarrow \sum \varphi_n^2 < \infty \Rightarrow$ ⇏, причем имеется оценка:

$\|\varphi\|_{L_2(0,\ell)} \le \frac{1}{c}\|g\|_{L_2(0,\ell)}$ (оценка устойчивости)

⇓

$\exists$ при $T_{p,q} = \frac{2p}{2q-1}\cdot\frac{\ell}{a}$

ОЗ$_1$ из L_2 в L_2 корректна!

Теперь $T_{p,q} = \frac{(2q-1)\ell}{2pa}$ $\Rightarrow \cos\frac{2\pi n a T_{p,q}}{\ell} = \cos\frac{\pi n(2q-1)}{2p}$, p,q-рацион.

При $n_0 = p$: $\frac{\pi n(2q-1)}{2p} = \frac{\pi}{2}(2q-1)$ $\Rightarrow \cos\frac{\pi n a T_{p,q}}{\ell} = 0$ $\Rightarrow$ единств. нет!

($\exists g(x) = 0 \to \varphi = 0$; $\exists \varphi(x) = \sin\frac{\pi p x}{\ell}$)

A_T - не непрерывен из L_2 в L_2 по параметру T! (в этом вся проблема)

$T_1 = t_0 = \frac{2\ell}{a} \Rightarrow A_{T_1} = J$

$T_2 = t_{0k} = \frac{(4k-1)\ell}{2ka} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{2\ell}{a}$ (плохие времена)

$\|A_{t_0} - A_{t_{0k}}\| = \sup_{\|\varphi\|\le 1} \|(A_{t_0} - A_{t_{0k}})\varphi\|_{L_2(0,\ell)} = \sup_{\|\varphi\|\le 1} \|(J - A_{t_{0k}})\varphi\|_{L_2(0,\ell)} =$

$= \{$исп. нав-во Парсеваля$\} = \sup_{\|\varphi\|\le 1}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^2\left(1-\cos^2\frac{\pi n(4k-1)}{2k}\right)\right\}^{1/2}$

Если $k=n \Rightarrow \cos\ldots = 0$. Возьмем φ: $\varphi_k = 1$, ост $\varphi_n = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \|A_{t_0} - A_{t_{0k}}\| \ge 1$, т.е. оператор A_T не непрерывен по T!

(ОЗ$_2$) Дано: $g(x)$, $\varphi(x)$, найти: $\varphi(x)$

$\exists \varphi(x) = 0$

Реш-е ПЗ: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{\ell}d\xi \cdot \frac{\ell}{\pi na}\sin\frac{\pi n a t}{\ell}\cdot\sin\frac{\pi n x}{\ell}$,

$0\le x\le\ell$, $t\ge 0$

$u(x,T) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{\ell}d\xi \cdot \frac{\ell}{\pi na}\sin\frac{\pi n a T}{\ell}\cdot\sin\frac{\pi n x}{\ell} = g(x)$, $0\le x\le\ell$

$\Downarrow$

$\frac{\ell}{\pi na}\cdot\sin\frac{\pi n a T}{\ell}\cdot\psi_n = g_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Единственность реш-я ОЗ$_2$ зависит от T (если $\sin\ldots = 0 \Rightarrow$ ✗)

$\psi_n = \frac{\pi na}{\ell}\left(\sin\frac{\pi n a T}{\ell}\right)^{-1} g_n$.

Реш-е ОЗ$_2$ $\exists \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^2 < \infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n a}{l \sin \frac{\pi n a T}{l}} \right)^2$ – сходится не для $\forall g \in L_2(0,l)$

$\not\forall g_n = \frac{1}{n}$ $\left(\sum \frac{1}{n^2} < \infty \Rightarrow g \exists \right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{na}{l \sin \frac{\pi n a T}{l}} \right)^2 = \infty$!

Обратные коэффициентные задачи для УРЧП

Задачи определения коэфф. в ур-ии теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = k(t) u_{xx}, & 0 < x < \pi, \ 0 < t \le T \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 \le t \le T \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

ОЗ: найти $k(t)$, $0 \le t \le T$, если дано $u(x_0,t) = g(t)$, $0 \le t \le T$, $x_0 \in (0,\pi)$

Выпишем реш-е прямой задачи: (оно единств., это доказано)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\xi) \sin n\xi \, d\xi \cdot e^{-n^2 \int_0^t k(\tau) d\tau} \cdot \sin nx, \quad x \in [0,\pi], \ t \in [0,T]$$

Решение функционально зависит от k: $u(x,t) = u(x,t;k)$

$u(x_0,t;k) = g(t)$, $0 \le t \le T$

Из самого ур-ия следует: $k(t) = \frac{u_t}{u_{xx}} = \frac{u_t(x_0,t;k)}{u_{xx}(x_0,t;k)} = \frac{g'(t)}{u_{xx}(x_0,t;k)} = (\mathcal{A}k)$ (не зав. от x!)

($\mathcal{A}$ – оператор, действующий на k)

$k = \mathcal{A}k$ (1)

Докажем, что ур-ие имеет единств. реш-е. Наложим усл-ия на φ и g:

1) $\exists \varphi$: $|\varphi_n| \le \frac{c}{n^6}$, $\varphi_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\xi) \sin n\xi \, d\xi$, $n \in \mathbb{N}$ (условие выполнено, если φ – дост. гладкая и выполн. усл-ия обращения в ноль производных φ на концах)

2) $\varphi_n \sin(nx_0) \ge 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\exists m \in \mathbb{N}$: $\varphi_m \sin(mx_0) > 0$

3) $g \in C^1[0,T]$, $g(0) = \varphi(x_0)$, $g'(t) < 0$, $t \in [0,T]$

Теорема 1

Решение уравнения $k = \mathcal{A}k$ с нелин. оператором $\mathcal{A}$ при вып. условий 1)-3) $\Rightarrow \varphi(x), g(t)$ имеет! реш-ие. (тогда $\exists T_0 > 0$; обр. коэфф. задачи на $[0, T_0]$ имеет, причем единств. реш-ие)

Док-во:

Вспомним метод сжим. отобр.: $k \in K$, 1) $\mathcal{A}K \subseteq K$
2) $\mathcal{A}$ – сжим. на $K \Rightarrow \exists! k^* \in K : \mathcal{A}k^* = k^*$.

$K = \{ k(t) \mid k \in C[0, T_0],\ 0 < k(t) \le k_0,\ \forall t \in [0, T_0] \}$, k_0, T_0 – управляющие параметры при построении K.

1) $\mathcal{A}K \subseteq K$? Для $\forall k(t) \in C[0, T_0]$ $\mathcal{A}k$ – определен:

$$\mathcal{A}k = \frac{g'(t)}{u_{xx}(x_0, t; k)} = \frac{g'(t)}{-\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \varphi_n e^{-n^2 \int_0^t k(\tau)d\tau} \cdot \sin(nx_0)}$$

(он ≤ 0). Знам. $\neq 0$ в силу усл. 2)

Т.к. $g'(t) < 0$, знам. $< 0 \Rightarrow 0 < (\mathcal{A}k)(t)$

Укажем k_0, T_0: $(\mathcal{A}k)(t) \le k_0$

$$(\mathcal{A}k)(t) = -g' / \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \varphi_n e^{-n^2 \int_0^t k(\tau)d\tau} \cdot \sin(nx_0) \right) \le \|g'\|_{C[0,T_0]} / (m^2 \varphi_m \cdot \sin(mx_0) \cdot e^{-m^2 k_0 T_0}) \le k_0$$

оставим 1 слаг. в знам.

$\overset{(2)}{\Rightarrow}$ отсюда ищутся k_0, T_0

2) $\mathcal{A}$ – сжимающий на K? (в K берутся нормы $\|\cdot\|_c$)

$$\|\mathcal{A}k_1 - \mathcal{A}k_2\|_{C[0,T_0]} \le \alpha \|k_1 - k_2\|_{C[0,T_0]},\ 0 < \alpha < 1 ?$$

$$\|\mathcal{A}k_1 - \mathcal{A}k_2\| \le \|g^{*\prime}\|_{C[0,T_0]} \cdot \left\| \frac{u_{xx}(x_0,t;k_1) - u_{xx}(x_0,t;k_2)}{u_{xx}(x_0,t;k_1) \cdot u_{xx}(x_0,t;k_2)} \right\|_{C[0,T_0]} \le$$

$$\le \|g'\| \cdot \max_{0 \le t \le T_0} \left| \frac{u_{xx}(x_0,t;k_1) - u_{xx}(x_0,t;k_2)}{u_{xx}(x_0,t;k_1) \cdot u_{xx}(x_0,t;k_2)} \right| \le$$

$$\le \|g'\| \cdot \frac{1}{\varphi_m^2 \sin^2(mx_0) \cdot m^4} \cdot e^{2m^2 k_0 T_0} \cdot \max_{0 \le t \le T_0} \left| \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \varphi_n \sin(nx_0) \left[e^{-n^2 \int_0^t k_1(\tau)d\tau} - e^{-n^2 \int_0^t k_2(\tau)d\tau} \right] \right| \le$$

$\star$

$\le \{ |e^{-x} - e^{-y}| \le |x - y|,\ x > 0, y > 0 \} \le \|g'\|_{C[0,T_0]} \cdot \frac{e^{2m^2 k_0 T_0}}{\varphi_m^2 \sin^2(mx_0) m^4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \varphi_n \sin(nx_0) \cdot$

$$\cdot \max_{0 \le t \le T_0} \left| \int_0^t k_1(\tau)d\tau - \int_0^t k_2(\tau)d\tau \right| \le \left\{ \max_{0 \le t \le T_0} \int_0^t |k_1(\tau) - k_2(\tau)|d\tau \le T_0 \max_{0 \le t \le T_0} |k_1(t) - k_2(t)| = \right.$$

$$\left. = T_0 \|k_1 - k_2\|_{C[0,T_0]} \right\} \le$$

$$\leq \frac{\|g'\|_{C[0,T_0]} \cdot e^{2m^2 k_0 T_0}}{\varphi_m^2 \cdot m^4 \cdot \sin^2(mx_0)} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \varphi_n \sin(nx_0) \cdot T_0 \|k_1 - k_2\|_{C[0,T_0]}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\|g'\|_{C[0,T_0]} \cdot e^{m^2 k_0 T_0}}{\varphi_m \cdot m^2 \sin(mx_0)} \leq k_0 \quad (2)$$

$$\frac{\|g'\|_{C[0,T_0]} \cdot e^{2m^2 k_0 T_0} \cdot T_0}{\varphi_m^2 \cdot m^4 \sin^2(mx_0)} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \varphi_n \sin(nx_0) < 1 \quad (3)$$

Надо выбрать k_0, T_0 так, чтобы вып. (2) и (3).

Возьмём k_0, T_0 такие, что $k_0 T_0 = 1$. Тогда (2) и (3) выполняются при достаточно малом t_0 $\Rightarrow$ работает принцип сжим. отобр., ч.т.д.

Теорема 2 (единственности)

Пусть $\varphi(x)$ удовл. условиям теоремы 1. Тогда обратная задача может иметь не более 1 решения.

Док-во:

Решение ПЗ: $u(x_0,t;k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\xi) \sin(n\xi) d\xi \; e^{-n^2 \int_0^t k(\tau) d\tau} \cdot \sin(nx_0) = g(t)$ в т. x_0

$\exists\, \exists$ 2 решения $k_1(t), k_2(t)$ - различные на $[0,T]$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow u(x_0,t;k_1) - u(x_0,t;k_2) = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin(nx_0) \cdot \left(e^{-n^2 \int_0^t k_1(\tau) d\tau} - e^{-n^2 \int_0^t k_2(\tau) d\tau} \right) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

Используем ф-лу Лагранжа: $f(p_1) - f(p_2) = \int_0^1 f'(p_2 + \theta(p_1 - p_2)) d\theta \cdot (p_1 - p_2)$

$$\Rightarrow e^{-p_1} - e^{-p_2} = -\int_0^1 e^{-p_2 - \theta(p_1 - p_2)} d\theta \; (p_1 - p_2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin(nx_0) \cdot \int_0^1 e^{-n^2 \int_0^t k_2(\tau) d\tau + \theta n^2 \int_0^t k_1(\tau) d\tau - \theta n^2 \int_0^t k_2(\tau) d\tau} d\theta \cdot n^2 \int_0^t (k_1(\tau) - k_2(\tau)) d\tau$$

По усл. 2) $\exists m$: $\varphi_m \sin(mx_0) > 0 \Rightarrow \int e^{\dots} d\theta \cdot \varphi_m \sin(mx_0) > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Phi(t) \cdot \int_0^t (k_1(\tau) - k_2(\tau)) d\tau = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \Phi(t) > 0, \; t \in [0,T] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^t (k_1(\tau) - k_2(\tau)) d\tau = 0 \Rightarrow k_1(t) = k_2(t), \; \forall t \in [0,T], \text{ ч.т.д.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-n^2 \int_0^t k(\tau)d\tau} \sin(nx_0) = g(t)$$

$$Bk = g$$

Мы уже доказали единств. реш-ия k. Но ОЗ неустойчива!

