Главы курса
1 Метод конечных элементов
2 Принцип max для разностных схем
3 Методы решения сет. ур-ий
4 Теория устойчивости разн. схем
5 Разностные схемы для нелин задач мат. физики

Глава I Метод конечных элементов

§1 Кусочно-линейные восполнения функций

$\forall\, u(x),\ x \in [a,b]$ - некая ф-ия

$\Omega_h = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b\}$

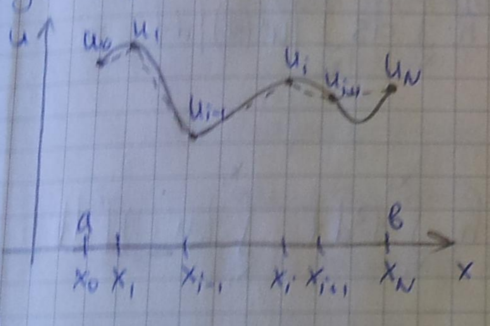
$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = \overline{1,N}$

$u_i = u(x_i), \quad i = \overline{0,N}$

Рассм. интерполяц. мн-н Лагранжа 1ой степени на $[x_{i-1}, x_i]$ по значениям u_{i-1}, u_i

$$L_1^{(i)}(x) = u_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + u_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i}$$

Опр Кусочно-линейным восполнением ф-ии $u(x)$ на сетке Ω_h назыв. ф-ия $\tilde{u}(x) = L_1^{(i)}(x)$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,N}$



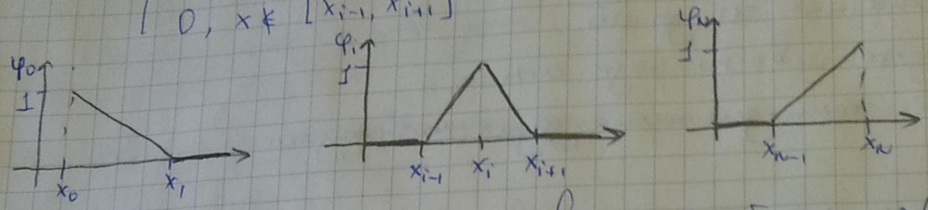
Замечание

$\tilde{u}(x) \in C[a,b]$ по построению, представляет собой интерп. сплайн 1ой степени, производная $\tilde{u}'(x)$ кусочно-постоянная и может не существовать в узлах x_i

Введём базис:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h_1}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & x \notin [x_0, x_1] \end{cases}, \quad \varphi_N(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{N-1}}{h_N}, & x \in [x_{N-1}, x_N] \\ 0, & x \notin [x_{N-1}, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}, \quad i = \overline{1, N-1}$$



Поскольку $\varphi_i(x_k) = \delta_{ik}$, а также в силу линейности $\varphi_i(x)$ на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$:

$\hat{u}(x) = \sum\limits_{i=0}^{N} u_i \varphi_i(x)$ – представление кусочно-лин. восполнения в виде лин. комб. базисных функций (финитных)

Лемма 1

Пусть $u(x) \in C[a,b]$, имеет на (a,b) вторую производную и $\int\limits_a^b (u''(x))^2 dx < \infty$.

Тогда $\int\limits_a^b [\hat{u}'(x) - u'(x)]^2 dx \le h^2 \int\limits_a^b (u''(x))^2 dx$, $h = \max\limits_{1 \le i \le N} h_i$.

Док-во:

Пусть $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

$$\hat{u}'(x) - u'(x) = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} - u'(x) = \frac{1}{h_i} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [u'(s) - u'(x)] ds = \frac{1}{h_i} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} ds \int\limits_x^s u''(t) dt$$

$$\Rightarrow |\hat{u}'(x) - u'(x)| \le \frac{1}{h_i} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} ds \int\limits_x^{x_i} |u''(t)| dt \le \frac{1}{h_i} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} ds \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |u''(t)| dt =$$

$$= \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |u''(t)| dt$$

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [\hat{u}'(x) - u'(x)]^2 dx \le h_i \left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |u''(t)| dt \right)^2 \overset{\text{К.-Б.}}{\le} h_i \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} 1^2 dt \cdot \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [u''(t)]^2 dt =$$

$$= h_i^2 \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [u''(t)]^2 dt$$

$$\int\limits_a^b [\hat{u}'(x) - u'(x)]^2 dx \le \sum_{i=1}^{N} h_i^2 \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [u''(t)]^2 dt \le h^2 \int\limits_a^b [u''(t)]^2 dt,$$ ч.т.д.

Лемма 2

При условиях леммы 1 верно нер-во:

$$\int\limits_a^b [\hat{u}(x) - u(x)]^2 dx \le h^4 \int\limits_a^b [u''(x)]^2 dx \quad (*)$$

Док-во:

Пусть $x \in (x_{i-1}, x_i)$. Учитывая, что $\tilde{u}(x_{i-1}) = u(x_{i-1})$:

$$\tilde{u}(x) - u(x) = \int_{x_{i-1}}^{x} [\tilde{u}'(t) \cancel{dt} - u'(t)]dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\tilde{u}(x) - u(x)| \le \int_{x_{i-1}}^{x} |\tilde{u}'(t) - u'(t)|dt \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\tilde{u}'(t) - u'(t)|dt$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [\tilde{u}(x) - u(x)]^2 dx \le h_i \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\tilde{u}'(t) - u'(t)|dt\right)^2 \overset{\text{К.Б.}}{\le} h_i^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\tilde{u}'(t) - u'(t)]^2 dt \le$$

$$\overset{\Lambda 1}{\le} h_i^4 \int_{x_{i-1}}^{x_i} [u''(t)]^2 dt \Rightarrow (*)$$, ч.т.д.

Замечание

В пр-ве $L_2(a,b)$ $\|v\|_{L_2(a,b)} = \left(\int_a^b v^2(x)dx\right)^{1/2}$, т.е. показано, что:

$\|\tilde{u} - u\|_{L_2} \le h^2 \|u''\|_{L_2}$

$\|\tilde{u}' - u'\|_{L_2} \le h \|u''\|_{L_2}$

Теорема (сходимость в $L_2(a,b)$)

$\|\tilde{u}(x) - u(x)\|_{L_2(a,b)} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, где $h = \max_{1 \le i \le N} h_i$

§2 Понятие о МКЭ

Общее описание метода

1) Исходная задача рассматривается в виде операторного ур-ия:

$Lu(x) = f(x)$, $u(x), f(x) \in H$, $x \in G$

H - бесконечномерное функц. пр-во со скал. произв. (v, w), в этом пр-ве, как правило, ищется обобщенное реш-е.

$L: H \to H$ - лин. оператор в H

G - некоторая область

2) Область G разбивается на непересекающиеся эл-ты $\{G_k\}_{k=1}^{M}$

Вводится конечно-элементный базис $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N}$ из финитных функций (отличных от 0 лишь на нескольких эл-тах).

Линейная оболочка $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N}$ порождает конечномерное подпр-во $H_N \subset H$, в котором ищется приближенное реш-е задачи $u_N(x)$.

3) Приближенное реш-е ищется в виде $u_N(x) = \sum_{j=1}^{N} y_j \varphi_j(x)$.
Подставляя в ур-ие и домножая скалярно на $\varphi_i(x)$, получим СЛАУ относительно неизв. коэфф. y_j:

$Ay = b$, $y = (y_1, \dots, y_N)^T$, $b = (b_1, \dots, b_N)^T$, $A = \{a_{ij}\}$

$a_{ij} = (L\varphi_j, \varphi_i)$, $b_i = (-f, \varphi_i)$

Приближенное реш-е сх-ся к точному в некоторой норме H:

$\|u_N(x) - u(x)\|_H \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

***МКЭ применительно к задаче:**

$$\begin{cases} u''(x) - q(x)u(x) = -f(x), \ 0<x<1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \qquad (q(x) \geq 0) \qquad (1)$$

Обозначения:

$C^k[0,1]$ – пр-во ф-ий, непр-ных на $[0,1]$ и k раз непр.-дифф. на $(0,1)$

$v(x) \in \overset{\circ}{C}{}^k[0,1] \iff v(x) \in C^k[0,1]$, $v(0) = v(1) = 0$

Опр Классическим решением задачи (1) назыв. ф-ия $u(x) \in C^2[0,1]$, удовл. ур-ию при $x \in (0,1)$ и гр. усл-ям.

Замечание

Классич. реш-е $u(x)$ удовл. для $\forall v(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1[0,1]$ интегральному тождеству

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx + \int_0^1 q(x)u(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx \qquad (2)$$

Опр Пространством Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ назыв. пополнение пр-ва $\overset{\circ}{C}{}^1[0,1]$ по норме ~~пр-ва~~ $\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)} = \left[\int_0^1 [v^2(x) + v'^2(x)]\,dx\right]^{1/2}$

Опр Обобщённым решением задачи 1 назыв. ф-ия $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, удовл. ~~тождеству~~ равенству (2) при всех $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$.

Введём сетку (разобьём отрезок $[0,1]$ на эл-ты):

$\Omega_h = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1\}$

$h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1,N}$

Выберем конечно-элементный базис:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}, \quad 0, \text{ иначе}, \quad i = \overline{1,N-1}$$

Т.к. $\varphi_i(0)=\varphi_i(1)=0$ лин. оболочка системы $\{\varphi_i(x)\}$ образует подпр-во $H_N \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ размерности $\underline{N-1}$

$\dim H_N = N-1$.

<u>Опр</u> Приближенным (по МКЭ) реш. задачи (1) назыв. ф-ия $u_N(x)\in H_N$, удовл. рав-ву (2) для $\forall v(x)\in H_N$.

<u>Замечание</u>

Выполнение рав-ва (2) для $\forall v(x)\in H_N \Leftrightarrow$ вып. (2) для $\forall \varphi_i(x)$ (в силу линейности), т.е. $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u_N'(x)\varphi_i'(x)\,dx + \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} q(x)u_N(x)\varphi_i(x)\,dx = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)\,dx$, $i=\overline{1,N-1}$

При этом $u_N(x) = \sum\limits_{i=1}^{N-1} y_i\varphi_i(x)$.

Достаточно найти коэффициенты y_i!

В силу финитности при $x\in(x_{i-1},x_{i+1})$: $u_N(x)=y_{i-1}\varphi_{i-1}(x)+y_i\varphi_i(x)+y_{i+1}\varphi_{i+1}(x)$. Равенство корректно для $i=\overline{1,N-1}$, если положить $y_0=y_N=0$.

$\exists\, x\in(x_{i-1},x_i) \Rightarrow u_N'(x) = y_{i-1}\varphi_{i-1}' + y_i\varphi_i' = -\frac{y_{i-1}}{h_i}+\frac{y_i}{h_i} = y_{\bar{x},i}$

$\exists\, x\in(x_i,x_{i+1}) \Rightarrow u_N'(x) = -\frac{y_i}{h_{i+1}}+\frac{y_{i+1}}{h_{i+1}} = y_{x,i}$

Подставим полученные выражения в инт. выражения:

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u_N'(x)\varphi_i'(x)\,dx = y_{\bar{x},i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i'\,dx + y_{x,i}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i'\,dx = y_{\bar{x},i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{1}{h_i}\,dx + y_{x,i}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\left(-\frac{1}{h_{i+1}}\right)dx = y_{\bar{x},i} - y_{x,i}$$

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} q u_N\varphi_i\,dx = y_{i-1}\underbrace{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} q\varphi_{i-1}\varphi_i\,dx}_{l_i} + y_i\underbrace{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} q\varphi_i^2\,dx}_{m_i} + y_{i+1}\underbrace{\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} q\varphi_{i+1}\varphi_i\,dx}_{n_i}$$

Обозначая $F_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)\,dx$, приходим к СЛАУ:

$$\begin{cases} y_{\bar{x},i} - y_{x,i} + l_i y_{i-1} + m_i y_i + n_i y_{i+1} = F_i, \quad i=\overline{1,N-1} \\ y_0 = y_N = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

<u>Замечание</u>

СЛАУ(3) имеет трехдиаг. м-цу, которая симметрична и при $q(x)\geq 0$

положит. определена (будет показано). Система имеет единств. реш-е, которое может быть найдено методом прогонки.

Алгоритм:

1) Отрезок $[0,1]$ разбивается на эл-ты $G_i = [x_{i-1}, x_i]$
2) Вводится конечно-элем. базис $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N-1}$ из финитных ф-ий ($\varphi_i(x) \neq 0$ лишь на G_i и G_{i+1})
3) Вычисляются коэфф. l_i, m_i, n_i, F_i (обычно численно)
4) Решается СЛАУ (3) $\mapsto y_1, \dots, y_{N-1}$
5) Приближенное реш-е $u_N(x) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i \varphi_i(x)$ – кусочно-лин. восполнение на Ω_h по значениям $y_1 \dots y_{N-1}$.

§3 Исследование сходимости МКЭ

1° Существование приближенного реш-я

Введём в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ скалярное произведение:

$$(v,w) = \int_0^1 v(x)\,w(x)\,dx$$

и билинейный симметр. функционал:

$$a(v,w) = \int_0^1 (v'w' + qvw)\,dx$$

Опр Обобщенным реш-ем задачи (1) назыв. ф-ия $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, удовл. рав-ву $a(u,v) = (f,v)$, $\forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$

Опр Приближенным реш-ем задачи (1) назыв. ф-ия $u_N \in H_N$, удовл. равенствам $a(u_N, \varphi_i) = (f, \varphi_i)$, $\forall i = \overline{1, N-1}$

Будем обозначать:

$\hat{y} = (y_1, \dots, y_{N-1})^T$, $\hat{f} = (f_1, \dots, f_{N-1})^T$

$A = \{a_{ij}\}$, $f_i = (f, \varphi_i)$, $a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$, $i = \overline{1, N-1}$, где

$u_N(x) = \sum_{j=1}^{N-1} y_j \varphi_j(x)$

Лемма 3

Коэффициенты y_j удовл. СЛАУ $A\hat{y} = \hat{f}$

Док-во:

$$(\hat{f})_i = f_i = (f, \varphi_i) = a(u_N, \varphi_i) = a\left(\sum_{j=1}^{N-1} y_j \varphi_j, \varphi_i\right) = \sum_{j=1}^{N-1} y_j\, a(\varphi_j, \varphi_i) =$$

$= \sum_{j=1}^{N-1} a_{ij} y_j = (A\hat{y})_i$, ч.т.д.

Введём пр-во $\hat{H}$ векторов $\hat{v} = (v_1, \dots, v_{N-1})^T$ со скал. произв. $(\hat{v}, \hat{\omega}) = \sum_{i=1}^{N-1} v_i \omega_i$, $\dim \hat{H} = N-1$

Лемма 4

Для $\forall \hat{v} \in \hat{H}$ и ф-ции $v(x) = \sum_{i=1}^{N-1} v_i \varphi_i(x) \in H_N$ верно:

$a(v,v) = (A\hat{v}, \hat{v})_{\hat{H}}$

Док-во:

$a(v,v) = a\left(\sum_{j=1}^{N-1} v_j \varphi_j, \sum_{i=1}^{N-1} v_i \varphi_i\right) = \sum_{i,j=1}^{N-1} v_j v_i\, a(\varphi_j, \varphi_i) = \sum_{i,j=1}^{N-1} v_j v_i\, a_{ij} =$
$= \sum_{i=1}^{N-1} (A\hat{v})_i v_i = (A\hat{v}, \hat{v})_{\hat{H}}$, ч.т.д.

Лемма 5

Матрица A симметрична и при $q(x) \geq 0$ полож. опр-на.

Док-во:

1) $a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = a(\varphi_i, \varphi_j) = a_{ji} \Rightarrow A^T = A$. $\to$ симметр.

2) Фикс. $\forall \hat{v} \in \hat{H}$: $(A\hat{v}, \hat{v})_{\hat{H}} = \{\text{лемма 4}\} = a(v(x), v(x)) = \int_0^1 [v'^2 + q v^2]\, dx \geq$
≥ 0 при $q \geq 0$

Пусть ~~a(v,v)~~ $(A\hat{v}, \hat{v})_{\hat{H}} = 0 \Rightarrow \int_0^1 v'^2 dx = 0 \Rightarrow \int_{x_{i-1}}^{x_i} (v')^2 dx = 0$, $i = \overline{1,N}$

$$v(x) = \begin{cases} v_1 \varphi_1, & x \in [x_0, x_1] \\ v_{i-1} \varphi_{i+1} + v_i \varphi_i, & x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{2, N-1} \\ v_{N-1} \varphi_{N-1}, & x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases}$$

$$v'(x) = \begin{cases} \frac{v_1}{h_1}, & x \in (x_0, x_1) \\ \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}, & x \in (x_{i-1}, x_i), \quad i = \overline{2, N-1} \\ -\frac{v_{N-1}}{h_N}, & x \in (x_{N-1}, x_N) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} v_1 = 0 \\ v_i = v_{i-1}, \; i = \overline{2, N-1} \end{matrix} \Bigg| \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \hat{v} = 0$, т.е. $(A\hat{v}, \hat{v})_{\hat{H}} > 0, \forall \hat{v} \neq 0 \Leftrightarrow A > 0$, ч.т.д.

Теорема 1 ($\exists!$ приближ. реш-ия)

При $q(x) \geq 0$ приближ. реш-е задачи (1) $\exists!$

Док-во:

т.к. $A > 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Leftrightarrow \exists!$ реш-я $\hat{A}\hat{y} = \hat{f} \Leftrightarrow \exists!$ приближ. реш-я $u_N(x)$ ч.т.д.

2° Свойства приближенного решения

Введём в $H = \overset{0}{W}{}_2^1(0,1)$ функционал:

$J(v) = a(v,v) - 2(f,v)$

Лемма 6

Пусть заданный в H ф-ал $a(v,\omega)$ удовл. св-вам:
$a(v,\omega) = a(\omega,v)$, $a(v,v) \geq 0$, $\forall v,\omega \in H$. Тогда вариационная задача
найти $u \in H$: $a(u,v) = (f,v)$, $\forall v \in H$; эквивалентна задаче минимизации: найти $u \in H$: $J(u) = \min\limits_{v \in H} J(v)$.

Док-во:

$\Leftarrow$ Пусть u – реш-е задачи min.

$\ast$ $\omega = u + tv$, где $t \in \mathbb{R}$, v – произв. ф-ия из H

$J(\omega) = J(u+tv) = a(u+tv, u+tv) - 2(f, u+tv) = \{a \text{ – билин. ф-л}\} =$
$= a(u,u) + 2t[a(u,v) - (f,v)] - 2(f,u) + t^2 a(v,v)$

$J(\omega) = J(u) + 2t[a(u,v) - (f,v)] + t^2 a(v,v) \quad (\ast)$

$\ast$ ф-ию $g(t) = J(u+tv)$ при фикс. v. Эта ф-ия имеет min при $t=0$

В силу необх. усл-ия экстремума:

$g'(0) = 2[a(u,v) - (f,v)] + 2t\,a(v,v)\Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a(u,v) = (f,v)$, $\forall v \in H \Rightarrow u$ – реш-е вариац. задачи.

$\Rightarrow$ Пусть u – реш-ие вариац. задачи

$\ast$ рав-во $(\ast)$ при $t = 1$

$J(u+v) = J(u) + 2[\underbrace{a(u,v) - (f,v)}_{0}] + \underset{\overset{\vee\!\!|}{0}}{a(v,v)} \Rightarrow J(u+v) \geq J(u)$, $\forall v \in H$

$\Rightarrow u$ – реш-ие задачи min, ч.т.д.

Следствие

Обобщённое реш-е $u(x)$ зад. (1) доставл. min ф-лу $J(v)$ в пр-ве $\overset{0}{W}{}_2^1(0,1)$.

Замечание

При док-ве леммы конкретный вид пр-ва H, билин. ф-ла $a(v,\omega)$ и скалярного произв. (v,ω) в H фактически не использовался $\Rightarrow$ лемма имеет общий характер. (н: лемма верна и для приближ. реш-ия, только в друг. пр-ве

Теорема 2

Приближенное реш-е $u_N(x)$ зад. (1) доставляет min ф-лу $J(v)$ в пр-ве H_N

Док-во: (сл. из леммы 6)

Лемма 7

Пусть $u(x)$ – точное реш-е зад. (1), $u_N(x)$ – приближ. реш-е. Тогда $a(u_N-u, u_N-u) \le a(v-u, v-u)$, $\forall v \in H_N$.

Док-во:

Т.к. $H_N \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, то $a(u,v)=(f,v)$ верно для $\forall v \in H_N$.

$a(v-u, v-u) = a(v,v) - 2a(u,v) + a(u,u) = a(v,v) - 2(f,v) + a(u,u) = J(v) + a(u,u)$

$J(v) = a(v-u, v-u) - a(u,u)$. Возьмём $v = u_N \in H_N$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow J(u_N) = a(u_N-u, u_N-u) - a(u,u)$

Т.к. $J(u_N) \le J(v)$, $\forall v \in H_N$ $\Rightarrow$ $a(u_N-u, u_N-u) \le a(v-u, v-u)$, $\forall v \in H_N$,

ч.т.д.

Теорема 3

Приближенное реш-е задачи (1) $u_N(x)$ является элементом наилучшего приближения в пр-ве H_N к её точному реш-ю $u(x)$ по норме:

$\|v\| = \left(\int_0^1 [(v')^2 + qv^2]dx\right)^{1/2}$ $(q \ge 0)$

Док-во: (...)

3° Сходимость приближенного реш-ия к точному

Лемма 8

Для произвольной ф-ии $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ при $q(x) \ge 0$ справедливо:

1) $\max\limits_{x\in[0,1]} |v(x)| \le \left(\int_0^1 (v'(x))^2 dx\right)^{1/2}$

2) $\int_0^1 v^2(x)dx \le \frac{1}{2}\int_0^1 [v'(x)]^2 dx$

3) $\|v\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} \le \frac{3}{2} a(v,v)$

Док-во:

$v^2(x) = \left(\int_0^x v'(s)ds\right)^2 \overset{\text{к.б.}}{\le} \int_0^x 1ds \cdot \int_0^x [v'(s)]^2 ds \le x \cdot \int_0^1 [v'(s)]^2 ds \Rightarrow (1)$

$$\int_0^1 v^2(x)\,dx \le \int_0^1 x\,dx \int_0^1 [v'(s)]^2 ds = \frac{1}{2}\int_0^1 [v'(s)]^2 ds \Rightarrow (2)$$

$$a(v,v) = \int_0^1 [(v')^2 + qv^2]\,dx \ge \{q \ge 0\} \ge \int_0^1 [v']^2 dx \overset{(2)}{\ge} 2\int_0^1 v^2 dx$$

$$a(v,v) = \frac{2}{3}a(v,v) + \frac{1}{3}a(v,v) \ge \frac{2}{3}\int_0^1 [v']^2 dx + \frac{2}{3}\int_0^1 v^2 dx = \frac{2}{3}\|v\|^2_{\mathring{W}_2^1(0,1)} \Rightarrow (3)$$

ч.т.д.

Замечание

Доказательство сх-ти проведём при усиленных требованиях гладкости точного реш.

Опр Пространством Соболева $\mathring{W}_2^2(0,1)$ назыв. пополнение пр-ва $\mathring{C}^2[0,1]$ по норме $\|v\|_{\mathring{W}_2^2(0,1)} = \left(\int_0^1 [v^2 + (v')^2 + (v'')^2]\,dx\right)^{1/2}$ (нужно для $\int_0^1 [v'']^2 dx$)

Теорема 4 (сходимость в $\|\cdot\|_{\mathring{W}_2^1(0,1)}$)

Пусть $u(x) \in \mathring{W}_2^2(0,1)$ – точное реш-е зад. (1), $u_N(x) \in H_N$ – приближ. реш-е зад. (1), построенное на Ω_h. Тогда при усл. $0 \le q(x) \le c$ найдется постоянная M, кот. не зависит от h ($h = \max_{i=\overline{1,N}} h_i$), такая, что $\|u_N - u\|_{\mathring{W}_2^1} \le M \cdot h$

Док-во:

Пусть $\hat{u}(x)$ – кусочно-лин. восполнение $u(x)$ на сетке Ω_h, где $\hat{u}(x) \in H_N$.

В силу леммы 7 ($v = \hat{u}$): $a(u_N - u, u_N - u) \le a(\hat{u} - u, \hat{u} - u) =$

$$= \int_0^1 [\hat{u}' - u']^2 dx + \int_0^1 q[\hat{u} - u]^2 dx \le \{л.5,2\} \le h^2(1 + ch^2)\int_0^1 [u'']^2 dx \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ {в силу нер-ва (3) из леммы 8} $\Rightarrow \|u_N - u\|_{\mathring{W}_2^1(0,1)} \le M \cdot h$, $M = \left[\frac{3}{2}(1+c)\int_0^1 (u'')^2 dx\right]^{1/2}$

при усл. $h \le 1$, ч.т.д.

Теорема 5 (сходимость в $\|\cdot\|_{C[0,1]}$)

При условиях предыдущ. т-мы $\|u_N - u\|_{C[0,1]} \le M \cdot h$

Док-во:

$$\max_{x \in [0,1]} |u_N - u| \le \{л.6,(1)\} \le \left(\int_0^1 [u_N' - u']^2 dx\right)^{1/2} \le \|u_N - u\|_{\mathring{W}_2^1(0,1)} \le M \cdot h, \text{ ч.т.д.}$$

§4 МКЭ для ур-ия Пуассона

1° Исходная задача

Задача Дирихле для ур-ия Пуассона в прямоуг. $G = \{0 < x_1 < l_1;\ 0 < x_2 < l_2\}$

$$\begin{cases} \Delta u(x) = -f(x), & x=(x_1,x_2)\in G \\ u(x)=0, & x\in \partial G \end{cases} \qquad (4)$$

Здесь $\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа

Опр Пространство Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ назыв. пр-во функций, имеющих квадратично инт-мые первые произв. и обращающиеся в нуль на границе ∂G с нормой: $\|v\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)} = \iint\limits_G \left[v^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2\right] dx_1 dx_2$

Введём в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ скалярное произв. и билин. ф-л:

$$(v,\omega) = \iint\limits_G v(x_1,x_2)\,\omega(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$$

$$a(v,\omega) = \iint\limits_G \left[\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\right] dx_1dx_2$$

Опр Обобщённым реш-ем зад. (4) назыв. ф-ия $u(x_1,x_2)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$, удовл.

$$a(u,v) = (f,v), \quad \forall v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$$

Замечание

Формула Грина: $\iint\limits_G v\,\Delta u\, ds = \int\limits_{\partial G} v \frac{\partial u}{\partial n} dl - \iint\limits_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) ds$

Теорема 6

Обобщенное реш-е $u(x)$ доставл. min в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ ф-лу:

$$J(v) = a(v,v) - 2(f,v) = \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 - 2fv\right] dx_1dx_2$$

Док-во: (~лемма 6)

2° Базисные функции

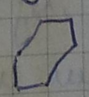
Введём в $\overline{G} = G\cup\partial G$ сетку $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$

$x_{ij} = (x_{1,i}; x_{2,j})$, $x_{1,i} = ih_1$, $x_{2,j} = jh_2$; $N_1h_1 = l_1$, $N_2h_2 = l_2$

$\omega_h = \{x_{ij},\ i=\overline{1,N_1-1},\ j=\overline{1,N_2-1}\}$ — внутр. узлы

$\gamma_h = \{x_{i0}, x_{iN_2}, \cancel{x_{0j}, x_{jN_2}}, x_{0j}, x_{N_1j};\ i=\overline{0,N_1},\ j=\overline{0,N_2}\}$ — граничные узлы

Введём триангуляцию $\overline{G}$ (разбиение на непересекающиеся Δ)

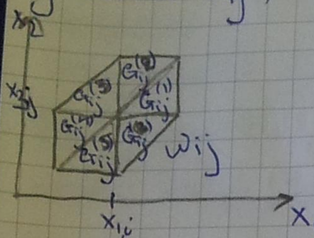


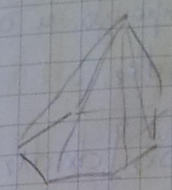
— носитель $\varphi_{ij}(x_1,x_2)$

Сопоставим каждому узлу $x_{ij} \in \omega_h$ ф-ию $\varphi_{ij}(x_1, x_2)$, удовл. след. условиям:

1) $\varphi_{ij}(x_1, x_2)$ – линейна в каждом Δ триангуляции
2) $\varphi_{ij}(x_{1i}, x_{2j}) = 1$
3) $\varphi_{ij}(x_{1k}, x_{2e}) = 0$, $\forall x_{ke} \in \Omega_h : x_{ke} \neq x_{ij}$

Носителем ф-ии $\varphi_{ij}(x_1, x_2)$ (мн-во, где $\varphi_{ij}(x_1,x_2) \neq 0$) является шестиугольник ω_{ij}, составленный из Δков $G_{ij}^{(k)}$, $k = \overline{1,6}$ с общей вершиной.





Лемма 9

Для базисных ф-ий $\varphi_{ij}(x_1, x_2)$ на носителе ω_{ij} справедливо представление:

$$\varphi_{ij}(x_1, x_2) = 1 + \xi_1^{(k)} \cdot \frac{x_1 - x_{1,i}}{h_1} + \xi_2^{(k)} \frac{x_2 - x_{2,j}}{h_2}, \quad (x_1, x_2) \in G_{ij}^{(k)}$$

$$\xi_1^{(k)} = \begin{cases} -1, & k = 1;6 \\ 0, & k = 2;5 \\ 1, & k = 3;4 \end{cases}, \quad \xi_2^{(k)} = \begin{cases} -1, & k = 2;3 \\ 0, & k = 1;4 \\ 1, & k = 5;6 \end{cases}$$

Док-во:

В силу линейности представления достаточно потребовать (н: для $G_{ij}^{(1)}$):

1) $\varphi_{ij}(x_{1,i}, x_{2j}) = 1$ ✓
2) $\varphi_{ij}(x_{1,i+1}, x_{2,j}) = 1 + \xi_1^{(1)} = 0$ ✓
3) $\varphi_{ij}(x_{1,i+1}, x_{2,j+1}) = 1 + \xi_1^{(1)} + \xi_2^{(1)} = 0$ ✓

$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1^{(1)} = -1 \\ \xi_2^{(1)} = 0 \end{cases}$, ч.т.д.

Следствие

Для производных баз. ф-ий $\varphi_{ij}(x_1, x_2)$ на носителе ω_{ij} справедливо представление:

$$\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x_1} = \frac{\xi_1^{(k)}}{h_1}, \quad \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x_2} = \frac{\xi_2^{(k)}}{h_2}; \quad (x_1, x_2) \in G_{ij}^{(k)}, \ k = \overline{1,6}$$

3° Кусочно-линейные восполнения двумерных ф-ий

Пусть $u(x_1, x_2) \in \overset{0}{W}{}_2^1(G)$, $u_{ij} = u(x_{1,i}, x_{2j})$, $x_{ij} \in \Omega_h$

Опр Кусочно-линейным восполнением ф-ии $u(x_1, x_2)$ на сетке Ω_h назыв. ф-ия $\tilde{u}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{N_1 - 1} \sum_{j=1}^{N_2 - 1} u_{ij} \cdot \varphi_{ij}(x_1, x_2)$

р. условием.

я шести

вершиной x_{ij}

ение:

пред.

Замечание

$\hat{u}(x_1,x_2) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$

$\hat{u}(x_{1,i}, x_{2,j}) = u_{ij}$

Линейная оболочка $\{\varphi_{ij}\}$ $H_N \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ – конечномерн. пр-во, $\dim H_N = (N_1-1)(N_2-1)$ $\quad (\hat{u}(x_1,x_2) \in H_N)$

Лемма 10

Для произвольной ф-ии $v \in H_N$, где $v(x_1,x_2) = \sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2-1} v_{ij}\,\varphi_{ij}(x_1,x_2)$, на носителе ω_{ij} справедливо представление:

$$v(x_1,x_2) = v_{ij} + \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1 - x_{1,i}) + \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_2 - x_{2,j}), \quad (x_1,x_2) \in G_{ij}^{(k)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \begin{cases} v_{x_1,ij}, & k=1;6 \\ v_{x_1,i(j+1)}, & k=2 \\ v_{\bar{x}_1,ij}, & k=3;4 \\ v_{\bar{x}_1,i(j-1)}, & k=5 \end{cases}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x_2} = \begin{cases} v_{x_2,ij}, & k=2;3 \\ v_{x_2,(i+1)j}, & k=1 \\ v_{\bar{x}_2,ij}, & k=5;6 \\ v_{\bar{x}_2,(i-1)j}, & k=4 \end{cases}$$

Док-во:

Проведем док-во для $G_{ij}^{(1)}$. В силу финитности:

$v(x_1,x_2) = v_{ij}\cdot\varphi_{ij} + v_{i+1,j}\,\varphi_{i+1,j} + v_{i+1,j+1}\cdot\varphi_{i+1,j+1}$ (рав-во верно для $\forall (x_1,x_2) \in \omega_h$, если положить $v_{ij}|_{\gamma_h} = 0$)

Учтём, что $G_{ij}^{(1)} = G_{i+1,j}^{(3)} = G_{i+1,j+1}^{(5)}$.

$$\varphi_{ij} = 1 - \frac{x_1 - x_{1,i}}{h_1} \qquad \{x_{1,i+1} = x_{1,i} + h_1\}$$

$$\varphi_{i+1,j} = 1 + \frac{x_1 - x_{1,i+1}}{h_1} - \frac{x_2 - x_{2,j}}{h_2} = \frac{x_1 - x_{1,i}}{h_1} - \frac{x_2 - x_{2,j}}{h_2}$$

$$\varphi_{i+1,j+1} = 1 + \frac{x_2 - x_{2,j+1}}{h_2} = \frac{x_2 - x_{2,j}}{h_2}$$

$$v = v_{ij} + \frac{x_1 - x_{1,i}}{h_1}(-v_{ij} + v_{i+1,j}) + \frac{x_2 - x_{2,j}}{h_2}(-v_{i+1,j} + v_{i+1,j+1}) =$$

$$= v_{ij} + v_{x_1,ij}(x_1 - x_{1,i}) + v_{x_2,i+1,j}(x_2 - x_{2j}),$$ ч.т.д.

4° Приближенное решение

Опр Приближенным (по МКЭ) реш-ем задачи (4) назыв. ф-ия $u_N(x_1,x_2) \in H_N$, удовл. рав-ву $a(u_N, v) = (f, v)$, $\forall v \in H_N$

Замечание

Определение равносильно требованиям:

$a(u_N, \varphi_{ij}) = (f, \varphi_{ij})$, $\forall i = \overline{1, N_1 - 1}$, $j = \overline{1, N_2 - 1}$

$u_N = \sum\limits_{i=1}^{N_1-1} \sum\limits_{j=1}^{N_2-1} y_{ij} \varphi_{ij}(x_1, x_2)$, y_{ij} надо найти.

Для отыскания неизв. коэфф. y_{ij} вычислим:

$$a(u_N, \varphi_{ij}) = \iint\limits_{\omega_{ij}} \left(\frac{\partial u_N}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_N}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

$$\iint\limits_{\omega_{ij}} \frac{\partial u_N}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \frac{1}{h_1} \iint\limits_{G_{ij}^{(3)} \cup G_{ij}^{(4)}} \frac{\partial u_N}{\partial x_1} dx_1 dx_2 - \frac{1}{h_1} \iint\limits_{G_{ij}^{(1)} \cup G_{ij}^{(6)}} \frac{\partial u_N}{\partial x_1} dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{1}{h_1} \cdot y_{\bar{x}_1, ij} \cdot h_1 \cdot h_2 - \frac{1}{h_1} \cdot y_{x_1, ij} \cdot h_1 \cdot h_2 = -h_1 h_2 \, y_{\bar{x}_1 x_1, ij}$$

$$\left\{ y_{\bar{x}x, i} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} \right\}$$

Аналогично $\iint\limits_{\omega_{ij}} \frac{\partial u_N}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = -h_1 h_2 \, y_{\bar{x}_2 x_2, ij}$

Учтём, что $(f, \varphi_{ij}) = \iint\limits_G f \varphi_{ij} \, dx_1 dx_2$.

