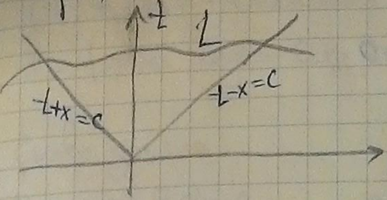
2) Задача Коши для волн. ур-ия

$\exists$ реш-ие ур-ия следует из конкретных формул (Даламбер, Пуассон, Кирхгофа). Также с помощью этих формул доказывается единственность.



Нач. усл. можно задать на L:

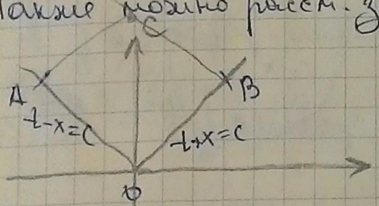
$$\begin{cases} u|_L = \varphi \\ \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_L = \psi \end{cases}$$

L должна быть Жордановой кривой (незамкнутой!): $\forall$ хар-ка вида $t-x=c_1$ или $t+x=c_2$ пересекает её не более, чем в 1 точке

Касат. к L в любой точке нигде не совп. с характер. направлением волнового ур-ия ($\varphi_1(x,y)=c$, $\varphi_2(x,y)=c_2$ см. прошлую лекцию)

$\vec{l}$ — вектор, кот. ни в одной точке не совпадает с касат. к L

Также можно рассм. задачу Гурса (с данными на хар-ках)



$$\begin{cases} u|_{OA} = \varphi_1 \\ u|_{OB} = \varphi_2 \\ \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \end{cases}$$ => можно найти реш-е

Данные на AC и BC однозначно опр. φ_1 и φ_2!

=> невозможно корректно пост. задачу Коши с носителем на замкнутом контуре (эта задача м.б. неразрешима)

3) Ур-ие теплопроводности

$D \subset E^n$, D — область, огр. цилиндрич. пов-тью S, у кот. образующие $\parallel$ оси x_n, D — огр. 2мя пл-тями $x_n = 0$, $x_n = h > 0$

S — часть границы обл-ти без верхнего основания.

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \\ \lim\limits_{x \to y,\, x \in D} u(x) = \varphi(y), \quad y \in S \end{cases}$$

— первая кр. задача для ур. теплопров.

φ — дост. гладкая ф-ия на S

Для реш-я этой задачи тоже выполн. принцип экстремума: если u — регул. реш-е задачи, непр-ное вплоть до границы области (с верхней крышкой), то оно достигает экстремума на S.

$\Rightarrow$ отсюда следует единств. реш-я

Волновое уравнение. Формула Кирхгофа

$\Delta u - u_{tt} = 0$, $x \in E^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $t \in E^1$, $t > 0$

$n = 3 \Rightarrow$ ур-ие акустики

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \underline{\underline{(1)}} \quad \text{в } E^4$$

Кв. форма: $Q(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - \lambda_{n+1}$ — гиперб. тип

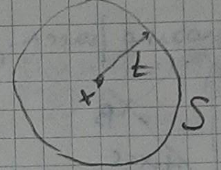
Лемма

Регулярное реш-е ур-ия (1) представимо в виде:

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \int_S \frac{\mu(y_1, y_2, y_3)}{|y-x|} dS_y \quad , \quad S\text{-сфера } |y-x| = t$$

$\mu \in C^2$ по перем. y_1, y_2, y_3 — произв. ф-ия

$|y-x| = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2}$



Док-во:

Сделаем замену:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + t\xi_1 \\ y_2 = x_2 + t\xi_2 \\ y_3 = x_3 + t\xi_3 \end{cases} \Rightarrow \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1 \Rightarrow \text{инт-ие по ед. сфере } \sigma$$

$dS_y = t^2 d\sigma_\xi$

$$\Downarrow$$

$$u(x,t) = \int_\sigma \frac{\mu(x_1+t\xi_1, x_2+t\xi_2, x_3+t\xi_3)}{t} t^2 d\sigma_\xi = t\int_\sigma \mu(x_1+t\xi_1, x_2+t\xi_2, x_3+t\xi_3) d\sigma_\xi$$

Проверим, что полученное $u(x,t)$ — реш-е ур-ия (1).