$\neq k_\varepsilon(t) = k(t) + k_0 \cos(\ell t) > 0$, $k_0 > 0$

Тогда $\|k_\varepsilon - k\|_{C[a,T]} = k_0$, но $\|Bk_\varepsilon - Bk\|_{C[a,T]} \xrightarrow{\ell \to \infty} 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ нет непр-ти по g $\Rightarrow$ задача неустойчива.

Теперь $\neq \varphi(x) = \varphi_m \cos(mx_0)$ $\Rightarrow u(x_0, t; k) = g(t) = \varphi_m \sin(mx_0) e^{-m^2 \int_0^t k(\tau)d\tau} \Rightarrow$

$\Rightarrow k(t) = \dfrac{g'(t)}{u_{xx}(x_0, t; k)} = \dfrac{g'(t)}{-m^2 g(t)}$ $\Rightarrow$ необх. усл-ие неотрицательности $g'(t) \cdot g(t) > 0$

Обратная задача Штурма–Лиувилля и связь с ОЗ для УРЧП.

(1) $-y''(x;\lambda) + q(x) y(x;\lambda) = \lambda y(x;\lambda)$, $0 < x < \pi$ λ-спектральный параметр

(2) $y(0;\lambda)\sin\alpha + y'(0;\lambda)\cos\alpha = 0$

(3) $y(\pi;\lambda)\sin\beta + y'(\pi;\lambda)\cos\beta = 0$, $0 \le \alpha, \beta \le \pi$

(1)-(3) – ПЗ задача на с.ф. и с.з. для ур-ия Шредингера $\equiv$ задача Штурма–Лиувилля

λ_n – собственные значения: $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – действ., $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ +при больших λ (или малых q) с.з. растут как n^2

$y(x;\lambda_n)$ – ортогональны в $L_2(0,\pi)$, $\{y(x;\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L_2(0,\pi)$.

ОЗ: даны с.з. $\{\lambda_n\}$, найти $q(x)$ $\leftarrow$ ед. реш-ия нет!

Добавим усл-ие (4): $y(\pi;\lambda)\sin\gamma + y'(\pi;\lambda)\cos\gamma = 0$, $0 \le \gamma \le \pi$, $\gamma \neq \beta$

Рассмотрим (1), (2), (4) ~ задача Ш.-Л. $\Rightarrow \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \neq \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\underline{\underline{\text{ОЗ}_1^{\text{Ш.-Л.}}}}$: даны с.з. (1)-(3) $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, с.з. (1), (2), (4) $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ (если $\exists$); найти $q(x)$.

(если q найдется $\Rightarrow$ найдутся и α, β) } у задачи ед. реш-е (т. Борга)

$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-n^2 \int_0^t k(\tau)d\tau} \sin(nx_0) = g(t)$

$\underline{Bk = g}$

Мы уже доказали единств. реш-ия k. Но ОЗ неустойчива!

$\forall k_\varepsilon(t) = k(t) + k_0 \cos(\ell t) > 0$, $k_0 > 0$

Тогда $\|k_\varepsilon - k\|_{C[0,T]} = k_0$, но $\|Bk_\varepsilon - Bk\|_{C[0,T]} \xrightarrow[\ell\to\infty]{} 0$ => (g, g, k — вход; при $\ell \to \infty$)

=> нет непр-ти по g => задача неустойчива.

Теперь $\forall \varphi(x) = \varphi_m \cos(mx_0)$ => $u(x_0, t; k) = \varphi_m \sin(mx_0) e^{-m^2 \int_0^t k(\tau)d\tau} \overset{=g(t)}{=}$ =>

$k(t) = \frac{g'(t)}{u_{xx}(x_0,t;k)} = \frac{g'(t)}{-m^2 g(t)}$ => необх. условие неотрицательности $\underline{g'(t)\cdot g(t) \ge 0}$

Обратная задача Штурма–Лиувилля и связь с ОЗ для УРЧП.

(0) $-y''(x;\lambda) + q(x)y(x;\lambda) = \lambda y(x;\lambda)$, $0 < x < \pi$ — λ-спектральный параметр

(2) $y(0;\lambda)\sin\alpha + y'(0;\lambda)\cos\alpha = 0$

(3) $y(\pi;\lambda)\sin\beta + y'(\pi;\lambda)\cos\beta = 0$, $0 \le \alpha, \beta < \pi$

(1)–(3) – ПЗ задача на с.ф. и с.з. для ур-ия Шредингера ≡ задача Штурма–Лиувилля

λ_n – собственные значения: $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – действ., $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ + при больших λ (или малых q) с.з. растут как n^2

$y(x;\lambda_n)$ – ортогональны в $L_2(0,\pi)$, $\{y(x;\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L_2(0,\pi)$.

ОЗ: даны с.з. $\{\lambda_n\}$, найти $q(x)$ ← ед. реш-ия нет!

Добавим усл-ие (4): $y(\pi;\lambda)\sin\gamma + y'(\pi;\lambda)\cos\gamma = 0$, $0 \le \gamma < \pi$, $\gamma \ne \beta$

Рассмотрим (1), (2), (4) ~ задача Ш.-Л.' => $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \ne \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\underline{ОЗ_1^{Ш.-Л.}}$: даны с.з. (1)–(3) $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, с.з. (1), (2), (4) $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ (если $\exists$); найти $q(x)$.

(если q найдется => найдутся и α, β) } у задачи ед. реш-е (т. Борга)

$ОЗ_2$ Ш-Л.: даны $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, известно, что $q(x) = q(\pi - x)$, $\alpha + \beta = 0$;
найти $q(x)$ (=> у задачи единственность, если $\exists$)

Рассмотрим ур-ие теплопроводности:

(1) $u_t = u_{xx} - q(x)u$, $0 < x < \pi$, $t > 0$, $q \geq 0$

(2) $u_x(0,t) = 0$, $t > 0$

(3) $u_x(\pi,t) = \gamma(t)$, $t > 0$

(4) $u(x,0) = 0$, $0 \leq x \leq \pi$

Условия на $\gamma(t)$: $\gamma \in C^1[0,+\infty)$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(t) > 0$ при $t \geq T_0$,

~~$\exists$~~ $\operatorname{supp}\gamma(t) = \{t \mid \gamma(t) \neq 0\}$ - носитель ф-ии

(1)-(4) - ПЗ для ур-ия теплопроводности

$ОЗ_1$ для (1)-(4): дано $u(0,t) = h(t)$, $t \geq 0$ (+дано $\gamma(t)$?); найти $q(x)$, $x \in [0,\pi]$

$ОЗ_2$ для (1)-(4): дано $u(\pi,t) = g(t)$, $t \geq 0$; найти $q(x)$, $x \in [0,\pi]$

Оказывается, что $ОЗ_2$ лучше $ОЗ_1$. (у $ОЗ_1$ нет единственности)

Воспользуемся преобразованием Лапласа в (1)-(4):

$v(x;p) = \int_0^{+\infty} u(x,t)\, e^{-pt}\, dt$, $p \in \mathbb{C}$

$v(x,p)$ определена для $\forall p \in \mathbb{C}$: $\operatorname{Re} p \geq 0$ (для задачи (1)-(4))

(при разд. перем. будет $e^{-\lambda_n t}$, $\lambda_n \geq 0$ из-за $q \geq 0$ => при подстановке $v(x,p)$ сх-ся)

$\int_0^{+\infty} u_t(x,t)\, e^{-pt}\, dt = u(x,t)\cdot e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} u(x,t)\, e^{-pt}\, dt = \{u(x,t) \underset{t\to\infty}{\to} 0$ (можем взять огр?) $\}$

$= p\,v(x,p)$

$\Downarrow$

(5) $p\,v(x,p) = v_{xx} - q(x)\,v(x,p)$, $0 < x < \pi$

(6) $v_x(0,p) = 0$

(7) $v_x(\pi,p) = \tilde{\gamma}(p)$, где $\tilde{\gamma}(p) = \int_0^{+\infty} \gamma(t)\, e^{-pt}\, dt$ $(\tilde{\gamma}(p) \doteq \gamma(t))$

=> ПЗ (5)-(7)

$ОЗ_2$ Ш-Л.: даны $\{\lambda_n, \gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, и известно, что $q(x) = q(\pi - x)$, $\alpha + \beta = 0$; найти $q(x)$ ($\Rightarrow$ у задачи единственность, если $\exists$)

Рассмотрим ур-ие теплопроводности:

(1) $u_t = u_{xx} - q(x)u$, $0 < x < \pi$, $t > 0$, $q \geq 0$

(2) $u_x(0,t) = 0$, $t > 0$

(3) $u_x(\pi, t) = \gamma(t)$, $t > 0$

(4) $u(x,0) = 0$, $0 \leq x \leq \pi$

Условия на $\gamma(t)$: $\gamma \in C^1[0, +\infty)$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(t) > 0$ при $t \geq T_0$,

~~$\exists$~~ $\operatorname{supp}\gamma(t) = \{t \mid \gamma(t) \neq 0\}$ – носитель ф-ии

(1)-(4) – ПЗ для ур-ия теплопроводности

$ОЗ_1$ для (1)-(4): дано $u(0,t) = h(t)$, $t \geq 0$ (+дано $\gamma(t)$?); найти $q(x)$, $x \in [0, \pi]$

$ОЗ_2$ для (1)-(4): дано $u(\pi, t) = g(t)$, $t \geq 0$; найти $q(x)$, $x \in [0, \pi]$

Оказывается, что $ОЗ_2$ лучше $ОЗ_1$. (у $ОЗ_1$ нет единственности)

Воспользуемся преобразованием Лапласа в (1)-(4):

$v(x;p) = \int_0^{+\infty} u(x,t)\, e^{-pt}\, dt$, $p \in \mathbb{C}$

$v(x,p)$ определена для $\forall p \in \mathbb{C}$: $\operatorname{Re} p \geq 0$ (для задачи (1)-(4))

(при разд. перем. будет $e^{-\lambda_n t}$, $\lambda_n \geq 0$ из-за $q \geq 0$ $\Rightarrow$ при подстановке $v(x,p)$ сх-ся)

$\int_0^{+\infty} u_t(x,t)\, e^{-pt}\, dt = u(x,t) \cdot e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} u(x,t)\, e^{-pt}\, dt = \{u(x,t) \underset{t \to \infty}{\to} 0$ (может просто огр.?$\}$ $= p\, v(x,p)$

$\Downarrow$

(5) $p\, v(x,p) = v_{xx} - q(x)\, v(x,p)$, $0 < x < \pi$

(6) $v_x(0,p) = 0$

(7) $v_x(\pi, p) = \tilde{\gamma}(p)$, где $\tilde{\gamma}(p) = \int_0^{+\infty} \gamma(t)\, e^{-pt}\, dt$ ($\tilde{\gamma}(p) \equiv \gamma(t)$)

$\Rightarrow$ ПЗ (5)-(7)

Вспомогательная задача

$$\begin{cases} w_{xx}(x,p) - q(x)w = pw(x,p) \\ w(0,p) = 1 \\ w_x(0,p) = 0 \end{cases}$$ - задача Коши

↑ имеет реш-е для $\forall p \in \mathbb{C}$, $w(x,p)$ - аналит. ф-ия по параметру p, причем $v(x,p)$ и $w(x,p)$ линейно зависимы

? т.к. v и w - реш-ия одного ур-ия

Определитель Вронского: $W(v,w,x) = \begin{vmatrix} w(x,p) & w_x(x,p) \\ v(x,p) & v_x(x,p) \end{vmatrix}$

$W(v,w,0) = 0 \Rightarrow W(v,w,x) \equiv 0$, $\forall x \in [0,\pi] \Rightarrow v$ и w *ЛЗ $\Rightarrow$

$\Rightarrow v(x,p) = c(p)w(x,p)$

Попробуем найти $c(p)$:

$v_x(\pi,p) = \tilde{\nu}(p) = c(p)w_x(\pi,p) \Rightarrow c(p) = \dfrac{\tilde{\nu}(p)}{w_x(\pi,p)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{v(x,p) = \tilde{\nu}(p) \cdot \frac{w(x,p)}{w_x(\pi,p)}}$$

Вернёмся к $ОЗ_2$: $u(\pi,t) = g(t)$, $t \geq 0$

$v(\pi,p) = \tilde{g}(p) \doteq g(t) \Rightarrow \tilde{g}(p) = \tilde{\nu}(p)\dfrac{w(\pi,p)}{w_x(\pi,p)}$

Будем исслед. единственность $ОЗ_2$ (в рамках прим. преобр. Лапласа).