Приходим к СЛАУ:

$$\begin{cases} \Delta_h y_{ij} = -\dfrac{1}{h_1 h_2} \iint\limits_{\omega_{ij}} f \varphi_{ij} \, dx_1 dx_2, & x_{ij} \in \omega_h \\ y_{ij} = 0, & x_{ij} \in \gamma_h \end{cases}$$

$\Delta_h y_{ij} = y_{\bar{x}_1 x_1, ij} + y_{\bar{x}_2 x_2, ij}$ – пятиточечный разностный оператор Лапласа

Замечание

$\frac{1}{h_1 h_2} \iint\limits_{\omega_{ij}} f \varphi_{ij} \, dx_1 dx_2$ – усреднение по носителю ф-ии $f(x_1, x_2)$ с ядром $\varphi_{ij}(x_1, x_2)$, т.к.:

$\varphi_{ij} \geq 0$, $\frac{1}{h_1 h_2} \iint\limits_{\omega_{ij}} \varphi_{ij} \, dx_1 dx_2 = 1$ $\left(V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot H \right)$ $\quad \frac{3h_1h_2}{} = 1$

Задачи к главе I

Задача 1

Доказать ЛНЗ системы ф-ий $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{N}$

Док-во:

Пусть $\exists \alpha_k$, $k = \overline{0, N}$: $\sum\limits_{k=0}^{N} \alpha_k \varphi_k(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = \sum\limits_{k=0}^{N} \alpha_k \varphi_k(x_i) = \sum\limits_{k=0}^{N} \alpha_k \delta_{ki} = \alpha_i$, $\forall i = \overline{0, N}$, ч.т.д.

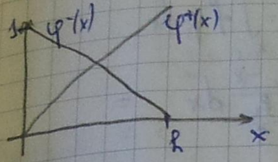
Задача 2

Вычислить интегралы $g_{ij} = \int_a^b \varphi_i \varphi_j \, dx$. Показать, что система $\{\varphi_i\}_{i=0}^{N}$ не является ортогональной в смысле ск. пр. $(v, w) = \int_a^b v w \, dx$.

(g_{ij} – эл-ты м-цы Грама)

Решение:

* вспомогательные ф-ии:



$$\int_0^h (\varphi^-(x))^2 dx = \int_0^h (\varphi^+(x))^2 dx = \int_0^h \left(\frac{x}{h}\right)^2 dx = \frac{h}{3}$$

$$\int_0^h \varphi^+ \cdot \varphi^- dx = \int_0^h \frac{x}{h} \cdot \frac{h-x}{h} dx = \frac{1}{h^2} \int_0^h [xh - x^2] dx =$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \frac{h^2}{2} - \frac{1}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{h}{6}$$

Отличны от нуля: $g_{ii} = \frac{h_i + h_{i+1}}{3}$, $i = \overline{1, N-1}$; $g_{00} = \frac{h_1}{3}$, $g_{NN} = \frac{h_N}{3}$

$$g_{i-1,i} = g_{i,i-1} = \frac{h_i}{6}, \quad i = \overline{1,N}$$

Задача 3

На равномерной сетке $[0,1]$ построить кусочно-лин. восполн. ф-ии $u(x) = x(1-x)$.

Оценить средне квадратичное отклонение $\left(\int_0^1 [\tilde{u} - u]^2 dx\right)^{1/2}$, $\left(\int_0^1 [\tilde{u}' - u']^2 dx\right)^{1/2}$

Решение:

$x_i = ih$, $i = \overline{0,N}$, $Nh = 1$

$u(x_i) = u_i = ih(1 - ih)$

$\tilde{u}(x) = u_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + u_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i}$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,N}$

Для оценок воспользуемся леммами.

$u''(x) = -2$;

Ответ: $\left(\int_0^1 [\tilde{u} - u]^2 dx\right)^{1/2} \le h^2 \left(\int_0^1 [u''(x)]^2 dx\right)^{1/2} = 2h^2$

$$\left(\int_0^1 [\tilde{u}' - u']^2 dx\right)^{1/2} \le 2h$$

Задача 4

Построить приближенное реш-е МКЭ на равном. сетке для задачи:

$$\begin{cases} u''(x) = -x, & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Решение:

Замечание

$$\begin{cases} u''(x) - q(x)u'(x) = -f(x), \ 0<x<1 \\ u(0) - u(1) = 0 \end{cases}$$ — для такой задачи уже построили

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^{N} y_i \varphi_i(x)$$

$$\begin{cases} y_{\bar{x},i} - y_{x,i} + l_i y_{i-1} + m_i y_i + n_i y_{i+1} = F_i, \quad i=\overline{1,N-1} \\ y_0 = y_N = 0 \end{cases}$$

$$l_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} q\varphi_{i-1}\varphi_i\,dx, \quad m_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} q\varphi_i^2\,dx, \quad n_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} q\varphi_i\varphi_{i+1}\,dx, \quad F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f\varphi_i\,dx$$

Вычислим $\tilde{F}_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f\varphi_i\,dx = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cdot \underbrace{\frac{x-x_{i-1}}{h}}_{s}dx + \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\underbrace{\frac{x_{i+1}-x}{h}}_{s}dx =$

$$= \int_0^1 [f(x_{i-1}+sh) + f(x_{i+1}-sh)]\,s\,ds = \int_0^1 g(s)\cdot s\,ds$$

$$g(s) = f(x_i-(1-s)h) + f(x_i+(1-s)h)$$

При $f(x)=x$: $g(s) = 2x_i \to \tilde{F}_i = 2x_i\int_0^1 s\,ds = x_i$

Ответ:
$$\begin{cases} u_N(x) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i\varphi_i(x) \\ y_{\bar{x}x,i} = -x_i, \quad i=\overline{1,N-1} \\ y_0 = y_N = 0 \end{cases}$$

Задача 5

↳ задача 4 с $u''(x) = -x^2$

Решение:

$$g(s) = (x_i-(1-s)h)^2 + (x_i+(1-s)h)^2 = 2(x_i^2 + (1-s)^2h^2)$$

$$\tilde{F}_i = \int_0^1 g(s)\,s\,ds = 2\int_0^1 [x_i^2 s + h^2 \cancel{s}(s-2s^2+s^3)]\,ds = x_i^2 + 2h^2\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right] =$$
$$= x_i^2 + h^2\frac{6-8+3}{6} = x_i^2 + \frac{h^2}{6}$$

Ответ:
$$\begin{cases} u_N = \sum_{i=1}^{N-1} y_i\varphi_i(x) \\ y_{\bar{x}x,i} = -\left(x_i^2 + \frac{h^2}{6}\right) \\ y_0 = y_N = 0 \end{cases}$$

Задача 6

Построить приближенное реш-е МКЭ на неравномерной сетке для

$$\begin{cases} u''(x) = 2, \quad x \in (0,1) \\ u(0) = 0, \ u(1) = 1 \end{cases}$$

Решение:

Будем искать $u(x) = x + v(x)$, $\begin{cases} v''(x) = 2, & x \in (0,1) \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\cdot\varphi_i(x)\,dx = -2\,\frac{h_i + h_{i+1}}{2} = -2\hbar_i$$

Ответ: $\begin{cases} u_N(x) = x + \sum\limits_{i=1}^{N-1} y_i\varphi_i(x) \\ \cancel{y_{\bar{x}}}\ \ \dfrac{y_{x,i} - y_{\bar{x},i}}{\hbar_i} = 2, \quad i = \overline{1, N-1} \\ y_0 = y_N = 0 \end{cases}$

Задача 7

~задача 6 для (показать вклад q)

$$\begin{cases} u''(x) - qu(x) = -f(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0, & q = const \end{cases}$$

Решение:

Учитывая з.2: $l_i = q\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{i-1}\varphi_i\,dx = \frac{h_i}{6}\cdot q$

$m_i = q\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i^2\,dx = \frac{h_i + h_{i+1}}{3}\cdot q$

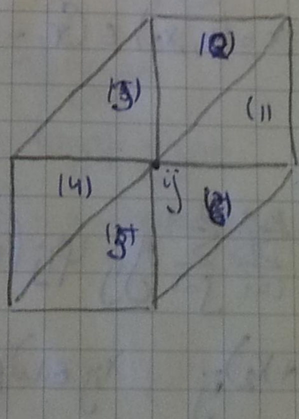
$n_i = q\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i\varphi_{i+1}\,dx = \frac{h_{i+1}}{6}\cdot q$

Ответ: $\begin{cases} u_N(x) = \sum\limits_{i=1}^{N-1} y_i\varphi_i(x) \\ \dfrac{y_{x,i} - y_{\bar{x},i}}{\hbar_i} - \dfrac{q}{6\hbar_i}\left(y_{i-1}h_i + 4y_i\hbar_i + y_{i+1}h_{i+1}\right) = -\dfrac{1}{\hbar_i}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f\varphi_i\,dx \\ y_0 = y_N = 0 \end{cases}$

Задача 8

Выписать выражение для базисных ф-ий, отличных от 0 в треуг. $G_{i,j}^{(k)}$, $k = \overline{1,6}$

Решение:



Выпишем для $\Delta\ G_{i,j}^{(4)}$

$$G_{i,j}^{(4)} = G_{i-1,j}^{(6)} = G_{i-1,j-1}^{(2)}$$

$$\varphi_{ij} = 1 + \frac{x_1 - x_{1,i}}{h_1}$$

$$\varphi_{i-1,j} = 1 - \frac{x_1 - x_{1,i-1}}{h_1} + \frac{x_2 - x_{2,j}}{h_2}$$

$$\varphi_{i-1,j-1} = 1 - \frac{x_2 - x_{2,j-1}}{h_2}$$

Ответ: $\varphi_{ij} = - \text{ и } -$

$\varphi_{i-1,j} = -\frac{x_1 - x_{1,i}}{h_1} + \frac{x_2 - x_{2,j}}{h_2}$

$\varphi_{i-1,j-1} = -\frac{x_2 - x_{2,j}}{h_2}$

Задача 9

Вычислить интегралы $F_{ij} = \frac{1}{h_1 h_2} \iint\limits_{\omega_{ij}} f \varphi_{ij} \, dx_1 dx_2$

а) $f = 1$

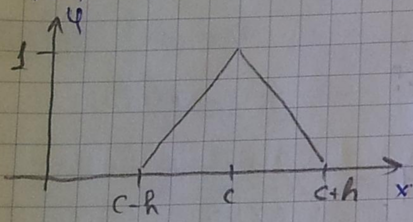
б) $f(x_1, x_2) = x_1$

в) $f(x_1, x_2) = x_2$

Решение:

а) $F_{ij} = \frac{1}{h_1 h_2} \iint\limits_{\omega_{ij}} \varphi_{ij} \, dx_1 dx_2 = \{ V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot 1 \} = \frac{1}{h_1 h_2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 h_1 h_2 \cdot 1 = 1$

б), в) ✗ вспомогат. ф-ию:



$$\int\limits_{c-h}^{c+h} x \varphi(x) dx = \{ t = x - c \} = c \int\limits_{-h}^{h} \varphi(t+c) dt + \underbrace{\int\limits_{-h}^{h} \overset{\text{неч.}}{t} \, \overset{\text{четн.}}{\varphi(t+c)} dt}_{=0} = c \int\limits_{c-h}^{c+h} \varphi(x) dx$$

Ответ: а) 1

б) $x_{1,i}$

в) $x_{2,j}$

Задача 10

Выписать решение МКЭ на равном. сетке для:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = -(x_1 + x_2), & x = (x_1, x_2) \in G = \{ 0 < x_1 < l_1, \ 0 < x_2 < l_2 \} \\ u(x) = 0, & x \in \partial G \end{cases}$$

Решение: см. задачу 9

Ответ:
$$\begin{cases} u_N(x_1, x_2) = \sum\limits_{i=1}^{N_1 - 1} \sum\limits_{j=1}^{N_2 - 1} y_{ij} \varphi_{ij}(x_1, x_2) \\ \Delta_h y_{ij} = -(x_1 + x_2)_{ij}, & x_{ij} \in \omega_h \\ y_{ij} = 0, & x_{ij} \in \gamma_h \end{cases}$$

Глава II. Принцип максимума для разностных схем

§1 Разностная аппроксимация задачи Дирихле для ур-ия Пуассона

Рассм. задачу Дирихле в пр-ке $G = \{0 < x_1 < l_1,\ 0 < x_2 < l_2\}$

$$\begin{cases} \Delta u(x) = -f(x), & x \in (x_1, x_2) \in G \\ u(x) = \mu(x), & x \in \partial G \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ - оператор Лапласа

Замечание

Для реш-ия задачи (1) $u(x) \in \overline{C}(\overline{G})$: $u(x) \not\equiv const$ при $f(x) \equiv 0$ (ур-ие Лапласа) : $u(x)$ может достигать макс. по модулю значения только на границе ∂G. (принцип max)

Введём в $\overline{G}$ разностную сетку $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$:

$x_{ij} = (x_{1i}, x_{2j})$, $x_{1i} = ih_1$, $x_{2j} = jh_2$, $h_1 N_1 = l_1$, $h_2 N_2 = l_2$

$\omega_h = \{x_{ij},\ i = \overline{1, N_1-1},\ j = \overline{1, N_2-1}\}$

$\gamma_h = \{x_{i0}, x_{iN_2}, x_{0j}, x_{N_1 j},\ i = \overline{1, N_1-1},\ j = \overline{1, N_2-1}\}$

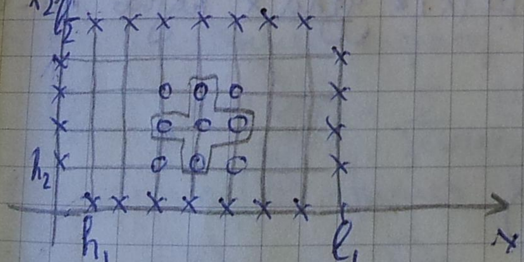
По-прежнему будем обозначать:

$$y_{\bar{x}_1 x_1, ij} = \frac{y_{i-1,j} - 2y_{ij} + y_{i+1,j}}{h_1^2}, \qquad y_{\bar{x}_2 x_2, ij} = \frac{y_{i,j-1} - 2y_{i,j} + y_{i,j+1}}{h_2^2}$$

Сопоставим (1) разн. схему:

$$\begin{cases} \Delta_h y_{ij} = -f(x_{ij}), & x_{ij} \in \omega_h \\ y_{ij} = \mu(x_{ij}), & x_{ij} \in \gamma_h \end{cases} \qquad (2)$$

$\Delta_h y_{ij} = (y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2})_{ij}$ - пятиточечный разн. оператор Лапласа



"x" - гр. узлы

"o" - внутр. узлы

"✚" - шаблон ур-ий

Перепишем $\Delta_h y_{ij} = -f_{ij}$ в виде:

$$\left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}\right) y_{ij} = \frac{1}{h_1^2}(y_{i-1,j} + y_{i+1,j}) + \frac{1}{h_2^2}(y_{i,j+1} + y_{i,j-1}) + f_{ij}$$

Введем обозначения:

$x = x_{ij}$ — центральный узел шаблона

$Ш(x) = \{x, x_{i\pm1,j}, x_{i,j\pm1}\}$ — шаблон ур-ий

$Ш'(x) = Ш(x) \setminus \{x\}$ — окрестность узла x

$A(x) = \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}$, $B(x, x_{i\pm1,j}) = \frac{1}{h_1^2}$, $B(x, x_{i,j\pm1}) = \frac{1}{h_2^2}$, $F(x) = f_{ij}$

Ур-ие примет вид:

$$A(x)\, y(x) = \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi)\, y(\xi) + F(x), \quad x \in \omega_h$$

Аналогично можно записать ур-ие $y|_{\partial G} = \mu$:

$A(x)\, y(x) = F(x)$, $x \in \gamma_h$ (здесь $Ш'(x) = 0$, $A(x) = 1$, $F(x) = \mu(x)$)

Будем исследовать именно общую форму разн. ур-ий.

Замечание

В таком виде (далее каноническом) могут быть записаны схемы из широкого класса.

Замечание

Выполнены след. условия:

$A(x) > 0$, $B(x,\xi) > 0$, где $\xi \in Ш'(x)$, $D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi) \geq 0$, $\forall x \in \Omega_h$

§2 Принцип максимума

Опр Разностной сеткой Ω_h назыв. ~~из~~ непустое конечное мн-во точек n-мерного евклидова пр-ва.

Опр Шаблоном $Ш(x)$ узла x будем называть произвольное подмн-во сетки Ω_h, ее содержащее x. Окрестность $Ш'(x)$ узла x назыв. мн-во $Ш'(x) = Ш(x) \setminus \{x\}$.

Замечание

Может быть, что $Ш'(x) = \varnothing$ (это норма)

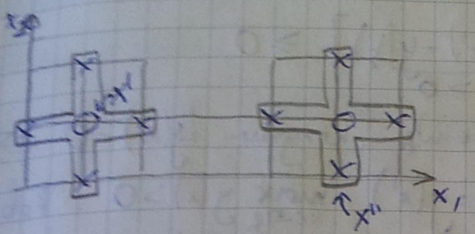
Опр Пусть сеточные ф-ии $A(x)$, $B(x,\xi)$, $\xi \in Ш'(x)$, $F(x)$ определены для всех $x \in \Omega_h$. Разностной схемой в канонической форме записи назыв. СЛАУ отн-но неизвестной ф-ии $y(x)$, определенной на Ω_h:

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in \Omega_h \qquad (3),$$
если каждому узлу $x \in \Omega_h$ сопоставлен один, и только один, шаблон и одно, и только одно, уравнение (=> число ур-ий = числу узлов)

Опр Узел $x \in \Omega_h$ назыв. внутренним, если $Ш'(x) \neq \emptyset$, в противном случае граничным.

Опр Сетка Ω_h назыв. связной, если $\forall x', x'' \in \Omega_h : Ш'(x') \neq \emptyset$ =>
=> $\exists x_i \in \Omega_h, i = \overline{1,m} : x_1 \in Ш'(x'), x_2 \in Ш'(x_1), \dots, x_m \in Ш'(x_{m-1}), x'' \in Ш'(x_m)$
(~по шаблонам можно дойти от x' к x'')

Пример (несвязная сетка)



От x' по шаблонам до x'' не доберёмся. Тут задача разваливается на 2 подзадачи => несвязность ~ разделение задачи на части.

Замечание

Если для $\forall x' \in \Omega_h$ $Ш'(x') = \emptyset$, то считаем сетку формально несвязной, а система (3) превращается в независимые ур-ия: $A(x)y(x) = F(x)$, $\forall x \in \Omega_h$.

Далее будем рассматривать только связные сетки. (задачи на несвязных либо тривиальны, либо распадаются на несколько задач на связных сетках).

Опр В узле $x \in \Omega_h$ выполняются условия положительности коэфф-ов, если
$$A(x) > 0, \ B(x,\xi) > 0, \ \xi \in Ш'(x), \ D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi) \geq 0, \qquad (4)$$
Введём линейный оператор L: $Ly(x) = A(x)y(x) - \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi)y(\xi)$ или
$$Ly(x) = D(x)y(x) + \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi)\,[y(x) - y(\xi)]$$
Тогда схема (3) примет вид:
$$Ly(x) = F(x), \quad x \in \Omega_h$$

Замечание

Далее будем считать, что $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$, где ω_h — мн-во внутр., а γ_h — мн-во граничных узлов (вполне может быть, что $\gamma_h = \emptyset$)

Теорема 1 (принцип максимума)
Пусть $y(x) \not\equiv const$ определена на связной сетке Ω_h, условие положит. коэфф. (4) выполн. $\forall x \in \omega_h$. Тогда если $Ly(x) \le 0 \ (\ge 0)$ для $\forall x \in \omega_h$, то $y(x)$ не может принимать макс. полож. (мин. отриц.) значения на ω_h среди всех своих значений на Ω_h.

Док-во: (от противного)
Пусть $\exists x' \in \omega_h : y(x') = \max\limits_{x \in \Omega_h} y(x) > 0$. Т.к. $y(x) \not\equiv const$, то $\exists x'' \in \Omega_h$, $y(x'') < y(x')$. В силу связности Ω_h $\exists x_i \in \omega_h, i=\overline{1,m}$: $x_1 \in Ш'(x')$, $x_2 \in Ш'(x_1), \dots, x_m \in Ш'(x_{m-1})$, $x'' \in Ш'(x_m)$

$$* \ Ly(x') = \underbrace{D(x')}_{\ge 0}\underbrace{y(x')}_{>0} + \sum_{\xi \in Ш'(x')} \underbrace{B(x',\xi)}_{>0}\underbrace{[y(x') - y(\xi)]}_{\ge 0} \ge 0$$

Учитывая, что по условию $Ly(x) \le 0$, $\forall x \in \omega_h$, получим $Ly(x') = 0$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow y(\xi) = y(x')$, $\forall \xi \in Ш'(x')$ $\Rightarrow$ $y(x_1) = y(x') = \max\limits_{x \in \Omega_h} y(x) > 0$. Повторяя рассуждения для узла x_1, получим, что $y(x_2) = y(x_1) = y(x')$ и т.д. $\Rightarrow$
$\Rightarrow y(x'') = y(x_m) = \dots = y(x_1) = y(x')$, но $y(x'') < y(x')$?!!, ч.т.д.

§3 Следствия принципа максимума

Далее будем считать Ω_h связным и введём условие:
$\exists x_0 \in \Omega_h : D(x_0) > 0$ (5)

Теорема 2 (монотонность оператора L)
Пусть выполнены условия (4) для $\forall x \in \Omega_h$ и усл. (5). Тогда если $Ly(x) \le 0 \ (\ge 0)$, $\forall x \in \Omega_h$, то $y(x) \le 0 \ (\ge 0)$, $\forall x \in \Omega_h$.

Док-во:
1) $\exists\, y(x) \not\equiv const$ на Ω_h. От противного:
Пусть $\exists x \in \Omega_h : y(x) > 0 \Rightarrow \exists x' \in \Omega_h : y(x') = \max\limits_{x \in \Omega_h} y(x) > 0$
Если $x' \in \omega_h$, то это противоречит принципу max.
Если $x' \in \gamma_h$, то $Ly(x') = \{$узел границы$\} = \underbrace{A(x')}_{>0}\underbrace{y(x')}_{>0} > 0$, но $Ly(x) \le 0$?!! $\Rightarrow y(x) \le 0$, $\forall x \in \Omega_h$

2) $\exists\, y(x) = const$. Рассм. узел x_0 из (5):
$$Ly(x_0) = \underbrace{D(x_0)}_{>0} y(x_0) + \sum_{\xi \in Ш(x_0)} B(x_0,\xi)\underbrace{[y(x_0) - y(\xi)]}_{=0, \text{ т.к. } y = const} \le 0 \Rightarrow y(x_0) \le 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{y = const\} \Rightarrow y(x) \le 0 \quad , \forall x \in \Omega_h$, ч.т.д.

Опр Схема называется монотонной, если усл-ие положит. коэфф. (4) выполнены для $\forall x \in \Omega_h$. В противном случае схема назыв. немонотонной.

Теорема 3 ($\exists!$ решения)

Пусть выполн. усл-я (4) $\forall x \in \Omega_h$ и усл (5). Тогда реш-е задачи $Ly(x) = F(x)$, $x \in \Omega_h$, существует и единственно.

Док-во:

Достаточно показать, что однородное ур-ие $Ly(x) = 0, \forall x \in \Omega_h$ имеет только тривиальное реш-е.

$$Ly(x) = 0 \iff \begin{cases} Ly(x) \le 0 \\ Ly(x) \ge 0 \end{cases} \overset{\text{монот. } L}{\iff} \begin{cases} y(x) \le 0 \\ y(x) \ge 0 \end{cases} \iff y(x) = 0, \forall x \in \Omega_h, \text{ ч.т.д.}$$

Теорема 4 (сравнения)

Пусть выполн. усл. (4) и усл. (5). Тогда, если $|F(x)| \le \bar{F}(x)$, $\forall x \in \Omega_h$, то выполн.: $|y(x)| \le \bar{y}(x)$, $\forall x \in \Omega_h$, где $Ly(x) = F(x), x \in \Omega_h$; $L\bar{y}(x) = \bar{F}(x), x \in \Omega_h$.

Док-во:

$\forall\ v(x) = \bar{y}(x) - y(x), \quad w(x) = \bar{y}(x) + y(x)$

$$\begin{cases} Lv(x) = \bar{F}(x) - F(x) \ge 0 \\ Lw(x) = \bar{F}(x) + F(x) \ge 0 \end{cases} \overset{\text{монот. } L}{\Rightarrow} \begin{cases} v(x) \ge 0 \\ w(x) \ge 0 \end{cases} \iff -\bar{y}(x) \le y(x) \le \bar{y}(x) \text{ , т.е.}$$

$|y(x)| \le \bar{y}(x)$, ч.т.д.

Пусть далее $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$, где $\gamma_h \ne \emptyset$ (рассм. краевые задачи). Тогда разн. схема (3) может быть переписана в виде 1ой кр. задачи:

$$\begin{cases} Ly(x) = F(x) \quad , x \in \omega_h \\ y(x) = \mu(x) \quad , x \in \gamma_h \end{cases}$$

если $A(x) = 0$, то ур-ия просто нет

Здесь $\mu(x) = F(x)/A(x) \quad (A(x) > 0)$

Для краевой задачи усл. (5) выполнено автоматически ($D(x) = 1$, $x \in \gamma_h$)

Следствие

Пусть выполнены усл-ия (4) $\forall x \in \omega_h$. Тогда:

1) Решение краевой задачи $\exists!$

2) Если $|F(x)| \le \bar{F}(x)$, $\forall x \in \omega_h$, $|\mu(x)| \le \bar{\mu}(x)$, $\forall x \in \gamma_h$, то $|y(x)| \le \bar{y}(x)$, $\forall x \in \Omega_h$, где $Ly(x) = F(x), x \in \omega_h$, $y(x) = \mu(x), x \in \gamma_h$; $L\bar{y}(x) = \bar{F}(x), x \in \omega_h$, $\bar{y}(x) = \bar{\mu}(x), x \in \gamma_h$

3) Для решения задачи $Ly(x) = 0, x \in \omega_h$, $y(x) = \mu(x), x \in \gamma_h$ справедлива оценка: $\max\limits_{x \in \omega_h} |y(x)| \le \max\limits_{x \in \gamma_h} |\mu(x)|$ (следует из принц. max)

§4 Устойчивость и сходимость разн. задачи Дирихле

Вернемся к рассмотрению задачи:

$$\begin{cases} -\Delta_h y = f(x), & x \in \omega_h \\ y(x) = \mu(x), & x \in \gamma_h \end{cases}$$

Ранее показано, что $Ly(x) = -\Delta_h y(x) = A(x) y(x) - \sum\limits_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi) y(\xi)$,

$A(x) = \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}$, $B(x, x_{i\pm1,j}) = \frac{1}{h_1^2}$, $B(x, x_{i,j\pm1}) = \frac{1}{h_2^2}$

В силу следствия 1) решение задачи $\exists!$ (усл-е (4) выполн.)

Представим это реш-е в виде: $y(x) = y_\mu(x) + y_F(x)$, где:

$$\begin{cases} Ly_\mu(x) = 0, & x \in \omega_h \\ y_\mu(x) = \mu(x), & x \in \gamma_h \end{cases}, \quad \begin{cases} Ly_F(x) = F(x), & x \in \omega_h \\ y_F(x) = 0, & x \in \gamma_h \end{cases}$$

(в силу линейности L и $\exists!$ реш-я это можно сделать)

Теорема 5 (устойчивость по гр. усл-ям)

$$\|y_\mu(x)\|_{C(\Omega_h)} \le \|\mu(x)\|_{C(\gamma_h)}$$

Док-во: (это переписанное следствие 3))

Теорема 6 (устойчивость по пр. части)

$$\|y_F(x)\|_{C(\Omega_h)} \le \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|F(x)\|_{C(\omega_h)}$$

Док-во:

$\nless$ мажорирующую ф-ю $\bar{y}(x) = k(l_1^2 + l_2^2 - x_1^2 - x_2^2)$, $k = const$

Заметим, что $(x^2)_{\bar{x}x,i} = \frac{(x_i+h)^2 - 2(x_i)^2 + (x_i-h)^2}{h^2} = 2$, $(c)_{\bar{x}x,i} = 0$

$\Rightarrow L\bar{y}(x) = -(\bar{y}_{\bar{x}_1 x_1} + \bar{y}_{\bar{x}_2 x_2})_{ij} = 4k$

Положим $k = \frac{1}{4} \|F(x)\|_{C(\omega_h)}$. Тогда $\bar{y}(x)$ явл. реш-ем задачи:

(x), $x \in \gamma_h$;

$$\begin{cases} L\bar{y}(x) = \|F(x)\|_{C(\omega_h)} = \bar{F}(x), & x \in \omega_h \\ \bar{y}(x) = \bar{\mu}(x), & x \in \gamma_h \end{cases}, \quad \bar{\mu}(x) > 0, \ \forall x \in \gamma_h \text{ (угл. точки не входят в сетку)}$$

В силу теоремы сравнения ($|F(x)| \le \bar{F}(x)$, $\bar{\mu}(x) > 0$):

$$\|y_F\|_{C(\Omega_h)} \le \|\bar{y}\|_{C(\Omega_h)} \le \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|F(x)\|_{C(\omega_h)}, \quad \text{ч.т.д.}$$

наверняка

Теорема 7 (устойчивость разн. задачи Дирихле)

$$\|y(x)\|_{C(\Omega_h)} \le \|\mu(x)\|_{C(\gamma_h)} + \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|F(x)\|_{C(\omega_h)}$$

Док-во: (т. 5, 6 + модуль суммы $\le$ суммы модулей)

Теорема 8 (сходимость разн. задачи Дирихле)

Пусть $u(x)$ – реш-е дифф. задачи (1), $y(x)$ – реш. задачи (2). Тогда $\|y - u\|_{C(\Omega_h)} \le M(h_1^2 + h_2^2)$, где M не зависит от h_1, h_2.

Док-во:

Пусть $z_{ij} = y_{ij} - u(x_{ij})$ – погрешность разн. задачи

Подставим в ур-ие $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \Delta_h z_{ij} = -\psi_{ij}, & x_{ij} \in \omega_h \\ z_{ij} = 0, & x_{ij} \in \gamma_h \end{cases}, \quad \psi_{ij} = (u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2} + f)_{ij} \text{ – погрешность аппроксимации на реш-ии дифф. задачи}$$

Напомним, что:

$$(v(x))_{\bar{x}x,i} = \frac{v(x_{i-1}) - 2v(x_i) + v(x_{i+1})}{h^2} = \{x = x_i\} = \frac{1}{h^2}\left(v - hv' + \frac{h^2}{2}v'' - \frac{h^3}{6}v''' + \frac{h^4}{24}v^{(4)} - 2v + v + hv' + \frac{h^2}{2}v'' + \frac{h^3}{6}v''' + \frac{h^4}{24}v^{(4)}\right) + \underline{O}(h^4) = v''(x_i) + \frac{h^2}{12}v^{(4)}(x_i) + \underline{O}(h^4)$$

Отсюда
$$\psi_{ij} = \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_{ij}) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_{ij}) + f(x_{ij})}_{=0 \text{ (u – реш-е!)}} + \frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} + \underline{O}(h_1^4 + h_2^4)$$

При достаточной гладкости $u(x_1, x_2)$ имеем:

$$\|\psi\|_{C(\omega_h)} \le M_1 (h_1^2 + h_2^2),$$ где M_1 – общ. оценка для модулей произв.

В силу устойчивости задачи для z_{ij}:

$$\|z\|_{C(\Omega_h)} \le \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|\psi\|_{C(\omega_h)} \Rightarrow \|y - u\|_{C(\Omega_h)} \le M(h_1^2 + h_2^2),$$ где $M = \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \cdot M_1$, ч.т.д.

Замечание

Данное утверждение является следствием более общей теоремы.

Теорема 9

В случае лин. разн. оператора из аппроксимации и устойчивости следует сходимость.

Док-во:

Пусть $\exists$ дифф. задача:

$lu = f, \; x \in G$

и аппроксимирующая её разн. схема:

$Ly = F, \; x \in \Omega_h, \; \Omega_h \subset G, \; \operatorname{diam} \Omega_h = h$

$\psi_e = (lu)_h - Lu_h$ — погрешность аппроксимации дифф. оператора разностным (h обозначает проекцию на сетку)

$\psi_f = F - f_h$ — погрешность аппрокс. правой части

$z = y - u_h$ — погрешность реш-ия разн. задачи

Подставим в ур-ия:

$Lz = F - Lu_h = F - f_h + \overbrace{(lu)_h}^{=0} - Lu_h = \psi_f + \psi_e = \psi$ — погрешность аппроксимации на реш-ии дифф. задачи.

Аппроксимация с порядком k означает, что $\|\psi\|_{\Omega_h} \le M \cdot h^k$

Устойчивость означает, что $\|z\|_{\Omega_h} \le M_1 \cdot \|\psi\|_{\Omega_h}$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow \|z\|_{\Omega_h} \le \tilde{M} h^k$, т.е. есть сходимость с порядком k, ч.т.д.

§5 Примеры исследования разн. схем

Замечание

Монотонность схемы зачастую является дост. усл-ем её корректности (гарантирует $\exists!$ реш-е кр. задачи и уст. по КУ)

Пример 1 (схема с весами для ур-ия теплопроводности)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, \; 0 < t < T \\ u(0,t) = \mu_1(t) & \\ u(1,t) = \mu_2(t), & 0 \le t \le T \\ u(x,0) = u_0(x), & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Введём сетку $\Omega_{h\tau} = \Omega_h \times \omega_\tau$

$\Omega_h = \{x_i = ih,\ i=\overline{0,N},\ Nh=1\}$

$\omega_h = \{x_i,\ i=\overline{1,N-1}\},\quad \omega_\gamma = \{x_0, x_N\}$

$\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n=\overline{0,K},\ K\tau = T\}$

$$\begin{cases} \dfrac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau} = \sigma y^{n+1}_{\bar{x}x,i} + (1-\sigma)y^n_{\bar{x}x,i}, & i=\overline{1,N-1},\ n=\overline{0,K-1} \\ y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}),\ y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}), & y_i^0 = u_0(x_i) \end{cases}$$

Здесь $\sigma \in \mathbb{R}$ – вес схемы

Приведём схему к канон. виду:

$$(1+2\sigma\gamma)y_i^{n+1} = (1-2(1-\sigma)\gamma)y_i^n + \sigma\gamma(y_{i-1}^{n+1}+y_{i+1}^{n+1}) + (1-\sigma)\gamma(y_{i-1}^n + y_{i+1}^n),$$

$\gamma = \frac{\tau}{h^2}$

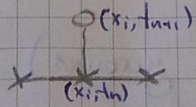
<u>Условия полож. коэфф. (монотонности)</u>:

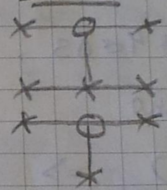
$0<\sigma<1,\quad \sigma > 1 - \frac{1}{2\gamma}$

<u>В случае равенств шаблон меняется</u>, однако монотонность сохраняется, т.е.:

$$\boxed{0 \le \sigma \le 1,\quad \sigma \ge 1 - \frac{1}{2\gamma}}$$

<u>Имеем</u>:

1) Явная схема $\sigma = 0$  , $\tau \le \frac{h^2}{2}$

2) Симметр. схема 2го порядка $\sigma = \frac{1}{2}$  , $\tau \le h^2$

3) Чисто-неявная схема $\sigma = 1$, монотонна для $\forall \tau, h$

<u>Пример 2</u> (метод гармоник)

Покажем, что явная схема $(\sigma=0)$ неустойчива при $\tau > \frac{h^2}{2}$.

$$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau} = y^n_{\bar{x}x,i}$$

$\exists$ частное реш-е вида:

$y_i^n = q^n e^{ih\varphi I}_{x_i}$, I – мнимая единица.