$\exists\, \mu$ имеет непр. 2ые частн. произв. по всем перем.

$$\Delta u(x,t) = t\int_\sigma \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y_i^2} d\sigma_\xi$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_\sigma \mu(x_1+t\xi_1, x_2+t\xi_2, x_3+t\xi_3) d\sigma_\xi + \underbrace{t\int_\sigma \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mu}{\partial y_i}\xi_i d\sigma_\xi}_{I} = \frac{u}{t} + \frac{I}{t},$$

$$I = t^2 \int_\sigma \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mu}{\partial y_i}\xi_i d\sigma_\xi = \int_S \left[\frac{\partial \mu}{\partial y_1}\xi_1 + \frac{\partial \mu}{\partial y_2}\xi_2 + \frac{\partial \mu}{\partial y_3}\xi_3\right] dS_y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\frac{\partial u}{\partial t}\cdot t - u}{t^2} + \frac{\frac{\partial I}{\partial t}\cdot t - I}{t^2} = \frac{\left(\frac{u}{t}+\frac{I}{t}\right)\cdot t - u}{t^2} + \frac{\partial I}{\partial t}\cdot\frac{1}{t} - \frac{I}{t^2} =$$

$$= \frac{\partial I}{\partial t}\cdot\frac{1}{t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$I = \int_S \left[\frac{\partial u}{\partial y_1}\xi_1 + \frac{\partial u}{\partial y_2}\xi_2 + \frac{\partial u}{\partial y_3}\xi_3\right] dS_y = \int_S \left[\frac{\partial u}{\partial y_1}\nu_1 + \frac{\partial u}{\partial y_2}\nu_2 + \frac{\partial u}{\partial y_3}\nu_3\right] dS_y,$$

(ν_1, ν_2, ν_3) – внешняя единичная нормаль к сфере в т. y

$$I = \{\text{ф-ла Гаусса-Остр.}\} = \iiint_{D:\,|y-x|\le t} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_3^2}\right] d\tau_y$$

Снова замена:

$$\begin{cases} y_1 = r\sin\theta\sin\varphi, & r \in [0, t] \\ y_2 = r\sin\theta\cos\varphi, & \varphi \in [0, 2\pi] \\ y_3 = r\cos\theta, & \theta \in [0, \pi] \end{cases}$$

Якобиан: $r^2\sin\theta$

$$I = \int_0^t dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \Delta u \cdot r^2 \sin\theta \, d\varphi$$

$d\tau_y = r^2\sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta$

$dS_y = \sin\theta\, d\varphi\, d\theta$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \Delta u \cdot t^2 \sin\theta\, d\varphi = t^2 \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \Delta u \cdot \sin\theta\, d\varphi \stackrel{\vee}{=}$$

$\stackrel{\vee}{=} t^2 \int_\sigma \Delta u \, d\sigma_\xi$ – инт-л по поверхн. ед. сферы

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = t \int_\sigma \Delta u \, d\sigma_\xi = \Delta u(x, t) \Rightarrow u$ – реш-е волн. ур-ия, ч.т.д.

Задача Коши (3D)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$u(x, 0) = \varphi(x)$

$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$, $x \in G \subset E^3$, $\varphi(x) \in C^3(G)$, $\psi(x) \in C^2(G)$

Введём обозначения:

$$t \cdot M(\mu) = \frac{1}{4\pi} u(x, t) \stackrel{\vee}{=} \{u - \text{реш-е}\} \stackrel{\vee}{=} \frac{t}{4\pi} \int_{|\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2| = 1} \mu(x_1 + t\xi_1, x_2 + t\xi_2, x_3 + t\xi_3)\, d\sigma_\xi$$

$\Rightarrow M(\mu) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|y-x|=t} \mu(y_1, y_2, y_3)\, dS_y$ – интегральное среднее ф-ии μ по сфере S

$\Rightarrow t \cdot M(\mu)$ – регулярное реш-е.

$\frac{\partial}{\partial t}[t \cdot M(\mu)]$ – тоже реш-е (1) (проверяется подстановкой в (1) с пост. коэфф.)