Пусть $\exists\, q_1(x) \neq q_2(x)$ для $ОЗ_2$. Тогда:

$$\frac{\tilde{\nu}(p)\cdot w_1(\pi,p)}{w_1'(\pi,p)} = \frac{\tilde{\nu}(p)\cdot w_2(\pi,p)}{w_2'(\pi,p)}$$

$\tilde{\nu}(p)$ - аналитична $\Rightarrow$ можно сократить $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{w_1(\pi,p)}{w_1'(\pi,p)} = \frac{w_2(\pi,p)}{w_2'(\pi,p)}$$

При этом: $w''(x,p) - q(x)w(x,p) = pw(x,p)$

$y''(x;\lambda) - q(x)y(x;\lambda) = -\lambda y(x;\lambda)$ $\Big| \Rightarrow p = -\lambda$

Нули w: $p_n = -\lambda_n$ (λ_n - нули ф-ии y)

$\frac{\omega_1(\pi,p)}{\omega_1'(\pi,p)} = \frac{\omega_2(\pi,p)}{\omega_2'(\pi,p)}$ $\Rightarrow$ совпадают нули числ. и знам.

Нули числителя – нули с.ф.: $y(\pi,\lambda_n)=0$

знаменателя — " — $y'(\pi,\mu_n)=0$

Для $q_1(x)$ задача Ш.-Л.: $y'(0)=0,\ y(\pi)=0 \mapsto \{\mu_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$

$y'(0)=0,\ y'(\pi)=0 \mapsto \{\lambda_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$

Для $q_2(x)$ задача Ш.-Л.: — " — $\{\lambda_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty}$

— " — $\{\mu_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty}$

$\Rightarrow$ из рав-ва рац. ф-ий: $\lambda_n^{(1)}=\lambda_n^{(2)}$, $\mu_n^{(1)}=\mu_n^{(2)}$ $\overset{\text{т. Борга}}{\Rightarrow}$ $q_1(x)=q_2(x)$?!!

$\Rightarrow$ <u>рав-ва единств.</u>

$\overline{O3_2}$

$\tilde{h}(p) \doteqdot h(t)$ $\Rightarrow$ $\tilde{h}(p) = \frac{\tilde{f}(p)\cdot w(0,p)}{w'(0,p)}$ ($=$ 1 из вспом задачи) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ получим только совпадение нулей знаменателей $\Rightarrow \mu_n^{(1)}=\mu_n^{(2)}$

Только 1 спектр. $\Rightarrow$ <u>единственности нет</u>

<u>Случай неизвестного источника тепла $f(t)$</u>

$$\begin{cases} -y''(x;\lambda) + q(x)y(x;\lambda) = \lambda y(x;\lambda) \\ y'(0;\lambda)=0,\ y'(\pi;\lambda)=0 \end{cases}$$

Свойства $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ этой задачи:

1) $\lambda_n \in \mathbb{R}$

2) $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$

3) $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ – различны

4) $y(x;\lambda_n)$ образуют ОНБ в $L_2(0,\pi)$

5) $\lambda_0 \geq q_0 = \min\limits_{x\in[0,\pi]} q(x)$

Док-во 5): (от противного)

Пусть $\lambda_0 < q_0$, т.е. $\lambda_0 < q(x)$, $\forall x \in [0,\pi]$

$y_0''(x;\lambda_0) \equiv y_0''(x) = \underbrace{(q(x)-\lambda_0)}_{>0} y_0(x)$

$y_0'(0) = 0$ | , $Jy_0(0) = a \neq 0$, $Ja = 1$

$y_0(0) = 1$ | $\Rightarrow y_0''(0) > 0$ $\Rightarrow$ $y_0(x) > 0$, $y_0'(x) > 0$, но $y_0'(\pi) = 0$?!! $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_0 \geq q_0$, ч.т.д.

Следствие

Если $q(x) \geq 0$, то $\lambda_n \geq 0$, $\forall n$

Пусть $\gamma(t) \geq 0$, $\forall t > 0$ $\Rightarrow$

$\tilde{\gamma}(p) = \int_0^{+\infty} \gamma(t) e^{-pt} dt > 0$ для $\forall p \in \mathbb{R}$ $\mathrm{Re}\, p \geq 0$

Вернемся к рав-ву w_3 (с учетом, что γ - разные):

$$\frac{\tilde{\gamma}_1(p) w_1(\pi,p)}{w_1'(\pi,p)} = \frac{\tilde{\gamma}_2(p) w_2(\pi,p)}{w_2'(\pi,p)}$$

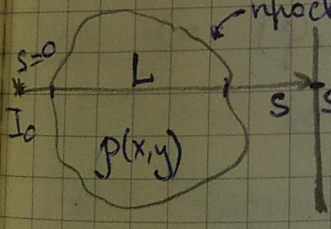
$\mathrm{Re}\, p \geq 0$ (там у $\tilde{\gamma}$ нет нулей!)

Нули у ф-ий w_1, w_1' ~~p_n~~ и $\tilde{p}_n$ $= -\lambda_n$ $= -\mu_n$ - действительны

Т.к. они действительны $\Rightarrow$ они должны совпадать $\Rightarrow$ $\lambda_n^{(1)} = \lambda_n^{(2)}$, $\mu_n^{(1)} = \mu_n^{(2)}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow q_1(x) = q_2(x)$ $\overset{\text{ПЗ}}{\Rightarrow}$ $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$

Задачи компьютерной томографии



Тело плоское и неоднородное; s - луч (коорд. вдоль луча)

$$\frac{dI}{I} = -\gamma \rho(x,y)\, ds$$ - закон для интенсивности луча

$$\frac{dI}{ds} \overset{!!}{=} -\gamma \rho(x,y)\Big|_{\substack{x=x(s)\\ y=y(s)}} \cdot J(s)$$ - скорость затух. интенсивности

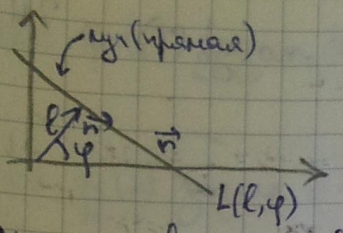
Проинтегрируем ур-ие ($\gamma = \mathrm{const}$; зависит от типа излучения):

$$I(s) = I_0 e^{-\gamma \int_0^s \rho(x(s),y(s))\, ds}$$

Пусть измерили $I(s_1)$, тогда: $\int_L p(x(s),y(s))\,ds = I$ - значит

Мы можем поворачивать тело и двигать луч $\Rightarrow$ 2 управл. параметра l, φ

$$\boxed{\int_{L(l,\varphi)} f(x,y)\,ds = u(l,\varphi)}$$ - функционал, завис. от 2 парам.



$\underline{(\vec{r},\vec{n}) = l}$ - каноним. ур-ие прямой на пл-ти

Мы поставили в соотв. f: $f \xrightarrow{R} u$ (интегр. преобр. Радона)

Запишем криволин. инт-л через определенный:

$$\begin{cases} x = l\cos\varphi - s\cdot\sin\varphi \\ y = l\sin\varphi + s\cdot\cos\varphi \end{cases}$$ - параметризующая кривой

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(l\cos\varphi - s\cdot\sin\varphi,\ l\cdot\sin\varphi + s\cdot\cos\varphi)\,ds = u(l,\varphi)}$$ - преобр. Радона

Задача комп. томогр.: определено ли обратное преобр. Радона R^{-1} и однозначно ли оно?

Будем считать, что $\underline{f \in C^2(\mathbb{R}^2)}$, $\underline{|f(x,y)| \le \frac{C}{(1+x^2+y^2)^{1+\varepsilon}}}$, тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(r)|\,dr \le \int_0^{\infty} \frac{C}{(1+r^2)^{1+\varepsilon}}\,dr < \infty$$

Т.к. $L(l,\varphi+\pi) = L(-l,\varphi)$, $\overset{-\infty \le l < +\infty}{\varphi \in [0,2\pi)}$, то $u(l,\varphi+\pi) = u(-l,\varphi)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ есть 2 варианта задания f: $\begin{cases} 0 \le l < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi \\ -\infty < l < +\infty,\ 0 \le \varphi \le \pi \end{cases}$

Рассмотрим поведение $u(l,\varphi)$ на бесконечности:

$$|u(l,\varphi)| \le \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(l\cos\varphi - s\cdot\sin\varphi,\ l\sin\varphi + s\cdot\cos\varphi)\,ds\right| \le \{l^2+s^2 = x^2+y^2\} \le$$

$$\le \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C}{(1+l^2+s^2)^{1+\varepsilon}}\,ds\right| \#$$

← этот инт-л сх-ся

$$|u(\ell,\varphi)| \le 2c\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+\ell^2+s^2)^{1+\varepsilon}}\,ds = 2c\int_0^{+\infty}\frac{(1+\ell^2)^{1/2}}{(1+\ell^2+s^2)^{1+\varepsilon}\cdot(1+\ell^2)^{1/2}}\,ds \le$$

$$\le 2c\int_0^{+\infty}\frac{(1+\ell^2)^{1/2}}{(1+\ell^2)^{1+\varepsilon}\left[1+\frac{s^2}{1+\ell^2}\right]^{1+\varepsilon}\cdot(1+\ell^2)^{1/2}}\,ds = \left\{\xi^2=\frac{s^2}{1+\ell^2}\Rightarrow ds=(1+\ell^2)^{1/2}d\xi\right\} =$$

$$= 2c\cdot(1+\ell^2)^{1/2}\cdot\frac{1}{(1+\ell^2)^{1+\varepsilon}}\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{1+\varepsilon}}}_{\text{сх-ся}} \le \frac{\text{const}}{(1+\ell^2)^{1/2+\varepsilon}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |u(\ell,\varphi)|_{|\ell|\ge 1} \le \frac{\text{const}}{\ell^{1+2\varepsilon}} \quad \text{(поведение при } \ell\to\infty\text{)}$$

Теорема (проекционная)

$$\hat f(\omega\cos\varphi,\omega\sin\varphi) = \hat u(\omega,\varphi)$$

($\hat u$ — преобр. $u(\ell,\varphi)$ по первому)

$\psi(\ell) \Rightarrow \hat\psi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\ell)e^{-i\omega\ell}\,d\ell$ (преобр. Фурье)

$\Psi(x,y) \Rightarrow \hat\Psi(\lambda,\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(x,y)\cdot e^{i(\lambda x+\mu y)}\,dx\,dy$

$\Psi(x,y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat\Psi(\lambda,\mu)\,e^{i(\lambda x+\mu y)}\,d\lambda\,d\mu$

Док-во:

$$\hat f(\omega\cos\varphi,\omega\sin\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\cdot e^{-i\omega(x\cos\varphi+y\sin\varphi)}\,dx\,dy =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} x(s) = \ell\cos\varphi - s\cdot\sin\varphi & |\cdot\cos\varphi \\ y(s) = \ell\sin\varphi + s\cdot\cos\varphi & |\cdot\sin\varphi \end{array}\oplus \Rightarrow x\cos\varphi+y\sin\varphi = \ell\right.$$

сделаем замену $(x,y)\mapsto(\ell,s)$, $\left|\frac{D(x,y)}{D(\ell,s)}\right| = 1$ (поворот) $\Big\} =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\ell\cos\varphi - s\sin\varphi,\ \ell\sin\varphi + s\cos\varphi)\cdot e^{-i\omega\ell}\,ds\,d\ell = \{\text{этот интегр. сх-ся} \Rightarrow \text{дейст. т-ма Фубини}\} = \int_{-\infty}^{+\infty}u(\ell,\varphi)e^{-i\omega\ell}\,d\ell = \hat u(\omega,\varphi),\ \text{ч.т.д.}$$

Следствие

Преобразование Радона является взаимнооднозначным

Док-во:

$R: f\to u$ однозначно по определению

$\exists R^{-1}$. Предположим противное, т.е. $u(\ell,\varphi)\to\begin{matrix}f_1(x,y)\\ f_2(x,y)\end{matrix}$

Рассмотрим $f = f_1 - f_2 \Rightarrow Rf = 0$ (в силу линейности R)

По теореме $\hat f(\underbrace{\omega\cos\varphi}_{\lambda},\underbrace{\omega\sin\varphi}_{\mu}) = \hat f(\lambda,\mu) = 0$. Преобразование Фурье взаимно однозначно $\Rightarrow f(x,y) = 0$?!! $\Rightarrow$ R взаимно одн., если определено, ч.т.д.