При $n=0$: $y_i^0 = \cos(\varphi \cdot x_i) + I\sin(\varphi \cdot x_i)$ – гармоники в зависимости от φ, где φ опр. частоту гармоник ($q \to$ амплитуду)

Подставим в ур-ие:

$$\frac{q-1}{\tau} = \frac{e^{-h\varphi I} - 2 + e^{h\varphi I}}{h^2} = \frac{-2(1-\cos h\varphi)}{h^2}$$

$\boxed{q = 1 - 4\gamma \sin^2 \frac{h\varphi}{2}}$

Если $|q| > 1$ => неогранич. рост решения, но нач. усл-ия норм.

Если при некотором φ $|q| > 1$, то ограниченное при $n = 0$ реш-е неограниченно возрастает (по модулю) при $n \to \infty$, но это противоречит условию устойчивости по нач. данным:

$$\|y^n\|_{C(\omega_h)} \le M \cdot \|y^0\|_{C(\omega_h)}$$

В данном случае $|q| > 1$, если $4\gamma > 2$ => $\tau > \frac{h^2}{2}$.

Замечание

Метод гармоник даёт достаточное усл-е неустойчивости и необходимое усл-ие устойчивости ($|q| \le 1$)

Исследуем устойчивость методом гармоник для схемы с весами:

$$q = 1 - (\sigma q + (1-\sigma)) \cdot 4\gamma \sin^2 \frac{h\varphi}{2}, \quad \sin^2 \frac{h\varphi}{2} = s \in [0,1]$$

$$q(1 + 4\gamma s \cdot \sigma) = 1 - (1-\sigma) 4\gamma s$$

$$q = \frac{1 - (1-\sigma)4\gamma s}{1 + 4\gamma\sigma s} = 1 - \frac{4\gamma s}{1 + 4\sigma\gamma s}$$

Решим нер-во $|q| \le 1$ (необх. усл-е устойч.)

$$|1 - 4(1-\sigma)\gamma s| \le 1 + 4\sigma\gamma s$$

$$\begin{cases} -4\gamma s \le 0 & \text{- верно} \\ 2 - 4(1-2\sigma)\gamma s \ge 0 \end{cases} \Rightarrow 1 - 2\sigma \le \frac{1}{2\gamma} \quad (s \in [0,1])$$

Имеем: $\boxed{\sigma \ge \frac{1}{2} - \frac{1}{4\gamma}}$ => начиная с $\sigma = \frac{1}{2}$ все "хорошие"

Замечание

Сравнивая с усл-ем монотонности $\sigma \ge 1 - \frac{1}{2\gamma}$, приходим к выводу, что монотонность - более жесткое требование, чем устойчивость.

=> не всякая уст. схема будет монотонной

Пример 3 (схема с перем. коэфф.)

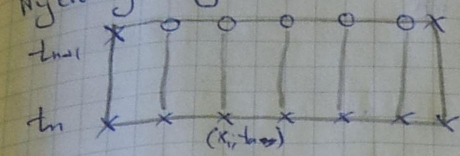
$$\rho_i^n \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = (a y_{\bar{x}})^n_{x,i}, \quad \rho_i^n \ge c_3 > 0, \quad 0 < c_1 \le a_i^n \le c_2$$

$$\frac{\rho_i^n}{\tau} y_i^{n+1} = \left(\frac{\rho_i^n}{\tau} - \frac{a_i^n + a_{i+1}^n}{h^2}\right) y_i^n + \frac{a_i^n}{h^2} y_{i-1}^n + \frac{a_{i+1}^n}{h^2} y_{i+1}^n$$

Усл. монот.: $\tau \le \frac{\rho_i^n}{a_i^n + a_{i+1}^n} \cdot h^2$ => $\tau \le \frac{c_3}{c_2} \cdot \frac{h^2}{2}$

Покажем устойчивость по нач. данным при выполн. последнего условия:

Пусть $y_0^{n+1} = y_N^{n+1} = 0$



"x" – известные значения
"o" – неизв.

В силу следствия 3 (из принц. max; используем для + КУ однородн., усл-ия полож. коэфф. вып.):

$\max\limits_{i=\overline{1,N-1}} |y_i^{n+1}| \le \max\limits_{i=\overline{1,N-1}} |y_i^n|$

Имеем: $\|y^n\|_{C(\bar\omega_h)} \le \|y^{n-1}\|_{C(\bar\omega_h)} \le \dots \le \|y^0\|_{C(\bar\omega_h)}$, что и есть устойчивость по нач. данным с $M=1$ $\Rightarrow$ усл-ия монот. гарантируют уст-ть по нач. данным.

<u>Пример 4</u> (принцип замороженных коэфф.)

В предыдущей схеме положим $\rho_i^n \equiv \rho = const$, $a_i^n \equiv a = const$ (заморозка коэфф.). Получим:

$$\cancel{\rho}\,\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau'} = y^n_{\bar{x}x,i}, \quad \text{если } \tau' = \tau\frac{a}{\rho}$$

Получим обычную явную схему, про кот. все известно.

Схема устойчива, если $\tau' \le \frac{h^2}{2}$, т.е. $\tau \le \frac{\rho}{a}\cdot\frac{h^2}{2}$

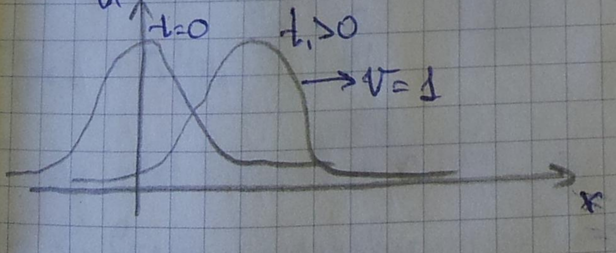
Теперь разморозим коэфф-ты $\Rightarrow$ требуется вып. нер-ва при всех возможных ρ_i^n, a_i^n $\Rightarrow$ $\tau \le \frac{\rho_i^n}{a_i^n}\cdot\frac{h^2}{2}$ $\Rightarrow$ $\underline{\tau \le \frac{c_3}{c_2}\cdot\frac{h^2}{2}}$

<u>Пример 5</u> (разн. схемы для ур-ия переноса)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

<u>Замечание</u>

Решение $u(x,t) = u_0(x-t)$



а) схема „против ветра"

$$\begin{cases} y^n_{t,i} + y^n_{\bar{x},i} = 0, & i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad x_i = ih \\ y^0_i = u_0(x_i) & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$y^{n+1}_i = (1-\gamma) y^n_i + \gamma y^n_{i-1}, \quad \gamma = \frac{\tau}{h}$$

Схема монотонна при $\tau \le h$

Замечание

Показать устойчивость схемы а) по принципу max нельзя, т.к. $\Omega_{h,\tau}$ содерж. беск. кол-во узлов, однако метод гармоник даёт то же условие $\tau \le h$.

б) схема с разностью, направл. по потоку

$$\begin{cases} y^n_{t,i} + y^n_{x,i} = 0 \\ y^0_i = u_0(x_i) \end{cases}$$

Схема немонотонна:

$$y^{n+1}_i = (1+\gamma) y^n_i - \gamma y^n_{i+1}, \quad \gamma = \frac{\tau}{h} \Rightarrow \text{усл-ия монот. не вып. } (\gamma \text{ нужно} \le 0)$$

Схема абс. неустойчива: подставим $y^n_i = q^n e^{ih\varphi I}$

$$\frac{q-1}{\tau} + \frac{e^{Ih\varphi} - 1}{h} = 0 \Rightarrow q = 1 + \gamma(1 - e^{Ih\varphi})$$

$|q| > 1$, если $h\varphi \ne 2\pi k$!

в) схема с центральной разностью $O(\tau, h^2)$

$$y^n_{t,i} + y^n_{\mathring{x},i} = 0$$

Схема немонотонна:

$$y^{n+1}_i = y^n_i + \frac{\gamma}{2} y^n_{i-1} - \frac{\gamma}{2} y^n_{i+1}, \quad \gamma = \frac{\tau}{h} \Rightarrow \text{усл-ия полож. коэфф. не вып.!}$$

Схема абс. неустойчива:

$$y^n_i = q^n e^{ih\varphi I} \Rightarrow \frac{q-1}{\tau} + \frac{e^{Ih\varphi} - e^{-Ih\varphi}}{2h} = 0$$

$$q = 1 - \gamma I \sin(h\varphi), \quad |q| > 1 \ (h\varphi \ne \pi k)$$

г) схема с „искусственной вязкостью"

Изменим предыдущ. схему след. образом:

$$y^n_{t,i} + y^n_{\mathring{x},i} = \frac{1}{2} h\, y^n_{\bar{x}x,i}$$ — „монотонизатор"

тем самым порядок аппрокс. $O(\tau, h)$

Замечание

В уравнении Бюргерса $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ коэфф-т μ характеризует вязкость среды

$u\frac{\partial u}{\partial x}$ — нелин. перенос в усл-ях вязкой среды

В каноническом виде:

$$y_i^{n+1}=(1-2\gamma\vartheta)y_i^n+\left(\frac{1}{2}+\vartheta\right)\gamma y_{i-1}^n+\left(\vartheta-\frac{1}{2}\right)\gamma y_{i+1}^n, \quad \gamma=\frac{\tau}{h}$$

Схема становится монотонной, если:

$\gamma\le\frac{1}{2\vartheta}\le 1$ (сначала выб. $\tau<h$, потом подбираем ϑ для нер-в)

Замечание

Подобные разностные добавки называются монотонизаторами.

§6 Разностные схемы для уравнений 2го порядка, содерж. 1ую производную

$*$ Задачу для ОДУ:

$$\begin{cases}u''(x)+r(x)u'(x)=-f(x), & 0<x<1\\ u(0)=u(1)=0\end{cases}$$

Дальн. цель: построить схему 2го пор., монотонную для $\forall h$

Рассм. простейшую схему 2го порядка:

$$\begin{cases}y_{\bar{x}x,i}+r_i y_{\overset{\circ}{x},i}=-f_i, & i=\overline{1,N-1},\ hN=1\\ y_0=y_N=0\end{cases}$$

$$\frac{2}{h^2}y_i=\left(\frac{1}{h^2}-r_i\cdot\frac{1}{2h}\right)y_{i-1}+\left(\frac{1}{h^2}+\frac{r_i}{2h}\right)y_{i+1}+f_i$$

Усл-ие монот.: $h\le\frac{2}{\max\limits_{1\le i\le N-1}|r_i|}$, т.е. схема монот. при $\forall h$ только при $r(x)\equiv 0$

Замечание

При усл-ии $r(x)\ge 0$, $x\in(0,1)$ монотонной для всех h явл. схема:

$$y_{\bar{x}x,i}+r_i y_{x,i}=-f_i$$

$$\underbrace{\left(\frac{2}{h^2}+\frac{r_i}{h}\right)}_{>0}y_i=\overset{>0}{\frac{1}{h^2}}y_{i-1}+\overbrace{\left(\frac{1}{h^2}+\frac{r_i}{h}\right)}^{\ge 0}y_{i+1}+f_i$$

Аналогично для $r(x)\le 0$, $x\in(0,1)$ монотонна для $\forall h$:

$$y_{\bar{x}x,i}+r_i y_{\bar{x},i}=-f_i$$

Пусть $r(x)=r_+(x)+r_-(x)$, где $r_+(x)=\frac{r(x)+|r(x)|}{2}\ge 0$, $r_-(x)=\frac{r(x)-|r(x)|}{2}\le 0$

$*$ Схему с направленными разностями:

$y_{\bar{x}x,i} + r_+(x_i)\, y_{x,i} + r_-(x_i)\, y_{\bar{x},i} = -f_i$

Выпишем погрешность аппрокс. на реш-ии исх. задачи:

$$\psi_i = u_{\bar{x}x,i} + r_+(x_i)\, u_{x,i} + r_-(x_i)\, u_{\bar{x},i} + f(x_i) = u''_i + r_+(x_i)\left(u'_i + \frac{h}{2}u''_i\right) +$$

$$+ r_-(x_i)\left(u'_i - \frac{h}{2}u''_i\right) + f_i + O(h^2) = \frac{h}{2}u''_i \cdot |r(x_i)| + O(h^2) =$$

$$= \frac{h}{2}|r(x_i)|\, u_{\bar{x}x,i} + O(h^2)$$

Второй порядок имеет схема:

$$\left(1 - \frac{h}{2}|r(x_i)|\right) y_{\bar{x}x,i} + r_+(x_i)\, y_{x,i} + r_-(x_i)\, y_{\bar{x},i} = -f_i$$

Учтём, что $\left(1 - \frac{h}{2}|r(x_i)|\right)$ можно записать иначе:

$$\left(1 - \frac{h}{2}|r(x_i)|\right) = \left(1 + \frac{h}{2}|r(x_i)|\right)^{-1} + O(h^2) \rightarrow \text{схема ост. 2го порядка}$$

Обозначая $k_i = \left(1 + \frac{h}{2}|r(x_i)|\right)^{-1} > 0$, получим:

$$\boxed{k_i\, y_{\bar{x}x,i} + r_+(x_i)\, y_{x,i} + r_-(x_i)\, y_{\bar{x},i} = -f_i}$$

$$\left(\frac{2k_i}{h^2} + \frac{|r(x_i)|}{h}\right) y_i = \left(\frac{k_i}{h^2} - \frac{r_-(x_i)}{h}\right) y_{i-1} + \left(\frac{k_i}{h^2} + \frac{r_+(x_i)}{h}\right) y_{i+1} + f_i$$

Усл-ия ~~не~~ полож. коэфф. вып. при $\forall h$! $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Схема 2го пор., монот. для $\forall h$

Замечание

Аналогично аппрокс. ур-ия в частн. произв. Например, для ур-ия:

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r(x)\frac{\partial u}{\partial x}$ монотонной будет чисто-неявн. схема $O(\tau, h^2)$:

$$y^n_{t,i} = k_i\, y^{n+1}_{\bar{x}x,i} + r_+(x_i)\, y^{n+1}_{x,i} + r_-(x_i)\, y^{n+1}_{\bar{x},i}$$

Задачи к главе II

Задача 1

Доказать, что схема:

$$\begin{cases} y_{\bar{x}x,i} + r_i\, y_{\mathring{x},i} = -f_i, & i = \overline{1, N-1},\ hN = 1 \\ y_0 = y_N = 0, & |r_i| \le R \end{cases}$$

имеет единств. реш-ие при усл-ии $h \le \frac{2}{R}$

Док-во:

$$\frac{2}{h^2} y_i = \left(\frac{1}{h^2} - \frac{r_i}{2h}\right) y_{i-1} + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{r_i}{2h}\right) y_{i+1} + f_i$$

$h < \frac{2}{|r_i|}$, что гарантируется $h < \frac{2}{R}$.

При указанном усл-ии вып. усл-ие полож. коэфф., $\gamma_h \neq \emptyset$ (кр. задача) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ работает сл.3 $\Rightarrow$ реш-ие $\exists!$, ч.т.д.

Задача 2

Найти реш-ие дифф. задачи:

$$\begin{cases} u''(x) = 0, & 0 < x < 1, \ 1 < x < 2 \\ u'(0) = \alpha_1, \ u'(2) = \alpha_2, \ u(1) = \beta \end{cases}$$

и аппроксим. ее разн. схемы:

$$\begin{cases} y_{\bar{x}x,i} = 0, & i = \overline{1, N-1}, \overline{N+1, 2N}, \quad hN = 1 \\ y_{x,0} = \alpha_1, \ y_{\bar{x},2N} = \alpha_2, \ y_N = \beta \end{cases}$$

– иллюстр. несвязной сетки

Реш-ие:

Для $[0,1]$: $u(x) = ax + b$; $u(x) = \alpha_1 x + \beta - \alpha_1 = \beta + \alpha_1(x-1)$

Для $[1,2]$: $u(x) = \alpha_2 x + \beta - \alpha_2 = \beta + \alpha_2(x-1)$

Для разн. задачи:

$$\begin{cases} y_{\bar{x}x,i} = 0, \ i = \overline{1, N-1} \\ y_{x,0} = \alpha_1, \ y_N = \beta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_{\bar{x},i} = \alpha_1, \ i = \overline{0, N-1} \\ y_N = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_i = y_{i+1} - \alpha_1 h, \ i = \overline{0, N-1} \\ y_N = \beta \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_i = \beta - \alpha_1 h (N - i), \ i = \overline{0, N} \Leftrightarrow y_i = \beta + \alpha_1 (x_i - 1)$$

Ответ: $u(x) = \begin{cases} \beta + \alpha_1(x-1), & x \in [0,1] \\ \beta + \alpha_2(x-1), & x \in [1,2] \end{cases}$, $y_i = \begin{cases} \beta + \alpha_1(x_i - 1), & i = \overline{0, N} \\ \beta + \alpha_2(x_i - 1), & i = \overline{N, 2N} \end{cases}$

Замечание

Сетка в разностной схеме несвязна, однако принцип макс применим на связных подмн-вах $\Omega_{1h} = \{x_i, i = \overline{0, N}\}$ и $\Omega_{2h} = \{x_i, i = \overline{N, 2N}\}$

Задача 3

Исследовать монотонность:

$$y_{\bar{x}_1 x_1, ij} + y_{\bar{x}_2 x_2, ij} + c_1 x_{1,i}^2 y_{\overset{\circ}{x}_1, ij} + c_2 x_{2,j}^2 y_{\overset{\circ}{x}_2, ij} = -f_{ij}$$

$0 < x_{1,i} < 1, \quad 0 < x_{2,j} < 1$

Решение:

$\alpha_i = c_1 x_{1,i}^2, \quad \beta_j = c_2 x_{2,j}^2$

Выпишем канонич. форму:

$$\left(\frac{2}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2}\right)y_{ij} = \left(\frac{1}{h_1^2}-\frac{\alpha_i}{2h_1}\right)y_{i-1,j} + \left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{\alpha_i}{2h_1}\right)y_{i+1,j} +$$

$$+\left(\frac{1}{h_2^2}-\frac{\beta_j}{2h_2}\right)y_{i,j-1} + \left(\frac{1}{h_2^2}+\frac{\beta_j}{2h_2}\right)y_{i,j+1} + f_{ij}.$$

Условия монотонности: $h_1 \le \frac{2}{|\alpha_i|}$, $h_2 \le \frac{2}{|\beta_j|}$

Ответ: $h_1 \le \frac{2}{|c_1|}$, $h_2 \le \frac{2}{|c_2|}$

Задача 4

Исследовать ~~сх-ть~~ монот-ть (схема для ур-ия колебаний):

$$y^n_{\bar{t}t,i} = y^n_{\bar{x}x,i} \qquad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

Решение:

$$\left(\frac{2}{\tau^2}-\frac{2}{h^2}\right)y_i^n = \frac{1}{\tau^2}\left(y_i^{n+1}+y_i^{n-1}\right) - \frac{1}{h^2}\left(y_{i-1}^n + y_{i+1}^n\right)$$

Ответ: схема немонотонна для $\forall \tau, h$

Задача 5

Какое ур-ие и с каким порядком аппроксимирует схема:

$$y^n_{\overset{\circ}{t},i} = \sigma y^{n+1}_{\bar{x}x,i} + (1-2\sigma)y^n_{\bar{x}x,i} + \sigma y^{n-1}_{\bar{x}x,i}.$$

Является ли схема монотонной?

Решение:

$$u^n_{\overset{\circ}{t},i} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_n) + \underline{\underline{O}}(\tau^2)$$

$$u^n_{\bar{x}x,i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_n) + \underline{\underline{O}}(h^2)$$

$$u^{n+1}_{\bar{x}x,i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_{n+1}) + \underline{\underline{O}}(h^2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_n) + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}(x_i,t_n)\cdot\tau + \underline{\underline{O}}(\tau^2+h^2)$$

$$u^{n-1}_{\bar{x}x,i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_n) - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}(x_i,t_n)\tau + \underline{\underline{O}}(\tau^2+h^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_n) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_n) + \underline{\underline{O}}(\tau^2+h^2)$$

Исследуем монотонность:

$$\frac{2(1-2\sigma)}{h^2}y_i^n = -\left(\frac{1}{2\tau}+\frac{2\sigma}{h^2}\right)y_i^{n+1} + \dots$$

Ответ: $\underline{\underline{O}}(\tau^2+h^2)$, немонот. для $\forall \tau, h, \sigma$

Задача 6

Аппроксимировать ур-ие Лапласа:

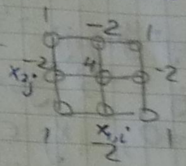
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$ с 4ым порядком. Исследовать монотонность соотв. схемы

Решение:

Рассмотрим простейшую аппроксимацию

$$u_{\bar{x}_1 x_1, ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_{1,i}, x_{2,j}) + \frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(x_{ij}) + \underline{\underline{O}}(h_1^4) \overset{\text{из ур-ия}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_{ij}) - \frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}(x_{ij}) + \underline{\underline{O}}(h_1^4)$$

шаблон



$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}(x_{ij}) = u_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2, ij} + \underline{\underline{O}}(h_1^2 + h_2^2)$$

4ый порядок имеет схема:

$$y_{\bar{x}_1 x_1, ij} + y_{\bar{x}_2 x_2, ij} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2, ij} = 0$$

$$\left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} - \frac{h_1^2 + h_2^2}{3h_1^2 h_2^2}\right) y_{ij} = \frac{h_1^2 + h_2^2}{12 h_1^2 h_2^2}\left(y_{i-1,j-1} + y_{i-1,j+1} + y_{i+1,j-1} + y_{i+1,j+1}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{h_1^2 + h_2^2}{6h_1^2 h_2^2}\right)\left(y_{i+1,j} + y_{i-1,j}\right) + \left(\frac{1}{h_2^2} - \frac{h_1^2 + h_2^2}{6h_1^2 h_2^2}\right)\left(y_{i,j-1} + y_{i,j+1}\right)$$

Условие монотонности:

$$\frac{6}{h_1^2} - \frac{h_1^2 + h_2^2}{h_1^2 h_2^2} = \frac{5h_2^2 - h_1^2}{h_1^2 h_2^2} \geq 0, \quad \frac{5h_1^2 - h_2^2}{h_1^2 h_2^2} \geq 0$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \sqrt{5}$

Задача 7

Построить монот. схему 2го порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in G = \{0 < x_1 < l_1;\ 0 < x_2 < l_2\} \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}(0, x_2) = 0, \quad 0 < x_2 < l_2 \\ u(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \partial G \setminus \{x_1 = 0,\ 0 < x_2 < l_2\} \end{cases}$$

Решение:

Введём сетку: $x_{ij} = (x_{1,i}, x_{2,j})$, $x_{1,i} = ih_1$, $x_{2,j} = jh_2$, $N_1 h_1 = l_1$, $N_2 h_2 = l_2$

$\omega_{1h} = \{x_{ij},\ i = \overline{1, N_1 - 1},\ j = \overline{1, N_2 - 1}\}$

$\omega_{2h} = \{x_{0j},\ j = \overline{1, N_2 - 1}\}$

$\gamma_h = \{x_{i0}, x_{iN_2}, x_{N_1 j},\ i = \overline{0, N_1 - 1},\ j = \overline{1, N_2 - 1}\}$

$$u_{x_1, 0j} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_{0j}) + \frac{h_1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_{0j}) + \underline{\underline{O}}(h_1^2) = \{\exists u \text{ — достаточно гладкое реш-е} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{распространяем ур-ие на границы по непр-ти}\} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_{0j}) - \frac{h_1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_{0j}) + f(x_{0j})\right) +$$

$$+ \underline{\underline{O}}(h_1^2) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_{0j}) - \underline{\frac{h}{2}\left(u_{\bar{x}_2 x_2, 0j} + f_{0j}\right)} + \underline{\underline{O}}(h_1^2 + h_2^2)$$

Второй порядок имеет ур-ие:

$$2y_{x_1,0j} + h_1(y_{\bar{x}_2x_2,0j} + f_{0j}) = 0$$

Исследуем монотонность:

$$\left(\overbrace{\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}}^{>0}\right) y_{0j} = \overbrace{\frac{2}{h_1^2}}^{>0} y_{1j} + \overbrace{\frac{1}{h_2^2}}^{>0}(y_{0,j-1} + y_{0,j+1}) + f_{0j} \Rightarrow \text{монот.}$$

Ответ:
$$\begin{cases} y_{\bar{x}_1x_1,ij} + y_{\bar{x}_2x_2,ij} = -f_{ij}, & x_{ij} \in \omega_{1h} \\ y_{x_1,ij} = -\frac{h_1}{2}(y_{\bar{x}_2x_2,ij} + f_{ij}), & x_{ij} \in \omega_{2h} \\ y_{ij} = 0, & x_{ij} \in \gamma_h \end{cases}$$

Задача 8

Построить монотонную схему 2го порядка для ур-ия:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

Указание Рассмотреть схему с монотонизатором:

$$y_{\bar{x}_1x_1,ij} - y_{\overset{\circ}{x}_1\overset{\circ}{x}_2,ij} + y_{\bar{x}_2x_2,ij} = -\gamma h_1 h_2 \, y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2,ij}$$

Ответ: схема монотонна, если $\frac{1}{2} \le 2\gamma \le 1$, $2\gamma \le \frac{h_1}{h_2} \le \frac{1}{2\gamma}$

Глава III. Методы решения сеточных уравнений

§1 Модельная задача

1° Оператор разностной задачи Дирихле

Вернемся к рассм. задачи Дирихле для ур-ия Пуассона в прямоуг-ке $G = \{0 < x_1 < l_1,\ 0 < x_2 < l_2\}$

$$\begin{cases} \Delta u(x) = -f(x), & x = (x_1, x_2) \in G \\ u(x) = 0, & x \in \partial G \end{cases}$$

$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа

Введём ~~сетку~~ в $\bar{G} = G \cup \partial G$ сетку $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$:

~~∂_h~~ $x_{ij} = (x_{1i}, x_{2j})$, $x_{1i} = ih_1$, $x_{2j} = jh_2$, $N_1 h_1 = l_1$, $N_2 h_2 = l_2$

$\omega_h = \{x_{ij},\ i = \overline{1, N_1 - 1},\ j = \overline{1, N_2 - 1}\}$

$\gamma_h = \{x_{i0}, x_{iN_2}, x_{0j}, x_{N_1j},\ j = \overline{1, N_2 - 1},\ i = \overline{1, N_1 - 1}\}$

Сопоставим дифф. задаче разн. схему:

$$\begin{cases} \Delta_h y_{ij} = -f_{ij}, & x_{ij} \in \omega_h \\ y_{ij} = 0, & x_{ij} \in \gamma_h \end{cases} \quad (1)$$

$\Delta_h y_{ij} = y_{\bar{x}_1x_1,ij}$ ...

Замечание

Схема (1) пре...

Введём прост...

$(v, w)_H = $ ...

$\|v\|_H = \sqrt{(v}$ ...

Введем опер...

$Ay_{ij} = -\Delta$ ...

Тогда задач...

$Ay = f$, ...

Дальнейш...

Лемма 1 (р...

$\sum_{i=1}^{N-1} y_{\bar{x},i} \cdot v_i$ ...

Док-во:

$\sum_{i=1}^{N} y_{\bar{x},i} v_i$ ...

$= y_N v_N -$ ...

Следствие

$\sum_{i=1}^{N-1} (y_x v)_i$ ...

Лемма 2 (...

$\forall y, v \in H$ ...

Док-во:

(Ay, v) ...

$= \{$ следст...

Теорема

Оператор ...

Док-во

$\Delta_h y_{ij} = y_{\bar{x}_1 x_1, ij} + y_{\bar{x}_2 x_2, ij}$ – пятиточечный разн. оператор Лапласа

Замечание

Схема (1) представляет собой СЛАУ разм. $(N_1-1)(N_2-1)$

Введем пространство $H = \{y(x),\ x\in\Omega_h,\ y|_{\gamma_h}=0\}$.

$(v,w)_H = \sum\limits_{i=1}^{N_1-1}\sum\limits_{j=1}^{N_2-1} v_{ij}\cdot w_{ij}\, h_1 h_2$

$\|v\|_H = \sqrt{(v,v)_H}$. $\dim H = (N_1-1)\cdot(N_2-1)$

Введем оператор $A: H\to H$

$Ay_{ij} = -\Delta_h y_{ij},\ x_{ij}\in\omega_h,\ y|_{\gamma_h}=0$.

Тогда задача (1) примет вид:

$Ay = f,\quad y, f\in H$ (f доопред. 0 на границе)

Дальнейшая цель: исследовать св-ва оператора A в пр-ве H.

Лемма 1 (разностный аналог интегрирования по частям)

$\sum\limits_{i=1}^{N-1} y_{\bar{x},i}\cdot v_i\, h = y_N v_N - y_0 v_0 - \sum\limits_{i=0}^{N-1} y_i\, v_{x,i}\, h$

Док-во:

$\sum\limits_{i=1}^{N} y_{\bar{x},i}\, v_i\, h = \sum\limits_{i=1}^{N} y_i v_i - \sum\limits_{i=1}^{N} y_{i-1} v_i = \sum\limits_{i=1}^{N-1} - \sum\limits_{i=0}^{N-1} y_i v_{i+1} + \sum\limits_{i=0}^{N-1} y_i v_i + y_N v_N - y_0 v_0 =$

$= y_N v_N - y_0 v_0 - \sum\limits_{i=0}^{N-1} y_i\cdot v_{x,i}\, h$, ч.т.д.

Следствие

$\sum\limits_{i=1}^{N-1} (y_x v)_i\cdot h = -\sum\limits_{i=1}^{N} (y v_{\bar{x}})_i\, h$, если $v_0 = v_N = 0$ (меняем y и v)

Лемма 2 (разностный аналог ф-лы Грина)

$\forall y, v\in H:\ (Ay, v) = \sum\limits_{i=1}^{N_1}\sum\limits_{j=1}^{N_2-1} (y_{\bar{x}_1} v_{\bar{x}_1})_{ij}\, h_1 h_2 + \sum\limits_{i=1}^{N_1-1}\sum\limits_{j=1}^{N_2} (y_{\bar{x}_2} v_{\bar{x}_2})_{ij}\, h_1 h_2$

Док-во:

$(Ay, v) \overset{\text{опр.}}{=} -\sum\limits_{i=1}^{N_1-1}\sum\limits_{j=1}^{N_2-1} \Delta_h y_{ij}\, v_{ij}\, h_1 h_2 = -\sum\limits_{j=1}^{N_2-1} h_2 \overbrace{\sum\limits_{i=1}^{N_1-1} (y_{\bar{x}_1 x_1} v)_{ij}\, h_1}^{\text{use лемма}} - \sum\limits_{i=1}^{N_1-1} h_1 \overbrace{\sum\limits_{j=1}^{N_2-1} (y_{\bar{x}_2 x_2} v)_{ij}\, h_2}^{\text{use лемма}} =$

$= \{$следствие пред. леммы $+\ v|_{\gamma_h} = 0\} = \sum\limits_{j=1}^{N_2-1} h_2 \sum\limits_{i=1}^{N_1} (y_{\bar{x}_1} v_{\bar{x}_1})_{ij}\, h_1 + \sum\limits_{i=1}^{N_1-1} h_1 \sum\limits_{j=1}^{N_2-1} (y_{\bar{x}_2} v_{\bar{x}_2})_{ij}\, h_2$, ч.т.д.

Теорема 1

Оператор A явл. самосопряженным и полож. опр. в пр-ве H. ($A^* = A > 0$)

Док-во:

Возьмем $\forall y, v \in H$.

$(Ay, v) = \{\text{по лемме 2}\} = (Av, y) = (y, Av) \Rightarrow A = A^*$

$(Ay,y) = \{\text{по лемме 2}\} = \sum\limits_{i=1}^{N_1}\sum\limits_{j=1}^{N_2-1} (y_{\bar{x}_1})^2_{ij}\, h_1 h_2 + \sum\limits_{j=1}^{N_2}\sum\limits_{i=1}^{N_1-1} (y_{\bar{x}_2})^2_{ij}\, h_1 h_2 \ge 0$

Пусть $(Ay,y)=0 \Rightarrow y_{\bar{x}_1,ij} = 0,\ i=\overline{1,N_1};\ j=\overline{1,N_2-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow y_{N_1 j} = y_{N_1-1,j} = \dots = y_{0j} = \{y\in H\} = 0,\ j=\overline{1,N_2-1} \Rightarrow y_{ij}=0,\ \forall x_{ij} \in \Omega_h$, т.е.

$(Ay,y)>0,\ \forall y\in H,\ y\ne 0$, т.е. $A>0$, ч.т.д.

Для поиска с.з. и с.ф. оператора A сначала рассмотрим его одномерный аналог:

$A^{(1)} y_i = -y_{\bar{x}x,i},\quad i=\overline{1,N-1},\quad y_0=y_N=0$

в пространстве $H^{(1)} = \{y(x_i),\ x_i\in\Omega_h^{(1)},\ y_0=y_N=0\}$, $\dim H^{(1)} = N-1$

$\Omega_h^{(1)} = \{x_i = ih,\ i=\overline{0,N},\ Nh=l\}$

$(y,v)_{H^{(1)}} = \sum\limits_{i=1}^{N-1} y_i v_i h,\quad \|y\|_{H^{(1)}} = \sqrt{(y,y)_{H^{(1)}}}$

Задача на собственные значения

$$\begin{cases} y_{\bar{x}x,i} + \lambda y_i = 0, & i=\overline{1,N-1},\ Nh=l \\ y_0 = y_N = 0 \end{cases}$$

Лемма 3

Собственные значения и с.ф. оператора $A^{(1)}$ имеют вид:

$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi k}{2N},\quad y_k(x_i) = \sin\frac{\pi k i}{N},\ i=\overline{0,N};\quad k=\overline{1,N-1}$

Док-во:

По аналогии с дифф. задачей будем искать с.ф. в виде:

$y_i = \sin(\alpha i),\quad i=\overline{0,N}$

Подставим в ур-ие:

$y_{i-1} - 2\left(1-\frac{\lambda h^2}{2}\right) y_i + y_{i+1} = 0$

$2\sin(\alpha i)\cos\alpha - 2\left(1-\frac{\lambda h^2}{2}\right)\sin(\alpha i) = 0$

$2\sin(\alpha i)\Big[\underbrace{\cos\alpha - 1 + \frac{\lambda h^2}{2}}_{=0}\Big] = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = 1-\frac{\lambda h^2}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{h^2}(1-\cos\alpha) = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}$

Учтем гр. усл-ие $y_N=0$ ($y_0=0$ и так выполнено):

$\sin(\alpha N)=0 \Leftrightarrow \alpha N = \pi k \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi k}{N}$, $k=\overline{1,N-1}$ (иначе трив. с.з. или повт. с.з.)

ч.т.д.

Лемма 4

Собственные ф-

$\mu_k(x_i) = \sqrt{\frac{2}{l}}$

образуют О

Док-во:

$(A^{(1)})^* = A^{(1)}$

ортогональны

нормировочн

$(y_k, y_k) =$

$= \frac{h}{2}(N-1$

Лемма 5 (о

$\frac{9}{l^2} \le \lambda_1 <$

Док-во:

Нер-ва

$\lambda_{max} =$

$\lambda_{min} =$

$\ge \frac{\pi^2}{l^2}$

Задача

$\begin{cases} y_{\bar{x}_1 x_1, ij} + \\ y_{ij} = 0 \end{cases}$

Теорема

Собстве

$\lambda_k =$

$\mu_k(x$

λ_{1,k_1}

λ_{2,k_2}

$k_1 = 1,$

Лемма 4

Собственные ф-ии оператора $A^{(1)}$:

$$\mu_k(x_i) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi k i}{N} = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi k x_i}{l}, \quad i=\overline{0,N};\ k=\overline{1,N-1}$$

образуют ОНБ в пр-ве $H^{(1)}$.