Рассм. $u(x_1,x_2,x_3,t) = \underbrace{tM(\psi)}_{\text{реш-е}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left[\overset{\text{реш-е (1)}}{tM(\varphi)}\right]}_{\text{реш-е}}$ — реш-е ур-ия (1) по лемме. Осталось проверить НУ

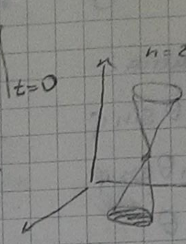
$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t} + \frac{I}{t}$, $u = tM(\varphi)$

n – внешн. нормаль в т. (y_1,y_2,y_3) к сфере S

$\frac{\partial u}{\partial t} \overset{!!}{=} \frac{\partial(tM(\varphi))}{\partial t} = M(\varphi) + \frac{1}{t}\int_S \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS_y$

$u(x_1,x_2,x_3,0) = \frac{\partial}{\partial t}[tM(\varphi)]\Big|_{t=0} = M(\varphi)\Big|_{t=0} + \frac{1}{t}\int_S \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS_y\Big|_{t=0}$

(*) Проверить вып. НУ!



Решение задачи Коши в т. (x,t) определяется для:

$K: |y-x|^2 - (\tau - t)^2 = 0$ — конус с верш. в т. (x_1,x_2,x_3,t)

Реш-е опр. $K \cap \{\tau = 0\} \subseteq G$

Принцип Гюйгенса

Значение в т. x в момент t зависит от данных на сфере $\{y: |x-y| = t\}$!

(*) $u(x_1,x_2,x_3,0) = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \varphi(x_1,x_2,x_3)\, d\sigma_\xi + t\int_S \ldots dS_y\Big|_{t=0} = \varphi(x_1,x_2,x_3)\cdot\frac{1}{4\pi}\cdot 4\pi =$

$= \varphi(x_1,x_2,x_3)$ ✓

$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = M(\psi)\Big|_{t=0} + \cancel{t\cdot\ldots}\Big|_{t=0} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}[tM(\varphi)]\Big|_{t=0}$

$M(\psi)\Big|_{t=0} = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \psi(x_1+t\xi_1, x_2+t\xi_2, x_3+t\xi_3)\, d\sigma_\xi\Big|_{t=0} = \psi(x_1,x_2,x_3)$

$\frac{\partial}{\partial t}[tM(\varphi)] = M(\varphi) + t^2\cdot\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma_\xi$

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[tM(\varphi)] = \underbrace{t\cdot\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma_\xi}_{\frac{\partial M(\varphi)}{\partial t}} + \frac{2t}{4\pi}\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma_\xi + t^2\ldots = 0$ ✓

* $\frac{\partial}{\partial t}(tM(\varphi)) = M(\varphi) + t\frac{\partial}{\partial t}(M(\varphi)) = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \varphi(x_1+t\xi_1, x_2+t\xi_2, x_3+t\xi_3)\, d\sigma_\xi +$

$+ \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\xi_i\, d\sigma_\xi = M(\varphi) + \frac{1}{4\pi t}\int_S \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\nu_i}_{\frac{\partial\varphi}{\partial n}\text{ в т. } y} dS_y \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для нахожд. $u(x,t)$ достаточно знать $\varphi, \psi, \frac{\partial\varphi}{\partial n}$ на сфере

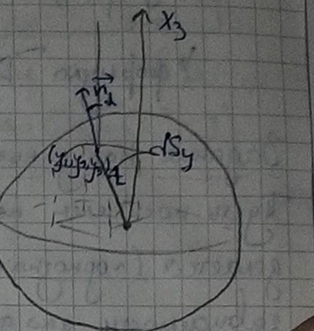
Формула Пуассона. Метод спуска

Переходим в двумерное пр-во

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

$$\begin{cases}\Delta u-\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, & x=(x_1,x_2)\in E^2,\ t\in E^1,\ t>0\\ u(x,0)=\varphi(x)\in C^3 & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)\in C^2 & \end{cases}$$

Возьмём ф-лу Кирхгофа и положим $x_3=\text{const}$ (0)



$$u(x,t)=tM(\psi)+\frac{\partial}{\partial t}[tM(\varphi)]$$

При вычисл. инт-ла в ф-ле Кирхгофа вместо интегр. по сфере будем инт-ть по кругу

$$dS_y=dy_1\,dy_2\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\quad,\text{ где }\alpha\text{ - угол } \alpha=(\vec{i_3},\vec{n})$$

$$\cos\alpha=\frac{y_3}{|t|}$$

Сфера задаётся ур-нем: $\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2}=t^2$ (0)

$$y_3=\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}\quad\Rightarrow\text{ вычислим }\cos\alpha.$$