Алгоритм решения основной задачи комп. томографии

По $u(\ell,\varphi)$ восстановить $f(x,y)$

$u(\ell,\varphi)$ —БПФ (одном. ное)→ $\hat{u}(\omega,\varphi)$ —проекц. теорема→ $\hat{f}(\omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi)$ —переход к декарт. коорд (λ,μ)→ $\hat{f}(\lambda,\mu)$ —$БПФ^{-2}$→ $f(x,y)$

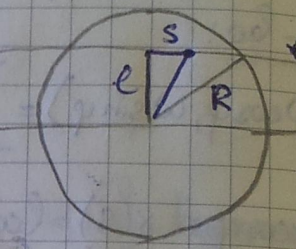
(ось полярн. координат)

↑ этот кусок – некорректная задача (если одном. инт-л есть, то не факт, что двойной сх-ся)

↓ требуются регуляризирующие алгоритмы

Задача КТ в случае радиальной симметрии

$$f(x,y) = \begin{cases} f(\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2 \le R^2 \\ 0, & x^2+y^2 > R^2 \end{cases}$$



$$u(\ell,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\ell\cos\varphi - s\sin\varphi,\ \ell\sin\varphi + s\cos\varphi)\,ds =$$

$$= \{x^2+y^2 = \ell^2+s^2\} = \int_{-\sqrt{R^2-\ell^2}}^{\sqrt{R^2-\ell^2}} f\left(\sqrt{\ell^2+s^2}\right) ds = \{\text{ф-ия чет. по } s\} =$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{R^2-\ell^2}} f\left(\sqrt{\ell^2+s^2}\right) ds = \{r^2 = \ell^2+s^2;\ s = \sqrt{r^2-\ell^2};\ ds = \frac{r\,dr}{s}\} = \boxed{2\int_\ell^R f(r)\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-\ell^2}} = u(\ell)}$$

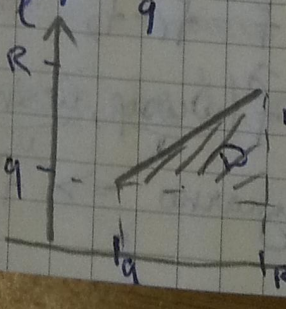
$0 \le \ell \le R$

Получили инт-е ур-ие отн-но f с переменным пределом и ядром особенностью $\frac{1}{(y-x)^\alpha}$:

$$\int_0^y \frac{u(x)\,dx}{(y-x)^\alpha} = g(y),\quad 0<\alpha<1$$ – уравнение Абеля 1го рода

Домножим ур-ие на $\frac{\ell\,d\ell}{\sqrt{\ell^2-q^2}}$ и проинтегр. $\int_q^R$:

$$2\int_q^R \frac{\ell\,d\ell}{\sqrt{\ell^2-q^2}} \int_\ell^R f(r)\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-\ell^2}} =$$



$$= 2\int_D \frac{rl\,f(r)}{\sqrt{l^2-q^2}\cdot\sqrt{r^2-l^2}}\,dl\,dr = 2\int_q^R r f(r)\,dr \underbrace{\int_q^r \frac{l\,dl}{\sqrt{(l^2-q^2)(r^2-l^2)}}}_{\text{интеграл Дирихле}} = \frac{\pi}{2}$$

$$= \boxed{\pi\int_q^R r f(r)\,dr = \int_q^R u(l)\,\frac{l\,dl}{\sqrt{l^2-q^2}}}$$

Продифф-ем равенство по q:

$$-\pi q f(q) = \frac{d}{dq}\int_q^R u(l)\,\frac{l\,dl}{\sqrt{l^2-q^2}}$$

$$\boxed{f(q) = -\frac{1}{\pi q}\cdot\frac{d}{dq}\int_q^R u(l)\,\frac{l\,dl}{\sqrt{l^2-q^2}}}$$

Необх. условие разрешимости: $u(R)=0$

Пусть $u'(l)$ определена $\Rightarrow \int_q^R u(l)\,\frac{l\,dl}{\sqrt{l^2-q^2}} = $ по частям $\int =$

$$= \sqrt{l^2-q^2}\cdot u(l)\Big|_{l=q}^{l\to R\to 0} - \int_q^R \sqrt{l^2-q^2}\,u'(l)\,dl = -\int_q^R \sqrt{l^2-q^2}\,u'(l)\,dl \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f(q) = -\frac{1}{\pi q}\int_q^R \frac{u'(l)\,dl}{\sqrt{l^2-q^2}}} \Rightarrow f(0) = -\frac{1}{\pi}\int_0^R \frac{u'(l)\,dl}{l}$$

↑ результат Радона

Чтобы все было корректно, надо: $u(l)\in C^\mu$, где $1/2 \le \mu \le 1$

↑ показатель Гельдера

Методы решения некорректных ОЗ на компактных множествах

$Az = u$ – ОЗ в канонической операторной форме

$z\in Z$, $u\in U$, Z, U – банаховы, $\nexists A: Z\to U$ – непрерывный

Будем считать, что решаем ур-ие на фикс $\bar u\in U$:

$Az = \bar u$, $\bar u\in U$ – точная правая часть

Пусть имеем приближение $\bar u$: $\|\bar u - u_\delta\| \le \delta$, $\delta>0$ – известно

$\Rightarrow$ будем решать $Az = u_\delta$

Цель: построить $z_\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{} \bar{z}$, где $\bar{z}: A\bar{z}=\bar{u}$, $\bar{z}\exists!$ в Z.

Известно: $\{u_\delta, \delta\}$

Рассмотрим z_δ: $\|Az_\delta - u_\delta\| \le \delta$. В число таких z_δ попадает и точ. $\bar{z}$

$Z_\delta = \{z \in Z \mid \|Az - u_\delta\| \le \delta\} \Rightarrow \bar{z} \in Z_\delta$

Оказывается, что Z_δ - слишком широкое, т.е. оно не стягивается при $\delta \to 0$

Надо как-то сузить Z_δ!

Рассмотрим M - компакт в Z, $Z_\delta^M = Z_\delta \cap M$. Пусть $\bar{z} \in M$. Тогда $Z_\delta^M \xrightarrow[\delta\to 0]{} \bar{z}$

Теорема 1

При $\delta \to 0$ $\sup\limits_{z \in Z_\delta^M} \|z - \bar{z}\|_Z \to 0$

Док-во: (от противного)

Запишем отрицание сходимости: $\exists \varepsilon > 0$, $\exists \{\delta_n \xrightarrow{} 0\}, \{z_{\delta_n} \in Z_{\delta_n}^M\}$: $\|z_{\delta_n} - \bar{z}\| \ge \varepsilon$ для $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\{z_{\delta_n}\} \in M$ - компакт $\Rightarrow \exists$ подпосл-ть $z_{\delta_{n_p}} \in M$: $z_{\delta_{n_p}} \to z^* \in M$

$\|Az_{\delta_{n_p}} - u_{\delta_{n_p}}\| \le \delta_{n_p}$ (т.к. $z_{\delta_{n_p}} \in Z_{\delta_{n_p}}$)

$\|\bar{u} - u_{\delta_{n_p}}\| \le \delta_{n_p}$ (по постановке задачи) $\Big| \Rightarrow$

$\overset{\text{нер-во}\Delta}{\Rightarrow} \|Az_{\delta_{n_p}} - \bar{u}\| \le 2\delta_{n_p}$

A - непрерывный $\Rightarrow \lim\limits_{p\to\infty} \|Az_{\delta_{n_p}} - \bar{u}\| = \|Az^* - \bar{u}\| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Az^* = \bar{u}$, но $A\bar{z} = \bar{u}$ и $\bar{z}$ - единств. реш-ие $\Rightarrow z^* = \bar{z}$

Т.е. $z_{\delta_{n_p}} \xrightarrow[p\to\infty]{} \bar{z}$, но по предположению $\|z_{\delta_{n_p}} - \bar{z}\| \ge \varepsilon$?!!, ч.т.д.

Знание о M: $\bar{z} \in M$ - некая априорная информация

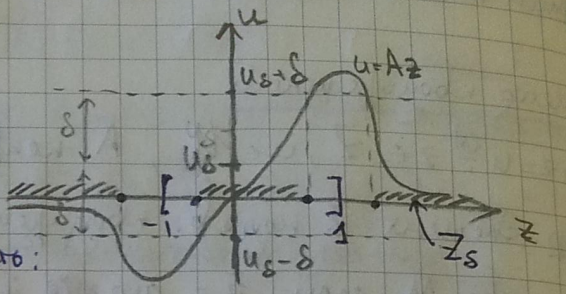
Пример

$Az = u$. Пусть $z, u \in \mathbb{R}$

$Az = \frac{z}{z^2+1}$. Возьмем $\frac{z}{u} = 0 \Rightarrow \exists! \; u \mapsto \bar{z} = 0$

$\|\bar{u} - u_\delta\| \le \delta \Rightarrow \exists u_\delta = \frac{\delta}{2}$

$Z_\delta = \{ z \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{z}{z^2+1} - \frac{\delta}{2} \right| \le \delta \}$



Z_δ - отрезок и 2 луча

Чтобы найти соотв. точки, надо решить:

$\frac{z_\delta}{z_\delta^2+1} = \begin{bmatrix} 3/2\,\delta \\ -\delta/2 \end{bmatrix}$

Ясно, что если брать z_δ из лучей, то $z_\delta \not\to \bar{z}$!

Пусть известен компакт M, $\exists z \in [-1,1]$ (фактически, $M = [-1,1]$)

Отрезок из $Z_\delta \mapsto Z_\delta^M$ при дост. малых δ

$Z_\delta^M = \left[\frac{-1+\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}, \frac{1-\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} \right]$

при $\delta \to 0$ $\sim -\frac{\delta}{2}$ при $\delta \to 0$ $\sim \frac{\delta}{2}$

Тогда при $\delta \to 0$: $Z_\delta^M \to 0$

Требования к M:

1) M - компакт в Z

2) $\bar{z} \in M$ ($\Rightarrow$ если M - дост. маленькое, можем упустить $\bar{z}$ при большом M - медленная (х-ть))

Примеры компактов:

а) в $\mathbb{R}^n$: M - огр. замкнутое мн-во

б) в $C[a,b]$: $|f(x)| \le C$, $|f(x_1) - f(x_2)| \le L\,|x_1 - x_2| \Rightarrow$

↑ равномерно огр. ф-ии; ↑ усл-е Липшица, гарант. равностеп. непр-ть

$\Rightarrow$ по теореме Арцела $f(x)$ образуют компакт в $C[a,b]$

в) в $L_p(a,b)$, $p>0$ $\mapsto$ ограниченные монотонные ф-ии

ф-ии с огр. вариацией?

Как решать

$\|Az - u_\delta\| \to \min\limits_{M}$ — метод невязки

Мин-посл-ть: $z^0, z^1, \dots, z_\delta$ $(\|Az_\delta - u_\delta\| \le \delta)$ $\Rightarrow z_\delta$ - числ. реш-ие

Метод квазирешений

$Az = u$ (1), $z \in Z$, $u \in U$, A-непр., $\|\tilde{u} - u_\delta\| \le \delta$

Опр Элемент $\tilde{z}$ назыв. квазирешением операторного ур-ия (1) на множестве M (не обяз. компакт (M - кл-во корректности)), если $\tilde{z} = \arg\inf\limits_{z \in M} \|Az - u\|$, т.е. $\|A\tilde{z} - u\| = \inf\limits_{z \in M} \|Az - u\|$

Если $\exists$ классич. реш-ие $\bar{z}$, то квазиреш. $\tilde{z} = \bar{z}$. (предполагается, что $\bar{z}$ - единственно)

Существование квазирешения на компакте M

$\forall \Phi(z) = \|Az - u\|$ - функционал невязки

A-непрерывен $\to \Phi(z)$-непр. на компакте M.

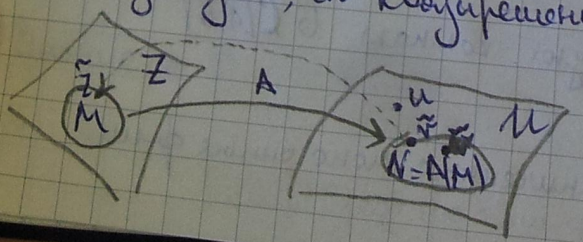
По т. Вейерштрасса $\Phi(z)$ достигает на M точной нижней грани, т.е. $\exists \tilde{z} \in M$: $\|A\tilde{z} - u\| = \inf\limits_{z \in M} \|Az - u\|$

Теорема 2

Пусть Z-банахово пр-во, U-норм. пр-во, M-выпуклый компакт в Z, $A: Z \to U$ - лин. непр. оператор, $\ker A = 0$ (~единств. реш-ия). Тогда квазирешение $\exists!$ и непрерывно зависит от правой части u.

Док-во:

Ранее доказано, что квазирешение $\exists$.



A-лин.
M-выпуклое $\Rightarrow N$-тоже выпуклое

$\|A\tilde{z} - u\| = \inf\limits_{z \in M} \|Az - u\|$

Обозначим $A\tilde{z} = \tilde{v} \Rightarrow \|\tilde{v} - u\| = \inf\limits_{v \in N} \|v - u\|$

По определению $\tilde{v} = Pr_N u$

Т.к. N - выпуклое, то Pr_N - однозначен и непрерывен в силу $\forall u$

$\tilde{z} = A^{-1}\tilde{v} = A^{-1} Pr_N u$. Т.к. $\ker A = 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ (компакт!)

Если оператор взаимнооднозн. и непр., то обратный $A^{-1}: N \to M$ - непрерывен по теореме из начала курса $\Rightarrow A^{-1} Pr_N$ - непрерывен $\Rightarrow$ (в силу линейности)

$\Rightarrow$ непр-ть есть. Единственность вытекает из нее, ч.т.д.