Док-во:

$(A^{(1)})^* = A^{(1)} > 0$ (показ. так же, как и для A) $\Rightarrow$ собственные подпр-ва $A^{(1)}$ ортогональны $\Rightarrow$ собств. ф-ии, отвеч. различным с.з., ортогональны. Осталось найти нормировочный множитель. Обозначая $\alpha = \frac{\pi k}{N}$, получим:

$$(y_k,y_k) = \sum_{i=1}^{N-1}\sin^2(\alpha i)\cdot h = \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N-1}(1-\cos(2\alpha i)) = \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\left(1-\frac{\sin(2\alpha(i+\frac12))-\sin(2\alpha(i-\frac12))}{2\sin\alpha}\right) =$$

$$= \frac{h}{2}\Big(N-1-\underbrace{\frac{\sin(2\alpha(N-\frac12))-\sin\alpha}{2\sin\alpha}}_{=-1}\Big) = \left\{\alpha=\frac{\pi k}{N}\right\} = \frac{Nh}{2} = \frac{l}{2}, \text{ ч.т.д.}$$

Лемма 5 (оценка спектра оператора $A^{(1)}$)

$$\frac{9}{l^2} \le \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{N-1} < \frac{4}{h^2}$$

Док-во:

Нер-ва $\lambda_k<\lambda_{k+1}$ вытекают из строгой монот. синуса на $[0,\frac{\pi}{2}]$

$$\lambda_{max} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi(N-1)}{2N} = \frac{4}{h^2}\cos^2\frac{\pi}{2N} < \frac{4}{h^2}$$

$$\lambda_{min} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi}{2N} = \left\{\alpha=\frac{\pi}{2N}\right\} = \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{l^2} \ge \left\{\text{при } N\ge 3 \Rightarrow \alpha\le\frac{\pi}{6},\ \frac{\sin\alpha}{\alpha}\searrow, \alpha\in[0,\tfrac{\pi}{6}]\right\}$$

$$\ge \frac{\pi^2}{l^2}\cdot\left(\frac12\cdot\frac{6}{\pi}\right)^2 = \frac{9}{l^2}, \text{ ч.т.д.}$$

Задача на с.з. оператора A:

$$\begin{cases} y_{\bar{x}_1 x_1, ij} + y_{\bar{x}_2 x_2, ij} + \lambda y_{ij} = 0, & x_{ij}\in\omega_h \\ y_{ij} = 0, & x_{ij}\in\gamma_h \end{cases}$$

Теорема 2

Собственные знач. и собств. ф-ии оператора A имеют след. вид:

$$\lambda_k = \lambda_{k_1,k_2} = \lambda_{1,k_1} + \lambda_{2,k_2}$$

$$\mu_k(x_{ij}) = \mu_{k_1,k_2}(x_{ij}) = \mu_{1,k_1}(x_{1i})\cdot\mu_{2,k_2}(x_{2j})$$

$$\lambda_{1,k_1} = \frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi k_1 h_1}{2l_1}, \quad \mu_{1,k_1}(x_{1i}) = \sqrt{\frac{2}{l_1}}\cdot\sin\frac{\pi k_1 x_{1,i}}{l_1}, \quad i=\overline{1,N_1-1}$$

$$\lambda_{2,k_2} = \frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{\pi k_2 h_2}{2l_2}, \quad \mu_{2,k_2}(x_{2j}) = \sqrt{\frac{2}{l_2}}\cdot\sin\frac{\pi k_2 x_{2j}}{l_2}, \quad j=\overline{1,N_2-1}$$

$$k_1=\overline{1,N_1-1}, \quad k_2=\overline{1,N_2-1}$$

Док-во (достаточно подстав. в ур-ие и учесть лемму для $A^{(1)}$)

Теорема 3 (оценка спектра оператора A)

$$\frac{8}{l_1^2}+\frac{8}{l_2^2} \le \lambda_k(A) \le \frac{4}{h_1^2}+\frac{4}{h_2^2}$$

Док-во:

$$\lambda_{min}(A)=\lambda_{1,1}=\frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi h_1}{2l_1}+\frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{\pi h_2}{2l_2}\ge\{\text{лемма } 5\}\ge\frac{8}{l_1^2}+\frac{8}{l_2^2}$$

$$\lambda_{max}(A)=\lambda_{N_1-1,N_2-1}=\frac{4}{h_1^2}\cos^2\frac{\pi h_1}{2l_1}+\frac{4}{h_2^2}\cos^2\frac{\pi h_2}{2l_2}\le\frac{4}{h_1^2}+\frac{4}{h_2^2}$$

ч.т.д.

2° Модельная задача

Модельной будем называть разностную задачу Дирихле (1) в квадрате $G=\{0<x_1,x_2<1\}$ на сетке Ω_h с $h_1=h_2=\frac{1}{N}$:

$$\begin{cases}\dfrac{y_{i-1,j}-2y_{ij}+y_{i+1,j}}{h^2}+\dfrac{y_{i,j-1}-2y_{ij}+y_{i,j+1}}{h^2}=-f_{ij}\\ y_{i0}=y_{iN}=y_{Nj}=y_{0j}=0,\quad i,j=\overline{1,N-1},\quad hN=1\end{cases}$$

Задача обладает всеми характерными св-ми многомерных разностных задач МФ

1) Высокая размерность СЛАУ: $(N-1)^2$

(если $h=0{,}01$ -> размерность ≈ 10000)

2) Высокая разреженность матрицы. Число ненулевых эл-ов к общему числу $\approx\frac{5}{(N-1)^2}=O(h^2)$ (м-ца $(N-1)^2\times(N-1)^2$)

3) Большой разброс с.з.

$$\xi=\frac{\lambda_{min}(A)}{\lambda_{max}(A)}=tg^2\frac{\pi h}{2}=O(h^2)$$

Замечание

В данном случае число обусловленности м-цы (оператора) A: $\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$ совпад. с величиной ξ^{-1}. При больших числах обусл. стандартные итерац. методы сходятся медленно.

§2 Оценки скорости сходимости стационарных итерац. методов

1° Скорость сходимости итерац. методов

В итерац. методах, исходя из заданного нач. приближения y_0 находятся приб. решение СЛАУ $Ay=f$, $\det A\ne 0$

A - м-ца $m\times m$, y, f - векторы разм. m

$y_{n+1} = F_{n+1}(y_0, y_1, \dots, y_n)$, где F_{n+1} – некоторая ф-ия, завис. от A и f

Опр Итерационный метод назыв. k-шаговым, если последующие итерац. приближения зависит лишь от k предыдущих:

$y_{n+1} = F_{n+1}(y_{n-k+1}, y_{n-k+2}, \dots, y_n)$.

Опр Метод назыв. линейным, если F_{n+1} – лин. ф-ия.

Опр Метод назыв. стационарным, если $F_{n+1} \equiv F$, т.е. F не зависит от номера итерации n.

Замечание

На практике используются одношаговые и двушаговые методы.

Опр Каноническим видом одношагового линейного метода назыв. его запись в следующей форме:

$$B_{n+1} \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau_{n+1}} + Ay_n = f, \quad n = 0, 1, \dots$$

Опр Метод назыв. явным, если $B_{n+1} = I$, в противном случае метод назыв. неявным.

Опр Каноническим видом стационарного лин. одношаг. метода назыв. его запись в след. форме:

$$B \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = f \quad (2), \quad n = 0, 1, \dots$$ где B и τ не зависят от номера итерации n.

Замечание

y_n, y и f можно рассматривать как эл-ты лин. пр-ва H со скал. произв. (y, v) и нормой $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$, а A и B можно рассм. как операторы $H \to H$.

Опр Итерац. метод сходится, если $\|y_n - y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Замечание

Напомним, что $A > 0 \Leftrightarrow (Ay, y) > 0, \ \forall y \in H, y \neq 0$; $A > B \Leftrightarrow A - B > 0$.

Теорема 4 (А.А. Самарского)

Пусть $A^T = A > 0$, тогда при условии $\tau > 0$, $B > \frac{\tau}{2} A$ итерац. метод (2) сходится.

Док-во: (см. пред. курсы)

Замечание

Важен не только факт сходимости, но и её скорость

Опр Итерационный метод сх-ся со скоростью геом. прогрессии со знам. $q \in (0,1)$, если $\|y_n - y\| \le q^n \|y_0 - y\|$

Замечание

Уменьшение начальной погрешности в $1/\varepsilon$ раз означает, что $\|y_n - y\| \le \varepsilon \|y_0 - y\|$.

Для этого достаточно, чтобы вып. нер-во $q^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \ge n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/q)}$.

Опр Число $n_0(\varepsilon)$ назыв. min кол-вом ~~отн~~ итераций, необх. для достижения заданной точности ε.

Опр Число $\ln(1/q)$ назыв. скоростью сх-ти итерац. метода.

2° Правила действия с матричными нер-ми

Справедливы следующие утверждения:

1) Если $A^T = A$, то $\exists$ м-ца Q; $Q^T = Q^{-1}$ (ортогон. м-ца): $A = Q^T \Lambda Q$, где $\Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, λ_k - с.з. м-цы A.
2) Если $A^T = A$, то $A > 0 \Leftrightarrow \lambda_k > 0$, $k = \overline{1,m}$ $(\ge)$
3) Если $A^T = A > 0 \Rightarrow \exists A^{-1} > 0$
4) Если $A^T = A$, $\rho \ge 0 \Rightarrow A^2 \le \rho^2 J \Leftrightarrow -\rho J \le A \le \rho J$ $(>)$
5) Если $A^T = A > 0 \Rightarrow \exists B: B^T = B > 0$, $B^2 = A$ $(\ge)$

Опр Матрица B назыв. квадратным корнем м-цы A и обозн. $A^{1/2}$ $(B = Q^T \Lambda^{1/2} Q)$

6) Если $A^T = A > 0 \Rightarrow \exists A^{-1/2} = (A^{-1})^{1/2} = (A^{1/2})^{-1}$
7) Если $A^T = A$, $B^T = B$, $\det C \ne 0 \Rightarrow A > B \Leftrightarrow C^T A C > C^T B C$ (аналог умножения ~~м-цы~~ нер-ва на число) $(\ge)$
8) Если $A^T = A > 0$, $B^T = B > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \cancel{A > B}$ $\alpha A > \beta B \Leftrightarrow \alpha B^{-1} > \beta A^{-1}$

3° Оценки скорости сходимости для симметричных матриц A и B

Пусть y - точное решение системы $Ay = f$, погрешность $z_n = y_n - y$ итер. метода (2) удовл. ур-ию:

$B\frac{z_{n+1}-z_n}{\tau} + Az_n = 0$, $n=0,1,\dots$ (или $z_{n+1} = Sz_n$, $\underbrace{S}_{\text{м-ца перехода}} = \mathcal{I} - \tau B^{-1}A$)

Опр Пусть $A^T = A > 0$, тогда энергетической (операторной) нормой вектора y назыв. число $\|y\|_A = \sqrt{(Ay,y)}$.

Замечание

$\|y\|_A = \sqrt{(Ay,y)} = \{\exists A^{1/2} > 0 \text{ - симметр.}\} = \sqrt{(A^{1/2}y, A^{1/2}y)}$ => аксиомы нормы выполняются.

Лемма 6

Пусть $A^T=A>0$, $B^T=B>0$, $\rho,\tau>0$. Тогда неравенство

$\frac{1-\rho}{\tau}B \le A \le \frac{1+\rho}{\tau}B$ равносильно нер-ву $\|z_{n+1}\|_A \le \rho\|z_n\|_A$, $n=0,1,\dots$, $\forall z_0 = y_0 - y \in H$.

Док-во:

Обозначим $v_n = A^{1/2}z_n$. Тогда $v_{n+1} = A^{1/2}z_{n+1} = A^{1/2}Sz_n = A^{1/2}SA^{-1/2}v_n = \tilde S v_n$

$\tilde S = \mathcal{I} - \tau C$, где $C = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$. $(C = C^T > 0) \Rightarrow \tilde S = \tilde S^T$

$\exists\ \|z_{n+1}\|_A \le \rho \|z_n\|_A \Leftrightarrow \|v_{n+1}\| \le \rho\|v_n\| \Leftrightarrow (\tilde S v_n, \tilde S v_n) \le \rho^2 (v_n,v_n) \Leftrightarrow (\tilde S^2 v_n, v_n) \le \rho^2(v_n,v_n) \Leftrightarrow \tilde S^2 \le \rho^2 \mathcal{I} \overset{\text{утв. 4)}}{\Leftrightarrow} -\rho\mathcal I \le \tilde S \le \rho \mathcal I \Leftrightarrow \frac{1-\rho}{\tau}\mathcal I \le C \le \frac{1+\rho}{\tau}\mathcal I \overset{\text{утв. 8)}}{\Leftrightarrow} \frac{1-\rho}{\tau}C^{-1} \le \mathcal I \le \frac{1+\rho}{\tau}C^{-1} \Leftrightarrow \frac{1-\rho}{\tau}A^{-1/2}BA^{-1/2} \le \mathcal I \le \frac{1+\rho}{\tau}A^{-1/2}BA^{-1/2} \Leftrightarrow \{\text{утв. 7}), C = A^{1/2}\} \Leftrightarrow \frac{1-\rho}{\tau}B\le A\le \frac{1+\rho}{\tau}B$, ч.т.д.

Лемма 7

В лемме 6 последнее нер-во можно заменить на аналог. нер-во:

$\|z_{n+1}\|_B \le \rho\|z_n\|_B$

Док-во:

Достаточно поменять в док-ве леммы 6:

$v_n = B^{1/2}z_n \Rightarrow C = B^{-1/2}AB^{-1/2} \Rightarrow\dots\Rightarrow \frac{1-\rho}{\tau}\mathcal I \le B^{-1/2}AB^{-1/2} \le \frac{1+\rho}{\tau}\mathcal I \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1-\rho}{\tau}B^{1/2}\mathcal I B^{1/2} \le A \le \frac{1+\rho}{\tau}B^{1/2}\mathcal I B^{1/2}$, ч.т.д.

Теорема 5

Пусть $A^T=A>0$, $B^T=B>0$ и $\gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B$ $(\gamma_2 \ge \gamma_1 > 0)$. Тогда при

$\tau = \frac{2}{\gamma_1+\gamma_2}$ итерац. метод (2) сх-ся и для погрешности справедлив. оценки:

$\|z_n\|_A \le \rho^n \|z_0\|_A$, $\|z_n\|_B \le \rho^n \|z_0\|_B$, $n=1,2,\dots$, где $\rho = \frac{1-\xi}{1+\xi}$, $\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$.

Док-во:

В неравенстве $\gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B$ положим $\gamma_1 = \frac{1-\rho}{\tau}$, $\gamma_2 = \frac{1+\rho}{\tau}$ $\Leftrightarrow$ $\tau = \frac{2}{\gamma_1+\gamma_2}$, $\rho = \frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_2+\gamma_1} = \frac{1-\xi}{1+\xi}$ $\Rightarrow$ из нер-ва $\frac{1-\rho}{\tau}B \le A \le \frac{1+\rho}{\tau}B$ вытек. оценки погрешности з (изе леммы 6,7), ч.т.д.

Замечание

Пусть $A^T=A>0$, $B^T=B>0$, $\gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B$

Рассмотрим обобщенную задачу на собств. значения: $A\mu = \lambda B\mu \Leftrightarrow B^{-1}A\mu = \lambda\mu$

$\Leftrightarrow B^{-1/2}A \cdot B^{-1/2} \cdot B^{1/2}\mu = \lambda B^{1/2}\mu \Leftrightarrow C\tilde{\mu} = \lambda\tilde{\mu}$, где $\tilde{\mu} = B^{1/2}\mu$, $C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$, $C^T = C$

$\Rightarrow \lambda_k = \lambda_k(B^{-1}A) = \lambda_k(C)$, $k=\overline{1,m}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $\lambda_k > 0$

$\gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B \Leftrightarrow \{$умн. на $B^{-1/2}$ с 2 ст.$\} \Leftrightarrow \gamma_1 J \le B^{-1/2}AB^{-1/2} \le \gamma_2 J$

Наиболее точное значения, с кот. выполнены нер-ва, это $\gamma_1 = \lambda_{min}(B^{-1}A)$, $\gamma_2 = \lambda_{max}(B^{-1}A)$

Опр Оптимальным итерац. параметром метода (2) назыв. значение $\tau_{опт} = \frac{2}{\lambda_{min}(B^{-1}A)+\lambda_{max}(B^{-1}A)}$

Замечание

$\tau_{опт}$ минимизирует значение ρ на мн-ве γ_1, γ_2: $\gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B$.

Опр Методом простой итерации назыв. метод (2) при $B = J$

Теорема 6

Пусть $A^T = A > 0$, тогда при $\tau = \frac{2}{\lambda_{min}(A)+\lambda_{max}(A)}$ МПИ сходится и для погрешности справедлива оценка: $\|z_n\| \le \rho^n \|z_0\|$, $n=1,2,\dots$, где $\rho = \frac{1-\xi}{1+\xi}$, $\xi = \frac{\lambda_{min}(A)}{\lambda_{max}(A)}$

Док-во: (из теор. 5)

Замечание

В случае плохообусл. м-цы $\xi \ll 1$. $\ln(1/\rho) = \ln\left(1 + \frac{2\xi}{1-\xi}\right) \sim 2\xi$

$n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\rho)} \sim \frac{\ln(1/\varepsilon)}{2\xi} = O\left(\frac{1}{\xi}\right)$ $\Rightarrow$ чем меньше ξ, тем хуже сх-ся МПИ

Пути повышения скорости сходимости

1) Использование неявных методов $(B \neq E)$, если $\frac{\lambda_{min}(B^{-1}A)}{\lambda_{max}(B^{-1}A)} > \frac{\lambda_{min}(A)}{\lambda_{max}(A)}$

B - легко обратима!

$B = A \Rightarrow$ метод сх-ся за 1 итерацию:

$\gamma_1 = \lambda_{min}(B^{-1}A) = 1 = \lambda_{max}(B^{-1}A) \Rightarrow \tau = 1,\ \xi = 1,\ \rho = 0$

$A(y_1 - y_0) + Ay_0 = f \Rightarrow Ay_1 = f$, но вот для нахожд. y_1 надо решить задачу, равносильную исходной!

2) Использование нестационарных методов $(\tau = \tau_n)$

3) Комбинация подходов 1) и 2)

§3 Применение стандартных итерац. методов к модельной задаче

1° Метод Якоби

Замечание

Для СЛАУ $Ay = f$: $A = L + D + R$ - лев. треуг., диаг., прав. треуг. Метод примет вид: $Ly_n + Dy_{n+1} + Ry_n = f$

Для модельной задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i-1,j}^{(n)} - 2y_{ij}^{(n+1)} + y_{i+1,j}^{(n)}}{h^2} + \dfrac{y_{i,j-1}^{(n)} - 2y_{ij}^{(n+1)} + y_{i,j+1}^{(n)}}{h^2} = -f_{ij} \\ y_{0j}^{(n+1)} = y_{Nj}^{(n+1)} = y_{i0}^{(n+1)} = y_{iN}^{(n+1)} = 0, \quad i,j = \overline{1, N-1}, \quad Nh = 1 \end{cases}$$

Решение на новой итерации легко находится:

$$y_{ij}^{(n+1)} = \frac{1}{4}\left(y_{i-1,j} + y_{i+1,j} + y_{i,j-1} + y_{i,j+1}\right)^{(n)} + \frac{h^2}{4} f_{ij}$$

Приведём метод к ~~коно~~ каноним. виду. Обозначим $y_n = \{y_{ij}^{(n)}\}_{i,j=1}^{N-1}$.

Учтём, что $y_{n+1} = y_n + (y_{n+1} - y_n) \Rightarrow$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = f, \text{ где } A = -\Delta_h (y|_{\gamma_h} = 0),\ \tau = \frac{h^2}{4}$$

Ранее показано, что $\gamma_1 = \lambda_{min}(A) = \frac{8}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2}$, $\gamma_2 = \lambda_{max}(A) = \frac{8}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \tau = \frac{h^2}{4} = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2} \Rightarrow$ метод Якоби является МПИ с оптим. параметром

$$\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = tg^2\frac{\pi h}{2} \sim \frac{\pi^2 h^2}{4}$$

$\ln(1/\rho) = \ln\left(1+\frac{2\xi}{1-\xi}\right) \sim 2\xi \sim \frac{\pi^2h^2}{2}$

$n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\rho)} \sim \frac{2\ln(1/\varepsilon)}{\pi^2h^2} = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{h^2}\right)$

Замечание

Метод сходится медленно. Далее будут рассматриваться методы с $n_0(\varepsilon)=\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{h}\right)$, даже $\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right)$

2° Метод Зейделя

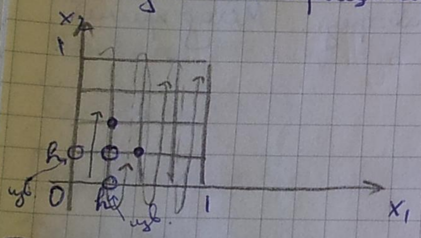
Замечание

Метод Зейделя: $Ly_{n+1} + Dy_{n+1} + Ry_n = f$

$$\begin{cases} \frac{y_{i-1,j}^{(n+1)} - 2y_{ij}^{(n+1)} + y_{i+1,j}^{(n)}}{h^2} + \frac{y_{i,j-1}^{(n+1)} - 2y_{ij}^{(n+1)} + y_{i,j+1}^{(n)}}{h^2} = -f_{ij} \\ y_{0j}^{(n+1)} = y_{Nj}^{(n+1)} = y_{i0}^{(n+1)} = y_{iN}^{(n+1)} = 0, \quad i,j=\overline{1,N-1}, \quad hN=1 \end{cases}$$

это будет метод Зейделя при разумной нумерации (сл...) неизвестных

Метод формально неявный, однако реш-ие на новой итерации легко находится т.к. сводится к обращению треуг. м-цы



"●" - значения $y^{(n)}$

"○" - значения $y^{(n+1)}$

Для нахождения канон. формы записи удобно сначала рассм. одномерный аналог метода:

$$\frac{y_{i-1}^{(n+1)} - 2y_i^{(n+1)} + y_{i+1}^{(n)}}{h^2} = -f_i, \quad y_0^{(n+1)} = y_N^{(n+1)} = 0, \quad i=\overline{1,N-1}, \quad Nh=1$$

$$y_{\bar{x}x,i}^{(n)} + \frac{y_{i-1}^{(n+1)} - y_{i-1}^{(n)} - 2y_i^{(n+1)} + 2y_i^{(n)}}{h^2} = -f_i$$

$\Downarrow$

$$y_{\bar{x}x,i}^{(n)} - \frac{1}{h}\left(y_{\bar{x},i}^{(n+1)} - y_{\bar{x},i}^{(n)}\right) - \frac{1}{h^2}\left(y_i^{(n+1)} - y_i^{(n)}\right) = -f_i$$

$\Downarrow$

$$\left(R^{(1)} + \frac{1}{h^2}E\right)\left(y_{n+1} - y_n\right) + A^{(1)}y_n = f$$

$R^{(1)}y_i = \frac{1}{h}y_{\bar{x},i}, \quad A^{(1)}y_i = -y_{\bar{x}x,i}, \quad y_0 = y_N = 0$

Для модельной задачи:

$B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} + Ay_n = f$, где $B = R + \frac{2}{h^2}E$, $\tau = 1$

$Ry_{ij} = \frac{1}{h}\left(y_{\bar{x}_1} + y_{\bar{x}_2}\right)_{ij}, \quad Ay_{ij} = -\Delta_h y_{ij}, \quad x_{ij} \in \omega_h, \quad y|_{\gamma_h} = 0$

Для метода (см. [2]) $n_0(\varepsilon) \approx \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\pi^2 h^2} = O(1/h^2)$!

§4 Попеременно-треугольный итерац. метод (ПТИМ)

1° Алгебраическая теория

Ранее стандартные методы приводились к виду:

$B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} + Ay_n = f,\quad n=0,1,\dots$, после чего исслед. их сходимость.

Можно поступить более конструктивно: спец. образом выбрать м-цу B (оператор)

Пусть $A^*=A>0$, тогда представим A в виде $A=R+R^*$, где матрица R имеет вид:

$$R=\{r_{ij}\},\quad r_{ij}=\begin{cases} a_{ij}, & i>j\\ \frac{1}{2}a_{ij}, & i=j\\ 0, & i<j\end{cases}$$

При этом:

$$0<(Av,v)=((R+R^*)v,v)=2(Rv,v)=2(R^*v,v) \Rightarrow R,R^*>0$$

В ПТИМ м-ца B выбирается след. образом:

$\boxed{B=(I+\omega R^*)(I+\omega R)}$, $\omega>0$ - параметр

Выбор обусловлен след. обстоятельствами:

1) $(I+\omega R^*)\underbrace{(I+\omega R)y_{n+1}}_{y_{n+1/2}} = \underbrace{(B-\tau A)y_n+\tau f}_{=\varphi_n}$

$\Rightarrow$ реш-ие легко наход. в 2 этапа:

$(I+\omega R^*)y_{n+1/2}=\varphi_n \Rightarrow y_{n+1/2}$ (сис-ма с верхн. треуг. м-цей)

$(I+\omega R)y_{n+1}=y_{n+1/2} \Rightarrow y_{n+1}$ (сис-ма с нижней треуг. м-цей)

$\Downarrow$ отсюда название метода

2) $B=\cancel{E}\,I+\omega A+\omega^2R^*R \Rightarrow B^*=B$

$(Bv,v)=((I+\omega R)v,(I+\omega R)v)\geq 0 \Rightarrow \begin{matrix} B>0\ (\omega>0)\\ B\geq 0\ (\forall\omega)\end{matrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ можно пользоваться оценками скорости сх-ти

Лемма 8

Пусть $\exists\, \Delta,\delta>0$: $A\geq\delta I$, $4R^*R\leq\Delta A \Rightarrow$ справедливо:

$\gamma_1 B\leq A\leq\gamma_2 B$, где $\gamma_1=\left(\frac{1}{\delta}+\omega+\frac{\omega^2\Delta}{4}\right)^{-1}$, $\gamma_2=\frac{1}{2\omega}$

Док-во:

$B(\omega)=I+\omega A+\omega^2R^*R\leq\left(\frac{1}{\delta}+\omega+\frac{\omega^2\Delta}{4}\right)A \Rightarrow \gamma_1 B\leq A$ ✓

$B(\omega) - B(-\omega) = 2\omega A \Rightarrow B(\omega) \geq 2\omega A$ (т.к. $B(-\omega) \geq 0$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow A \leq \gamma_2 B$ ✓, ч.т.д.

Замечание

Для нахождения γ_1, γ_2 достаточно найти параметры δ, Δ. При этом:

$$\delta\|v\|^2 \underset{(\text{т.к. } A \geq \delta \mathcal{J})}{\leq} (Av,v) \overset{v\neq 0}{=} \frac{(Av,v)^2}{(Av,v)} = \{A = R+R^*\} = \frac{4(Rv,v)^2}{(Av,v)} \leq \frac{4\|Rv\|^2 \cdot \|v\|^2}{(Av,v)} =$$

$$= \frac{4(R^*Rv,v)\|v\|^2}{(Av,v)} \leq \{4R^*R \leq \Delta A\} \leq \frac{\Delta(Av,v)}{(Av,v)}\|v\|^2 = \Delta\|v\|^2$$

Имеем: $\delta\|v\|^2 \leq (Av,v) \leq \Delta\|v\|^2 \Rightarrow \delta \leq \Delta$

В качестве δ можно взять $\delta = \lambda_{min}(A)$, Δ - некот. число: $\Delta \geq \lambda_{max}(A)$

Теорема 7 (сходимость ПТИМ)

Пусть $A = R + R^*$, $\exists \delta, \Delta > 0: A \geq \delta\mathcal{J}$, $4R^*R \leq \Delta A$. Тогда при выборе $\omega = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}$, $\tau = \frac{2}{\gamma_1+\gamma_2}$, где $\gamma_1 = \frac{\delta}{2(1+\sqrt{\xi})}$, $\gamma_2 = \frac{\delta}{4\sqrt{\xi}}$, $\xi = \frac{\delta}{\Delta}$ ПТИМ сходи[тся] и для погрешности справедлива оценка:

$\|y_n - y\|_A \leq \rho^n \|y_0 - y\|_A$, $n = 1, 2, \ldots$, $\rho = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+3\sqrt{\xi}}$

Док-во:

Из общей теоремы вытекает, что оценка с $\rho(\omega) = \frac{1-\eta}{1+\eta}$, где $\eta(\omega) = \frac{\gamma_1(\omega)}{\gamma_2(\omega)}$ будет выполнена при выборе $\tau = \frac{2}{\gamma_1(\omega)+\gamma_2(\omega)}$.

Найдём $\min\limits_{\omega>0} \rho(\omega)$. Это равносильно нахождению ω_0, доставляющего m[ин] ф-ии $\eta^{-1}(\omega)$. (чем больше η, тем меньше ρ)

$$\eta^{-1}(\omega) = \frac{\gamma_2(\omega)}{\gamma_1(\omega)} = \{\text{исп. лемму 8}\} = \frac{1}{2\omega}\left(\frac{1}{\delta} + \omega + \frac{\omega^2\Delta}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega\delta} + \frac{\omega\Delta}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\omega\delta}} - \frac{\sqrt{\omega\Delta}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{\delta}} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}$$

$$\gamma_1(\omega_0) = \left(\frac{1}{\delta} + \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}} + \frac{1}{\delta}\right)^{-1} = \frac{\delta\sqrt{\Delta}}{2(\sqrt{\delta}+\sqrt{\Delta})} = \frac{\delta}{2(1+\sqrt{\xi})}, \quad \xi = \frac{\delta}{\Delta} \in (0,1]$$

$$\gamma_2(\omega_0) = \frac{\sqrt{\delta\Delta}}{4} = \frac{\delta}{4\sqrt{\xi}}$$

$$\eta(\omega_0) = \frac{2\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}$$

$$\rho(\omega_0) = \cancel{\frac{1-\eta}{1+\eta}} \frac{1-\eta}{1+\eta}\Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+3\sqrt{\xi}} \in [0,1)$$, ч.т.д.

2° Применение к модельной задаче

Вернёмся к модельной задаче:

$$\begin{cases} -\Delta_h y_{ij} = f_{ij}, & x_{ij} \in \omega_h \\ y|_{\gamma_h} = 0, & i,j = \overline{1, N-1}, \quad Nh = 1 \end{cases}$$

Оператор $A = -\Delta_h \; (y|_{\gamma_h} = 0)$ в пр-ве $H = \{y(x), \; x \in \Omega_h, \; y|_{\gamma_h} = 0\}$,

$(v, \omega)_H = \sum\limits_{i,j=1}^{N-1} (v \cdot \omega)_{ij} \cdot h^2$

$A = R + U$, где $Ry_{ij} = \frac{1}{h}(y_{\bar{x}_1} + y_{\bar{x}_2})_{ij}$, $Uy_{ij} = -\frac{1}{h}(y_{x_1} + y_{x_2})_{ij}$, $x_{ij} \in \omega_h$, $y|_{\gamma_h} = 0$

Лемма 9

Оператор U – сопряженный к R в пр-ве H ($U = R^*$)

Док-во:

Для $\forall v, \omega \in H$: $(Rv, \omega) = \frac{1}{h} \sum\limits_{j=1}^{N-1} h \sum\limits_{i=1}^{N-1} (v_{\bar{x}_1} \cdot \omega)_{ij} h + \frac{1}{h} \sum\limits_{i=1}^{N-1} h \sum\limits_{j=1}^{N-1} (v_{\bar{x}_2} \omega)_{ij} h =$

$= \{$разн. аналог. инт-ия по частям с учетом $v, \omega|_{\gamma_h} = 0\} = -\frac{1}{h} \sum\limits_{i,j=1}^{N-1} (v \, (\omega_{x_1} + \omega_{x_2}))_{ij} h^2 =$

$= (v, U\omega)$. $\Rightarrow$ $U = R^*$, ч.т.д.

Получено представление $A = R + R^*$. Осталось найти δ и Δ. Как уже отмечалось, можно выбрать $\delta = \lambda_{min}(A) = \frac{8}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}$

Найдём Δ: $4R^*R \le \Delta A \Leftrightarrow 4\|Rv\|^2 \le \Delta (Av, v)$.

Ранее показано, что $(Av, v) = \sum\limits_{i=1}^{N} \sum\limits_{j=1}^{N-1} v^2_{\bar{x}_1, ij} h^2 + \sum\limits_{i=1}^{N-1} \sum\limits_{j=1}^{N} v^2_{\bar{x}_2, ij} h^2$

$\|Rv\|^2 = \frac{1}{h^2} \sum\limits_{i,j=1}^{N-1} (v_{\bar{x}_1} + v_{\bar{x}_2})^2_{ij} h^2 \le \{(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2\} \le$

$\le \frac{2}{h^2} \sum\limits_{i,j=1}^{N-1} (v^2_{\bar{x}_1} + v^2_{\bar{x}_2})_{ij} h^2 \le \{$добавим неотр. слаг.$\} \le \frac{2}{h^2}(Av, v)$ $\Rightarrow \Delta = \frac{8}{h^2} >$

$> \lambda_{max}(A) = \frac{8}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2}$.

По теореме 7 при выборе:

$\omega = \frac{2}{\sqrt{\delta \Delta}}$, $\tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$, $\gamma_1 = \frac{\delta}{2(1+\sqrt{\xi})}$, $\gamma_2 = \frac{\delta}{4\sqrt{\xi}}$, $\xi = \sin^2 \frac{\pi h}{2}$:

$\rho = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + 3\sqrt{\xi}} \sim \left(1 - \frac{\pi h}{2}\right)\left(1 - \frac{3\pi h}{2}\right) \sim 1 - 2\pi h$

$n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(1/\varepsilon)}{-\ln \rho} \sim \frac{\ln(1/\varepsilon)}{2\pi h} = O\left(\frac{1}{h}\right)$!

ПТИМ сходится на порядок быстрее!

Алгоритм вычислений:

1) $(\mathcal{I} + \omega R^*) y_{n+1/2} = \varphi_n$, $\varphi_n = (B - \tau A) y_n + \tau f$

2) $(J+\omega R)y_{n+1} = y_{n+1/2}$

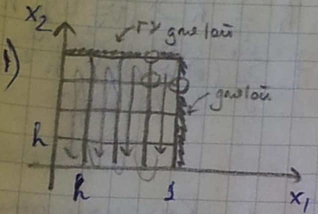
$$y_{ij}^{(n+1/2)} - \frac{\omega}{h}(y_{x_1}+y_{x_2})_{ij}^{(n+1/2)} = \varphi_{ij}^{(n)}$$

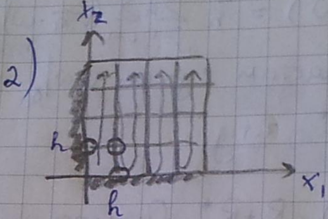
$$y_{ij}^{(n+1)} + \frac{\omega}{h}(y_{\bar{x}_1}+y_{\bar{x}_2})_{ij}^{(n+1)} = y_{ij}^{(n+1/2)}$$

Имеем:

$$\begin{cases}\left(1+\frac{2\omega}{h^2}\right)y_{ij}^{(n+1/2)} = \frac{\omega}{h^2}\left(y_{i+1,j}+y_{i,j+1}\right)^{(n+1/2)} + \varphi_{ij}^{(n)}, \quad i,j=\overline{1,N-1} \\ y_{Nj}^{(n+1/2)} = y_{iN}^{(n+1/2)} = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(1+\frac{2\omega}{h^2}\right)y_{ij}^{(n+1)} = \frac{\omega}{h^2}\left(y_{i-1,j}+y_{i,j-1}\right)^{(n+1)} + y_{ij}^{(n+1/2)}, \quad i,j=\overline{1,N-1} \\ y_{0j}^{(n+1)} = y_{i0}^{(n+1)} = 0\end{cases}$$

1) 

2) 

3° ПТИМ с Чебышевскими параметрами

Замечание

При фиксированном числе итераций n (и матр. B) можно указать набор $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, обеспечивающий наилучшую оценку сх-ти при любом выборе начального приближения y_0.

Лемма 10

Ф-ия $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$, где z – компл. перем., при $n=1,2,\dots$ является мн-ном n-ой степени с коэфф. 2^{n-1} при z^n и имеет веществ. нули: $z_\ell = \cos\left(\frac{2\ell-1}{2n}\pi\right)$, $\ell = \overline{1,n}$

Док-во:

По индукции, обозначим $\alpha = \arccos z$:

$\cos(1\cdot\alpha) = 2^0 \cdot z$

$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = 2^1\cdot z^2 - 1$

$\cos(n\alpha) = \cos(n\alpha) \pm \cos(n-2)\alpha = 2\cos\alpha\cdot\cos(n-1)\alpha - \cos(n-2)\alpha =$

$= 2z\cdot\cos(n-1)\alpha - \cos(n-2)\alpha \Rightarrow$ со степ. и коэфф. все ok.