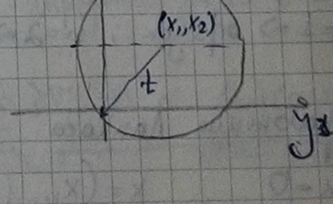
$$u=\frac{1}{4\pi t}\int_S\psi(y)\,dS_y+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_S\varphi(y)\,dS_y\right)=\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{\substack{|y-x|^2\le t^2\\ \text{круг в 2D}}}\psi(y)\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}\,dy_1\,dy_2\cdot 2+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|y-x|^2\le t^2}\varphi(y)\frac{t}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}\,dy_1\,dy_2\right]\cdot 2$$

нижн. и верхн. половинки сферы

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|y-x|^2\le t^2}\frac{\psi(y)}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}\,dy_1\,dy_2+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int\limits_{|y-x|^2\le t^2}\frac{\varphi(y)}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}\,dy_1\,dy_2\right]}$$

формула Пуассона



Формула Даламбера

Пусть φ и ψ зависят только от $x_1\equiv x$

$y_1\in[x_1-t,\ x_1+t]$, $y_2\in[$

Сделаем замену перем. в ф-ле Пуассона: $(\eta_1=y_1-x_1,\ \eta_2=y_2-x_2)$

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t}\psi(x+\eta_1)\,d\eta_1\int_{-\sqrt{t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{t^2-\eta_1^2}}\frac{d\eta_2}{\sqrt{t^2-(\eta_1^2+\eta_2^2)}}+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{-t}^{t}\varphi(x+\eta_1)\,d\eta_1\int_{-\sqrt{t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{t^2-\eta_1^2}}\frac{d\eta_2}{\sqrt{t^2-(\eta_1^2+\eta_2^2)}}\right.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t}\psi(x+\eta_1)\cdot \underbrace{\arcsin\frac{\eta_2}{\sqrt{t^2-\eta_1^2}}\Bigg|_{-\sqrt{t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{t^2-\eta_1^2}}}_{=\pi} d\eta_1 + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\Bigg[\int_{-t}^{t}\varphi(x+\eta_1)\cdot \underbrace{\arcsin\frac{\eta_2}{\sqrt{t^2-\eta_1^2}}\Bigg|}_{=\pi} d\eta_1$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-t}^{t}\psi(x+\eta_1)\,d\eta_1 + \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{-t}^{t}\varphi(x+\eta_1)\,d\eta_1\right]\right) =$$

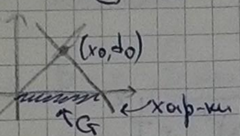
$$= \boxed{\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\left(\varphi(x+t)-\varphi(x-t)\right) = u(x,t)}$$

формула Даламбера

<u>Задание нач. данных</u>

Пусть носителем нач. данных явл. E^n. <u>Опр</u> Мн-во G, на кот. вполне определяется (~однозначно) $u(x,t)$ в ~~проц~~ точке $(x,t)\in E^{n+1}$ назыв. областью зависимости для данной точки.

(n=1)

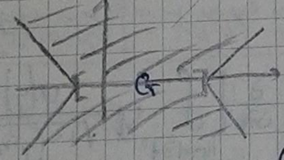


(n=2) $G: |y-x|^2 \leq t^2$

(n=3) G определяется по ф-ле Кирхгофа (сфера)

<u>Опр</u> Область влияния: значения φ и ψ на мн-ве G влияют на $u(x,t)$ в точках $G_x \cap \{|y-x|^2 \leq t^2\} \neq 0$

(n=1)



<u>Опр</u> Область определения (обл. распространения волны) – мн-во точек, в которых реш-е $u(x,t)$ вполне определяется значениями φ и ψ на G.