Пусть $A: Z \to U$, Z, U - банаховы

A - непрерывный, $\exists! \bar{z} : A\bar{z} = \bar{u}$

Дано: $u_\delta : \|\bar{u} - u_\delta\| \le \delta$, δ - вообще говоря, не задано

M - компакт: $\bar{z} \in M$

Рассмотрим $\tilde{Z}_\delta^M = \{ z \mid z = \arg\inf\limits_{z \in M} \|Az - u_\delta\| \}$ - мн-во всех квазирешений

$\tilde{z}_\delta^M = \operatorname{Arg}\inf\limits_{z \in M} \|Az - u_\delta\|$

Теорема 3

Пусть $\bar{z} \in M$. Тогда $\sup\limits_{z \in \tilde{Z}_\delta^M} \|z - \bar{z}\| \not\to \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Док-во: (от противного)

Запишем отрицание сходимости: $\exists \varepsilon > 0$, $\exists \{\delta_n\} \to 0$ и послед-ть $\tilde{z}_{\delta_n} \in \tilde{Z}_\delta^M : \|\tilde{z}_{\delta_n} - \bar{z}\| \ge \varepsilon$, $\forall n$.

$\{\tilde{z}_{\delta_n}\} \subset M$ - компакт $\Rightarrow \exists \{\tilde{z}_{\delta_{n_p}}\} : \tilde{z}_{\delta_{n_p}} \underset{p \to \infty}{\to} z^* \in M$

$\tilde{z}_{\delta_{n_p}}$ - квазирешение $\Rightarrow \|A\tilde{z}_{\delta_{n_p}} - u_{\delta_{n_p}}\| = \inf\limits_{z \in M} \|Az - u_{\delta_{n_p}}\| \le \|A\bar{z} - u_{\delta_{n_p}}\| \le$

$\le \delta_{n_p} \to 0$

A - непрерывен $\Rightarrow \|A\tilde{z}_{\delta_{n_p}} - u_{\delta_{n_p}}\| \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} \|Az^* - \bar{u}\| \Rightarrow \bar{z} = z^* \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\tilde{z}_{\delta_{n_p}} - \bar{z}\| \underset{p \to \infty}{\to} 0$?!, ч.т.д.

Метод регуляризации Тихонова

Линейный случай

Опр Посл-ть $\{z_n\}$ называется слабо сходящейся к z^* в H-гильб., если для $\forall v \in H$ $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n, v)_H = (z^*, v)_H$

Свойства сл. сх-ти:

1) Если $z_n \xrightarrow{сл} z^*$ в H, то $\|z^*\| \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \|z_n\|$ (слабая полунепр-ть)

2) $\exists z_n \xrightarrow{сл} z^*$ в H, A-вп.непр.опер, $A: H \to H$, тогда $Az_n \to Az^*$

3) $\exists \|z_n\| \le c, \forall n \in \mathbb{N}$, тогда $\exists \{z_{n_p}\} \subset \{z_n\}$: $z_{n_p} \xrightarrow{сл} z^* \in H$, ~~причём~~

~~z^*~~ 4) $\exists z_n \xrightarrow{сл} z^*$ в H и $\|z_n\| \to \|z^*\|$, тогда $z_n \xrightarrow{H} z^*$.

Пример

$\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx\right\}$, $x \in [0, \pi]$ — ОНС в $L_2(0, \pi)$

$\sin nx \xrightarrow{сл} 0$ в $L_2(0, \pi)$

Действительно, $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} v(x) \sin(nx)\, dx = v_n$ — коэфф. Фурье по сис-ме sin

Известно, что $v_n \to 0$, $\forall v \in L_2(0, \pi)$ $\Rightarrow \sin(nx) \xrightarrow{сл} 0$.

Рассмотрим ин.-операторное ур-ие 1го рода:

$Az = u$, (1) $z \in Z$, $u \in U$, Z, U — гильб., A-вп.непр., $A: Z \to U$

Задача: решить (1), когда задана пара $\{u_\delta, \delta\}$: $\|\bar{u} - u_\delta\| \le \delta$, где $\bar{u} = A\bar{z}$, $\bar{z}$ — точное решение, т.е. найти хотя бы 1 эл-т z_δ:

$z_\delta \xrightarrow[\delta \to 0]{} \bar{z}$.

Функционал Тихонова

$M^\alpha[z, u] = \|Az - u\|_U^2 + \alpha \|z\|_Z^2$, $\alpha > 0$ — параметр регуляризации

$z \in Z$, $u \in U$

Теорема 1

Для любых $u \in U$, $\alpha > 0$ $\exists z_\alpha \in Z$: $z_\alpha = \arg\inf\limits_{z \in Z} M^\alpha[z, u]$

Док-во:

Очевидно $M^\alpha[z,u] \geq 0$, $\exists m^* = \inf\limits_z M^\alpha[z,u]$. Рассмотрим минимизирующую посл-ть $\{z_n\}$, $M^\alpha[z_n,u] \leq M^\alpha[z_{n-1},u]$ (монот. миним. посл-ть; всегда можно построить)

Т.к. $M^\alpha[z_n,u] \leq M^\alpha[z_1,u] \leq C$, то $\alpha\|z_n\|^2 \leq C$, т.е. $\|z_n\| \leq \text{const}$

$\Rightarrow$ (без доказ.) $\exists \{z_{n_p}\} \subset \{z_n\}$: $z_{n_p} \xrightarrow{сл} z^* \in Z$

Докажем, что $M^\alpha[z^*,u] = m^*$.

1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1(\varepsilon)$: $\forall k \geq N_1 \quad M^\alpha[z_{n_k},u] \leq m^* + \varepsilon/3$ (т.к. $\{z_{n_p}\}$ - миним.)

2) Т.к. $z_{n_k} \xrightarrow{сл} z^*$, A - огр. лин., то $Az_{n_k} \to Az^*$, т.е. $\exists N_2(\varepsilon)$: $\forall k \geq N_2$

$\|Az^* - u\|^2 \leq \|Az_{n_k} - u\|^2 + \varepsilon/3$

3) Т.к. $z_{n_k} \xrightarrow{сл} z^*$ в Z, то $\|z^*\| \leq \varliminf\limits_{k\to\infty} \|z_{n_k}\|$ (1) $\Rightarrow \exists N_3(\varepsilon)$: $\forall k \geq N_3$

$\alpha\|z^*\|^2 \leq \alpha\|z_{n_k}\|^2 + \varepsilon/3$

$\Downarrow$

$M^\alpha[z^*,u] = \|Az^* - u\|^2 + \alpha\|z^*\|^2 \leq \|Az_{n_k} - u\|^2 + \alpha\|z_{n_k}\|^2 + \frac{2\varepsilon}{3} =$

$= M^\alpha[z_{n_k},u] + \frac{2}{3}\varepsilon \overset{1)}{\leq} m^* + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow M^\alpha[z^*,u] = m^*$, z^* - искомое z_α, ч.т.д.

Замечание

В док-ве линейность A не используется! ($Z \subseteq$]A-лин. опр.

Уравнение Эйлера (необх. усл-е мин. ф-ла)

$\exists M^\alpha[z,u]$ при фикс. $\alpha > 0, u \in U$

$M^\alpha[z,u] = (Az-u, Az-u)_U + \alpha(z,z)_Z$

$M^\alpha[z+h,u] - M^\alpha[z,u] = (A(z+h)-u, A(z+h)-u)_U - (Az-u, Az-u)_U +$

$+ \alpha(z+h, z+h)_Z - \alpha(z,z)_Z = (Ah, Az-u) + (Az-u, Ah) +$

$+ \alpha(z,h) + \alpha(h,z) + \underbrace{(Ah,Ah) + \alpha(h,h)}_{=o(\|h\|)} = 2(A^*(Az-u), h) +$

$+2\alpha(z,h) + \underline{\underline{O}}(\|h\|^2)$

$M^\alpha[z+h,u] - M^\alpha[z,u] = 2\left(A^*(Az-u) + \alpha z, h\right) + \underline{\underline{O}}(\|h\|^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial M^\alpha}{\partial h}[z,u] = 2(A^*(Az-u) + \alpha z, h)$

$\operatorname{grad} M^\alpha[z,u] = 2(A^*(Az-u) + \alpha z)$ — производная ф-ла

Необх. усл-е $\min$: $\boxed{A^*Az + \alpha z = A^*u}$ (2) = ур-ие Эйлера

Докажем, что в случае А-мин. (2) даёт необх. и дост. усл-ем $\min$

Докажем достаточность, т.е. если z_α – реш. (2), то $M^\alpha[z_\alpha, u] = m^*$.

Предположим противное, т.е. $z_\alpha \neq \arg\inf_{z \in Z} M^\alpha[z,u]$, тогда $\exists z^* \in Z$:

$z^* = \arg\inf_z M^\alpha[z,u] \Rightarrow$ т.к. ур-ие Эйлера – необх. усл-ие, то

$(A^*A + \alpha J)z^* = A^*u$, z_α – тоже реш-е (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow z = z^* - z_\alpha \Rightarrow (A^*A + \alpha J)z = 0$, $z \neq 0$

Домножим рав-во скалярно на z $\Rightarrow$

$(A^*Az, z) + \alpha(z,z) = 0 \Rightarrow (Az, Az) + \alpha(z,z) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|Az\|^2 + \alpha\|z\|^2 = 0 \Rightarrow \|z\| = 0$?!! $\Rightarrow \underline{M^\alpha[z_\alpha, u] = m^*}$

Единственность $\arg\inf_z M^\alpha[z,u]$

$M^\alpha[z,u] = \underbrace{\|Az-u\|^2}_{\text{выпук.}} + \underbrace{\alpha\|z\|^2}_{\text{сильно выпук.}}$

(как квадр. ф-л) $\Rightarrow$ сумма сильно выпук., а у сильно выпук. ф-ов точка $\min$ единств.

Построение приближенного решения

$M^\alpha[z, u_\delta] \to \min_z$, $\alpha = \alpha(\delta)$ (α – согласов. с δ)

Теорема 2

Пусть $\alpha = \alpha(\delta)$, $\alpha(\delta) > 0$ такова, что $\alpha(\delta) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$, $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$.

Тогда $z_{\alpha(\delta)} \xrightarrow[\delta\to 0]{} \overline{z}$, где $z_{\alpha(\delta)} = \arg\inf_z M^{\alpha(\delta)}[z, u_\delta]$

Док-во: (от противного)

$\exists \varepsilon > 0$ и $\{\delta_n\} \to 0$, $\{z_{\alpha(\delta_n)}\}$ такие, что $\|z_{\alpha(\delta_n)} - \bar{z}\| \geq \varepsilon$, $\forall n$,

$z_{\alpha(\delta_n)} = \arg\inf_z M^{\alpha(\delta_n)}[z, u_{\delta_n}]$, $\|u_{\delta_n} - \bar{u}\| \leq \delta_n$

$M^{\alpha(\delta_n)}[z_{\alpha(\delta_n)}, u_{\delta_n}] \leq$ {это min} $\leq M^{\alpha(\delta_n)}[\bar{z}, u_{\delta_n}]$

$\|Az_{\alpha(\delta_n)} - u_{\delta_n}\|^2 + \alpha(\delta_n)\|z_{\alpha(\delta_n)}\|^2 \leq \underbrace{\|A\bar{z} - u_{\delta_n}\|^2}_{\leq \delta_n^2} + \alpha(\delta_n)\|\bar{z}\|^2$

① $\|z_{\alpha(\delta_n)}\|^2 \leq \underbrace{\frac{\delta_n^2}{\alpha(\delta_n)}}_{\to 0} + \|\bar{z}\|^2 \leq const$ $\Rightarrow$ огр.

② $\|A z^*_{\alpha(\delta_n)} - \bar{u}_{\delta_n}\|^2 \leq \delta_n^2 + \alpha(\delta_n)\|\bar{z}\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Из ① $\exists \{z_{\alpha(\delta_{n_p})}\} \subset \{z_{\alpha(\delta_n)}\} : z_{\alpha(\delta_{n_p})} \rightharpoonup z^* \in Z$

Из ② $\Rightarrow$ {A – бн. непр.} $\Rightarrow$ {перейдем к lim} $\Rightarrow Az^* = \bar{u}$, но $\exists! \bar{z}$:

$A\bar{z} = \bar{u} \Rightarrow z^* = \bar{z}$ $\quad \|\bar{z}\|$

По св-ву слабой ск-ти $\|z^*\| \leq \varliminf \|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| \leq \varlimsup \|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| \overset{①}{\leq} \|\bar{z}\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim \|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| = \lim \|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| \Rightarrow \lim_{p\to\infty} \|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| = \|\bar{z}\|$

$z_{\alpha(\delta_{n_p})} \rightharpoonup \bar{z}$

$\|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| \to \|\bar{z}\|$ $\Big| \Rightarrow z_{\alpha(\delta_{n_p})} \xrightarrow[p\to\infty]{} \bar{z}$?!! , т.е.д.