Для нахожд. нулей решим ур-ие:

$\cos(nz)$ $\cos(n \cdot \arccos z) = 0 \Rightarrow n \arccos z = -\frac{\pi}{2} + \pi l \Rightarrow$

$\Rightarrow z_l = \cos\left(\frac{2l-1}{2n}\pi\right)$, $l = \overline{1,n}$, ч.т.д.

Следствие

$T_n(z) = 2z T_{n-1}(z) - T_{n-2}(z)$, $T_0(z) = 1$, $T_1(z) = z$

Опр Ф-ие $T_n(z)$ называ. многочленом Чебышева.

Замечание

При $x \in \mathbb{R}$: $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $|x| \le 1$

Теорема 8

Среди всех многочленов ст. n с коэфф. 2^{n-1} при старшей степ. величина $\max\limits_{[-1,1]} |T_n(x)|$ минимальна.

Док-во: (ищи в прошлом)

Теорема 9

Пусть $A^* = A > 0$, $B^* = B > 0$, $\gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B$. Тогда при выборе $\tau_k = \frac{\tau_0}{1 + \rho_0 t_k}$, где t_k - нули многочлена Чебышёва $t_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k = \overline{1,n}$; $\tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$, $\rho_0 = \frac{1-\eta}{1+\eta}$, $\eta = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$; итерац. метод:

$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f$, $k = \overline{0, n-1}$ (кол-во итераций фикс.)

сходится и для минимального числа итераций $n_0(\varepsilon)$, необходимых для достижения заданной точн. ε при малых η справедлива оценка:

$n_0(\varepsilon) \approx \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{\eta}}$

Док-во: (основная идея)

Запишем ур-ие для погрешности: $\Rightarrow$

$z_k = y_k - y$, где $Ay = f$:

$B^{1/2} \frac{z_{k+1} - z_k}{\tau_{k+1}} + B^{-1/2} A B^{-1/2} B^{1/2} z_k = 0$

$\omega_{k+1} = (I - \tau_{k+1} C)\omega_k$, где $\omega_k = B^{1/2} z_k$, $C = B^{-1/2} A B^{-1/2}$ $(\gamma_1 I \le C \le \gamma_2 I)$, $C^* = C > 0$

$\Rightarrow$ для ω_n справедливо: $\omega_n = (I - \tau_n C)(I - \tau_{n-1} C) \ldots (I - \tau_1 C)\omega_0 = P_n(C)\omega_0$, где $P_n(C)$ - матричный многочлен степени n $(\gamma_1 \le \|C\| \le \gamma_2)$

$\|\omega_n\| \le \|P_n(C)\| \cdot \|\omega_0\| \le \max\limits_{\gamma_1 \le t \le \gamma_2} |P_n(t)| \cdot \|\omega_0\|$, $P_n(t) = \prod\limits_{k=1}^{n} (1 - \tau_k t)$, $t \in \mathbb{R}$

Оценка $\|\omega_n\| = \|z_n\|_B$ будет наилучшей, если выбрать $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ так, чтобы $\max\limits_{\gamma_1 \le t \le \gamma_2} |P_n(t)| = \min\limits_{\{\tau_k\}} \max\limits_{\gamma_1 \le t \le \gamma_2} |\prod\limits_{k=1}^{n} (1-\tau_k t)|$

Путём линейной замены переменных отрезок $\gamma_1 \le t \le \gamma_2$ переводится в отрезок $-1 \le x \le 1$, тогда искомый многочлен совпадает с мн-ном Чебышева $q_n T_n(x)$, нормир. ~~коэфф.~~ условием $P_n(0) = 1$. Нули τ_k^{-1} многочлена $P_n(t)$ выражаются через известные нули $T_n(x)$, а для погрешности справедлива оценка: $\|z_n\|_B \le q_n \|z_0\|_B$, "ч.т.д."

Замечание

Порядок τ_k не влияет на оценку сходимости, однако существенно влияет на вычислительную устойчивость [4]

Оценим $n_0(\varepsilon)$ для модельной задачи (ПТИМ):

$A = R + R^*$, $B = (J + \omega R^*)(J + \omega R)$, $\omega = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}$

$\gamma_1 = \frac{\delta}{2(1+\sqrt{\xi})}$, $\gamma_2 = \frac{\delta}{4\sqrt{\xi}}$, $\xi = \frac{\delta}{\Delta}$, $\delta = \frac{8}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2}$, $\Delta = \frac{8}{h^2}$

$\eta = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{2\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}} = \frac{2\sin\frac{\pi h}{2}}{1+\sin\frac{\pi h}{2}} \approx \pi h$

$n_0(\varepsilon) \approx \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{\eta}} \approx \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{\pi h}} = \underline{O}\left(\frac{1}{h^{1/2}}\right)$!

Выпишем оценки для рассмотренных методов:

$n_0(\varepsilon) \approx \frac{2}{\pi^2 h^2} \ln(1/\varepsilon)$ – метод Якоби

$n_0(\varepsilon) \approx \frac{1}{\pi^2 h^2} \ln(1/\varepsilon)$ – метод Зейделя

$n_0(\varepsilon) \approx \frac{1}{2\pi h} \ln(1/\varepsilon)$ – ПТИМ

$n_0(\varepsilon) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \ln(2/\varepsilon)$ – ПТИМ с чебышевским набором

§5 Итерационные методы вариационного типа

1° Одношаговые (градиентные) методы

$\forall$ нестационарный метод вида:

$B \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau_{n+1}} + A y_n = f$, $n = 0, 1, \ldots$, $y_0 \in H$

При этом считается, что м-ца B - обратима, в H задано скалярное произведение (v, w) и $\|v\| = \sqrt{(v,v)}$.

Уравнение для погрешности имеет вид:

$z_{n+1} = (I - \tau_{n+1} B^{-1} A) z_n$

Пусть $D: D^T = D > 0$ — некоторая м-ца. Будем минимизировать:

$\|z_{n+1}\|_D = \sqrt{(Dz_{n+1}, z_{n+1})} = \sqrt{(D^{1/2}z_{n+1}, D^{1/2}z_{n+1})} = \|\omega_{n+1}\|$, $\omega_n = D^{1/2} z_n$

Указанный приём называется локальной минимизацией (на каждом шаге решаем лок. задачу min z_{n+1} по заданному z_n)

$$D^{1/2} z_{n+1} = D^{1/2}(I - \tau_{n+1}B^{-1}A) D^{-1/2} D^{1/2} z_n$$

$$\omega_{n+1} = (I - \tau_{n+1} C)\omega_n, \quad C = D^{1/2} B^{-1} A D^{-1/2}$$

$$\|\omega_{n+1}\|^2 = ((I-\tau_{n+1}C)\omega_n, (I-\tau_{n+1}C)\omega_n) = \|\omega_n\|^2 + \tau_{n+1}^2 (C\omega_n, C\omega_n) -$$
$$- 2\tau_{n+1}(C\omega_n,\omega_n) = \|\omega_n\|^2 + (C\omega_n, C\omega_n)\left[\tau_{n+1} - \frac{(C\omega_n,\omega_n)}{(C\omega_n,C\omega_n)}\right]^2 - \frac{(C\omega_n,\omega_n)^2}{(C\omega_n,C\omega_n)}$$

Получили:

$$\boxed{\tau_{n+1} = \frac{(C\omega_n,\omega_n)}{(C\omega_n,C\omega_n)}}$$

Здесь считается, что $\omega_n \neq 0$ (иначе получено точное реш-е на предыдущей итерации). Дополнительно потребуем, чтобы $C>0$ => $\tau_{n+1}>0$

Кроме этого:

$$\|\omega_{n+1}\| = \rho_n \|\omega_n\|, \text{ если } \rho_n^2 = 1 - \frac{(C\omega_n,\omega_n)^2}{(C\omega_n,C\omega_n)(\omega_n,\omega_n)}$$

Т.к. $C = D^{1/2}B^{-1}AD^{-1/2}$, $\omega_n = D^{1/2}z_n$, то $\tau_{n+1} = \frac{(DB^{-1}Az_n, z_n)}{(DB^{-1}Az_n, B^{-1}Az_n)}$

Перепишем уравнение метода:

$y_{n+1} = y_n - \tau_{n+1}B^{-1}(Ay_n - f) = y_n - \tau_{n+1} v_n$

$r_n = Ay_n - f = Az_n$ — невязка на n-ой итерации

$v_n = B^{-1}r_n = B^{-1}Az_n$ — поправка на n-й итерации

можем посчитать

$\Downarrow$

$\tau_{n+1} = \frac{(Dv_n, z_n)}{(Dv_n, v_n)}$, но z_n мы не знаем!

Выражение по-прежнему содержит неизвестную погрешность z_n, однако путём выбора м-цы D можно выразить τ_{n+1} через известные на каждой итерации величины r_n и v_n

Пусть, например, $A^T = A > 0$, тогда при $D = A$:

$$\tau_{n+1} = \frac{(Av_n, z_n)}{(Av_n, v_n)} = \frac{(v_n, Az_n)}{(Av_n,v_n)} = \frac{(v_n, r_n)}{(Av_n, v_n)}$$

Путём выбора матриц B и D строятся различные одношаговые методы вариационного типа (градиентные).

Обсудим сходимость градиентных методов для самосопряженного случая:

$C^T = C > 0$. Тогда $\exists \gamma_1, \gamma_2 > 0 : \gamma_1 I \leq C \leq \gamma_2 I$

$C = D^{1/2} B^{-1} A D^{-1/2} = D^{-1/2} D B^{-1} A D^{-1/2}$, т.е. приходим к условиям:

$(DB^{-1}A)^T = DB^{-1}A$, $\gamma_1 D \leq DB^{-1}A \leq \gamma_2 D$, $\gamma_1 > 0$

Теорема 10

При выполнении последних условий градиентный метод сходится и

$\|z_n\|_D \leq \rho^n \|z_0\|_D$, $\rho = \frac{1-\xi}{1+\xi}$, $\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$

Док-во:

Перепишем ур-ие для погрешности $\omega_{n+1} = (I - \tau_{n+1} C)\omega_n$, положив $\tau_{n+1} = \tau_0$:

$\frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{\tau_0} + C\omega_n = 0$, $\tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$ — ур-ие для погр. МПИ с оптимальным параметром, где $C^T = C > 0$. Отсюда (из сх-ти МПИ):

$\|\omega_{n+1}\|\big|_{\tau=\tau_0} \leq \rho \|\omega_n\|$

При этом $\|\omega_{n+1}\|\big|_{\tau=\tau_{n+1}} = \min\limits_{\tau>0} \|\omega_{n+1}\| \leq \|\omega_{n+1}\|\big|_{\tau=\tau_0} \leq \rho\|\omega_n\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \|z_n\|_D \leq \rho^n \|z_0\|_D$, ч.т.д.

Замечания

При удачном выборе начального приближения скорость сходимости может быть существенно выше:

$\exists y_0 : \omega_0 = D^{1/2}(y_0 - y) = \mu$, где $C\mu = \lambda\mu$

Тогда $\tau_1 = \frac{(C\omega_0, \omega_0)}{(C\omega_0, C\omega_0)} = \frac{1}{\lambda}$, $\rho_0 = 1 - \frac{(C\omega_0, \omega_0)^2}{(C\omega_0, C\omega_0)(\omega_0, \omega_0)} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\omega_1\| = \rho_0 \|\omega_0\| = 0 \Rightarrow y_1 = y \Rightarrow$ сходится за 1 итерацию

Следствие

Если $A^T = A > 0$, $B^T = B > 0$, $D = A$, тогда градиентный метод сх-ся не хуже стационарного метода с той же матрицей B (и A) и оптимальным параметром

Док-во:

$DB^{-1}A = AB^{-1}A = (AB^{-1}A)^T$

$\gamma_1 D \le D^T B^{-1} A \le \gamma_2 D \iff \gamma_1 A \le AB^{-1}A \le \gamma_2 A \overset{A^{-1/2}\cdot\,\cdot A^{-1/2}}{\iff} \gamma_1 J \le A^{1/2}B^{-1}A^{1/2} \le \gamma_2 J \iff$

$\iff \gamma_1 A^{-1} \le B^{-1} \le \gamma_2 A^{-1} \iff \gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B$

При выборе $\gamma_1 = \lambda_{min}(\cancel{D}B^{-1}A)$, $\gamma_2 = \lambda_{max}(B^{-1}A)$ получим выполнение условий сх-ти град. метода и $\|z_n\|_A \le \rho^n \|z_0\|_A$, $\rho = \frac{1-\xi}{1+\xi}$, $\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$,
(оценка такая же, как у стац. метода)
ч.т.д.

Замечание
Для градиентного метода нет необходимости вычислять γ_1 и γ_2!

Замечание
Условие $C = D^{1/2}B^{-1}AD^{-1/2} > 0 \iff DB^{-1}A > 0$

$(D^{1/2}B^{-1}AD^{-1/2}v, v) = \{w = D^{-1/2}v\} = (DB^{-1}Aw, w) > 0$

Условия применимости градиентного метода:

1) Возможность вычислений по ф-ле $\tau_{n+1} = \frac{(Dv_n, z_n)}{(Dv_n, v_n)}$ (проблема в z_n)
$(D = D^T > 0!)$

2) $DB^{-1}A > 0$ (симметр. не нужна, но если симметр. ⇒ знаем о сх-ти)
* $\cancel{(DB^{-1}A)^T = DB^{-1}A}$

Замечание
Условия в общем случае не предполагают, что $A^T = A$ и(или) $A > 0$.

2° Метод скорейшего спуска

Пусть $\boxed{A^T = A > 0}$, тогда можно выбрать $\boxed{D = A}$

$\tau_{n+1} = \frac{(Av_n, z_n)}{(Av_n, v_n)} = \frac{(v_n, Az_n)}{(Av_n, v_n)} = \frac{(v_n, r_n)}{(Av_n, v_n)}$ — вычисляется

Условие $C > 0$:

$(AB^{-1}Av, v) = \{w = Av\} = (B^{-1}w, w) > 0 \Rightarrow \boxed{B > 0}$

* явный метод $B = J$, тогда $v_n = B^{-1}r_n = r_n$

$y_{n+1} = y_n - \tau_{n+1} r_n$, $\tau_{n+1} = \frac{(r_n, r_n)}{(Ar_n, r_n)}$, $r_n = Ay_n - f$ — один из вариантов метода

Получим этот же итерац. процесс из других соображений:
Введём функционалы $a(y,x) = (Ay, x)$, $J(x) = a(x,x) - 2(f,x)$

Заметим, что $a(x,y)=a(y,x)$, $a(x,x)\geq 0$, $\forall x,y\in H$. Тогда, согласно лемме 6, гл. I: $Ay=f \Leftrightarrow (Ay,x)=(f,x),\ \forall x\in H \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow J(y)=\min\limits_{x\in H} J(x)$

$J(x)=\sum\limits_{i,j=1}^m \cancel{a_{ij}(x_i,x_j)}\, a_{ij}x_ix_j - 2\sum\limits_{i=1}^m f_ix_i \quad \{a_{ij}=a_{ji}\}$

$\frac{\partial J}{\partial x_k} = 2\sum\limits_{i=1}^m a_{ki}x_i - 2f_k = 2(Ax-f)_k \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{grad} J(x) = 2r$, где $r=Ax-f$

Вектор невязки $(-r)$ характеризует направление наибольшего убывания ф-ла $J(x)$ в т. x

В итерац. ф-ле $y_{n+1}=y_n-\tau_{n+1}r_n$ переход от y_n к y_{n+1} осуществляется в направлении антиградиента ф-ла $J(x)$ в т. y_n $\Rightarrow$ отсюда и название градиентных методов. Параметр τ_{n+1} выберем путем минимизации значения $J(y_{n+1})$:

$J(y_{n+1}) = (A(y_n-\tau_{n+1}r_n), y_n-\tau_{n+1}r_n) - 2(f, y_n-\tau_{n+1}r_n) = (Ay_n,y_n) - 2\tau_{n+1}(Ay_n,r_n)+\tau_{n+1}^2(Ar_n,r_n) - 2(f,y_n)+2\tau_{n+1}(f,r_n)$

$J'_\tau = 2[-(Ay_n,r_n)+(f,r_n)+\tau_{n+1}(Ar_n,r_n)]$

$J''_\tau = 2(Ar_n,r_n)>0 \quad (r_n\neq 0)$

Минимум достигается при $\tau_{n+1} = \frac{(Ay_n,r_n)-(f,r_n)}{(Ar_n,r_n)} = \frac{(r_n,r_n)}{(Ar_n,r_n)} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ получим тот же самый метод!

3° Метод минимальных невязок

Выберем $\boxed{D=A^TA} \Rightarrow D^T=D>0$

$\tau_{n+1} = \frac{(A^TAv_n,z_n)}{(A^TAv_n,v_n)} = \frac{(Av_n,r_n)}{(Av_n,Av_n)}$ – вычисляется

Условие $C>0$:

$(A^TAB^{-1}Av,v) = \{\omega=B^{-1}Av\} = (A\omega,B\omega)>0 \Rightarrow \boxed{B^TA>0}$

Замечание

Минимизируется норма невязки:

$\underset{\text{минимизируем}}{\|z_{n+1}\|_D^2} = (A^TAz_{n+1},z_{n+1}) = \|r_{n+1}\|^2$

4° Метод минимальных поправок

Выберем $\boxed{D = A^T B^{-1} A}$. Условие $D^T = D > 0 \iff \boxed{B^T = B > 0}$

$$\tau_{n+1} = \frac{(A^T B^{-1} A v_n, z_n)}{(A^T B^{-1} A v_n, v_n)} = \frac{(A v_n, v_n)}{(B^{-1} A v_n, A v_n)}$$ - вычисляется (B - легко обратимая)

Условие $C>0$:

$$(A^T B^{-1} A B^{-1} A v, v) = \{w = B^{-1} A v\} = (Aw, w) > 0 \Rightarrow \boxed{A>0}$$

Замечание

Минимизируется норма поправки:

$$\|z_{n+1}\|_D^2 = (A^T B^{-1} A z_{n+1}, z_{n+1}) = (B^{-1} r_{n+1}, r_{n+1}) = (v_{n+1}, B v_{n+1}) = \|v_{n+1}\|_B^2$$

(норма корректна, т.к. $B^T = B > 0$)

5° Метод минимальных погрешностей

Выберем $\boxed{D = B_0}$, $\boxed{B = (A^T)^{-1} B_0}$, где $\boxed{B_0^T = B_0 > 0}$ - легко обратимая

$$\tau_{n+1} = \frac{(B_0 v_n, z_n)}{(B_0 v_n, v_n)} = \frac{(B_0 B_0^{-1} A^T r_n, z_n)}{(B_0 B_0^{-1} A^T r_n, v_n)} = \frac{(r_n, r_n)}{(r_n, A v_n)}$$ - вычисляется

Условие $C>0$:

$$(B_0 B_0^{-1} A^T A v, v) = (Av, Av) > 0 \Rightarrow \checkmark$$

Замечание

Минимизируется норма погрешности $\|z_{n+1}\|_{B_0}$

§6 Двушаговые итерационные методы вариационного типа (методы сопряженных направлений)

Замечание

Стратегия локальной минимизации не является оптимальной при поиске глобального min $\|z_n\|_D$, равного 0. Желательно выбирать параметры $\{\tau_n\}$ таким образом, чтобы при заданном нач. прибл. y_0 норма $\|z_n\|_D$ являлась минимально возможной $\forall n = 1, 2, \dots$

Задача отличается от поиска оптимального для всех y_0 набора Чебышевских параметров при фикс. числе ~~операций~~ итераций n!

Эффективное решение задачи возможно в классе двушаговых методов:

$$\begin{cases} B\,\dfrac{y_{n+1}-y_n+(1-\alpha_{n+1})(y_n-y_{n-1})}{\tau_{n+1}\,\alpha_{n+1}} + Ay_n = f, & n=1,2,\dots \\ B\,\dfrac{y_1-y_0}{\tau_1} + Ay_0 = f \end{cases}$$

Замечание

При $\alpha_{n+1}=1$ получим одношаговый метод.

Минимум $\|z_n\|_D$ достигается при выборе:

$$\boxed{\tau_{n+1} = \frac{(Dv_n, z_n)}{(Dv_n, v_n)},\ n=0,1,\dots} \quad ; \quad \boxed{\alpha_{n+1} = \left(1 - \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n\alpha_n}\cdot\frac{(Dv_n, z_n)}{(Dv_{n-1}, z_{n-1})}\right)^{-1},\ n=1,2,\dots,\ \alpha_1=1}$$

Замечание

Формула для τ_{n+1} та же, что и для градиентных методов

Основная идея доказательства:

Так же, как при построении Чебышевского набора, получим:

$\omega_n = P_n(C)\cdot\omega_0$, $\omega_n = D^{1/2}z_n$, $C = D^{1/2}B^{-1}AD^{-1/2}$,

$P_n(0) = I$, $P_n(C)$ - матричный многочлен степени n, определяемый рекуррентными соотнош., получ. из ур-ий метода

Далее показано, что минимум $\|z_n\|_D = \|\omega_n\|$ достигается для всех $n=1,2,\dots$ при выполнении условий:

$(C\omega_n, \omega_k)=0$, $k=\overline{0,n-1}$ ✓, если потребовать, чтобы $C^T=C>0$. Отсюда получается набор $\tau_1,\dots,\tau_n$, $\alpha_2,\dots,\alpha_n$

Замечание

Векторы $u,v\in H$: $(Cu,v)=0$, где $C^T=C>0$, называются сопряженными относительно м-цы C. Отсюда общее название — методы сопряженных направлений.

Замечание

Среди векторов $\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_n,\dots$ из H, где $\dim H = m$, ортогональных в смысле ск. произв. $(u,v)_C = (Cu,v)$ ($C^T=C>0$) не может быть больше m векторов, отличных от 0. => методы сопр. направлений должны давать точное реш-е за конечное кол-во шагов. (при некот. $n\le m$: $\omega_n=0$ => точное реш.)

Хотя методы формально можно отнести к прямым, но на практике пребуемая точность достигается при $n \ll m$. Действительно:

$$\|\omega_n\| \le \|P_n(C)\|\cdot\|\omega_0\| \le \|\tilde P_n(C)\|\cdot\|\omega_0\| \le \max_{\gamma_1\le t\le\gamma_2} |\tilde P_n(t)|\cdot\|\omega_0\| \le q_n \|\omega_0\|,$$ где

$\tilde P_n(t)$ - многочлен, построенный при $\alpha_{n+1}=1$ и по чебыш. набору $\{\tau_n\}$

т.е. метод сходится не хуже, чем одношаговый итерац. процесс с той же матрицей B и чебышёвским набором параметров.

§7 Примеры методов сопряженных направлений

Путём выбора матриц D и B строятся аналоги рассм. ранее градиентных методов. Добавляется условие $C^T=C$.

Условия применимости:

1) Возможность вычислений $\tau_{n+1} = \dfrac{(Dv_n, z_n)}{(Dv_n, Dv_n)}$

2) $DB^{-1}A>0$

3) $(DB^{-1}A)^T = DB^{-1}A$

1° Метод сопряженных градиентов

$\boxed{D=A}$, где $\boxed{A^T=A>0}$. Условия 2), 3) $\Rightarrow$ $\boxed{B^T=B>0}$

$$\tau_{n+1} = \frac{(v_n,r_n)}{(v_n,Av_n)}, \quad \alpha_{n+1} = \left(1-\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n\alpha_n}\cdot\frac{(v_n,r_n)}{(v_{n-1},r_{n-1})}\right)^{-1}$$

2° Метод сопряженных невязок

$\boxed{D=A^TA}$, $\boxed{B^TA=A^TB>0}$

$$\tau_{n+1} = \frac{(Av_n,r_n)}{(Av_n,Av_n)}, \quad \alpha_{n+1} = \left(1-\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n\alpha_n}\cdot\frac{(Av_n,r_n)}{(Av_{n-1},r_{n-1})}\right)^{-1}$$

3° Метод сопряженных поправок

$\boxed{D=A^TB^{-1}A}$, $\boxed{A^T=A>0}$, $\boxed{B^T=B>0}$

$$\tau_{n+1} = \frac{(Av_n,v_n)}{(B^{-1}Av_n,Av_n)}, \quad \alpha_{n+1} = \left(1-\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n\alpha_n}\cdot\frac{(Av_n,v_n)}{(Av_{n-1},v_{n-1})}\right)^{-1}$$

4° Метод сопряженных погрешностей

$\boxed{D=B_0}$, $\boxed{B=(A^T)^{-1}B_0}$, $\boxed{B_0^T=B_0>0}$

$$\tau_{n+1} = \frac{(r_n,r_n)}{(r_n,Av_n)}, \quad \alpha_{n+1} = \left(1-\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n\alpha_n}\cdot\frac{(r_n,r_n)}{(r_{n-1},r_{n-1})}\right)^{-1}$$

§8 Решение разностных уравнений 2го порядка методом Фурье

1° Разложение по базису собственных функций

$*$ одномерную задачу:

$y_{\bar{x}x,i} = -f_i$, $y_0 = y_N = 0$, $i = \overline{1,N-1}$, $Nh = l$

Ранее показано, что оператор

$A^{(1)} y_i = -y_{\bar{x}x,i}$, $i = \overline{1,N-1}$, $y_0 = y_N = 0$

имеет собств. знач. и собств. ф-ии:

$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi k h}{2l}$, $\mu_k(i) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi k x_i}{l}$, $k = \overline{1,N-1}$, $i = \overline{0,N}$

Система $\{\mu_k\}$ образует ОНБ в пр-ве $H^{(1)} = \{y(x_i),\ x_i \in \Omega_h^{(1)},\ y_0 = y_N = 0\}$

Будем искать y в виде разложения по базису $\{\mu_k\}$:

$$y = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \mu_k$$

Подставим в ур-ие:

$$\sum_{k=1}^{N-1} c_k \lambda_k \mu_k = f \quad \Big| \ (\ ,\mu_j)$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} c_k \lambda_k (\mu_k, \mu_j) = \hat{f}_j \quad \Rightarrow \quad c_j \lambda_j = (f, \mu_j) = \hat{f}_j$$

Приходим к следующему методу:

1) Вычислить $\hat{f}_k = \sum_{i=1}^{N-1} f_i \mu_k(i) \cdot h$, $k = \overline{1,N-1}$

2) Вычислить $c_k = \frac{\hat{f}_k}{\lambda_k}$, $k = \overline{1,N-1}$

3) Вычислить $y_i = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \mu_k(i)$, $i = \overline{1,N-1}$

Замечание

Число операций (умн. + деления) $O(N^2)$, при этом метод прогонки для решения той же задачи требует $3(N-1)$ операций.

$\Rightarrow$ в одномерном случае метод Фурье неэффективен, однако он активно используется для двумерных задач.

Замечание

Основное кол-во операций затрачивается на вычисление сумм вида:

$$S = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \sin\frac{\pi k i}{N} , \quad i = \overline{1,N-1}$$

Существует метод — быстрое дискретное преобразование Фурье (БДПФ), позволяющее вычислять эти суммы за $O(N \ln N)$ операций. Метод основан на приведении подобных слагаемых:

$ab_1 + ab_2 + ab_3$ — 3 умножения

$a(b_1 + b_2 + b_3)$ — 1 умножение

2° Решение разностной задачи Дирихле методом Фурье

$$y_{\bar{x}_1 x_1, ij} + y_{\bar{x}_2 x_2, ij} = -f_{ij}, \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \; j = \overline{1, N_2 - 1} \qquad N_1 h_1 = l_1, \; N_2 h_2 = l_2$$

$$y|_{\gamma_h} = 0$$

$\{y_0 = y_N = 0\}$

Заметим, что решение задачи на с.з.:

$$\mu_{\bar{x}_2 x_2, j} + \lambda \mu_j = 0, \quad \mu_0 = \mu_{N_2} = 0, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}, \; N_2 h_2 = l_2$$

имеет вид:

$$\lambda_k = \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{\pi k h_2}{2 l_2}, \quad \mu_k(j) = \sqrt{\frac{2}{l_2}} \sin \frac{\pi k x_{2j}}{l_2}, \quad j = \overline{0, N_2}, \; k = \overline{1, N_2 - 1}$$

При фиксированном i ф-ии f_{ij} и y_{ij} могут быть разложены по базису $\{\mu_k\}$

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{N_2 - 1} c_k(i) \mu_k(j), \quad f_{ij} = \sum_{k=1}^{N_2 - 1} \hat{f}_k(i) \mu_k(j)$$

Подставляя в ур-ие, получим:

$$\sum_{k=1}^{N_2 - 1} \left(c_k(i)_{\bar{x}_1 x_1} - \lambda_k c_k(i) \right) \mu_k(j) = -\sum_{k=1}^{N_2 - 1} \hat{f}_k(i) \mu_k(j)$$

В силу ЛНЗ $\{\mu_k\}$ приравняем коэфф. и приходим к алгоритму:

1) Вычисляем коэфф. Фурье правой части:

$$\hat{f}_k(i) = \sum_{j=1}^{N_2 - 1} f_{ij} \mu_k(j) \cdot h_2, \quad k = \overline{1, N_2 - 1}, \; i = \overline{1, N_1 - 1} \quad \to O(N_1 N_2^2) \quad \to O(N_1 N_2 \ln N_2)$$

2) Находим методом прогонки коэфф-ты y:

$$\begin{cases} c_k(i)_{\bar{x}_1 x_1} - \lambda_k c_k(i) = -\hat{f}_k(i), & i = \overline{1, N_1 - 1}, \; k = \overline{1, N_2 - 1} \\ c_k(0) = c_k(N_1) = 0 \end{cases} \quad \to O(N_1 N_2)$$

3) Восстанавливаем ф-ию:

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{N_2 - 1} c_k(i) \mu_k(j), \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \; j = \overline{1, N_2 - 1} \quad \to O(N_1 N_2^2) \quad \to O(N_1 N_2 \ln N_2)$$

онки

он

ром:

Замечание

Для модельной задачи получим $\underline{O}(N^3)$ или $\underline{O}(N^2\ln N)$ операций.

Для сравнения метод Гаусса: $\underline{O}(N^6)$

§9 Метод матричной прогонки (ММП)

1° Запись разностной задачи Дирихле в виде системы векторных уравнений

ММП применим для систем след. вида:

$$\begin{cases} -C_0y_0 + B_0y_1 = -F_0 \\ A_iy_{i-1} - C_iy_i + B_iy_{i+1} = -F_i, \quad i=\overline{1,N-1} \\ A_Ny_{N-1} - C_Ny_N = -F_N \end{cases}$$

Здесь A_i, B_i, C_i – матрицы $M\times M$, y_i, F_i – векторы разм. M

Перепишем разн задачу Дирихле:

$$\begin{cases} y_{\bar{x}_1x_1,ij} + y_{\bar{x}_2x_2,ij} = -f_{ij}, \quad x_{ij}\in\omega_h \\ y_{ij} = \mu_{ij}, \quad x_{ij}\in\gamma_h \end{cases}$$

$$\frac{y_{i-1,1}}{h_1^2} - \left(\frac{2y_{i1}}{h_1^2} - \frac{-2y_{i1}+y_{i2}}{h_2^2}\right) + \frac{y_{i+1,1}}{h_1^2} = -\left(f_{i1}+\frac{\mu_{i0}}{h_2^2}\right) \quad \text{(ур-ие при } j=1)$$

$$\frac{y_{i-1,j}}{h_1^2} - \left(\frac{2y_{ij}}{h_1^2} - \frac{y_{i,j-1}-2y_{ij}+y_{i,j+1}}{h_2^2}\right) + \frac{y_{i+1,j}}{h_1^2} = -f_{ij}, \quad 2\le j\le N_2-2$$

$$\frac{y_{i-1,N_2-1}}{h_1^2} - \left(\frac{2y_{i,N_2-1}}{h_1^2} - \frac{y_{i,N_2-2}-2y_{i,N_2-1}}{h_2^2}\right) + \frac{y_{i+1,N_2-1}}{h_1^2} = -\left(f_{i,N_2-1}+\frac{\mu_{iN_2}}{h_2^2}\right)$$

Введём векторы:

$$y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{i,N_2-1})^T$$

$$f_i = \left(f_{i1}+\frac{\mu_{i0}}{h_2^2}, f_{i2}, \dots, f_{i,N_2-2}, f_{i,N_2-1}+\frac{\mu_{iN_2}}{h_2^2}\right)^T$$

$$\mu_0 = (\mu_{01}, \mu_{02}, \dots, \mu_{0N_2-1})^T$$

$$\mu_{N_1} = (\mu_{N_11}, \mu_{N_12}, \dots, \mu_{N_1,N_2-1})^T$$

Пусть I_2 – ед. м-ца размерности N_2-1, $\Lambda_2 = \frac{1}{h_2^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

м-ца оператора второй произв. по перем. x_2

Система примет следующий вид:

$$\left\{ \frac{1}{h_1^2}I_2y_{i-1} - \left(\frac{2}{h_1^2}I_2 - \Lambda_2\right)y_i + \frac{1}{h_1^2}I_2y_{i+1} = -f_i, \quad i=\overline{1,N_1-1} \right.$$

$y_0 = \mu_0$, $y_{N_1} = \mu_{N_1}$

Имеем:

$A_i = B_i = \frac{1}{h_1^2} J_2$, $B_0 = A_N = 0$, $C_i = \frac{2}{h_1^2} J_2 - \Lambda_2$ ($C_0 = J_2$, $C_{N_1} = J_2$)

Формулы ММП

Как и в скалярном варианте, решение ищется в виде:

$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$

здесь α_{i+1} – матрицы $M \times M$, β_{i+1} – векторы разм. M

Подставим в уравнение:

$A_i(\alpha_i(\alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1})) + A_i\beta_i - C_i(\alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}) + B_i y_{i+1} = -F_i$

Равенство выполнено, если потребовать:

$(A_i\alpha_i - C_i)\alpha_{i+1} + B_i = 0$ (коэфф при y_{i+1})

$(A_i\alpha_i - C_i)\beta_{i+1} + A_i\beta_i = -F_i$

Получим формулы прямой прогонки:

$\alpha_{i+1} = (C_i - A_i\alpha_i)^{-1} B_i$

$\beta_{i+1} = (C_i - A_i\alpha_i)^{-1}(A_i\beta_i + F_i)$

Из первого уравнения: $-C_0 y_0 + B_0 y_1 = -F_0 \Leftrightarrow y_0 = C_0^{-1} B_0 y_1 + C_0^{-1} F_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 = C_0^{-1} B_0$, $\beta_1 = C_0^{-1} F_0$

Из последнего ур-ия: $A_N y_{N-1} - C_N y_N = -F_N \Leftrightarrow A_N(\alpha_N y_N + \beta_N) - C_N y_N = -F_N$

$\Rightarrow y_N = (C_N - A_N\alpha_N)^{-1}(A_N\beta_N + F_N) = \beta_{N+1}$

Приходим к алгоритму ММП:

$\alpha_{i+1} = (C_i - A_i\alpha_i)^{-1} B_i$, $\alpha_1 = C_0^{-1} B_0$, $i = \overline{1, N-1}$

$\beta_{i+1} = (C_i - A_i\alpha_i)^{-1}(A_i\beta_i + F_i)$, $\beta_1 = C_0^{-1} F_0$, $i = \overline{1, N}$

$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$, $y_N = \beta_{N+1}$, $i = \overline{N-1, 0}$

Замечание

Предполагается $\exists$ м-ц. $(C_i - A_i\alpha_i)^{-1}$, $i = \overline{1, N}$, C_0^{-1}

Замечание

Количество операций: $O(N \cdot M^3)$. На каждом шаге требуется обратить м-цу $M \times M$ и перемножать такие м-цы.