$n=1 \Rightarrow$ отрезок; $n=2 \Rightarrow$ круг; $n=3 \Rightarrow$ сфера

<u>Уравнение Лапласа</u>

$\Delta u = 0$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in E^n$

Оператор Лапласа $\Delta = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

<u>Задача Дирихле</u>

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 & \text{в } D \\ u|_S = \varphi(x) \end{cases}$$

Опр Гармоническая ф-ия u в D, если она обладает непр. частн. произв. до второго порядка и удовл. ур-ию Лапласа

Свойства гармонич. ф-ий:

1) Если u – гармон. ф-ия в D, то $u(\overbrace{\lambda Cx + h}^{y})$ – тоже гарм. в D

x, h – векторы, λ – число, C – ортогон. м-ца ($C^T = C^{-1} \Leftrightarrow C^TC = CC^T = J$)

Док-во:

Проверим гармоничность

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ & & \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_i}. \qquad y_j = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_{ji} \cdot x_i + h_j$$

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \lambda c_{ji} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_j} \cdot \lambda c_{ji} = \lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_j} c_{ji}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \lambda \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_j} c_{ji}\right) = \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_j} c_{ji}\right) \cdot \overbrace{\frac{\partial y_k}{\partial x_i}}^{\lambda c_{ki}} =$$

$$= \lambda^2 \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_j} c_{ji} c_{ki}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \lambda^2 \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_j} \overbrace{\sum_{i=1}^{n} c_{ji} c_{ki}}^{\delta_{kj}} = \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} = 0, \text{ ч.т.д.}$$

2) Пусть u_k, $k = \overline{1,m}$ – гармон. ф-ии. Тогда $u = \sum_{k=1}^{m} u_k c_k$ – гарм. ф-ия

Без док-ва (очевидно)

3) Пусть $D \subset E^n$ с дост. гладкой границей S, u, v – гармонич. ф-ии в D, облад. непр. частн. произв. 1го пор. на $D \cup S$.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad (1)$$

В частности, при $v = u$: $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = 0 \text{ (по предыдущ.)} \qquad (2)$$

Интегрируем (1), (2) по D и используем Гаусса-Остр.:

$$\int_S v(y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}\,dS_y = \sum_{i=1}^{n}\int_D \frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}\,d\tau_x \qquad \underline{(1)}$$

1ая и 2ая ф-лы Грина

$$\int_S \left[v(y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} - u(y)\frac{\partial v(y)}{\partial \nu_y}\right] dS_y = 0 \qquad \underline{(2)}$$

(ν_y - вн. нормаль в т. y)

Если область неогр. и содерж. беск. удалённую точку, то доп. нужно сказать, что все подинт. ф-ии абс. инт-мы.

4) Пусть $u(x)$ - гарм. в D, $u \in C^1(D \cup S)$,

$u(x)|_{x\in S} = 0 \Rightarrow u(x) = 0,\ x \in D\cup S$

Док-во:

Положим в 1ой ф-ле $u = v \Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n}\int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau_x \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv 0,\ i = \overline{1,n} \Rightarrow u = const$

$u(x)|_{x\in S} = 0$

$u \in C(D\cup S)$

$\Rightarrow u \equiv 0,\ x \in D\cup S$, ч.т.д.

5) Пусть $u(x)$ - гарм. в $D \Rightarrow \int_S \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y)\,dS_y = 0$

Док-во:

Положим в (2) $v \equiv 1 \Rightarrow \checkmark$, ч.т.д.

Интегральное представление гармонической ф-ии

В сферически-симметричном случае:

$\Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{du}{dr} = 0$ (n - размерность)

Фунд. решения: $u_1 = 1$, $u_2 = r^k$

$k(k-1)r^{k-2} + \frac{n-1}{r}\cdot k r^{k-1} = 0$, $k > 2$

$r^{k-2}[k-1 + n-1] = 0 \Rightarrow k = 2-n \Rightarrow u_2 = \frac{1}{r^{n-2}}$, $n \neq 2$

Если $n = 2 \Rightarrow u'' + \frac{1}{r}u' = 0$ $\quad \ln u' = -\ln r + c$

$\frac{d(u')}{dr} = -\frac{u'}{r} \Rightarrow \frac{du'}{u'} = -\frac{dr}{r} \Rightarrow u' = \frac{c}{r} \Rightarrow u_2 = \ln r$

$\forall x, y \in E^n$, $n \geq 2$, $r = |x-y|$:

$$u_1 = 1,\quad u_2 = \begin{cases} -\ln|x-y|, & n = 2 \\ \frac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}}, & n > 2 \end{cases}$$

$u_2 \overset{\text{обозн}}{=} E(x,y)$ — решение с особенность при $x = y$!