Замечание

Пусть известно, что точное реш-е $\bar{z} \in K$ (некот. класс) (регулир. алгоритм)

1) Задаем $\bar{z} \xrightarrow{A} \bar{u}$

2) Вносим погрешность $\bar{u} + \delta = u_\delta \Rightarrow$ знаем $\{u_\delta, \delta\}$

3) Подставляем в $M^\alpha[z, u_\delta] \to \min$ при $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$

4) Получаем $z_{\alpha_1}, \dots, z_{\alpha_N}$, сравниваем их с $\bar{z}$, пусть $z_{\alpha_j} \approx \bar{z} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ когда будем искать неизв. $\bar{z}$ из того же класса, можем использ. z_{α_j}.

Выбор параметра регуляризации по принципу невязки

Пусть Z, U – гильбертовы пр-ва, A – бн. непр. $Z \to U$ (линейный),

$\ker A = 0$, $\overline{R(A)} = U$, $\bar{u} \neq 0$ (правая часть) (если $\bar{u} = 0 \to \bar{z} = 0$)

$\exists \varepsilon > 0$ и $\{\delta_n\} \to 0$, $\{z_{\alpha(\delta_n)}\}$ такие, что $\|z_{\alpha(\delta_n)} - \bar{z}\| \geq \varepsilon$, $\forall n$,

$z_{\alpha(\delta_n)} = \arg\min_{z} M^{\alpha(\delta_n)}[z, u_{\delta_n}]$, $\|u_{\delta_n} - \bar{u}\| \leq \delta_n$

$M^{\alpha(\delta_n)}[z_{\alpha(\delta_n)}, u_{\delta_n}] \leq \{\text{это } \min\} \leq M^{\alpha(\delta_n)}[\bar{z}, u_{\delta_n}]$

$\|Az_{\alpha(\delta_n)} - u_{\delta_n}\|^2 + \alpha^{(\delta_n)}\|z_{\alpha(\delta_n)}\|^2 \leq \|A\bar{z} - u_{\delta_n}\|^2 + \alpha^{(\delta_n)}\|\bar{z}\|^2$

$\leq \delta_n^2$

① $\|z_{\alpha(\delta_n)}\|^2 \leq \frac{\delta_n^2}{\alpha(\delta_n)} + \|\bar{z}\|^2 \leq const$

$\to 0 \Rightarrow$ огр.

② $\|Az^*_{\alpha(\delta_n)} - \bar{u}_{\delta_n}\|^2 \leq \delta_n^2 + \alpha(\delta_n)\|\bar{z}\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

из ① $\exists \{z_{\alpha(\delta_{n_p})}\} \subset \{z_{\alpha(\delta_n)}\} : z_{\alpha(\delta_{n_p})} \xrightarrow{сх} z^* \in Z$

из ② $\Rightarrow$ {A - вп. непр.} $\Rightarrow$ {перейдем к lim} $\Rightarrow Az^* = \bar{u}$, но $\exists! \bar{z}$.

$A\bar{z} = \bar{u} \Rightarrow z^* = \bar{z}$ $\quad \|z^*\| = \|\bar{z}\|$

По св-ву слабой сх-ти $\|z^*\| \leq \varliminf \|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| \leq \varlimsup \|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| \overset{①}{\leq} \|\bar{z}\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim \|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| = \lim \|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| \Rightarrow \lim_{p\to\infty} \|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| = \|\bar{z}\|$

$z_{\alpha(\delta_{n_p})} \xrightarrow{сх} \bar{z}$

$\|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| \to \|\bar{z}\|$

$\Rightarrow z_{\alpha(\delta_{n_p})} \xrightarrow[p\to\infty]{} \bar{z}$?!! , ч.т.д.

Замечание

некот. класс

Пусть (регулир. алгоритм)

Пусть известно, что точное реш-е $\bar{z} \in K$, тогда:

1) Задаем $\bar{z} \xrightarrow{A} \bar{u}$

2) Вносим погрешность $\bar{u} + \delta = u_\delta \Rightarrow$ знаем $\{u_\delta, \delta\}$

3) Подставляем в $M^\alpha[z, u_\delta] \to \min$ при $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$

4) Получаем $z_{\alpha_1}, \ldots, z_{\alpha_N}$, сравниваем их с $\bar{z}$, пусть $\bar{z} \times z_{\alpha_j} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ когда будем искать неизв. $\bar{z}$ из того же класса, можем использ. α_j

Выбор параметра регуляризации по принципу невязки

Пусть Z, U - гильбертовы пр-ва, A - вп. непр. $Z \to U$ (линейный),

$\ker A = 0$, $\overline{R(A)} = U$, $\bar{u} \neq 0$ (правая часть) (если $\bar{u} = 0 \Rightarrow \bar{z} = 0$)

Тогда $\|u_\delta\| > \delta$ (если задали $\|u_\delta\| < \delta \Rightarrow z = 0$)

Лемма 1

Если $\bar{u} \neq 0$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то $z_{\alpha_1} \neq z_{\alpha_2}$

Док-во: (схема)

Вспомним ур-ие Эйлера: $A^*Az_{\alpha_k} + \alpha_k z_{\alpha_k} = A^* u_\delta$, $k=1,2$, вычтем их, получим однор. ур-ие отн-но $z_{\alpha_1} - z_{\alpha_2}$, ..., ч.т.д.

$\neq M^\alpha[z_\alpha, u_\delta] = \overbrace{\|Az_\alpha - u_\delta\|^2}^{=\varphi(\alpha)} + \alpha \overbrace{\|z_\alpha\|^2}^{=\psi(\alpha)} - \{\text{общ.}\} = \varphi(\alpha) + \alpha\psi(\alpha) = m(\alpha)$, здесь

z_α минимизирует $M^\alpha[z, u_\delta]$

$m(\alpha), \varphi(\alpha), \psi(\alpha)$ обладают различными св-ми.

Лемма 2

Если $\alpha_1 > \alpha_2$, то ① $m(\alpha_1) > m(\alpha_2)$, ② $\varphi(\alpha_1) > \varphi(\alpha_2)$, ③ $\psi(\alpha_1) < \psi(\alpha_2)$

Док-во:

① $m(\alpha_1) = M^{\alpha_1}[z_{\alpha_1}, u_\delta] > \{z_\alpha \neq 0\} > M^{\alpha_2}[z_{\alpha_1}, u_\delta] > \{z_{\alpha_2} \Rightarrow \arg\min\} \geq$

$\geq M^{\alpha_2}[z_{\alpha_2}, u_\delta] = m(\alpha_2)$

② $\varphi(\alpha_1) + \alpha_1\psi(\alpha_1) \overset{(т.к.\ M^{\alpha_1}[z_{\alpha_1}, u_\delta] < M^{\alpha_1}[z_{\alpha_2}, u_\delta])}{\lneq} \varphi(\alpha_2) + \alpha_1\psi(\alpha_2)$

$\varphi(\alpha_2) + \alpha_2\psi(\alpha_2) \leq \varphi(\alpha_1) + \alpha_2\psi(\alpha_1)$ ⊕

$\underbrace{(\alpha_1 - \alpha_2)}_{>0}\psi(\alpha_1) < \underbrace{(\alpha_1 - \alpha_2)}_{>0}\psi(\alpha_2) \Rightarrow \psi(\alpha_1) < \psi(\alpha_2)$

② $\varphi(\alpha_2) + \alpha_2\psi(\alpha_2) < \varphi(\alpha_1) + \alpha_2\psi(\alpha_1)$

$\varphi(\alpha_2) - \varphi(\alpha_1) < \underbrace{\alpha_2}_{>0}\underbrace{(\psi(\alpha_1) - \psi(\alpha_2))}_{<0} \Rightarrow \varphi(\alpha_2) > \varphi(\alpha_1)$, ч.т.д.

Лемма 3

$m(\alpha), \varphi(\alpha), \psi(\alpha)$ – непрерывны

(по ур-ию Эйлера: $A^*Az_\alpha + \alpha z_\alpha = A^* u_\delta$, z_α – непр-но α, норма и бн непр A не ломают непр-ть)

Лемма 4

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\varphi(\alpha)=0$, $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\varphi(\alpha)=\|u_\delta\|^2$

Док-во:

$\varphi(\alpha)=\|Az_\alpha-u_\delta\|^2$

Возьмем $\forall\varepsilon>0 \Rightarrow \exists z_\varepsilon: \|Az_\varepsilon-u_\delta\|\le\varepsilon$ в силу условия $\overline{R(A)}=U$

Подставим: $M^\alpha[z_\varepsilon,u_\delta]=\|Az_\varepsilon-u_\delta\|^2+\alpha\|z_\varepsilon\|^2 \ge M^\alpha[z_\alpha,u_\delta]=$

$=\varphi(\alpha)+\alpha\psi(\alpha)\ge\varphi(\alpha)$

$\varphi(\alpha)\le\varepsilon^2+\alpha\|z_\varepsilon\|^2$

~~Можем выбрать $\alpha=\alpha(\varepsilon)$, чтобы $\varphi(\alpha)\to 0$~~ $\alpha\to 0$

Устремим $\alpha\to 0 \Rightarrow \varphi(+0)\le\varepsilon^2$

В силу произв. ε: $\varphi(\alpha)\xrightarrow[\alpha\to 0]{}0$.

$M^\alpha[0,u_\delta]\ge M^\alpha[z_\alpha,u_\delta]=\varphi(\alpha)+\alpha\psi(\alpha)$

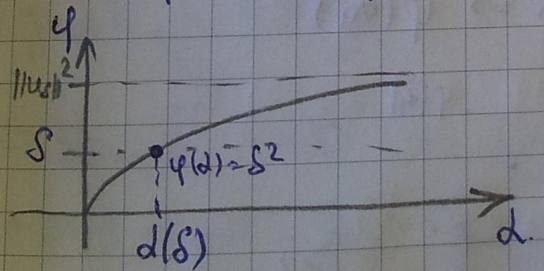
$M^\alpha[0,u_\delta]=\|u_\delta\|^2\ge\varphi(\alpha)+\alpha\psi(\alpha)\ge\alpha\|z_\alpha\|^2$

Тогда $\|z_\alpha\|^2\le\frac{\|u_\delta\|^2}{\alpha}\xrightarrow[\alpha\to\infty]{}0$ (т.к. u_δ - фикс.)

$\varphi(\alpha)=\|\underbrace{Az_\alpha}_{\text{в т. конуса}\to 0}-u_\delta\|^2\xrightarrow[\alpha\to\infty]{}\|u_\delta\|^2$, ч.т.д.

$\varphi(\alpha)$: $\varphi(\overset{+0}{\alpha})=0$, $\varphi(+\infty)=\|u_\delta\|^2>\delta^2$

$\varphi(\alpha)$ - непр. и монотонно возрастает



Обозначим точку пересечения за $\alpha(\delta)$.

Уравнение точки пересечения соотв. выбору параметра

$\varphi(\alpha(\delta))=\|Az_{\alpha(\delta)}-u_\delta\|^2=\delta^2$

Теорема

Пусть $\|u_\delta\|>\delta$, тогда ур-ие $\varphi(\alpha)\equiv\|Az_\alpha-u_\delta\|^2=\delta^2$ имеет

единственное реш-е $\alpha(\delta)$: $\varphi(\alpha(\delta)) = \delta^2$ и $\|z_{\alpha(\delta)} - \bar{z}\|_{\delta\to 0} \to 0$,

где $z_{\alpha(\delta)} = \underset{z\in Z}{\operatorname{argmin}} M^{\alpha(\delta)}[z, u_\delta]$

Док-во: (от противного)

Напишем отрицание сх-ти: $\exists \varepsilon > 0;\ \delta_n \to 0,\ z_{\alpha(\delta_n)}$: $\|z_{\alpha(\delta_n)} - \bar{z}\| \geq \varepsilon, \forall n$

$M^{\alpha(\delta_n)}[z_{\alpha(\delta_n)}, u_{\delta_n}] = \|Az_{\alpha(\delta_n)} - u_{\delta_n}\|^2 + \alpha(\delta_n)\|z_{\alpha(\delta_n)}\|^2 \leq$

$\|Az_{\alpha(\delta_n)} - u_{\delta_n}\|^2 = \delta_n^2$ ↑ реш-е $\exists$ в силу $\bar{z} \in R(A) = U$

$\|A\bar{z} - u_{\delta_n}\| \leq \delta_n$

$\leq M^{\alpha(\delta_n)}[\bar{z}, u_{\delta_n}] = \|A\bar{z} - u_{\delta_n}\|^2 + \alpha(\delta_n)\|\bar{z}\|^2 \Rightarrow$ $\leq \delta_n^2$

$\Rightarrow \|z_{\alpha(\delta_n)}\| \leq \|\bar{z}\| \Rightarrow \{z_{\alpha(\delta_n)}\}$ - огр посл-ть $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \{z_{\alpha(\delta_{n_p})}\} \subset \{z_{\alpha(\delta_n)}\} : z_{\alpha(\delta_{n_p})} \xrightarrow[p\to\infty]{\text{сл}} z^* \in Z$

$\|z^*\| \leq \varliminf \|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| \leq \varlimsup \|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| \leq \|\bar{z}\|$ (*)

$\|Az_{\alpha(\delta_{n_p})} - u_{\delta_{n_p}}\| \xrightarrow{\text{А-вн.нер.}} \|Az^* - \bar{u}\| \Rightarrow Az^* = \bar{u}$, но это

$\forall \delta_{n_p} \to 0$ нарушает единств. реш-ие $\Rightarrow z^* = \bar{z} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $z_{\alpha(\delta_{n_p})} \xrightarrow{\text{сл}} \bar{z}$

2) $\|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| \to \|\bar{z}\|$ (ур*) $\Rightarrow z_{\alpha(\delta_{n_p})} \xrightarrow{Z} \bar{z}$, что противоречит отриц. сх-ти, ч.т.д.