Для модельной задачи: $O(N^4)$

3° Устойчивость ММП

Напомним, что подчиненной нормой м-цы A назыв. $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Опр ММП устойчив, если $\exists\, (C_i - A_i \alpha_i)^{-1}$, $i=\overline{1,N}$, C_0^{-1} и $\|\alpha_i\| \leq 1$, $i=\overline{1,N}$

Замечание

Требование $\|\alpha_i\| \leq 1$ гарантирует устойчивость вычислений по ф-ле:

$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$

Теорема 11

Пусть $A_i, B_i \neq 0$, $i=\overline{1,N-1}$, $\exists\, C_i^{-1}$, $i=\overline{0,N}$ и выполн.: $\|C_i^{-1}A_i\| + \|C_i^{-1}B_i\| \leq 1$, $i=\overline{1,N-1}$, $\|C_0^{-1}B_0\| \leq 1$, $\|C_N^{-1}A_N\| < 1$. Тогда ~~тогда~~ ММП устойчив.

Док-во: (не надо)

Покажем устойчивость ММП для разн. задачи Дирихле:

$A_i = B_i = \frac{1}{h_1^2} J_2$, $C_i = \frac{2}{h_1^2} J_2 - \Lambda_2$, $B_0 = A_N = 0 \Rightarrow \|C_0^{-1}B_0\| \leq 1$ и $\|C_N^{-1}A_N\| < 1$ выполняются.

Первое нер-во примет вид: $\|C_i^{-1}\| \leq \frac{h_1^2}{2} \Leftrightarrow \|C_i y\| \geq \frac{2}{h_1^2}\|y\|$

$\|C_i y\|^2 = \left(\left(\frac{2}{h_1^2}J_2 - \Lambda_2\right)y, \left(\frac{2}{h_1^2}J_2 - \Lambda_2\right)y\right) = \frac{4}{h_1^4}\|y\|^2 - \frac{4}{h_1^2}(\Lambda_2 y, y) +$

$+ \|\Lambda_2 y\|^2 \geq \frac{4}{h_1^4}\|y\|^2$, если допустить, что $(\Lambda_2 y, y) \leq 0$

$(\Lambda_2 y, y) = \sum\limits_{i=1}^{N_1-1} (y_{\bar{x}_2 x_2, i}\, y) h_2 = -\sum\limits_{i=2}^{N_1} (y_{\bar{x}_2 i})^2 h_2 \leq 0$ ✓ $\Rightarrow$ нер-во вып.

Задачи к главе III

Задача 1

Найти с.з. λ для ~~з.ур.~~ задачи:

$$\begin{cases} y_{\bar{x}x,i} + \frac{\lambda}{4}(y_{i-1} + 2y_i + y_{i+1}) = 0, \ i=\overline{1,N-1}, \ hN=1 \\ y_0 = y_N = 0 \end{cases}$$

Решение:

$\left(1 + \frac{\lambda h^2}{4}\right) y_{\bar{x}x,i} + \lambda y_i = 0$

$y_{\bar{x}x,i} + \alpha y_i = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{4\lambda}{4+\lambda h^2}$, $\lambda = \frac{4\alpha}{4-\alpha h^2}$, $\alpha_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi k h}{2}$

Ответ: $\lambda_k = \frac{4}{h^2}\operatorname{tg}^2\frac{\pi k h}{2}$

Задача 2

Доказать, что $A^* = A > 0$

$Ay_i = -y_{\bar{x}x,i}$, $i = \overline{1, N-1}$, $Ay_N = \frac{1}{h} y_{\bar{x},N}$, $y_0 = 0$

в пр-ве $H = \{ y(x_i) , x_i \in \Omega_h , y_0 = 0 \}$

Док-во:

$y_{\bar{x}x} = y_{x\bar{x}}$

$$(Ay, v) = -\sum_{i=1}^{N-1} (y_{\bar{x}x} v)_i h + \frac{1}{h} (y_{\bar{x}} v)_N h = -\sum_{i=1}^{N-1} (y_{x\bar{x}} v)_i h + (y_{\bar{x}} v)_N =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-2} (y_x v_x)_i h - (y_x v)_{N-1} + (y_{\bar{x}} v)_N = \sum_{i=0}^{N-1} (y_x v_x)_i h$$

y и v - симм. $\Rightarrow$ дорог. до $\Rightarrow (Av, y)$

$$\Rightarrow (Ay, v) = (Av, y) = (y, Av) \text{ , т.е. } A = A^*$$

$(Ay, y) = \sum_{i=0}^{N-1} (y_x)_i^2 h \geq 0 \Rightarrow A > 0$ ($\Sigma = 0$ только при $y_{x_i} = 0$, $i = \overline{0, N-1} \Rightarrow y = const$, $y_0 = 0$)

ч.т.д.

Задача 3

Доказать сходимость метода Якоби для задачи:

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = -f_i \text{ , } i = \overline{1, N-1} \text{ , } y_0 = y_N = 0 \text{ , } hN = 1$$

Док-во:

Выпишем метод Якоби:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i-1}^{(n)} - 2y_i^{(n+1)} + y_{i+1}^{(n)}}{h^2} = -f_i , \\ y_0^{(n+1)} = y_N^{(n+1)} = 0 \end{cases}$$

$B \frac{y^{(n+1)} - y^{(n)}}{\tau} + Ay^{(n)} = f$, $B = I$, $\tau = \frac{h^2}{2}$, $Ay = -y_{\bar{x}x}$, $y|_\gamma = 0$

Для сходимости достаточно $B > \frac{\tau}{2} A$

В данном случае: $I > \frac{h^2}{4} A \Leftrightarrow (Ay, y) \leq \frac{4}{h^2} (y, y)$, а это правда, ч.т.д.

Замечание

Если $y_0 = \mu_1$, $y_N = \mu_2$, тогда:

$B \frac{y^{(n+1)} - y^{(n)}}{\tau} + Ay^{(n)} = \tilde{f}$, $\tilde{f} = (f_1 + \frac{\mu_1}{h^2}, f_2, \dots, f_{N-1} + \frac{\mu_2}{h^2})$

B, τ и A - те же! $\Rightarrow$ все хорошо.

Задача 4

Выяснить, сходится ли метод Якоби для разн. задачи:

$$\begin{cases} y_{\bar{x}x,i} = -f_i, & i=\overline{1,N-1}, \quad hN=1 \\ y_0 = y_{\bar{x},N} = 0 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i-1}^{(n)} - 2y_i^{(n+1)} + y_{i+1}^{(n)}}{h^2} = -f_i, & i=\overline{1,N-1} \\ \dfrac{y_N^{(n+1)} - y_{N-1}^{(n)}}{h} = 0, & y_0^{(n+1)}=0 \end{cases}$$ — метод Якоби

Перепишем в канон. форме:

$$B\frac{y^{(n+1)}-y^{(n)}}{\tau} + Ay^{(n)} = f.$$

$\tau = h^2$, $By_i = 2y_i$, $i=\overline{1,N-1}$, $By_N = y_N$, $y_0=0$

A — оператор разностной задачи 2 $\Rightarrow$ для него получено: $(Ay,y) = \sum_{i=0}^{N-1}(y_{x,i})^2 h = \frac{1}{h^2}\sum_{i=0}^{N-1}(y_{i+1}-y_i)^2 h \overset{(*)}{\le} \frac{2}{h^2}\sum_{i=0}^{N-1}(y_{i+1}^2+y_i^2)h = \frac{2}{h^2}(2y_1^2+2y_2^2+\dots+2y_{N-1}^2+y_N^2)h = \frac{2}{h^2}(By,y) \Rightarrow B > \frac{\tau}{2}A$ (с учетом $\tau=h^2$), а это и есть усл-е сх-ти.

Равенство в (*) возможно, когда $y_{i+1}=-y_i$, $i=\overline{0,N-1}$, $y_0=0 \Leftrightarrow y=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow B > \frac{\tau}{2}A$ именно строгое.

Ответ: сходится

Задача 5

Доказать сходимость метода Зейделя для модельной задачи

Док-во:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i-1,j}^{(n+1)} - 2y_{ij}^{(n+1)} + y_{i+1,j}^{(n)}}{h^2} + \dfrac{y_{i,j-1}^{(n+1)} - 2y_{ij}^{(n+1)} + y_{i,j+1}^{(n)}}{h^2} = -f_{ij} \\ y_{0j}^{(n+1)}=0, \quad y_{Nj}^{(n+1)}=0, \quad y_{i0}^{(n+1)}=0, \quad y_{iN}^{(n+1)}=0 \end{cases}, \quad i,j=\overline{1,N-1}, \quad hN=1$$

метод Зейделя

Ранее показано, что в канон. форме:

$$B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} + Ay_n = f$$

$\tau = 1$, $B = \left(\frac{2}{h^2}J + R\right)$, $A = \cancel{\Delta_h} -\Delta_h = R+R^*$, $Ry_{ij} = \frac{1}{h}(y_{\bar{x}_1}+y_{\bar{x}_2})_{ij}$, y_{ij} ... $y|_\gamma =$

$(Ay,y) = ((R+R^*)y,y) = 2(Ry,y)$

$(By,y) = \left(\left(\frac{2}{h^2}J+R\right)y,y\right) = \frac{2}{h^2}\|y\|^2 + (Ry,y) \overset{y\ne 0}{>} (Ry,y) = \frac{1}{2}(Ay,y) = \frac{\tau}{2}(Ay,y)$

$\Leftrightarrow B > \frac{\tau}{2}A \Rightarrow$ метод сходится, ч.т.д.

Задача 6

Построить схему 2го порядка и выписать метод Зейделя для решения разностных ур-ий:

$$\begin{cases} u''(x) = -f(x), \quad 0<x<1 \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Решение:

Достаточно рассмотреть условие 2го рода.

$$u_{\bar{x},N} = u'(1) - \frac{h}{2}u''(1) + \underline{O}(h^2) = \overset{0}{u'(1)} + \frac{h}{2}f(1) + \underline{O}(h^2) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ приходим к ур-ию: $\underline{y_{\bar{x},N} = \frac{h}{2}f_N}$

Запишем метод Зейделя:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i-1}^{(n+1)} - 2y_i^{(n+1)} + y_{i+1}^{(n)}}{h^2} = -f_i, \quad i = \overline{1,N-1} \\ \dfrac{y_N^{(n+1)} - y_{N-1}^{(n+1)}}{0{,}5h} = f_N, \quad y_0^{(n+1)} = 0 \end{cases}$$

Задача 7

Оценить необходимое число итераций $n_0(\varepsilon)$ для достижения точности $\varepsilon = h^2$ итерац. метода:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i-1}^{(n)} - 2y_i^{(n+1)} + y_{i+1}^{(n)}}{h^2} = -f_i, \quad i = \overline{1,N-1}, \quad hN = 1 \quad (\text{метод Якоби}) \\ y_0^{(n+1)} = y_N^{(n+1)} = 0 \end{cases}$$

Решение:

В канонической форме имеем:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = f, \quad \tau = \frac{h^2}{2}, \quad Ay_i = -y_{\bar{x}x,i} \quad (y|_\gamma = 0)$$

Для A: $\lambda_{min}(A) = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2}$, $\lambda_{max}(A) = \frac{4}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2}$

$\tau = \frac{h^2}{2} = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}$ $\Rightarrow$ метод Якоби совп. с МПИ с оптимальным параметром $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \|y_n - y\| \le \rho^n \|y_0 - y\|, \quad \rho = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \quad \xi = \frac{\lambda_{min}(A)}{\lambda_{max}(A)} \approx \frac{\pi^2 h^2}{4}$$

$$\ln\left(\frac{1}{\rho}\right) = \ln\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right) = \ln\left(1 + \frac{2\xi}{1-\xi}\right) \underset{\text{мал.}\,\xi}{\approx} 2\xi$$

$$n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\rho)} \approx \frac{2\ln\left(\frac{1}{h}\right)\cdot 2}{\pi^2 h^2}$$

Ответ: $n_0(\varepsilon) \approx \frac{4}{\pi^2} N^2 \ln N$

Задача 8

Для разностной задачи:

$$\begin{cases}(a y_{\bar x})_{x,i} = -f_i, & i=\overline{1,N-1}, \quad hN=1\\ y_0=y_N=0, & 0<c_1\le a_i\le c_2\end{cases}$$

Рассмотреть явный метод:

$$\frac{y_i^{(n+1)}-y_i^{(n)}}{\tau} = (a y_{\bar x}^{(n)})_{x,i}+f_i, \quad y^{(n+1)}|_\gamma=0$$

и неявный: здесь $B=-\Delta_h$

$$-\frac{y^{(n+1)}_{\bar x x,i}-y^{(n)}_{\bar x x,i}}{\tau} = (a y_{\bar x}^{(n)})_{x,i}+f_i, \quad y^{(n+1)}|_\gamma=0$$

Выбрать параметры τ и оценить $n_0(\varepsilon)$.

Решение:

Введём $By_i=-y_{\bar x x,i}$, $Ay_i=-(ay_{\bar x})_{x,i}$, $y|_\gamma=0$

$c_1\delta I\le A\le c_2\Delta I$ — нужно для первого, $\delta=\lambda_{min}(B)=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2}$

$c_1B\le A\le c_2 B$ — для второго, $\Delta=\lambda_{max}(B)=\frac{4}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2}$

Для явной схемы: $\tau=\frac{2}{c_1\delta+c_2\Delta}$, $n_0(\varepsilon)=\frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\rho)}\approx\frac{\ln(1/\varepsilon)}{2\xi}\approx\frac{2}{\pi^2h^2}\frac{c_2}{c_1}\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

Для неявной схемы: $\tau=\frac{2}{c_1+c_2}$, $\cancel{n_0(\varepsilon)\approx\frac{\ln(1/\varepsilon)}{2\frac{c_1}{c_2}}=\frac{c_2}{c_1}\frac{1}{2}\ln(1/\varepsilon)}$

$$n_0(\varepsilon)=\ln^{-1}\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)\ln(1/\varepsilon)=\ln^{-1}\left(\frac{c_2+c_1}{c_2-c_1}\right)\cdot\ln(1/\varepsilon)$$

Задача 9

Оценить $n_0(\varepsilon)$:

$$\frac{y^{(n)}_{i-1,j}-2y^{(n+1)}_{ij}+y^{(n)}_{i+1,j}}{h_1^2}+\frac{y^{(n)}_{i,j-1}-2y^{(n+1)}_{ij}+y^{(n)}_{i,j+1}}{h_2^2}=-f_{ij}$$

$y_{0j}^{(n+1)}=y_{N_1j}^{(n+1)}=y_{i0}^{(n+1)}=y_{iN_2}^{(n+1)}=0$, $i=\overline{1,N_1-1}$, $N_1h_1=l_1$, $j=\overline{1,N_2-1}$, $N_2h_2=l_2$

Решение:

$\lambda_{min}(A)=\frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi h_1}{2l_1}+\frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{\pi h_2}{2l_2}\approx\pi^2\left(\frac{1}{l_1^2}+\frac{1}{l_2^2}\right)\overset{\text{обозн.}}{=}\pi^2\frac{2}{l^2}$

$\lambda_{max}(A)=\frac{4}{h_1^2}\cos^2\frac{\pi h_1}{2l_1}+\frac{4}{h_2^2}\cos^2\frac{\pi h_2}{2l_2}\approx4\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)\overset{\text{обозн}}{=}\frac{8}{h^2}$

$\tau^{-1}=\frac{2}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2}=\frac{\lambda_{min}(A)+\lambda_{max}(A)}{2}$ ⇒ ~~по~~ совпало с опт. параметром! ⇒ МПИ

Ответ: $n_0(\varepsilon)\approx\frac{\ln(1/\varepsilon)}{2\xi}\approx\frac{4l^2}{\pi^2h^2}\ln(1/\varepsilon)$

Задача 10

Выписать модельную задачу в матр. форме (т.е. в виде $Ay=f$) для $N=5$

Решение:

$$\begin{cases} \dfrac{-y_{i-1,j}+2y_{ij}-y_{i+1,j}}{h^2}+\dfrac{-y_{i,j-1}+2y_{ij}-y_{i,j+1}}{h^2}=f_{ij} \\ y_{0j}=y_{Nj}=y_{i0}=y_{iN}=0, \quad i,j=\overline{1,N-1}, \quad hN=1 \end{cases}$$

$N=4$

$$\begin{array}{c|ccc} j & & & \\ 3 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 \quad i \end{array}$$

← нумерация узлов.

Выпишем м-цу:

узлы	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	-1	0	-1	0	0	0	0	0
2	-1	4	-1	0	-1	0	0	0	0
3	0	-1	4	-1	0	-1	0	0	0
4	-1	0	0	4	-1	0	-1	0	0
5	0	-1	0	-1	4	-1	0	-1	0
6	0	0	-1	0	-1	4	0	0	-1
7	0	0	0	-1	0	0	4	-1	0
8	0	0	0	0	-1	0	-1	4	-1
9	0	0	0	0	0	-1	0	-1	4

← узлы

Обозначим $y=(y_{11},y_{21},y_{31},y_{41},y_{12},y_{22},\dots,y_{44})^T$

$f=(f_{11},f_{21},f_{31},f_{41},f_{12},f_{22},\dots,f_{44})^T$

I, O – единичн. и нул. м-ца разм. 4×4

$$A_4=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A=\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} A_4 & -I & 0 & 0 \\ -I & A_4 & -I & 0 \\ 0 & -I & A_4 & -I \\ 0 & 0 & -I & A_4 \end{bmatrix}$$

Сис-ма: $Ay=f$

Глава IV. Теория устойчивости разностных схем

§1 Разностные схемы как операторные уравнения

1° Представление разн. схем в виде операторных ур-ий

Разностная схема представляет собой некот. семейство операторных ур-ий:

$A_h y_h = \varphi_h, \quad y_h, \varphi_h \in H_h, \quad \dim H_h \xrightarrow[h\to 0]{} \infty$

H_h - конечномерное пространство, A_h - лин. оператор в H_h.

Пример 1

$\Omega_h = \{x_i, \ i=\overline{0,N}, \ hN = l\}, \quad \omega_h = \{x_i, \ i=\overline{1,N-1}\}$

$y_{\bar{x}x,i} = -f_i, \quad x_i \in \omega_h, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2$

$H_{N-1} = \{y(x_i), \ x_i \in \omega_h\}$

Введём $A^{(1)} y_1 = -\frac{-2y_1 + y_2}{h^2} = f_1 + \frac{\mu_1}{h^2} = \varphi_1$

$A^{(1)} y_i = -y_{\bar{x}x,i} = f_i = \varphi_i, \quad i = \overline{2, N-2}$

$A^{(1)} y_{N-1} = -\frac{y_{N-2} - 2y_{N-1}}{h^2} = f_{N-1} + \frac{\mu_2}{h^2} = \varphi_{N-1}$

Равенства задают $\varphi \in H_{N-1}$ и оператор $A^{(1)}: H_{N-1} \to H_{N-1}$.

Задача примет вид: $A^{(1)} y = \varphi, \quad y, \varphi \in H_{N-1}$.

Оператор $A^{(1)}$ м.б. задан иначе:

$\overset{\circ}{H}_{N-1} = \{y(x_i), \ x_i \in \Omega_h; \ y_0 = y_N = 0\} \Rightarrow$

$A^{(1)} y_i = -y_{\bar{x}x,i}, \quad x_i \in \omega_h, \quad y_0 = y_N = 0$

$A^{(1)}: H_{N-1} \to \overset{\circ}{H}_{N-1}, \quad \dim H_{N-1} = \dim \overset{\circ}{H}_{N-1} = N-1$

Пример 2

$x_{ij} = (x_{1i}; x_{2j}), \quad x_{1,i} = ih_1, \quad x_{2,j} = jh_2, \quad N_1 h_1 = l_1, \quad N_2 h_2 = l_2$

$\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h, \quad \omega_h = \{x_{ij}, \ i = \overline{1, N_1-1}, \ j = \overline{1, N_2-1}\}, \quad \gamma_h = \{x_{0j}, x_{N_1 j}, x_{i0}, x_{iN_2}, ij-$

Задачу: $\begin{cases} y_{\bar{x}_1 x_1, ij} + y_{\bar{x}_2 x_2, ij} = -f_{ij}, & x_{ij} \in \omega_h \\ y_{ij} = \mu_{ij}, & x_{ij} \in \gamma_h \end{cases}$

Введём $H(\omega) = \{y(x_{ij}), \ x_{ij} \in \omega_h\}$

$\overset{\circ}{H}(\Omega) = \{y(x_{ij}), \ x_{ij} \in \Omega_h, \ y|_{\gamma_h} = 0\}$

$A y_{ij} = -(y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2})_{ij}, \quad x_{ij} \in \omega_h, \quad y|_{\gamma_h} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A: \overset{\circ}{H}(\Omega) \to H(\omega), \quad \dim \overset{\circ}{H}(\Omega) = \dim H(\omega) = (N_1 - 1)(N_2 - 1)$

$Ay = \varphi, \quad y \in \overset{\circ}{H}(\Omega), \quad \varphi \in H(\omega)$, где $\varphi = \varphi(f, \mu)$

Корректность операторных уравнений

Пусть схема записана в операторном виде: $A_h y_h = \varphi_h$, где $y_h, \varphi_h \in H_h$,

$A_h: H_h \to H_h$ (1)

Будем считать, что в H_h заданы $\|\cdot\|_{1h}$, $\|\cdot\|_{2h}$

Опр Разностная схема (1), записанная в опр. виде, корректна, если:

1) $\forall \varphi \in H_h$ $\exists!$ решение y_h ур-ия (1)

2) $\exists M > 0$, не зависящая от h: $\|y_h\|_{1h} \le M \cdot \|\varphi_h\|_{2h}$

Замечание

Требование 1) равносильно $\exists A_h^{-1}$, а требование 2) — равномерной по h ограниченности A_h^{-1}.

Опр Требование 2) назыв. устойчивостью разн. схемы (1).

Пусть в H_h задано $(y,v)_h$ и $\|y\|_h = \sqrt{(y,y)_h}$

Теорема 1

Пусть $\exists \delta > 0$, не завис. от h: $\forall v_h \in H_h$ $(A_h v_h, v_h)_h \ge \delta \|v_h\|_h^2$. Тогда схема (1) корректна и вып. оценка: $\|y_h\|_h \le \delta^{-1} \|\varphi_h\|_h$

Док-во:

1) Пусть $A_h z_h = 0$ => воспользуемся нер-вом для z_h:

$\delta \|z_h\|_h^2 \le (\underbrace{A_h z_h}_{=0}, z_h)_h = 0$ => $z_h = 0$ <=> $\exists!$ реш-ия (1)

2) Пусть $A_h y_h = \varphi_h$ => восп. нер-вом для y_h:

$\delta \|y_h\|_h^2 \le (A_h y_h, y_h)_h = (\varphi_h, y_h)_h \overset{\text{К.Б.}}{\le} \|y_h\|_h \cdot \|\varphi_h\|_h$ => $\|y_h\|_h \le \delta^{-1} \|\varphi_h\|_h$,

ч.т.д.

Отметим связь условия $(Av,v) \ge \delta \|v\|^2$ с оценками с.зн. оператора A

Лемма 1

Пусть $\forall v \in H$: $(Av, v) \ge \delta \|v\|^2$, тогда все с.зн. λ оп. A — веществ. числа, такие, что $\lambda \ge \delta$.

Док-во:

Пусть $A\mu = \lambda\mu$ => $(A\mu, \mu) = \lambda \|\mu\|^2 \ge \delta \|\mu\|^2$ => $\lambda \ge \delta$, ч.т.д.

Лемма 2

Пусть $A^*=A$, $\lambda_{min}(A)\geq\delta^{>0}$. Тогда $\forall v\in H$ выполн.: $(Av,v)\geq\delta\|v\|^2$.

Док-во:

Т.к. $A^*=A$, то $\exists$ ОНБ из с.в. оп. A $\{\mu_k\}$ пр-ва H. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall v\in H$: $v=\sum_k c_k\mu_k$ и что

$(Av,v)=\sum_k\lambda_k c_k^2\geq\delta\cdot\sum_k c_k^2=\delta\|v\|^2$, ч.т.д.

Следствие

Пусть $A_h^*=A_h$, $\exists\,\delta$, незав. от h : $\lambda_{min}(A_h)\geq\delta$, тогда схема (1) корректна и $\|y_h\|_h\leq\delta^{-1}\|\varphi_h\|_h$.

Пример 1

$(y,v)_{H^0_{N-1}}=\sum_{i=1}^{N-1}y_iv_ih \Rightarrow \|y\|_{H^0_{N-1}}=\sqrt{(y,y)_{H^0_{N-1}}}$

$(A^{(1)})^*=A^{(1)}$, $\lambda_{min}(A^{(1)})\geq\frac{9}{\ell^2}\Rightarrow\|y\|_{H^0_{N-1}}\leq\frac{\ell^2}{9}\|\varphi\|_{H^0_{N-1}}$

Пример 2

$(y,v)_{H^0(\Omega)}=\sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2-1}y_{ij}v_{ij}h_1h_2 \Rightarrow \|y\|_{H^0(\Omega)}=\sqrt{(y,y)_{H^0(\Omega)}}$

$A^*=A$, $\lambda_{min}(A)\geq\frac{9}{\ell_1^2}+\frac{9}{\ell_2^2}\Rightarrow\|y\|_{H^0(\Omega)}\leq\left(\frac{9}{\ell_1^2}+\frac{9}{\ell_2^2}\right)^{-1}\cdot\|\varphi\|_{H^0(\Omega)}$

3° Операторы ~~левой~~ первой разностной производной

* разностную задачу вида:

$y_{\bar{x},i}=f_i$, $i=\overline{1,N}$, $y_0=\mu$, $Nh=\ell$

Задача корректна, т.к. $y_i=y_{i-1}+hf_i\Rightarrow y_i=\mu+h\sum_{j=1}^{i}f_j\Rightarrow$

$\Rightarrow\|y\|_C\leq|\mu|+\ell\|f\|_C$

Пусть $H_N=\{y(x_i),\ i=\overline{1,N}\}$, ~~определим~~ $(y,v)_{H_N}=\sum_{i=1}^{N}y_iv_ih$

Опр Оператор $A: H_N\to H_N$, где $Ay_1=\frac{y_1}{h}$, $Ay_i=y_{\bar{x}}$, $i=\overline{2,N}$, называется оператором левой разностной произв.

Теорема 2

Оператор A^* в пр-ве H_N имеет вид:

$A^*v_i=-v_{x,i}$, $i=\overline{1,N-1}$, $A^*v_N=\frac{v_N}{h}$.

Док-во:

$\forall y,v\in H_N$:

$(Ay,v)_{H_N} = \frac{y_1}{h} v_1 h + \sum_{i=2}^{N} y_{\bar{x},i} v_i h = y_1 v_1 + \sum_{i=2}^{N} (y_i - y_{i-1}) v_i = \sum_{i=1}^{N} y_i v_i - \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_{i+1} = \sum_{i=1}^{N-1} y_i (v_i - v_{i+1}) + y_N v_N = -\sum_{i=1}^{N-1} y_i v_{x,i} h + \frac{y_N v_N}{h} h = (y, A^* v)_{H_N}$, ч.т.д.

Опр Оператор A^* назыв. оператором правой разн. произв.

Теорема 3

Оператор A полож. опр. в H_N, $(Ay,y)_{H_N} = \frac{y_1^2 + y_N^2}{2} + \frac{h}{2} \sum_{i=2}^{N} y_{\bar{x},i}^2 h$

Док-во:

$(Ay,y)_{H_N} = \frac{y_1}{h} y_1 h + \sum_{i=2}^{N} y_{\bar{x},i} y_i h = \sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \sum_{i=2}^{N} y_i y_{i-1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \sum_{i=2}^{N} y_i y_{i-1} + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{N+1} y_{i-1}^2 = \frac{y_1^2 + y_N^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{N} (y_i - y_{i-1})^2 = \frac{y_1^2 + y_N^2}{2} + \frac{h}{2} \sum_{i=2}^{N} y_{\bar{x},i}^2 h > 0$, если $y \neq 0$, ч.т.д.

Следствие

$A^* > 0$, т.к. $(A^* y, y) = (y, Ay) = (Ay, y) > 0, \forall y \neq 0$

§2 Канонический вид и условия устойчивости двуслойных схем

1° Канонический вид двуслойной схемы

Форма записи разн. схем $A_h y_h = \varphi_h$ удобна для стационарных задач, а для нестационарных задач используются другие формы записи.

Пусть $H_h = \{ y(x), x \in \Omega_h \}$

$\omega_\tau = \{ t_n = n\tau,\ n = \overline{0,K},\ K\tau = T \}$ — временная сетка

$y_n = y(t_n) \in H_h$

Опр Пусть в пр-ве H_h заданы линейные операторы B_1, B_2 и векторы y_0, φ_n. Двуслойной схемой назыв. операторно-разностное ур-ие вида:

$B_1 y_{n+1} + B_2 y_n = \varphi_n$, $n = \overline{0, K-1}$, $y_0 \in H_h$

Перепишем ур-ие в виде:

$\tau B_1 \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + (B_1 + B_2) y_n = \varphi_n$, обозн. $B = \tau B_1$, $A = B_1 + B_2$

Опр Каноническим видом двуслойной схемы назыв. ее запись в форме:

$B \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A y_n = \varphi_n$, $n = \overline{0, K-1}$, $y_0 \in H_h$

2° Устойчивость двуслойных схем

Пусть схема записана в виде:

$$B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} + Ay_n = \varphi_n, \quad n=\overline{0,k-1}, \quad y_0\in H_h \qquad (2)$$

Будем считать, что $\exists B^{-1}_{h,\tau}(t_n)$, т.е. условие 1) корректности выполнено.

В H_h заданы нормы $\|\cdot\|_{1h}$, $\|\cdot\|_{2h}$.

Также будем рассм. уравнение:

$$B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} + Ay_n = 0, \quad n=\overline{0,k-1}, \quad y_0\in H_h \qquad (2')$$

$$B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} + Ay_n = \varphi_n, \quad n=\overline{0,k-1}, \quad y_0 = 0 \qquad (2'')$$

Опр Разн. схема (2) назыв. устойчивой, если $\exists M_1, M_2 > 0$, не завис. от h,τ и n: для решения (2) справедлива оценка:

$$\|y_n\|_{1h} \le M_1\|y_0\|_{1h} + M_2 \max_{0\le j\le n-1}\|\varphi_j\|_{2h}, \quad n=\overline{0,k-1}$$

при всех возможных $\varphi_{h,\tau}(t_n)$, $y_0\in H_h$.

Опр Разн. схема (2) устойчива по нач. данным, если $\exists M_1 > 0$, не завис. от h,τ и n: для решения (2') справедлива оценка:

$$\|y_n\|_{1h} \le M_1\|y_0\|_{1h}, \quad n=\overline{0,k-1}$$

при всех $y_0\in H_h$.

Опр Разн. схема (2) устойчива по правой части, если $\exists M_2 > 0$, не завис. от h,τ и n: для решения (2'') справедлива оценка:

$$\|y_n\|_{1h} \le M_2 \cdot \max_{0\le j\le n-1}\|\varphi_j\|_{2h}, \quad n=\overline{0,k-1}$$

при всех $\varphi_{h,\tau}(t_n)\in H_h$

Замечание

В силу линейности из уст. по нач. данным и пр. части вытекает устойчивость разн. схемы.

Опр Разн. схема (2) равномерно устойчива по нач. данным, если $\exists \rho, M_1 > 0$, не зависящие от τ, h и n: для всех $y_0\in H_h$ для решения ур-ие (2') справедлива оценка: $\|y_{n+1}\|_{1h} \le \rho\|y_n\|_{1h}$, где $\rho^n \le M_1$, $n=\overline{0,k-1}$

Замечание

Ур-ие (2') ~~может~~ имеет вид: $y_{n+1} = S_n y_n$, где $S_n = S_{h,\tau}(t_n) = I - \tau B^{-1}A$

$$\|y_{n+1}\|_{1h} \le \rho\|y_n\|_{1h} \Leftrightarrow \|S_n\| \le \rho \Rightarrow \|y_n\|_{1h} \le \rho^n\|y_0\|_{1h} \le M_1\|y_0\|_{1h}$$

Равномерная устойчивость — более сильное условие, чем уст. по нач. данным

Теорема 4

Пусть разн. схема (2) равном. уст. по нач. данным в $\|\cdot\|_{1h}$ и $0 \le n\tau \le T$. Тогда схема устойчива и по правой части, а для решения ур-ия (2) справедлива оценка: $\|y_n\|_{1h} \le M_1 \cdot \|y_0\|_{1h} + M_2 \cdot \max\limits_{0 \le j \le n-1} \|\varphi_j\|_{2h}$, $n = \overline{0, k-1}$, где $M_2 = M_1 \cdot T$, $\|\varphi_j\|_{2h} = \|B_j^{-1}\varphi_j\|_{1h}$

Док-во:

Перепишем ур-ие (2) для $n=j$ в виде:

$y_{j+1} = S_j y_j + \tau B_j^{-1}\varphi_j$

$\|y_{j+1}\|_{1h} \le \|S_j\| \cdot \|y_j\|_{1h} + \tau \|B_j^{-1}\varphi_j\|_{1h} \le \rho \|y_j\|_{1h} + \tau \|B_j^{-1}\varphi_j\|_{1h}$

$\|y_{n+1}\|_{1h} \le \rho^n \|y_0\|_{1h} + \tau \sum\limits_{j=0}^{n} \rho^{n-j} \|B_j^{-1}\varphi_j\|_{1h} \le M_1 \left(\|y_0\|_{1h} + T \cdot \max\limits_{0 \le j \le n} \|B_j^{-1}\varphi_j\|_{1h} \right)$

$\Rightarrow$ все получается, ч.т.д.

Замечание

Если $\|B_j^{-1}\| \le M_3$, $\forall h, \tau$, $n = \overline{0, k-1}$, тогда:

$\|y_n\|_{1h} \le M_1 \cdot \|y_0\|_{1h} + M_2 \cdot M_3 \cdot \max\limits_{0 \le j \le n-1} \|\varphi_j\|_{1h}$

Следствие

Для устойчивости схемы (2) достаточно её равномерной устойчивости.

3° Теорема об устойчивости двухслойной схемы

Пусть в H_h введено ск. произв. (y, v), $\|y\| = \sqrt{(y,y)}$ и $\|y\|_A = \sqrt{(Ay,y)}$, где $A^* = A > 0$.

Теорема 5

Пусть $A^* = A > 0$ и не зависит от n. Тогда при условии $B \ge \frac{\tau}{2}A$ разн. схема (2) равномерно уст. по нач. данным, а для реш-ия ур-ия (2') справедлива оценка:

$\|y_{n+1}\|_A \le \|y_n\|_A$, $n = \overline{0, k-1}$ $(\sim \rho = 1)$

Док-во:

Обозначим $y_t = \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}$, тогда: $By_t + Ay_n = 0 \quad |\cdot(y_t, \cdot)$

$(By_t, y_t) + (Ay_n, y_t) = 0$

$\underbrace{\left(\left(B - \frac{\tau}{2}A\right) y_t, y_t \right)}_{\ge 0} + \left(A\left(y_n + \frac{\tau}{2} y_t\right), y_t \right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(A\left(y_n + \frac{\tau}{2} y_t\right), y_t \right) \le 0$

Теорема 4

Пусть разн. схема (2) равном. уст. по нач. данным в $\|\|_{1h}$ и $0\le n\tau \le T$. Тогда схема устойчива и по правой части, а для решения ур-ия (2) справедлива оценка: $\|y_n\|_{1h} \le M_1 \cdot \|y_0\|_{1h} + M_2 \cdot \max\limits_{0\le j\le n-1} \|\varphi_j\|_{2h}$, $n=\overline{0,k-1}$, где $M_2 = M_1 \cdot T$,

$\|\varphi_j\|_{2h} = \|B_j^{-1}\varphi_j\|_{1h}$

Док-во:

Перепишем ур-ие (2) для $n=j$ в виде:

$y_{j+1} = S_j y_j + \tau B_j^{-1}\varphi_j$

$\|y_{j+1}\|_{1h} \le \|S_j\| \cdot \|y_j\|_{1h} + \tau \|B_j^{-1}\varphi_j\|_{1h} \le \rho \|y_j\|_{1h} + \tau \|B_j^{-1}\varphi_j\|_{1h}$

$\|y_{n+1}\|_{1h} \le \rho^n \|y_0\|_{1h} + \tau \sum\limits_{j=0}^{n} \underbrace{\rho^{n-j}}_{\le M_1} \|B_j^{-1}\varphi_j\|_{1h} \le M_1 \left(\|y_0\|_{1h} + T \cdot \max\limits_{0\le j\le n} \|B_j^{-1}\varphi_j\|_{1h} \right)$

=> все получается, ч.т.д.

Замечание

Если $\|B_j^{-1}\| \le M_3$, $\forall h, \tau$, $n=\overline{0,k-1}$, тогда:

$\|y_n\|_{1h} \le M_1 \cdot \|y_0\|_{1h} + M_2 \cdot M_3 \cdot \max\limits_{0\le j\le n-1} \|\varphi_j\|_{1h}$

Следствие

Для устойчивости схемы (2) достаточно её равномерной устойчивости.

3° Теорема об устойчивости двуслойной схемы

Пусть в H_h введено ск. произв. (y,v), $\|y\| = \sqrt{(y,y)}$ и $\|y\|_A = \sqrt{(Ay,y)}$, где $A^* = A > 0$.

Теорема 5

Пусть $A^* = A > 0$ и не зависит от n. Тогда при условии $B \ge \frac{\tau}{2}A$ разн. схема (2) равномерно уст. по нач. данным, а для реш-ия ур-ия (2') справедлива оценка:

$\|y_{n+1}\|_A \le \|y_n\|_A$, $n=\overline{0,k-1}$ $(\sim \rho = 1)$

Док-во:

Обозначим $y_t = \frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}$, тогда: $By_t + Ay_n = 0 \quad |\cdot(y_t, \cdot)$

$(By_t, y_t) + (Ay_n, y_t) = 0$

$(\underbrace{(B - \frac{\tau}{2}A)y_t, y_t}_{\ge 0}) + (A(y_n + \frac{\tau}{2}y_t), y_t) = 0$ =>

=> $(A(y_n + \frac{\tau}{2}y_t), y_t) \le 0$

Заметим, что $y_n + \frac{\tau}{2} y_t = \frac{1}{2}(y_{n+1} + y_n)$ => получим $\{\frac{2}{\tau} > 0\}$ =>

=> $(A(y_{n+1}+y_n), y_{n+1}-y_n) \le 0$ =>

$\|y_{n+1}\|_A^2 - (Ay_{n+1}, y_n) + (Ay_n, y_{n+1}) - \|y_n\|_A^2 \le 0$ =>

=> $\|y_{n+1}\|_A \le \|y_n\|_A$. Т.к. A не зависит от n, то нормы в одних частях нер-ва одинаковые, ч.т.д.

Пример (схема с весами для ур-ние теплопроводности)

$\Omega_h = \{x_i = ih,\ i=\overline{0,N},\ Nh = \ell\}$

$\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n=\overline{0,K},\ K\tau = T\}$

$$\begin{cases} \dfrac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \sigma y_{\bar{x}x,i}^{n+1} + (1-\sigma) y_{\bar{x}x,i}^n, & n=\overline{0,K-1},\ i=\overline{1,N-1} \\ y_0^{n+1} = y_N^{n+1} = 0, & y_i^0 = u_0(x_i) \end{cases}$$

$H_h = \{y(x_i),\ x_i \in \Omega_h,\ y_0 = y_N = 0\}$

$(y,v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h$, $\quad Ay_i = -y_{\bar{x}x,i},\ i=\overline{1,N-1},\ y_0 = y_N = 0$

$A: H_h \to H_h$, $\quad A^* = A > 0$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \sigma A y_{n+1} + (1-\sigma) A y_n = 0$$

В канонич. виде: $B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} + Ay_n = 0$, $\quad B = (J + \tau\sigma A)$

Исследуем равном. уст.: $B \ge \frac{\tau}{2} A \Leftrightarrow ((J + \tau\sigma A)y, y) \ge \frac{\tau}{2}(Ay, y)$

$\tau(\frac{1}{2} - \sigma)(Ay, y) \le \|y\|^2$

Т.к. $(Ay, y) \le \frac{4}{h^2}\|y\|^2$, то приходим к дост. условию:

$\tau(\frac{1}{2} - \sigma) \cdot \frac{4}{h^2} \le 1$ => $\sigma \ge \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}$

Замечание

Ранее показано (метод гармоник), что усл-е явл. необходимым.

4° Несамосопряженные схемы

Рассмотрим класс схем вида:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \sigma A y_{n+1} + (1-\sigma) A y_n = 0, \quad n = \overline{0,K-1},\ y_0 \in H_h \qquad (3)$$

Замечание

Схема имеет ~~тот~~ вид (2) при $B = J + \tau\sigma A$, предполагается, что $\exists B^{-1}$, а в пр-ве H_h задано (y,v), $\|y\| = \sqrt{(y,y)}$.

Замечание
Далее не предполагаем, что $A = A^*$ и (или) $A > 0$

Теорема 6
Пусть $\forall v \in H_h$: $(\sigma - \frac{1}{2})\tau \|Av\|^2 + (Av, v) \geq 0$. Тогда схема (3) равномерно устойчива по нач. данным и для реш-ия (3) справедлива оценка:
$\|y_{n+1}\| \leq \|y_n\|$, $\forall n = \overline{0, k-1}$

Док-во:
$\|y_{n+1}\|^2 \leq \|y_n\|^2 \Longleftrightarrow \{y_{n+1} = S_\tau y_n, \ S = \mathcal{I} - \tau B^{-1}A, \ B = \mathcal{I} + \tau\sigma A\} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow ((\mathcal{I} - \tau B^{-1}A)y_n, (\mathcal{I} - \tau B^{-1}A)y_n) \leq \|y_n\|^2$
$\|y_n\|^2 - 2\tau(B^{-1}Ay_n, y_n) + \tau^2 \|B^{-1}Ay_n\|^2 \leq \|y_n\|^2$
$(B^{-1}Ay_n, y_n) \geq \frac{\tau}{2}\|B^{-1}Ay_n\|^2$
Покажем, что B^{-1} и A - перестановочные операторы:
$AB = A(\mathcal{I} + \tau\sigma A) = BA \Rightarrow B^{-1}A = B^{-1}ABB^{-1} = B^{-1}BAB^{-1} = AB^{-1}$
$(AB^{-1}y_n, y_n) \geq \frac{\tau}{2}\|AB^{-1}y_n\|^2$.
Обозначим $v = B^{-1}y_n \Rightarrow (Av, Bv) \geq \frac{\tau}{2}\|Av\|^2$
$(Av, (\mathcal{I} + \tau\sigma A)v) \geq \frac{\tau}{2}\|Av\|^2$
$\tau(\sigma - \frac{1}{2})\|Av\|^2 + (Av, v) \geq 0$, $\forall v \in H_h$ по усл. $\rightarrow \checkmark$, ч.т.д.

Пример (схема с весами для уравнения переноса)
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x \leq l$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(x,0) = u_0(x)$$
Введём сетку $\Omega_h = \{x_i = ih, \ i = \overline{0,N}, \ Nh = l\}$
$\omega_\tau = \{t_n = \tau n, \ n = \overline{0,k}, \ k\tau = T\}$

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + \sigma y_{\bar{x},i}^{n+1} + (1-\sigma) y_{\bar{x},i}^n = 0, \quad i = \overline{1,N}, \quad n = \overline{0,k-1}$$
$$y_0^n = 0, \ n = \overline{0,k}; \quad y_i^0 = u_0(x_i), \ i = \overline{1,N}, \quad \sigma \in \mathbb{R}$$
Введём пространство $H_h = \{y(x_i), \ x_i \in \Omega_h, \ y_0 = 0\}$, $(y,v) = \sum_{i=1}^{N} y_i v_i h$,
$\|y\| = \sqrt{(y,y)}$
$Ay_i = y_{\bar{x},i}$, $i = \overline{1,N}$, $y_0 = 0$, $A: H_h \to H_h$ $(A^* \neq A!)$

$y_n = (0, y_1^n, \dots, y_N^n)^T$, где $y_i^n = y(x_i, t_n)$

В операторном виде:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \sigma A y_{n+1} + (1-\sigma) A y_n = 0$$

Достаточное усл-ие устойчивости: $(\sigma - \frac{1}{2})\tau \|Av\|^2 + (Av, v) \geq 0, \ \forall v \in H_h$

Ранее показано, что: $(Ay, y) = \frac{y_N^2}{2} + \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N} y_{\bar{x},i}^2 h = \frac{y_N^2}{2} + \frac{h}{2}\|Ay\|^2$

Имеем: $(\sigma - \frac{1}{2})\tau\|Av\|^2 + \frac{h}{2}\|Av\|^2 \geq 0$

Приходим к условию: $\underline{\sigma \geq \frac{1}{2}(1 - \frac{h}{\tau})}$

Замечание:

Явная схема ($\sigma = 0$) устойчива при $\tau \leq h$ (условие Куранта!), при $\sigma \geq \frac{1}{2}$ схема абс. устойчива (при $\forall \tau, h$)

§3 Канонический вид и условие устойчивости трехслойных схем

Опр Пусть B_0, B_1, B_2 - линейные операторы, действующие в лин. пр-ве $H_h \to H_h$, y_0, y_1, φ_n - заданные сеточные ф-ии из H_h. Трехслойной разностной схемой назыв. семейство операторных разностных уравнений:

$$B_2 y_{n+1} + B_1 y_n + B_0 y_{n-1} = \varphi_n, \quad n = \overline{1, k-1}, \quad y_0, y_1 \in H_h$$

Замечание

Предполагаем $\exists B_2^{-1}$ ($\Rightarrow$ первое усл-е корр. автом. выполн.)

Учтём тождество:

$$y_{n\pm1} = y_n \pm \frac{1}{2}(y_{n+1} - y_{n-1}) + \frac{1}{2}(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1})$$

$$y_{n\pm1} = y_n \pm \tau y_{\overset{\circ}{t}} + \frac{1}{2}\tau^2 y_{\bar{t}t} \quad \text{(разн. аналог ф-лы Тэйлора)}$$

Подставляем в уравнение:

$$\tau(B_2 - B_0) y_{\overset{\circ}{t}} + \frac{1}{2}\tau^2 (B_2 + B_0) y_{\bar{t}t} + (B_0 + B_1 + B_2) y_n = \varphi_n$$

Обозначим $B = \tau(B_2 - B_0)$, $R = \frac{1}{2}(B_2 + B_0)$, $A = (B_0 + B_1 + B_2)$

Опр Каноническим видом трехслойной схемы назыв. её запись в след. форме:

$$B y_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + A y_n = \varphi_n, \quad n = \overline{1, k-1}, \quad y_0, y_1 \in H_h \qquad (4)$$

к такому виду всегда можно прийти при лин. оп-рах и равном по τ сетке.

Теорема 7

Пусть $A^* = A > 0$, $R^* = R > 0$ и не зависят от n. Тогда при $B \geq 0$, $R > \frac{1}{4}A$, $\forall y_0, y_1 \in H_h$ для решения однородного уравнения (4) справедливо след. нер-во:

$\|y_{n+1}\|_* \leq \|y_n\|_*$, где $\|y_n\|_* = \frac{1}{4}(A(y_n + y_{n-1}), y_n + y_{n-1}) + ((R - \frac{1}{4}A)(y_n - y_{n-1}), y_n - y_{n-1})$

Док-во: (не надо)

Замечание

Доказательство основано на сведении схемы к двуслойной в пр-ве $\tilde{H}_h = H_h \oplus H_h$ векторов $y = (y_1, y_2)$, $y_1, y_2 \in H_h$ и используется теорема о равномерной устойчивости двусл. схемы с самосопряж. оператором.

Пример (схема с весами для ур-ия колебаний)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \bar{u}_0(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

Введём $\Omega_h = \{x_i = ih, \ i = \overline{0,N}, \ Nh = l\}$

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, \ n = \overline{0,k}, \ k\tau = T\}$$

$$y^n_{\bar{t}t,i} = \sigma_1 y^{n+1}_{\bar{x}x,i} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y^n_{\bar{x}x,i} + \sigma_2 y^{n-1}_{\bar{x}x,i}, \quad i = \overline{1, N-1}$$

$$y^n_0 = y^n_N = 0, \quad n = \overline{0,k}$$

$$y^0_i = u_0(x_i), \quad y^1_i = \hat{u}(x_i), \quad i = \overline{1, N-1}$$

Замечание

$\hat{u}(x_i)$ подбирается, исходя из требуемого порядка аппрокс.

$H_h = \{y(x_i), \ x_i \in \bar{\Omega}_h, \ y_0 = y_N = 0\}$, $(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h$, $\|y\| = \sqrt{(y,y)}$

$Ay_i = -y_{\bar{x}x,i}$, $i = \overline{1, N-1}$, $y_0 = y_N = 0$, $A: H_h \to H_h$

$y_n = (0, y^n_1, y^n_2, \ldots, y^n_{N-1}, 0)^T \in H_h$, $y^n_i = y(x_i, t_n)$

$$y_{\bar{t}t} + \sigma_1 A y_{n+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) A y_n + \sigma_2 A y_{n-1} = 0$$

$$y_{n \pm 1} = y_n \pm \tau y^0_t + \frac{1}{2}\tau^2 y_{\bar{t}t}$$

$\Downarrow$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)\tau A y^0_t + (I + \frac{1}{2}\tau^2(\sigma_1 + \sigma_2)A) y_{\bar{t}t} + A y_n = 0$$

В канон. виде $By_{t}^{\circ} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + Ay_n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow B = (\sigma_1 - \sigma_2)\tau A, \quad R = \frac{1}{\tau^2}J + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}A$

Учитывая, что $A^* = A > 0$, $R^* = R > 0$ (при $\sigma_1, \sigma_2 \geq 0$) и не завис. n,

дост. усл-ия устойчивости примут вид:

$B \geq 0 \quad \mapsto \quad \sigma_1 \geq \sigma_2$

$R > \frac{1}{4}A \Leftrightarrow \frac{1}{\tau^2}\|y\|^2 \geq \left(\frac{1}{4} - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)(Ay, y) \Leftarrow \frac{1}{\tau^2} \geq \frac{4}{h^2}\left(\frac{1}{4} - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)$ оц. для (Ay,y)

Окончательно получим:

$\sigma_1 \geq \sigma_2, \quad \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} \geq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{h^2}{\tau^2}\right)$

Замечание

Явная схема ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$) устойчива при $\tau \leq h$, схема 2го пор. по вр.

($\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\sigma}{2}$) устойч. при $\sigma \geq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{h^2}{\tau^2}\right)$

§4 Экономичные разностные схемы для решения многомерных нестационарных задач МФ

1° Недостатки обычных схем

Рассмотрим краевую задачу для двумерного ур-ия теплопроводности в прямоугольнике $G = \{0 < x_1 < l_1;\ 0 < x_2 < l_2\}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, & x = (x_1, x_2) \in G,\ 0 < t \leq T \\ u(x,t) = \mu(x), & x \in \partial G,\ 0 \leq t \leq T \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \partial G \cup G \end{cases}$$

Введём в $\bar{G} = G \cup \partial G$ сетку $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$

$x_{ij} = (x_{1i}, x_{2j}), \quad x_{1i} = ih_1, \quad x_{2j} = jh_2, \quad N_1 h_1 = l_1, \quad N_2 h_2 = l_2$

$\omega_h = \{x_{ij},\ i = \overline{1, N_1-1},\ j = \overline{1, N_2-1}\}$

$\gamma_h = \{x_{0j}, x_{N_1 j}, x_{i0}, x_{iN_2},\ i = \overline{1, N_1-1},\ j = \overline{1, N_2-1}\}$

И временную сетку: $\omega_\tau = \{t_n = \tau n,\ n = \overline{0, k},\ k\tau = T\}$

1) Рассмотрим явную схему:

$$\begin{cases} \frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^{n}}{\tau} = \Lambda y_{ij}^{n}, & x_{ij} \in \omega_h,\ n = \overline{0, k-1} \\ y_{ij}^{n} = \mu(x_{ij}, t_n), & x_{ij} \in \gamma_h,\ n = \overline{0, k} \end{cases}$$

$\left| y_{ij}^0 = u_0(x_{ij}),\ x_{ij} \in \Omega_h \right.$

Здесь $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$, $\Lambda_1 y_{ij} = y_{\bar{x}_1 x_1, ij}$, $\Lambda_2 y_{ij} = y_{\bar{x}_2 x_2, ij}$

Решение легко находится:

$y_{ij}^{n+1} = y_{ij}^n + \tau \Lambda y_{ij}^n$

Введём пространство $H_h = \{ y(x_{ij}),\ x_{ij} \in \Omega_h,\ y|_{\gamma_h} = 0 \}$,

$(y, v) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} y_{ij} v_{ij} h_1 h_2$, $\|y\| = \sqrt{(y,y)}$

$A y_{ij} = -\Lambda y_{ij}$, $A^* = A > 0$ в H_h, $(Ay, y) \le \Delta \|y\|^2$, где $\Delta = \frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2}$

В каноническом виде однородная задача ($\mu = 0$):

$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A y_n = 0$.

$B \ge \frac{\tau}{2} A \Rightarrow 1 \ge \frac{\tau}{2}\Delta \Rightarrow \tau \le \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)^{-1}}$

Условие диктует жесткие ограничения на шаг по скорости:

$T = 1$, $h_1 = h_2 = 0{,}01 \Rightarrow$ нужно делать $n \ge 40000$ шагов по времени

2) Неявная схема

$\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n}{\tau} = \Lambda y_{ij}^{n+1}$, $x_{ij} \in \omega_h$, $n = \overline{0, k-1}$

~~В кан~~ $\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A y_{n+1} = 0$

В канонич. виде: $B \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A y_n = 0$, где $B = J + \tau A$

Усл-ие $B \ge \frac{\tau}{2} A \Leftrightarrow J + \frac{\tau}{2} A \ge 0$ – вып. $\forall \tau, h$ → схема абсолютно устойчива

Однако, на каждом шаге необходимо решать систему вида:

$$\begin{cases} (J - \tau\Lambda) y_{ij}^{n+1} = F_{ij}^n \quad (F_{ij}^n = y_{ij}^n), & x_{ij} \in \omega_h \\ y_{ij}^{n+1} = \mu_{ij}^{n+1}, & x_{ij} \in \gamma_h \end{cases}$$

2° Пример метода переменных направлений

Рассмотрим продольно-поперечную схему:

$$\begin{cases} \frac{y_{ij}^{n+1/2} - y_{ij}^n}{1/2\,\tau} = \Lambda_1 y_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_2 y_{ij}^n, \quad x_{ij} \in \omega_h & \leftarrow \text{неявность по 1ой перем.} \\ \frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^{n+1/2}}{1/2\,\tau} = \Lambda_1 y_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_2 y_{ij}^{n+1}, \quad x_{ij} \in \omega_h & \leftarrow \text{неявность по 2ой перем.} \end{cases}$$

Здесь y^{n+1} находится в 2 этапа, при этом на каждом этапе ур-ия неявны лишь по ~~тем~~ одной из переменных.

<u>I этап</u> Методом прогонки для всех $j=\overline{1,N_2-1}$ решается система:

$$\begin{cases}(\mathcal{I}-0{,}5\tau\Lambda_1)y_{ij}^{n+1/2}=(\mathcal{I}+0{,}5\tau\Lambda_2)y_{ij}^n, \quad i=\overline{1,N_1-1}\end{cases}$$

трехдиаг. м-ца!

$y_{0j}^{n+1/2}$, $y_{N_1j}^{n+1/2}$ — будут определены далее

<u>II этап</u> Методом прогонки для всех $i=\overline{1,N_1-1}$ решается система:

$$\begin{cases}(\mathcal{I}-0{,}5\tau\Lambda_2)y_{ij}^{n+1}=(\mathcal{I}+0{,}5\tau\Lambda_1)y_{ij}^{n+1/2}, \quad j=\overline{1,N_2-1}\\ y_{i0}^{n+1}=\mu(x_{i0},t_{n+1}),\quad y_{iN_2}^{n+1}=\mu(x_{iN_2},t_{n+1})\end{cases}$$

<u>Замечание</u>

Переход от y_{ij}^n к y_{ij}^{n+1} требует $\underline{O}(N_1\cdot N_2)$ операций. При $N_1=N_2=N\mapsto \underline{O}(N^2)$.

Для сравнения: неявная схема с БДПФ $\mapsto \underline{O}(N^2\ln N)$ операций.

Отсюда название „экономичные" методы".

Исключим $y^{n+1/2}$ из уравнения схемы. Рассмотрим разность и сумму ур-ий:

$$\begin{cases}\dfrac{y_{ij}^{n+1}-2y_{ij}^{n+1/2}+y_{ij}^n}{1/2\tau}=\Lambda_2(y_{ij}^{n+1}-y_{ij}^n) & (*)\\[2mm] \dfrac{y_{ij}^{n+1}-y_{ij}^n}{1/2\tau}=2\Lambda_1y_{ij}^{n+1/2}+\Lambda_2(y_{ij}^{n+1}+y_{ij}^n) & (**)\end{cases}$$

Из $(*)$ выразим $y_{ij}^{n+1/2}$:

$$y_{ij}^{n+1/2}=\frac{1}{2}(y_{ij}^{n+1}+y_{ij}^n)-\frac{\tau}{4}\Lambda_2(y_{ij}^{n+1}-y_{ij}^n)$$

Подставляем ↑ в $(**)$:

$$\frac{y_{ij}^{n+1}-y_{ij}^n}{\tau}=\frac{1}{2}\Lambda(y_{ij}^{n+1}+y_{ij}^n)-\frac{\tau}{4}\Lambda_1\Lambda_2(y_{ij}^{n+1}-y_{ij}^n)$$

Последнее ур-ие верно для $\forall x_{ij}\in\omega_h$, если согласно $(*)$ определить:

$$y_{0j}^{n+1/2}=\frac{1}{2}(\mu_{0j}^{n+1}+\mu_{0j}^n)-\frac{\tau}{4}\Lambda_2(\mu_{0j}^{n+1}-\mu_{0j}^n)$$

$$y_{N_1j}^{n+1/2}=\frac{1}{2}(\mu_{N_1j}^{n+1}+\mu_{N_1j}^n)-\frac{\tau}{4}\Lambda_2(\mu_{N_1j}^{n+1}-\mu_{N_1j}^n)$$

Тем самым, описание алгоритма завершено полностью, а схема сведена к двухслойной.

<u>3° Устойчивость продольно-поперечной схемы</u>

Рассмотрим однородную задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n}{\tau} = \dfrac{1}{2}\Lambda\left(y_{ij}^{n+1} + y_{ij}^n\right) - \dfrac{\tau}{4}\Lambda_1\Lambda_2\left(y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n\right), & x_{ij} \in \omega_h, \ t_n \in \omega_\tau \\ y_{ij}^{n+1} = 0, & x_{ij} \in \gamma_h \\ y_{ij}^0 = u_0(x_{ij}), & x_{ij} \in \Omega_h \end{cases}$$

Введём пр-во $H_h = \{y(x_{ij}),\ x_{ij} \in \Omega_h \ \& \ y|_{\gamma_h} = 0\}$

$$(y, v)_* = \sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2-1} y_{ij} v_{ij} h_1 h_2, \quad \|y\| = \sqrt{(y,y)}$$

$y_n = y(t_n) \in H_h$

$A_1 y_{ij} = -\Lambda_1 y_{ij}, \quad A_2 y_{ij} = -\Lambda_2 y_{ij}, \quad x_{ij} \in \omega_h, \ y|_{\gamma_h} = 0$

$A = A_1 + A_2, \quad A : H_h \to H_h$

$$\left(E + \frac{\tau^2}{4}A_1A_2\right)\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \frac{1}{2}A(y_{n+1} + y_n) = 0 \Rightarrow \psi = O(\tau^2 + h^2)$$

(т.к. это схема с весом $\sigma = \frac{1}{2}$, к кот. прибавили $\frac{\tau^2}{4}A_1A_2\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}$)

<u>В каноническом виде:</u>

$$B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0, \quad B = E + \frac{\tau^2}{4}A_1A_2 + \frac{\tau}{2}A$$

Дост. усл-ие устойчивости: $B \geq \frac{\tau}{2}A \Leftrightarrow E + \frac{\tau^2}{4}A_1A_2 \geq 0$

Условие выполнено $\forall \tau, h_1, h_2$, т.к.

$$(A_1A_2 y, y) = \sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2-1}\left((y_{\bar{x}_2 x_2})_{\bar{x}_1 x_1} \cdot y\right)_{ij} h_1 h_2 = -\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2-1}\left(y_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_1} \cdot y_{\bar{x}_1}\right)_{ij} h_1 h_2 =$$

$$= \{\text{разн. произв. можно переставлять}\} = -\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2-1}\left(y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_2} \cdot y_{\bar{x}_1}\right)_{ij} h_1 h_2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}\left(y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\right)_{ij}^2 h_1 h_2 \geq 0$$

Тогда $A_1A_2 \geq 0$, ещё можно показать $(A_1A_2)^* = A_1A_2$

Тем самым, схема имеет второй порядок аппроксимации и абсолютно устойчива!

<u>4° Понятие суммарной аппроксимации</u>

Если область G не является прямоугольником, исключить $y_{ij}^{n+1/2}$ и свести схему к двуслойной м.б. невозможно. В этом случае схема м.б. исследована иначе.

Рассмотрим погрешности:

$$z_{ij}^{n+1/2} = y_{ij}^{n+1/2} - u_{ij}^{n+1/2}, \quad z_{ij}^n = y_{ij}^n - u_{ij}^n, \quad \text{где } u_{ij}^{n+1/2} = u\left(x_{ij}, t_n + \frac{\tau}{2}\right), \ u_{ij}^n = u(x_{ij}, t_n)$$

Погрешности удовл. ур-ям:

$$\frac{z_{ij}^{n+1/2}-z_{ij}^n}{1/2\tau} = \Lambda_1 z_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_2 z_{ij}^n + \psi_{1,ij}^n$$

$$\frac{z_{ij}^{n+1}-z_{ij}^{n+1/2}}{1/2\tau} = \Lambda_1 z_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_2 z_{ij}^{n+1} + \psi_{2,ij}^n$$

$$\psi_{1,ij}^n = -\frac{u_{ij}^{n+1/2}-u_{ij}^n}{1/2\tau} + \Lambda_1 u_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_2 u_{ij}^n$$

$$\psi_{2,ij}^n = -\frac{u_{ij}^{n+1}-u_{ij}^{n+1/2}}{1/2\tau} + \Lambda_1 u_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_2 u_{ij}^{n+1}$$

Будем обозначать $L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}$, $\alpha = 1, 2$. Раскладывая по ф-ле Тейлора в (x_{ij}, t_n): $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = (L_1 + L_2)u \rightarrow \text{ур-ие}\right)$ $\quad L_1 u = \Lambda_1 u + O(h^2)$

$$\psi_{1,ij}^n = -\frac{2}{\tau}\left(u + \frac{\tau}{2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - u\right) + L_1\left(u + \frac{\tau}{2}\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \cancel{L_2 u} + O(\tau^2, h^2) =$$
$$= -\frac{\tau}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\tau}{2}L_1\frac{\partial u}{\partial t} + O(\tau^2, h^2)$$

$$\psi_{2,ij}^n = -\frac{2}{\tau}\left(u + \tau\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - u - \cancel{\frac{\tau}{2}\frac{\partial u}{\partial t}} - \frac{\tau^2}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + L_1\left(u + \frac{\tau}{2}\frac{\partial u}{\partial t}\right) +$$
$$+ L_2\left(u + \tau\frac{\partial u}{\partial t}\right) + O(\tau^2, h^2) = -\frac{3}{4}\tau\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\tau}{2}L_1\frac{\partial u}{\partial t} + \tau L_2\frac{\partial u}{\partial t} + O(\tau^2, h^2)$$

Имеем: $\psi_1^n, \psi_2^n = O(\tau, h^2)$. При этом:

$$\psi_{1,ij}^n + \psi_{2,ij}^n = \cancel{-\tau\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}\ \tau\underbrace{\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (L_1 + L_2)\frac{\partial u}{\partial t}\right)}_{=0} + O(\tau^2, h^2) = O(\tau^2, h^2)$$

Говорят, что схема обладает вторым порядком в суммарной аппрокс.

<u>Замечание</u>

Могут быть получены оценки погрешности через величину $\psi_1^n + \psi_2^n$!

<u>Задачи к главе IV</u>

<u>Задача 1</u>

Исследовать аппроксимацию и устойчивость: $(\gamma = \frac{\tau}{h^2})$

$$y_i^{n+1} = \left(\tfrac{1}{2} + \gamma\right)(y_{i-1}^n + y_{i+1}^n) - 2\gamma y_i^n \quad, i = \overline{1, N-1}, \ hN = 1, \ n = \overline{0, K-1}$$

$y_0^n = y_N^n = 0$, $y_i^0 = u_0(x_i)$

<u>Решение</u>:

$$y_i^{n+1} - y_i^n = \left(\tfrac{1}{2} + \gamma\right)(y_{i-1}^n - 2y_i^n + y_{i+1}^n)$$

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau'} = y_{\bar{x}x,i}^n \Rightarrow \tau' = \frac{h^2}{2} + \tau \Rightarrow \psi = O\left(\tau, h^2, \frac{h^2}{\tau}\right)$$

$\tau' = \left(\frac{1}{2} + \gamma\right)h^2$

↑ явная схема для ур-ия теплопроводности

Ранее показано, что необх. и дост. усл-ие уст. явной схемы: $\tau' \leq \frac{h^2}{2}$ ⇔

$\Leftrightarrow \tau < 0$

Ответ: $\psi = O(\tau, h^2, \frac{h^2}{\tau})$, абс. неустойчива

Задача 2

Найти порядок аппроксимации, исслед. устойчивость:

$$\begin{cases} (1+2\gamma) y_i^{n+1} = (1-2\gamma) y_i^{n-1} + 2\gamma (y_{i-1}^n + y_{i+1}^n), \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2} \\ i = \overline{1, N-1}, \quad n = \overline{1, K-1}, \quad Nh = 1, \quad K\tau = T \\ y_0^{n+1} = y_N^{n+1} = 0 \end{cases}$$

Решение:

$$y_i^{n+1} - y_i^{n-1} + 2\gamma (y_i^{n+1} - 2y_i^n + y_i^{n-1}) = 2\gamma (y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n) \quad \Big| : 2\tau$$

$$y^n_{\overset{\circ}{t}, i} + \frac{\tau^2}{h^2} y^n_{\bar{t}t, i} = y^n_{\bar{x}x, i} \Rightarrow \text{аппрокс. ур-ие теплопроводности}$$

$$\psi = O(\tau^2, h^2; \frac{\tau^2}{h^2}) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

В канонич. форме:

$$B y_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + A y_n = 0$$

$B = I$, $R = \frac{1}{h^2} I$, $A y_i = -y_{\bar{x}x, i}$, $i = \overline{1, N-1}$, $y_0 = y_N = 0$

В силу самосопр. и полож. опр. всех операторов усл-ие выглядит:

$B > 0$ ✓, $R > \frac{1}{4} A \Rightarrow \frac{1}{h^2} I > \frac{1}{4} A$ — вып. всегда ($\lambda_{max}(A) < \frac{4}{h^2}$)

Ответ: $\psi = O(\tau^2; h^2; \frac{\tau^2}{h^2})$, схема абс. устойчива

Задача 3

Доказать абс. устойчивость и 2ой порядок аппрокс.:

$$y^n_{t,i} = \frac{1}{2} (y^{n+1}_{\bar{x}x, i} + y^n_{\bar{x}x, i}) \quad \text{(с обычн. гр. усл-ями и НУ)}$$

Док-во:

В канонич. форме:

$$(I + \frac{\tau}{2} A) \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A y_n = 0, \quad A y_i = -y_{\bar{x}x, i}, \quad y|_\gamma = 0$$

$B \geq \frac{\tau}{2} A \Leftrightarrow I \geq 0$, $\forall \tau, h \Rightarrow$ абс. устойчивая схема

Обозначим $Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow$ ур-ие $Lu = \frac{\partial u}{\partial t}$

$$\psi_i^n = -\frac{1}{\tau}(u_i^{n+1} - u_i^n) + \frac{1}{2}(u^{n+1}_{\bar{x}x, i} + u^n_{\bar{x}x, i}) = \{\text{разл. в } x = x_i, t = t_n\} =$$

$$= -\frac{1}{\tau}\left(\cancel{u} + \tau \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \cancel{u}\right) + \frac{1}{2} L\left(\cancel{u} + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \cancel{u}\right) + O(\tau^2, h^2) =$$

$$= -\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L\frac{\partial u}{\partial t}\right) + O(\tau^2, h^2) = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t} - Lu\right)}_{=0} + O(\tau^2, h^2) = O(\tau^2, h^2), \text{ ч.т.д.}$$

Задача 4

Найти достаточное усл-е устойчивости:

$$y^n_{t,i} = (a y_{\bar{x}})^n_{x,i}, \quad 0 < a_* \le a^n_i \le a^*$$

Решение:

Введем $Ay_i = -y_{\bar{x}x,i}$, $\tilde{A}y_i = -(ay_{\bar{x}})_{x,i}$, $y|_\gamma = 0$

$$(\tilde{A}y, y) = -\sum_{i=1}^{N-1}(ay_{\bar{x}})_{x,i} y_i h = \sum_{i=1}^{N} a y^2_{\bar{x},i} h \le a^* \sum_{i=1}^{N} y^2_{\bar{x},i} h = a^*(Ay, y)$$

В каноннич. форме:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \tilde{A}y_n = 0$$

Дост. усл-е: $E \ge \frac{\tau}{2}\tilde{A} \Leftarrow E \ge \frac{\tau}{2}a^* A \Leftarrow 1 \ge \frac{\tau}{2}a^* \cdot \frac{4}{h^2} \Rightarrow$

$$\boxed{\tau \le \frac{h^2}{2a^*}}$$

Задача 5

На равномерной сетке $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$ в пр-ке $G = \{0 < x_1 < l_1;\ 0 < x_2 < l_2\}$ рассм. схему:

$$\begin{cases} \dfrac{y^{n+1}_{ij} - y^n_{ij}}{\tau} = y^{n+1}_{\bar{x}_1 x_1, ij} + y^n_{\bar{x}_2 x_2, ij}, & x_{ij} \in \omega_h,\ t_n \in \omega_\tau \\ y^{n+1}_{ij} = 0, \quad y^0_{ij} = u_0(x_{ij}) \end{cases}$$

Найти порядок аппроксимации и дост. усл-е уст.

Решение:

Введём $A_1 y_{ij} = -y_{\bar{x}_1 x_1, ij}$, $A_2 y_{ij} = -y_{\bar{x}_2 x_2, ij}$, $y|_\gamma = 0$, $A = A_1 + A_2$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A_1 y_{n+1} + A_2 y_n = 0$$

$$(E + \tau A_1)\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0 \Rightarrow \text{погр-ть } O(\tau, h^2)$$

$B \ge \frac{\tau}{2}A \Leftrightarrow E + \tau A_1 \ge \frac{\tau}{2}A \Leftrightarrow E + \underbrace{\frac{\tau}{2}A_1}_{>0} \ge \frac{\tau}{2}A_2 \overset{\text{достаточно}}{\Leftarrow} E \ge \frac{\tau}{2}A_2 \Leftarrow$

$\Leftarrow 1 \ge \frac{\tau}{2}\cdot\frac{4}{h_2^2} \Rightarrow$

Ответ: $\tau \le \frac{h_2^2}{2}$, $\psi = (\tau; h^2)$

Задача 6

Исследовать схему переменных направлений:

$$\frac{y^{n+1/2}_{ij} - y^n_{ij}}{\tau} = \Lambda_1 y^{n+1/2}_{ij}; \quad \frac{y^{n+1}_{ij} - y^{n+1/2}_{ij}}{\tau} = \Lambda_2 y^{n+1}_{ij}, \quad x_{ij} \in \omega_h,\ t_n \in \omega_\tau$$

$y_{ij}^{n+1} = \mu_{ij}^{n+1}$, $y_{ij}^{0} = u_0(x_{ij})$,

$\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x}$

Решение:

$(I - \tau\Lambda_1) y_{n+1/2} = y_n$

$(I - \tau\Lambda_2) y_{n+1} = y_{n+1/2}$

Если определить $y_{0j}^{n+1/2} = (I - \tau\Lambda_2)\mu_{0j}^{n+1}$, $y_{Nj}^{n+1/2} = (I - \tau\Lambda_2)\mu_{Nj}^{n+1}$, ...