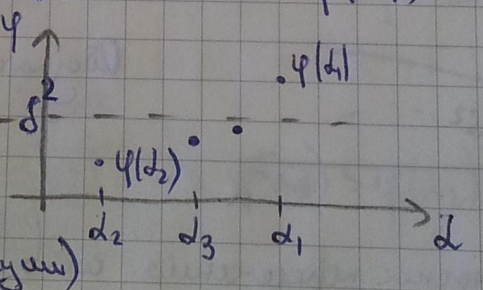
Алгоритм:

1) Берём какое-то $\alpha_1 \Rightarrow M^{\alpha_1}[z, u_\delta] \to \min \Rightarrow \varphi(\alpha_1)$

2) $\alpha_2 \ldots \varphi(\alpha_2)$

3) $\alpha_3 \ldots \varphi(\alpha_3)$

...



Ищется корень (н: методом бисекции)

Метод регуляризации Тихонова для решения нелинейного операторного уравнения

$Az = u$, $z \in Z$, $u \in U$, Z, U - банаховы

Пусть A - непрерывен, $\exists! \bar{z} \in Z : A\bar{z} = \bar{u}$

$M^\alpha[z,u] = \|Az-u\|_U^2 + \alpha\|z\|_H^2$ - функционал Тихонова, где $H \subset Z$ и (H - гильб. пр-во, компактно вложенное в Z, т.е. $\|z\|_H \le d$ - компакт в Z)

Теорема 1 (существование минимиз. эл-та)

Для $\forall \alpha > 0$ и $\forall u \in U$ $\exists z^* = \arg\inf_H M^\alpha[z,u]$, $z^* \in H$.

Док-во: (похоже на лин. случай)

Пусть $\{z_n\}$ - минимиз. посл-ть для $M^\alpha[z,u]$ в H

$\alpha\|z_n\|_H^2 \le \delta^2 + \alpha\|\bar{z}\|_H^2 \Rightarrow \|z_n\| \le \frac{\delta^2}{\alpha} + \|\bar{z}\|_H^2$ - ограничена в норме, комп. компакта в Z $\Rightarrow \exists \{z_{n_p}\} \underset{p\to\infty}{\to} z^*$ в Z. Докажем, что на самом деле $z^* \in H$.

$m^* = \inf_H M^\alpha[z,u] = \lim_{p\to\infty} M^\alpha[z_{n_p},u] = \lim_{p\to\infty}\left[\|Az_{n_p}-u\|_U^2 + \alpha\|z_{n_p}\|_H^2\right] =$

$= \{A\text{-непр.}\} = \|Az^*-u\|^2 + \lim_{p\to\infty}\alpha\|z_{n_p}\|_H^2 = \varphi^* + \alpha\psi^*$

$\exists$ предел первого слаг. $\Rightarrow$ должен $\exists$ и у второго

$\lim_{p\to\infty}\|z_{n_p}\|^2 = \psi^*$

$\forall$ посл-ти $\sigma_{mp} = \frac{1}{2}(z_{n_p} + z_{n_{p+m}})$, $\rho_{mp} = \frac{1}{2}(z_{n_p} - z_{n_{p+m}})$

минимиз. посл-ть (как сумма минимиз.)

$\|\sigma_{mp}\|_H^2 = \frac{1}{4}\|z_{n_p}\|^2 + \frac{1}{4}\|z_{n_{p+m}}\|^2 + \frac{1}{2}(z_{n_p}, z_{n_{p+m}})_H$ (ψ^*, ψ^*)

$\|\rho_{mp}\|_H^2 = \frac{1}{4}\|z_{n_p}\|^2 + \frac{1}{4}\|z_{n_{p+m}}\| - \frac{1}{2}(z_{n_p}, z_{n_{p+m}})_H$ ⊕ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \|\rho_{mp}\|_H^2 \to 0 \Rightarrow \{z_{n_p}\}$ - фунд. посл-ть в H, H-полное $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \check{z} \in H : z_{n_p} \to \check{z}$. Но $z_{n_p} \to z^* \in Z$. Т.к. $H \subset Z$, то $z_{n_p} \to z^* \in H$, ч.т.д.

Применение метода регуляризации Тихонова для решения интегральных уравнений I рода

$Az \equiv \int_a^b K(x,s)\,z(s)\,ds = u(x)$, ищем $z \in L_2[a,b]$; $u \in L_2[c,d]$ (уточ. часть)

$\exists \int_a^b \int_c^d K^2(x,s)\,dx\,ds < \infty$ - ядро Гильберта - Шмидта

$A: L_2(a,b) \to L_2(c,d)$ - вп. непр.

$\exists \bar{z} \in L_2(a,b)$, $\bar{u} \in L_2(c,d)$, $\exists!$, знаем $\{u_\delta(x), \delta\}$, т.е.

$\int_c^d |\bar{u}(x) - u_\delta(x)|^2 dx \le \delta^2$

Выпишем ф-л Тихонова:

$M^\alpha[z, u_\delta] = \int_c^d \left(\int_a^b K(x,s)\,z(s)\,ds - u_\delta(x) \right)^2 dx + \alpha \int_a^b z^2(s)\,ds$, $\alpha > 0$

$M^\alpha[z, u_\delta] \xrightarrow[z \in L_2]{} \min$ и находим z_α

Используем ур-ие Эйлера для поиска точки min:

$A^*Az_\alpha + \alpha z_\alpha = A^* u_\delta$

$(A^*u, z)_{L_2(a,b)} = (u, Az)_{L_2(c,d)}$, $\forall u, z$

$A^*u = \int_c^d K(x,s)\,u(x)\,dx$ - докажем: ($K(s,x)$?)

$\int_c^d u(x) \int_a^b K(x,s)\,z(s)\,ds\,dx = \int_c^d \int_a^b K(x,s)\,z(s)\,u(x)\,ds\,dx =$

$= \int_a^b z(s) \underbrace{\int_c^d K(x,s)\,u(x)\,dx}_{A^*u}\,ds$

Ур-ие Эйлера: $\int_c^d K(x,s) \int_a^b K(x,t)\,z_\alpha(t)\,dt\,dx + \alpha z_\alpha(s) = \int_c^d K(x,s)\,u_\delta(x)\,dx$ (1)

$\Downarrow$

$\int_a^b B(s,t)\,z_\alpha(t)\,dt + \alpha z_\alpha(s) = f_\delta(s)$, $a \le s \le b$, где

$B(s,t) = \int_c^d K(x,s)\,K(x,t)\,dx$ - повторное ядро

$\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha \end{pmatrix} \ge 0$ Положительно, поэтому

B - полож. (но не полож. опр.)

αI - строго полож.

$\Rightarrow$ получим строго полож. опр. м-цу ?

Предположим, что $\overline{z} \in W_2^1(a,b) = H^1(a,b)$ $(L_2 = H^0)$

Тогда $M^\alpha[z,u] = \|Az-u\|^2_{L_2(c,d)} + \alpha\|z\|^2_{W_2^1(a,b)}$

A^* будет другой и ур-ие Эйлера поменяется!

Посчитать A^*

В итоге получим $\|z_\delta - \overline{z}\|_{L_2} \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$, $\delta = \delta(\alpha)$ – выбирается по теоремам.

Нелинейные интегральные уравнения I рода

$$\int_a^b K(x,s,z(s))\,ds = u(x) \equiv Az$$

↑ если z не в точке s, то это уже функциональное ур-ие!

Будем считать, что $\overline{z} \in C[a,b]$ – точное

$C[a,b] \equiv Z$, $Z \subset H = W_2^1(a,b)$; $u \in L_2(a,b) = U$

$$M^\alpha[z,u_\delta] = \int_c^d \left| \int_a^b K(x,s,z(s))\,ds - u_\delta(x) \right|^2 dx + \alpha \int_a^b \left[(z'(s))^2 + z^2(s) \right] ds \to$$

$$\to \min_{z \in W_2^1(a,b)}$$

Будем выбирать $\alpha(\delta) = c\delta^2$ ($\frac{\delta^2}{\alpha}$ должно быть огр ???) оно же должно $\to 0$

Итерационный метод решения операторных ур-ий I рода

Линейный случай: $Az = u$, $z \in Z$, $u \in U$, Z, U – гильб.,

A – вп. непр, $\ker A = 0$ (для единств. реш-ия)

Подействуем на ур-ие сопряж. оператором (не на единств. не имеет, т.к. $\ker A^* = 0$):

$A^*Az = A^*u$ – ур-ие с самосопряж. оператором

Итерац. процесс:

$z_{n+1} = z_n + \mu A^*u - \mu A^*Az_n$, $n = 0,1,2,\dots$

$z_0 = \mu A^*u$, $\mu \neq 0$ – некот. число

Оно же: $z_{n+1} = R_n z_0 u$ $\quad K(x,y) = \overline{K(y,x)}$

Теорема 1

$$R_n = \mu \sum_{i=0}^{n} (I - \mu A^* A)^i A^*$$

Док-во:

$z_0 = \mu A^* u \Rightarrow$ ф-ла верна для $n=0$. Докажем по индукции:

$$z_{n+1} = (I - \mu A^* A) z_n + \mu A^* u = \{\text{исп. ф-лу для } z_n\} =$$

$$= (I - \mu A^* A)\, \mu \sum_{i=0}^{n} (I - \mu A^* A)^i A^* u + \mu A^* u = \mu A^* u + \mu \sum_{i=0}^{n} (I - \mu A^* A)^{i+1} A^* u =$$

$$\{i+1 = k\} = \mu A^* u + \mu \sum_{k=1}^{n+1} (I - \mu A^* A)^k A^* u = \mu \sum_{k=0}^{n+1} (I - \mu A^* A)^k A^* u = R_{n+1} u, \text{ ч.т.д.}$$

Теорема 2

Пусть $0 < \mu < \frac{2}{\|A^* A\|}$, а целочисл. ф-ия $n(\delta)$ такова, что: $n(\delta) \xrightarrow[\delta \to +0]{} \infty$, $\delta \cdot n(\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$. Тогда:

$$\|R_{n(\delta)} u_\delta - \bar{z}\| \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$$

Док-во:

$$\|R_{n(\delta)} u_\delta - \bar{z}\| \le \|R_{n(\delta)} u_\delta - R_{n(\delta)} \bar{u}\| + \|R_{n(\delta)} \bar{u} - \bar{z}\| \le \{R_{n(\delta)} \text{ лин. по } u\} \le \underbrace{\|R_{n(\delta)}\|}_{①} \cdot \overbrace{\|u_\delta - \bar{u}\|}^{\le \delta} + \underbrace{\|R_{n(\delta)} \bar{u} - \bar{z}\|}_{②}$$

1) A^*A – вп. непр. (т.к. A – вп. непр.) и самосопряж. ($\ker A = 0$ + полож. опр.)