то схема $\forall x_{ij} \in \omega_h$ может быть записана в виде (в прямоуг.):

$y_n = (I - \tau\Lambda + \tau^2\Lambda_1\Lambda_2) y_{n+1}$, $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$

$(I - \tau\Lambda + \tau^2\Lambda_1\Lambda_2)(y_{n+1} - y_n) + \tau(-\Lambda + \tau\Lambda_1\Lambda_2) y_n = 0 \to (*)$

$B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0$, где $B = (I - \tau\Lambda + \tau^2\Lambda_1\Lambda_2)$, $A = -\Lambda + \tau\Lambda_1\Lambda_2$

Из $(*) \Rightarrow \psi = \underline{\underline{O}}(\tau; h_1^2; h_2^2)$ (без слаг. $\underline{\underline{O}}(\tau)$ получ. явную схему)

$B \geq \frac{\tau}{2}A \Leftrightarrow \{I - \frac{\tau}{2}\Lambda + \frac{\tau^2}{2}\Lambda_1\Lambda_2 \geq 0$ – верно, $\forall \tau, h_1, h_2$, т.к.

$-\Lambda, \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 > 0$ (уже показывали)

Исследуем суммарную аппроксимацию:

$\psi_{1,ij}^n = -\frac{1}{\tau}(u_{ij}^{n+1/2} - u_{ij}^n) + \Lambda_1 u_{ij}^{n+1/2} = \{$раскл. в $x = x_{ij}$, $t = t_n\} =$

$= \{L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \alpha = 1, 2 \to \frac{\partial u}{\partial t} = (L_1 + L_2)u\} = -\frac{1}{\tau}(\cancel{u} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \cancel{u}) +$

$+ L_1(u + \frac{\tau}{2}\frac{\partial u}{\partial t}) + \underline{\underline{O}}(\tau^2, h^2) = -\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\tau}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + L_1(u + \frac{\tau}{2}\frac{\partial u}{\partial t}) + \underline{\underline{O}}(\tau^2, h^2) =$

$= \underline{\underline{O}}(1)$

$\psi_{2,ij}^n = -\frac{1}{\tau}(u + \tau\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial u}{\partial t} - u - \frac{\tau}{2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\tau^2}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}) + L_2(u + \tau\frac{\partial u}{\partial t}) + \underline{\underline{O}}(\tau^2, h^2) =$

$= -\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{3\tau}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + L_2(u + \tau\frac{\partial u}{\partial t}) + \underline{\underline{O}}(\tau^2, h^2) = \underline{\underline{O}}(1)$

$\psi_{1,ij}^n + \psi_{2,ij}^n = -\frac{\partial u}{\partial t} \cancel{- \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} + (L_1 + L_2)u + \underline{\underline{O}}(\tau, h^2) = \underline{\underline{O}}(\tau, h^2)$

Глава V. Разностные схемы для нелин. задач МФ

§1 ~~Квазилинейная~~ Разн. схемы для квазилинейного ур-ия теплопроводности

1° Квазилинейное ур-ие теплопроводности

В общем виде ур-ие тепл. баланса (закон сохр. тепла):

$$c\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}(w) = f$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ – простр. перем., t – время, $u(x,t)$ – темп., $c(x,t,u) > 0$ – удельн. теплоемкость

W – тепловой поток, $f(x,t,u)$ – удельная пл-ть источников тепла

С учетом закона Фурье: $W = -æ\, k \operatorname{grad} u$, где $k(x,t,u) > 0$ – коэфф теплопров.

$$\boxed{c\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + f}$$

Будем рассматривать одномерный случай и считать среду однородной (все ф-ии не зависят явно от x и t)

$$c(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(u)$$ – квазилин. ур-ие теплопроводности

Уравнение упрощается путём замены:

$$v = \int_0^u c(s)\,ds, \quad v(u) \uparrow [0,+\infty), \quad \frac{dv}{du} = c(u) \Rightarrow \text{в силу монот. обр. } u(v)\ \exists$$

$$\frac{\partial v}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k(u)}{c(u)}\frac{\partial v}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(u)$$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{k}(v)\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \tilde{f}(v)}, \quad \tilde{k}(v) = \frac{k(u(v))}{c(u(v))}, \quad \tilde{f}(v) = f(u(v))$$

2° Автомодельное решение

Для нелинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \text{ где } k(u) = k_0 u^\sigma \quad (k_0, \sigma > 0)$$

построим т.н. автомодельное (завис. от некот. комбин. x и t) решение типа бегущей волны.

$\exists\, u = u(\xi), \ \xi = Dt - x \quad (D = const)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = D\frac{du}{d\xi} = Du', \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{d\xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} = -u'$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) = (ku')'$$

$$Du' = (ku')' \Leftrightarrow Du = ku' + c_1$$ (ищем хотя бы 1 реш-ие, положим $c_1 = 0$)

$$Du = k_0 u^\sigma u' \Leftrightarrow d\xi = \frac{k_0}{D}u^{\sigma-1}du \Leftrightarrow \xi = \frac{k_0}{D\sigma}u^\sigma + c_2$$ (положим $c_2 = 0$)

При $\xi \geq 0$ определено решение $u(\xi) = \left(\frac{D\sigma}{k_0}\right)^{1/\sigma}\cdot \xi^{1/\sigma}$. Доопределим $u(\xi)$ при $\xi < 0$ значением $u(0) = 0$, получим:

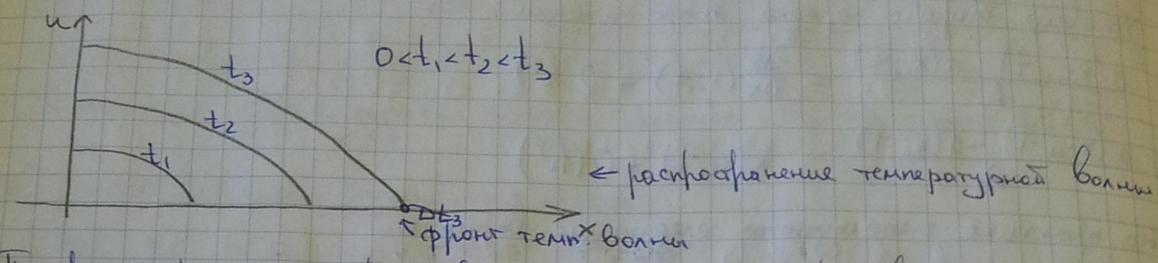
$$u(x,t) = \begin{cases} \left(\frac{D\sigma}{k_0}\right)^{1/\sigma}(Dt - x)^{1/\sigma}, & x \leq Dt \\ 0, & x > Dt \end{cases}$$

Ф-ия $u(x,t)$ является реш-ем следующей задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right), & 0 < x < +\infty, \ t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = u_0 t^{1/\sigma}, \quad u(\infty,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, \quad 0 < x < +\infty \end{cases}$$

Здесь $u_0 = \left(\frac{D^2\sigma}{k_0}\right)^{1/\sigma}$. Решение задачи сводится к нахождению: $D = \left(\frac{u_0^\sigma k_0}{\sigma}\right)^{1/2}$



Построено решение, представляющее собой температ. волну. Точка $x = Dt$ называется фронтом темп. волны.

Замечание

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\sigma}\left(\frac{D\sigma}{k_0}\right)^{1/\sigma}(Dt-x)^{1/\sigma - 1}$$

На фронте тепловой волны производная непрерывна при $0<\sigma<1$. Вторая производная непрерывна при $0<\sigma<\frac{1}{2}$. При $\sigma \geq \frac{1}{2}$ имеем обобщённое реш-е задачи

$$W = \{\text{тепл. поток}\} = -k(u)\frac{\partial u}{\partial x} = -k_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} = D\left(\frac{D\sigma}{k_0}\right)^{1/\sigma}(Dt-x)^{1/\sigma} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ на фронте волны $W=0$ всегда! $(\forall \sigma>0)$

§2 Разностные схемы для уравнения с перем. коэфф. и нелин. ур-ия теплопров.

1° Уравнение с переменными коэффициентами

$\exists$ первую краевую задачу:

$$\begin{cases} \rho(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad 0<x<1, \quad 0<t\leq T \\ u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(1,t) = \mu_2(t) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

$$0 < c_1 \leq k(x,t) \leq c_2, \quad \rho(x,t) \geq c_3 > 0$$

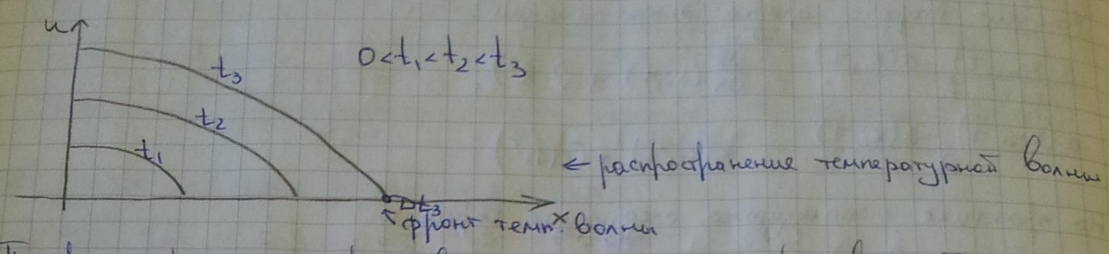
Аппроксимируем дифф. оператор $Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial k}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ разностным отношением:

$$\Lambda(t)y_i = (a(x_i,t)y_{\bar{x}})_{x,i} = \frac{1}{h}\left[a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - a_i\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right]$$

Будем обозначать $u = u(x_i,t)$, $u' = \frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t)$; ..., Подставляя в выражение

$$\begin{cases} u(0,t) = u_0 t^{1/\sigma}, \quad u(\infty,t)=0, \quad t\ge 0 \\ u(x,0) = 0, \quad 0<x<+\infty \end{cases}$$

Здесь $u_0 = \left(\frac{D^2\sigma}{k_0}\right)^{1/\sigma}$. Решение задачи сводится к нахождению: $D = \left(\frac{u_0^\sigma k_0}{\sigma}\right)^{1/2}$



Построено решение, представляющее собой температ. волну. Точка $x=Dt$ называется фронтом темп. волны.

Замечание

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\sigma}\left(\frac{D\sigma}{k_0}\right)^{1/\sigma}(Dt-x)^{1/\sigma-1}$$

На фронте тепловой волны производная непрерывна при $0<\sigma<1$.
Вторая производная непрерывна при $0<\sigma<\frac{1}{2}$. При $\sigma\ge\frac{1}{2}$ имеем обобщённое реш-е задачи

$$W = \{\text{тепл. поток}\} = -k(u)\frac{\partial u}{\partial x} = -k_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} = D\left(\frac{D\sigma}{k_0}\right)^{1/\sigma}(Dt-x)^{1/\sigma} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ на фронте волны $W=0$ всегда! $(\forall \sigma>0)$

§2 Разностные схемы для уравнения с перем. коэфф. и нелин. ур-ия теплопров.

1° Уравнение с переменными коэффициентами

$\sphericalangle$ первую краевую задачу:

$$\begin{cases} p(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad 0<x<1, \quad 0<t\le T \\ u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(1,t) = \mu_2(t) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

$$0<c_1\le k(x,t)\le c_2, \quad p(x,t)\ge c_3>0$$

Аппроксимируем дифф. оператор $Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial k}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ разностным отношением:

$$\Lambda(t)y_i = (a(x_i,t)y_{\bar{x}})_{x,i} = \frac{1}{h}\left[a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right]$$

Будем обозначать $u=u(x_i,t)$, $u' = \frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t)$, …, Подставляя в выражение и используя разложение по ф-ле Тейлора в (x_i, t), получим:

$$\Lambda(t)u = \frac{1}{h}\left[a_{i+1}\frac{hu' + \frac{h^2}{2}u'' + \frac{h^3}{6}u'''}{h} - a_i\frac{hu' - \frac{h^2}{2}u'' + \frac{h^3}{6}u'''}{h}\right] \cancel{\ } + \underline{\underline{O}}(h^2) =$$

$$= \frac{a_{i+1} - a_i}{h}u' + \frac{a_{i+1} + a_i}{2}u'' + \frac{a_{i+1} - a_i}{h}u'''\frac{h^2}{6} + \underline{\underline{O}}(h^2)$$

Условия второго порядка аппроксимации:

$$\frac{a(x_{i+1}, t) - a(x_i, t)}{h} = \frac{\partial k}{\partial x}(x_i, t) + \underline{\underline{O}}(h^2)$$

$$\frac{a(x_{i+1}, t) + a(x_i, t)}{2} = k(x_i, t) + \underline{\underline{O}}(h^2)$$

На практике используются следующие варианты:

$$a_i = k\left(x_i - \frac{h}{2}, t\right)$$

$$a_i = \frac{1}{2}\left(k(x_{i-1}, t) + k(x_i, t)\right)$$

$$a_i = \frac{2k(x_{i-1}, t)\,k(x_i, t)}{k(x_{i-1}, t) + k(x_i, t)} \longrightarrow \text{лучше для разрывных } k$$

$\forall$ схему с весами:

$$\begin{cases} \rho(x_i, t)\dfrac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \sigma\left(a(x_i, t)y_{\bar{x}}^{n+1}\right)_{x,i} + (1-\sigma)\left(a(x_i, t)y_{\bar{x}}^{n}\right)_{x,i} + f(x_i, t), \\ i = \overline{1, N-1}, \ hN = 1, \ n = \overline{0, K-1}, \ \tau K = T, \ t \in [t_n, t_{n+1}] \ (\text{любое}) \\ y_0^{n+1} = \mu_1(\cancel{x}, t_{n+1}), \ y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}), \ y_i^0 = u_0(x_i) \end{cases}$$

Схема при $\sigma = \frac{1}{2}$ и $t = t_n + \frac{\tau}{2}$ имеет порядок аппрокс. $\underline{\underline{O}}(\tau^2, h^2)$, при прочих $\underline{\underline{O}}(\tau, h^2)$.

Ранее показано, что при $\sigma = 0$ (явная схема) схема устойчива при условии: $\tau \le \frac{c_3}{c_2}\cdot\frac{h^2}{2}$. Схема абс. устойчива при $\sigma \ge \frac{1}{2}$, монотонна для $\forall \tau, h, \rho, k$ при $\sigma = 1$.

2° Схема для нелинейного ур-ия

$\forall$ 1ую краевую задачу для нелин. ур-ия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + f(u), \quad 0 < x < 1, \ 0 < t \le T \\ u(0, t) = \mu_1(t), \ u(1, t) = \mu_2(t), \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Явные схемы редко используются, т.к. границы изменения $k(u)$ заранее не известны.

Используются след. схемы:

1) Чисто неявная линейная схема:

$$\begin{cases} \frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau} = \left(a(y_i^n)\, y_{\bar{x}}^{n+1}\right)_{x,i} + f(y_i^n) \\ y_0^{n+1}=\mu_1(t_{n+1}),\ y_N^{n+1}=\mu_2(t_{n+1}),\ y_i^0=u_0(x_i) \end{cases}$$

Здесь, например, $a(y_i^n) = \frac{1}{2}\left[k(y_{i-1}^n)+k(y_i^n)\right]$.

Значения y_i^{n+1} находятся методом прогонки. Порядок аппрокс. $O(\tau, h^2)$

2) Чисто неявная нелинейная схема

$$\begin{cases} \frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau} = \left(a(y_i^{n+1})\, y_{\bar{x}}^{n+1}\right)_{x,i} + f(y_i^{n+1}) \\ y_0^{n+1}=\mu_1(t_{n+1}),\ y_N^{n+1}=\mu_2(t_{n+1}),\ y_i^0=u_0(x_i) \end{cases}$$

Нелинейные разн. ур-ия могут быть решены след. итерац. методом:

$$\frac{y_i^{(s+1)}-y_i^n}{\tau} = \left(a(y_i^{(s)})\, y_{\bar{x}}^{(s+1)}\right)_{x,i} + f(y_i^{(s)})$$

$$y_0^{(s+1)}=\mu_1(t_{n+1}),\ y_N^{(s+1)}=\mu_2(t_{n+1}),$$

$$y_i^{(0)}=y_i^n,\quad s=\overline{0,M-1},\quad y_i^{n+1}=y_i^{(M)}$$

Замечание

Заметим, что при $M=1$ получим предыдущ. схему, т.е. построено некоторое уточнение лин. схемы

3) Схема 2го порядка предиктор-корректор

I этап:
$$\begin{cases} \frac{y_i^{n+1/2}-y_i^n}{\tau/2} = \left(a(y_i^n)\, y_{\bar{x}}^{n+1}\right)_{x,i} + f(y_i^n) \\ y_0^{n+1/2}=\mu_1(t_n+\frac{\tau}{2}),\ y_N^{n+1/2}=\mu_2(t_n+\frac{\tau}{2}) \end{cases}$$

II этап:
$$\begin{cases} \frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau} = \frac{1}{2}\left[\left(a(y_i^{n+1/2})\, y_{\bar{x}}^{n+1}\right)_{x,i} + \left(a(y_i^{n+1/2})\, y_{\bar{x}}^{n}\right)_{x,i}\right] + f(y_i^{n+1/2}) \\ y_0^{n+1}=\mu_1(t_{n+1}),\ y_N^{n+1}=\mu_2(t_{n+1}) \end{cases}$$

Замечание

Схема аналогична методу Рунге-Кутта для ОДУ:

$$u'=f(u)\ ;\quad \frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} = f\left(y_n+\frac{\tau}{2}f(y_n)\right)$$

$$u'=f(u) \Rightarrow u''=f'(u)\cdot u' = f'(u)\cdot f(u)$$

$\psi = -\frac{1}{\tau}(u_{n+1} - u_n) + f(u_n + \frac{\tau}{2} f(u_n)) = \{t - t_n\} = -\frac{1}{\tau}(\tau u' + \frac{\tau^2}{2} u'') + f(u) +$
$+ \frac{\tau}{2} f'(u) f(u) + \underline{O}(\tau^2) = \underline{O}(\tau^2)$

§3 Разностные схемы для нелинейного эллипт. ур-ия

1° Исходная задача, разн. схема, линеаризованное ур-ие для погрешности

$\ast$ задачу для слабо нелин. ур-ия в пр-ке $G = \{0 < x_1 < l_1 ;\ 0 < x_2 < l_2\}$

$$\begin{cases} \Delta u(x) = -f(x,u), & x = (x_1, x_2) \in G \\ u(x) = \mu(x), & x \in \partial G \end{cases}$$

На равномерной сетке в $\overline{G} = G \cup \partial G$: $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$ введём разн. схему

$$\begin{cases} \Delta_h y_{ij} = -f(x_{ij}, y_{ij}), & x_{ij} \in \omega_h \\ y_{ij} = \mu(x_{ij}), & x_{ij} \in \gamma_h \end{cases}$$

$\Delta_h y_{ij} = (y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2})_{ij}$

Замечание

Схема представляет собой сис-му нелинейных ур-ий

Погрешность $z_{ij} = y_{ij} - u(x_{ij})$ удовл. ур-иям:

$$\begin{cases} \Delta_h z_{ij} = -\Delta_h u_{ij} - f(x_{ij}, u_{ij} + z_{ij}), & x_{ij} \in \omega_h \\ z_{ij} = 0, & x_{ij} \in \gamma_h \end{cases}$$

Используем ф-лу Лагранжа: $f(x_{ij}, u_{ij} + z_{ij}) = f(x_{ij}, u_{ij}) + f'_u(x_{ij}, \bar{y}_{ij}) z_{ij}$,
$\bar{y}_{ij} = u_{ij} + \theta_{ij} z_{ij}$, где $\theta_{ij} \in (0,1)$

Приходим к линеаризованному ур-ию для погрешности:
$\Delta_h z_{ij} + f'_u(x_{ij}, \bar{y}_{ij}) z_{ij} = -\psi_{ij}$, $x_{ij} \in \omega_h$, $z|_{\gamma_h} = 0$

Здесь $\psi_{ij} = \Delta_h u_{ij} + f(x_{ij}, u_{ij}) = \underline{O}(h_1^2 + h_2^2)$ — погрешность аппрокс. на решении дифф. задачи

2° Оценка погрешности в непрерывной норме

Перепишем линеар. ур-ие для погрешност в виде:

$$A(x) z(x) = \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x, \xi) z(\xi) + F(x), \quad x \in \omega_h$$

$A(x) = \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} - f'_u(x, \bar{y})$, $B(x, x_{i\pm1,j}) = \frac{1}{h_1^2}$, $B(x, x_{i,j\pm1}) = \frac{1}{h_2^2}$,
$F(x) = \psi(x)$

$\Rightarrow$

$D(x) = A(x) - \sum_{\xi\in Ш'(x)} B(x,\xi) = -f'_u(x,\bar y)$

Условия положительности коэфф-ов ($A(x)>0$, $B(x,\xi)>0$, $\xi\in Ш'(x)$, $D(x)\ge 0$) выполнены, если потребовать:

$f'_u(x,u)\le 0$, $\forall x\in G$, $\forall u$

Теорема 1

При выполнении последнего усл-ия для погрешности справедлива оценка:

$\|z\|_C \le \frac{l_1^2+l_2^2}{4}\|\psi\|_C$.

Док-во:

К мажорирующую ф-ию $\bar z = k(l_1^2+l_2^2-x_1^2-x_2^2)$, $k=const>0$, подставим:

$\Delta_h \bar z + f'_u(x,\bar y)\bar z = -\bar F(x)$, $x_{ij}\in\omega_h$, $\bar z|_{\gamma_h} = \bar\mu$

Здесь $\bar\mu>0$ (угол □ не вх. в сетку!), $\bar F = 4k - k f'_u(x,\bar y)(l_1^2+l_2^2-x_1^2-x_2^2)\ge 4k$ (т.к. $\psi(x)=F(x)$)

Положим $k=\frac{1}{4}\|\psi\|_C$, тогда $\bar F\ge\|\psi\|_C\ge|F(x)|$, $\forall x\in\omega_h$

По теореме сравнения: $\|z\|_C\le\|\bar z\|_C\le \frac{l_1^2+l_2^2}{4}\|\psi\|_C$, ч.т.д.

3° Оценка погрешности в среднеквадратичной норме

$H_h = \{y(x),\ x\in\omega_h,\ y|_{\gamma_h}=0\}$

$(y,v) = \sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2-1} y_{ij}v_{ij}h_1h_2$, $\|y\|=\sqrt{(y,y)}$ – среднекв. норма

Введем оператор $Ay_{ij} = -\Delta_h y_{ij}$, $x_{ij}\in\omega_h$, $y|_{\gamma_h}=0$,

$Ry_{ij} = r_{ij}y_{ij}$, $x_{ij}\in\omega_h$, $y|_{\gamma_h}=0$, $r_{ij} = -f'_u(x_{ij},\bar y_{ij})$

Тогда линеар. ур-ие для погрешности примет вид:

$(A+R)z=\psi$, $z,\psi\in H_h$, $A+R: H_h\to H_h$

Теорема 2

Пусть $\exists\varepsilon>0$: $f'_u(x,u)\le\delta-\varepsilon$, $\forall x\in G, \forall u$, где $\delta = \frac{9}{l_1^2}+\frac{9}{l_2^2}$. Тогда для погрешности справедлива оценка: $\|z\|\le\frac{1}{\varepsilon}\|\psi\|$

Док-во:

$(Ay,y)\ge\delta\|y\|^2$, $\forall y\in H_h$ (δ-оценка снизу для с.з. A)

$(Ry,y) = \sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2-1} r_{ij}y_{ij}^2h_1h_2 \ge (\varepsilon-\delta)\cdot\|y\|^2$ ⇒

⇒ $((A+R)y,y)\ge\varepsilon\cdot\|y\|^2$, $\forall y\in H_h$ ⇒ возьмем в кач-ве $y=z$ – реш-е ур-ия $(A+R)z=\psi$ ⇒

$\Rightarrow \varepsilon\|z\|^2 \le ((A+R)z, z) = (\psi, z) \overset{\text{К.Б.}}{\le} \|\psi\|\cdot\|z\| \Rightarrow \|z\| \le \frac{1}{\varepsilon}\|\psi\|$, ч.т.д.

§4 Итерационный метод Ньютона

Рассм. итерац. метод реш-я системы нелин. ур-ий:

$$\begin{cases} \Delta_h y_{ij} = -f(x_{ij}, y_{ij}), & x_{ij} \in \omega_h \\ y_{ij} = \mu(x_{ij}), & x_{ij} \in \gamma_h \end{cases}$$

Будем обозначать $y = \{y_{ij}\}$ – вектор с коорд. y_{ij}, $f(y) = \{f(x_{ij}, y_{ij})\}$, $f'(y) = \{f'_u(x_{ij}, y_{ij})\}$, $A = -\Delta_h$, $y_n = \{y_{ij}^{(n)}\}$ – приближение на n-ой итерации.

Тогда сис-ма примет вид: $Ay = f(y)$

Подставим вместо y значение y_{n+1}, после чего линеаризуем ур-ие:

$A\{y_{n+1}\} = f(y_{n+1}) \approx f(y_n) + f'(y_n)(y_{n+1} - y_n)$

Здесь и далее имеются в виду покомпонентные равенства.

Приходим к итерац. методу Ньютона:

$\underline{Ay_{n+1} - f'(y_n)y_{n+1} = f(y_n) - f'(y_n)y_n}$

На практике удобно использовать поправку v_n: $y_{n+1} = y_n + v_{n+1}$. Подставим:

$Av_{n+1} - f'(y_n)v_{n+1} = -r_n, \quad r_n = Ay_n - f(y_n)$

~~Замечание~~ Здесь r_n – невязка, характеризующая погрешность на n-ой итер.

$$\begin{cases} -\Delta_h v_{ij}^{(n+1)} - f'_u(x_{ij}, y_{ij}^{(n)})v_{ij}^{(n+1)} = -r_{ij}^{(n)}, & x_{ij} \in \omega_h \\ v_{ij}^{(n+1)} = 0, & x_{ij} \in \gamma_h \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$r_{ij} = -\Delta_h y_{ij}^{(n)} - f(x_{ij}, y_{ij}^{(n)}), \quad y_{ij}^{(n+1)} = y_{ij}^{(n)} + v_{ij}^{(n+1)}, \quad x_{ij} \in \Omega_h$

$y_{ij}^{(0)}$ считается заданным

Замечание

При переходе от итерации с номером n к итерации $n+1$ каким-либо методом решается СЛАУ, характерная для многомерных задач МФ, чаще используются итерац. методы. Имеем двухступенчатый итерац. процесс: внешние итерации по нелинейности, внутренние для реш-ия СЛАУ.

Рассм. погрешность на n-ой итерации $\omega_n = y_n - y$.

Подставляя в ур-ие:

$Ay_{n+1} - f'(y_n)y_{n+1} = f(y_n) - f'(y_n)y_n$

$y_{n+1} = \omega_{n+1} + y$, $y_n = \omega_n + y$, получим:

$A\omega_{n+1} - f'(y_n)\omega_{n+1} + Ay = f(y_n) - f'(y_n)\omega_n$

Учитывая, что $R\omega_{n+1} = -f'(y_n)\omega_{n+1}$, $Ay = f(y)$, имеем:

$(A+R)\omega_{n+1} + (f(y)-f(y_n)) + f'(y_n)\omega_n = 0$

Используя ф-лу Тейлора: $f(y)-f(y_n) = -f'(y_n)\omega_n + \frac{1}{2}f''(\bar{y}_n)\omega_n^2$

Приходим к ур-ию:

$(A+R)\omega_{n+1} = F_n$, где $F_n = -\frac{1}{2}f''(\bar{y}_n)\omega_n^2$ (см. $(A+R)z_{n+1}=\psi$)

Ранее показано, что при условии $f'_u(x,u) \le 0$, $\forall x \in G$, $\forall u$:

$\|\omega_{n+1}\|_C \le \frac{l_1^2+l_2^2}{4}\|F_n\|_C \Rightarrow \|\omega_{n+1}\|_C \le q \cdot \|\omega_n\|^2$, $q = \frac{l_1^2+l_2^2}{8}\|f''\|_C$

Обозначим $p_n = q\|\omega_n\|$ => имеем:

$p_{n+1} \le p_n^2$, $n=0,1,2,\dots$ => $p_n \le p_0^{2^n}$

Неравенство означает квадратичную скорость сх-ти метода Ньютона при условии, что $p_0 < 1$ => имеем условие выбора ~~Н~~ нач. приближения:

$\boxed{\|y_0-y\|_C \le \frac{1}{q}}$

Задачи к главе V

Задача 1

Исследовать устойч. с помощью принципа ~~...~~ „замороженных" коэфф.:

$y^n_{\bar{t}t,i} = (a y^n_{\bar{x}})_{x,i}$, $a_i = 1 + \frac{x_{i-1}^2 + x_i^2}{2}$, $0 < x_i < 1$

Решение:

Пусть $a_i \equiv a = const$ => $\frac{y_i^{n-1} - 2y_i^n + y_i^{n+1}}{(\tau')^2} = y^n_{\bar{x}x,i}$, где $\tau' = \sqrt{a}\,\tau$

Явная схема для уравнения колебаний устойчива при $\tau' \le h$ =>

=> $\sqrt{1 + \frac{1}{2}(x_{i-1}^2 + x_i^2)}\,\tau \le h$

Ответ: $\tau \le \frac{h}{\sqrt{2}}$

Задача 2

Выписать схему 2го порядка аппроксимации:

$$\begin{cases} (k(x)u')' = -f(x), & x\in 0<x<1 \\ u(0)=\mu_1, \quad u(1)=\mu_2 \end{cases}$$

Решение:

$(ay_{\bar{x}})_{x,i} = -f_i \quad , i=\overline{1,N-1}$

$y_0 = \mu_1, \; y_N = \mu_2$

$\Lambda y_i = (ay_{\bar{x}})_{x,i} = \frac{1}{h}\left[a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - a_i\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right]$

Для 2го порядка аппроксимации можно выбрать:

$a_i = k\left(x_i - \frac{h}{2}\right), \quad a_i = \frac{1}{2}\left(k(x_{i-1}) + k(x_i)\right), \quad a_i = \frac{2k(x_{i-1})k(x_i)}{k(x_{i-1})+k(x_i)}$

Задача 3

Построить схему 2го порядка апрокс., указать способ решения разн. ур-ий

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right), & 0<x<1, \quad 0 < t \le T \\ u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(1,t)=\mu_2(t), \quad u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Решение:

Рассмотрим симметричную схему:

$$\begin{cases} \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{1}{2}\left[(a(y_i^{n+1})y_{\bar{x}}^{n+1})_{x,i} + (a(y_i^n)y_{\bar{x}}^n)_{x,i}\right], & i=\overline{1,N-1}, \quad n=\overline{0,k-1} \\ Nh=1, \quad k\tau = T \\ y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \quad y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}), \quad y_i^0 = u_0(x_i) \end{cases}$$

Здесь $a_i = \frac{1}{2}(y_{i-1}^\sigma + y_i^\sigma)$ - для 2го порядка по пр-ву

Для решения разностных ур-ий можно использовать итерац. метод:

$\frac{y_i^{(s+1)} - y_i^n}{\tau} = \frac{1}{2}\left[(a(y_i^{(s)})y_{\bar{x}}^{(s+1)})_{x,i} + (a(y_i^n)y_{\bar{x}}^n)_{x,i}\right]$

$y_0^{(s+1)} = \mu_1(t_{n+1}), \quad y_N^{(s+1)} = \mu_2(t_{n+1}), \quad y_i^{(0)} = y_i^n, \quad s=\overline{0,M-1}, \quad y_i^{n+1} = y_i^{(M)}$

$y_i^{(s+1)}$ находится методом прогонки

Задача 4

Построить схему предиктор-корректор:

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((1+u^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$

Решение:

$$\frac{y_i^{n+1/2}-y_i^n}{\tau/2} = \left(a(y_i^n)\, y_{\bar x}^{n+1/2}\right)_{x,i}$$

$$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau} = \frac{1}{2}\left[\left(a(y_i^{n+1/2})\, y_{\bar x}^{n+1}\right)_{x,i} + \left(a(y_i^{n+1/2})\, y_{\bar x}^{n}\right)_{x,i}\right]$$

$$a(y_i) = 1 + y\,\frac{y_{i-1}^2+y_i^2}{2}$$

Задача 5

Построить семейство схем 2го порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left((1+x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + x^3, \quad 0<x<1, \quad 0<t\le T$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0, \quad u(x,0)=\overset{=u_0}{0}, \quad u_t(x,0)=x(1-x)$$

Решение:

Интерес представляет апрокс. условие: $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=x(1-x)$:

$$u^0_{t,i} = \{\text{разл. в } x=x_i,\ t=0\} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^2) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left((1+x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right)^0 + x^3\right] + O(\tau^2) = x_i(1-x_i) + \frac{\tau}{2}x_i^3 + O(\tau^2)$$

Ответ: $y^n_{\bar t t,i} = \sigma\Lambda y_i^{n+1} + (1-2\sigma)\Lambda y_i^n + \sigma\Lambda y_i^{n-1} + x_i^3$, $i=\overline{1,N-1}$, $n=\overline{1,K-1}$

$\Lambda y_i = (a y_{\bar x})_{x,i}$, $a_i = 1+\frac{1}{2}(x_{i-1}^2+x_i^2)$, $Nh=1$, $K\tau=T$

$y_0^{n+1}=y_N^{n+1}=0$, $y_i^0=0$, $y_i^1=\tau x_i(1-x_i)+\frac{\tau^2}{2}x_i^3$

Задача 6

Построить метод Ньютона для реш-я разн. ур-ий:

$$y_{\bar x x,i} = -f(x_i,y_i), \quad i=\overline{1,N-1}, \quad y_0=\mu_1, \quad y_N=\mu_2$$

Решение:

$$-y^{(n+1)}_{\bar x x,i} = f(x_i, y_i^{(n+1)}) \approx (-\text{ хотим}) \approx f(x_i,y_i^{(n)}) + f'_u(x_i,y_i^{(n)})\cdot\left(y_i^{(n+1)}-y_i^{(n)}\right)$$

Ответ: $\left(y_i^{(n+1)}-y_i^{(n)}\right) f'_u(x_i,y_i^{(n)}) + y^{(n+1)}_{\bar x x,i} = -f(x_i,y_i^{(n)})$

$y_0^{(n+1)}=\mu_1$, $y_N^{(n+1)}=\mu_2$

Задача 7

Построить итерац. метод Ньютона:

$$(1+y_i)\,y_{\bar x x,i} + 1 = 0, \quad i=\overline{1,N-1}, \quad y_0=\mu_1, \quad y_N=\mu_2$$

Решение:

$f(y) = \frac{1}{1+y}$, $f'_y = -\frac{1}{(1+y)^2}$

<u>Ответ:</u> $\frac{y_i^{(n+1)} - y_i^{(n)}}{1+y_i^{(n)}} = (1+y_i^{(n)}) y_{\bar{x}x,i}^{(n+1)} + 1$, $y_0^{(n+1)} = \mu_1$, $y_N^{(n+1)} = \mu_2$

<u>Задача ~~7~~8</u>

Построить итерац метод Ньютона для реш-я сис-мы:

$f_1(x_1, x_2) = 0, \quad f_2(x_1, x_2) = 0$

<u>Решение:</u>

$0 = f_\alpha(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}) \approx f_\alpha(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1}(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \cdot (x_1^{(n+1)} - x_1^{(n)}) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_2}(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \cdot$

$\cdot (x_2^{(n+1)} - x_2^{(n)})$, $\alpha = 1, 2$

<u>Ответ:</u> $D \cdot (x^{(n+1)} - x^{(n)}) + f(x^{(n)}) = 0$,

$x = (x_1, x_2)^T$, $f = (f_1, f_2)^T$

D - матрица Якобиана $\frac{D(f_1, f_2)}{D(x_1, x_2)}$.