По теореме Гильберта – Шмидта: $A^* A \varphi_j = \lambda_j \varphi_j$, $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ – ОНБ, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k > \dots > 0$ – их счётное число, причём $0 < \lambda_j \le \|A^* A\|$, т.к. $\lambda_1 = \|A^* A\|$

$$(\lambda_j = (\lambda_j \varphi_j, \varphi_j) = (A^* A \varphi_j, \varphi_j) \le \|A^* A\|)$$

$$\|R_n\| = \|\mu \sum_{k=0}^{n} (I - \mu A^* A)^k A^*\| \le \mu \sum_{k=0}^{n} \|I - \mu A^* A\|^k \cdot \|A^*\| \le$$

$$\le \{\|I - \mu A^* A\| = \max_j |1 - \mu \lambda_j| < 1 \text{ (по выбору } \mu)\} \le$$

$$\le \mu \|A^*\| \cdot (n+1)$$

$$\|R_{n(\delta)}\| \le \mu \|A^*\| \cdot (n(\delta) + 1)$$

2) $\|R_{n(\delta)}\bar{u} - \bar{z}\| \le ?$

$\bar{u} = A\bar{z}$; $\bar{z}$ раскл. по ОНБ

$R_{n(\delta)}\bar{u} - \bar{z} = \mu \sum_{k=0}^{n(\delta)} (I - \mu A^*A)^k A^*\bar{u} - \bar{z} = \mu \sum_{k=0}^{n(\delta)} (I - \mu A^*A)^k A^*A \cdot \sum_{j=1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_j)\varphi_j - \sum_{j=1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_j)\varphi_j =$

$= \mu \sum_{j=1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_j) \sum_{k=0}^{n(\delta)} (1-\mu\lambda_j)^k \lambda_j \varphi_j - \sum_{j=1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_j)\varphi_j =$ (q^k, $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$)

$= \mu \sum_{j=1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_j) \lambda_j \varphi_j \cdot \frac{1-(1-\mu\lambda_j)^{n(\delta)+1}}{\mu\lambda_j} - \sum_{j=1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_j)\varphi_j =$

$= -\sum_{j=1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_j)\varphi_j (1-\mu\lambda_j)^{n+1}$

$\|R_{n(\delta)}\bar{u} - \bar{z}\|^2 =$ {равенство Парсеваля} $= \sum_{j=1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_j)^2 \cdot (1-\mu\lambda_j)^{2(n+1)} =$

$= \left(\sum_{j=1}^{N} + \sum_{j=N+1}^{\infty}\right)\left((\bar{z}, \varphi_j)^2 (1-\mu\lambda_j)^{2(n+1)}\right) \le \sum_{j=1}^{N} (\bar{z}, \varphi_j)(1-\mu\lambda_j)^{2(n+1)} + \sum_{j=N+1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_j)^2$

(4) — < 1 (по вн. μ); (3)

Берём $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N(\varepsilon) : (3) < \varepsilon/2$ (ряд по коэфф. Фурье сх-ся)

$\Rightarrow$ (4) $\to \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} (\bar{z}, \varphi_j)(1-\mu\lambda_j)^{2(n+1)}$, $(1-\mu\lambda_j)^{2(n+1)} < q^{2(n+1)}$

$\exists n(\varepsilon) : (4) < \varepsilon/2 \Rightarrow q^{2(n+1)} < \varepsilon$ при дост. большом n

$\Rightarrow \|R_n\bar{u} - \bar{z}\| = \beta(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$

$\|R_{n(\delta)}u_\delta - \bar{z}\| \le \mu\|A^*\| \cdot (n(\delta)+1)\delta + \beta(n(\delta))$

Если $n(\delta)\cdot\delta \underset{\delta\to 0}{\to} 0$, $n(\delta) \underset{\delta\to 0}{\to} \infty \Rightarrow \|R_{n(\delta)}u_\delta - \bar{z}\| \underset{\delta\to 0}{\to} 0$, т.т.д

Проекционный метод решения операторных ур-ий 1-го рода

$Az = u$, (1) $z \in Z$, $u \in U$, Z, U – гильб. (сепарабельные)

$\bar{z}$: $A\bar{z} = \bar{u}$, известны $\{u_\delta, \delta\}$, $\|u_\delta - \bar{u}\| \le \delta$

Будем считать, что A – вп. непр. ($\Rightarrow$ лин?), $\ker A = 0$

* задачу на с.з.: $A^*A\varphi = \lambda\varphi$

По т-ме Гильберта-Шмидта $\exists \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\lambda_k > 0\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\varphi_k\}$ - ОНБ в $\overline{R(A)}$

$0 < \dots < \lambda_{k+1} < \lambda_k < \dots < \lambda_1$.

Построим базис в U:

$A\varphi_k = \hat{\psi}_k \in U$. Нетрудно показать, что $\{\hat{\psi}_k\}$ - ортогональны

$\|\hat{\psi}_k\|^2 = (\psi_k, \psi_k) = (A\varphi_k, A\varphi_k) = (\varphi_k, A^*A\varphi_k) = \lambda_k(\varphi_k, \varphi_k) = \lambda_k$

$\Rightarrow \|\hat{\psi}_k\|^2 = \lambda_k \Rightarrow \{\hat{\psi}_k\}$ можно нормировать $\Rightarrow \psi_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\hat{\psi}_k$

$\{\psi_k\}$ - ОНС.

Пусть $\overline{R(A)} = U$, тогда $\{\psi_k\}$ - ОНБ в U

* $\bar{z} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_k)\varphi_k$ (2)

$A\bar{z} = \bar{u} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\bar{u}, \psi_k)\psi_k$ как связаны $(\bar{z}, \varphi_k)$ и $(\bar{u}, \psi_k)$?

$A(2) \Rightarrow A\bar{z} = \{\text{можно по т. Г-Ш.}\} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_k) A\varphi_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_k)\hat{\psi}_k =$

$= \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_k)\sqrt{\lambda_k}\psi_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\bar{u}, \psi_k)\psi_k \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda_k}(\bar{z}, \varphi_k) = (\bar{u}, \psi_k) \Rightarrow \boxed{(\bar{z}, \varphi_k) = \frac{(\bar{u}, \psi_k)}{\sqrt{\lambda_k}}}$

$$\boxed{\bar{z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\bar{u}, \psi_k)}{\sqrt{\lambda_k}}\varphi_k} \quad (3)$$

Если $u \notin R(A)$, то (3), вообще говоря, не сходится! (Вполне возможно, что приближенная $u_\delta \notin R(A)$!)

* $z = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(u, \psi_k)}{\sqrt{\lambda_k}}\varphi_k$ (4), $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots > 0$

$z = R_n u$ (4'), R_n опр. (4)

Докажем, что если $\|\underbrace{R_{n(\delta)}u_\delta}_{\text{приближенное решение}} - \bar{z}\| \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$

$$\|R_n u_\delta - \bar z\| \le \|R_n(u_\delta - \bar u)\| + \|R_n \bar u - \bar z\|$$

① $\|R_n(u_\delta - \bar u)\| \le \|R_n\|\,\delta$, $\|R_n\| \le ?$

$\|R_n\| = \sup_{\omega \in U} \|R_n \omega\|^2 =$ {что-то там по-ву Парсеваля} $= \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{(\omega, \varphi_k)}{\sqrt{\mu_k}} \varphi_k \right\|^2 =$

$= \{\{\varphi_k\}$-ОНБ$\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\omega, \varphi_k)^2}{\mu_k} \le \frac{1}{\mu_n} \sum_{k=1}^{n} (\omega, \varphi_k)^2 \le \frac{1}{\mu_n}\|\omega\|^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\|R_n\| \le \frac{1}{\sqrt{\mu_n}}}$$

② $\|R_n \bar u - \bar z\|^2 = \|R_n A \bar z - \bar z\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{(\bar z, \varphi_k)}{\sqrt{\mu_k}} \varphi_k - \sum_{k=1}^{\infty} (\bar z, \varphi_k)\varphi_k \right\|^2 =$

$= \{$нер. (4) для $\bar z\} = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\bar z, \varphi_k)}{\sqrt{\mu_k}} \varphi_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} (\bar z, \varphi_k)^2 = \alpha(n)$

т.к. нед. из коэфф. Фурье сх-ся, то $\alpha(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Теорема

Если целочисленная ф-ия $n(\delta) \xrightarrow[\delta\to 0]{} \infty$ так, что $\frac{\delta}{\sqrt{\mu_{n(\delta)}}} \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$, то

$\|R_{n(\delta)} u_\delta - \bar z\| \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$

Док-во:

$$\|R_{n(\delta)} u_\delta - \bar z\| \le \|R_{n(\delta)}\| \cdot \delta + \alpha(n(\delta)) \le \frac{\delta}{\sqrt{\mu_{n(\delta)}}} + \alpha(n(\delta)) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0, \text{ что и требовалось}$$

Метод квазиобращения

Задача:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ 0 < t < T \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 < t \le T \quad \text{- ГУ} \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

ОЗ: Известна $u(x,T) = g(x)$; $\varphi(x) = ?$

Поменяем направление времени: $\tau = T - t$, $u(x, T-\tau) = \hat u(x,\tau)$

$$\begin{cases} \hat u_\tau = -\hat u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ 0 < \tau < T \\ \hat u(0,\tau) = \hat u(\pi,\tau) = 0, & 0 \le \tau \le T \\ \hat u(x,0) = g(x), & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

← задача с обратным временем

Эта задача некорректная! Решение существует не для $\forall g \in C[0,\pi]$, решение неустойчиво (напр., из $L_2(0,\pi)$ в $L_2(0,\pi)$)

Выпишем формальное реш-е с помощью метода разд. перем.:

$\hat{u}(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{n^2\tau} \sin(nx)$, где $g_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx$

ПЗ: $K\varphi = g$, K - вп. непр. (а огр. не для $\forall g \in L_2$)

ОЗ: $\varphi = K^{-1}g$, K^{-1} - однозначен (там, где определен)

$\not\exists R_\alpha g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{n^2(1-\alpha n^2)\tau} \sin(nx)$

Теперь при $g \in L_2^{(0,\pi)}$ рад сходится

$\exists\, \bar{g} = K\bar{\varphi}$, $\|\bar{g} - g_\delta\|_{L_2(0,\pi)} \le \delta$

Если $\alpha = \alpha(\delta)$, то можно добиться $\|\underbrace{R_{\alpha(\delta)} g_\delta}_{\text{приближ. реш-е}} - \bar{\varphi}\| \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$

$\not\exists$:

$$\begin{cases} v_\tau = -v_{xx} - \alpha v_{xxxx}, & 0<x<\pi,\ 0<\tau\le T \\ v(0,\tau) = v(\pi,\tau) = 0 \\ v_{xx}(0,\tau) = v_{xx}(\pi,\tau) = 0 & 0\le\tau\le T \\ v(x,0) = g(x) \end{cases}$$

($\hat{u}_\tau(0,\tau) = 0 \Rightarrow$ счит, что ур-ие выполн. вплоть до гр. $\Rightarrow \hat{u}_{xx}(0,\tau) = 0$)

$\exists\, v(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\tau)\sin(nx) \Rightarrow v(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{n^2(1-\alpha n^2)\tau}\sin(nx)$

Докажем сходимость:

$$\|R_\alpha g_\delta - \bar{\varphi}\| \le \underbrace{\|R_\alpha(g_\delta - \bar{g})\|}_{①} + \underbrace{\|R_\alpha \bar{g} - \bar{\varphi}\|}_{②}$$

① $\|R_\alpha(g_\delta - \bar{g})\| \le \|R_\alpha\| \cdot \delta$, $\|R_\alpha\| \le ?$

$\|R_\alpha g\|^2 =$ (равенство Парсеваля) $= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{n^2(1-\alpha n^2)\tau} \sin(nx) \right\|^2 =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 e^{2n^2(1-\alpha n^2)\tau} \cdot \frac{\pi}{2}$ ... $\frac{\pi}{2}$

↓ нормы

$\in C[0,\pi]$

$n^2(1-\alpha n^2)T \le \frac{1}{4\alpha}$

$\{(x(1-\alpha x))' = 1 - 2\alpha x = 0 \Rightarrow x_\alpha = \frac{1}{2\alpha}\}$

$\Rightarrow \|R_\alpha g\|^2 \le \frac{\pi}{2} e^{\frac{1}{2\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 \le e^{\frac{1}{2\alpha}} \|g\|^2 \Rightarrow \boxed{\|R_\alpha\| \le e^{\frac{1}{4\alpha}}}$

② $\|R_\alpha \bar{g} - \bar{\varphi}\|^2 = \{\bar{g} = K\bar{\varphi}\} = \|R_\alpha K\bar{\varphi} - \bar{\varphi}\|^2 = \|\sum_{n=1}^{\infty} \bar{g}_n e^{n^2(1-\alpha n^2)T} \sin(nx) - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\varphi}_n \sin(nx)\|^2 = \{\bar{g}_n = e^{-n^2 T}\bar{\varphi}_n\} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\varphi}_n^2 (e^{-\alpha n^4 T} - 1)^2 =$

$= \frac{\pi}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} + \sum_{n=N+1}^{\infty}\right)\left(\bar{\varphi}_n^2 (\underbrace{1 - e^{-\alpha n^4 T}}_{<1})^2\right)$

Дано $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n \ge N \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} \bar{\varphi}_n^2 (1 - e^{-\alpha n^4 T})^2 < \frac{\varepsilon}{2}$

(т.к. ряд $\sum \bar{\varphi}_n^2$ сх-ся)

$\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} \bar{\varphi}_n^2 (1 - e^{-\alpha n^4 T})^2$, $\exists \alpha(N(\varepsilon)) : < \frac{\varepsilon}{2}$

Тогда дано $\forall \varepsilon \ \exists \alpha(\varepsilon) : \|R_\alpha \bar{g} - \bar{\varphi}\| < \varepsilon$, т.е. $\|R_\alpha \bar{g} - \bar{\varphi}\| = \beta(\alpha) \underset{\alpha \to 0}{\to} 0$

Итог:

$\|R_\alpha g_\delta - \bar{\varphi}\| \le e^{\frac{1}{4\alpha}} \cdot \delta + \beta(\alpha)$

Теорема

Если $\alpha(\delta) > 0$, $\forall \alpha(\delta) \underset{\delta \to 0}{\to} 0$ так, что $\delta \cdot e^{\frac{1}{4\alpha(\delta)}} \underset{\delta \to 0}{\to} 0$, то

$\|R_{\alpha(\delta)} g_\delta - \bar{\varphi}\|_{L_2(0,\pi)} \underset{\delta \to 0}{\to} 0$

Док-во: (см. выше)