При $n=3$ $E(x,y)$ – потенц. эл. поля заряда, помещ. в т. x

Теорема

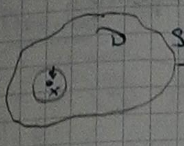
Если u – гарм. в D, $u \in C^1(D \cup S)$ $\Rightarrow$ верно представление:

$$u(x,\cancel{y}) = \frac{1}{\omega_n}\int_S E(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}\,dS_y - \frac{1}{\omega_n}\int_S u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}\,dS_y,$$

ω_n – площадь пов-ти единичн. сферы в n-мерном пр-ве.

Док-во:

$$\omega_n = n\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}R^{n-1}, \quad V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}R^n \overset{R=1}{=} \frac{\omega_n}{n}$$ – объём n-мерн. шара



~~Применим~~ Исключим из области D шар $|y-x| < \varepsilon = D_\varepsilon$

Применим для $D \setminus D_\varepsilon$ (2) с $v(y) = E(x,y)$:

$$\int_S \left[E(x,y)\frac{\partial u}{\partial \nu_y} - u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}\right]dS_y = -\int_{|x-y|=\varepsilon}\left[E(x,y)\frac{\partial u}{\partial \nu_y} - u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}\right]dS_y = -\int_{|x-y|=\varepsilon} E(x,y)\frac{\partial u}{\partial \nu_y}dS_y + \int_{|x-y|=\varepsilon} u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}dS_y = I_1 + I_2$$

пост. на границе шара

$$I_1 = -E(x,y)\Big|_{|x-y|=\varepsilon}\cdot\underbrace{\int_{|x-y|=\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial \nu_y}dS_y}_{=0} = 0 \text{ (по св-ву 5))}$$

можно вычислить

$$I_2 = \int_{|x-y|=\varepsilon} u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}dS_y = \{\pm u(x)\} = \int_{|x-y|=\varepsilon} u(x)\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}dS_y + \underbrace{\int_{|x-y|=\varepsilon}[u(y)-u(x)]\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}dS}_{\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0}$$

($[u(y)-u(x)] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, $\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}$ – const при $\varepsilon \to 0$)

$$\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} = -\frac{\partial E(r)}{\partial r} = \frac{1}{r^{n-1}}$$

$$I_2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} u(x)\cdot\frac{\omega_n\cdot\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^{n-1}} = u(x)\cdot\omega_n \Rightarrow \text{ф-ла верна, \underline{ч.т.д.}}$$

Теорема (о среднем)

Если шар $|x-y| \le R$ лежит целиком в обл-ти D, ~~то~~ $u(x)$ – гарм. в D (можно всему шару), тогда знач. u в т. x равно её среднему значению по пов-ти шара.

Док-во:

$$S = \{|x-y| = R\} \Rightarrow u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{C_R} E(x,y)\frac{\partial u}{\partial \nu_y}dS_R - \frac{1}{\omega_n}\int_{C_R} u\frac{\partial E}{\partial \nu_y}dS_R =$$

$$= \{\text{первое слаг.} = 0, \text{ т.к. } u \text{ – гарм.}\} = +\frac{1}{\omega_n}\int_{C_R} u\cdot\frac{1}{R^{n-1}}dS_R =$$

$$= \frac{1}{\omega_n\cdot R^{n-1}}\int_{C_R} u\,dS_R \Rightarrow R^{n-1}u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{C_R} u\,dS_R$$

Заменим $R \to r$, $r \in [0,R]$, $\int_0^R dr$:

$$\int_0^R r^{n-1}u(x)\,dr = \int_0^R \frac{dr}{\omega_n}\int_{C_r} u\,dS_r$$

$\frac{R^{n}}{n}u(x) = \underbrace{\int_{\Omega_R}}_{\text{инт-л по шару}} \frac{u}{\omega_n} d\tau_y \Rightarrow \frac{R^n\omega_n}{n}u(x) = \int_{\Omega_R} u\, d\tau_y$ (~ среднее знач. по шару)

Формулы ср. значения при конкр. n:

n=2: $y_1 = x_1 + r\cos\varphi$

$y_2 = x_2 + r\sin\varphi$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_1 + r\cos\varphi, x_2 + r\sin\varphi)\, d\varphi$$

n=3:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} u(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)\, d\varphi, \quad y_1 = r\cos\varphi\sin\theta \ldots$$

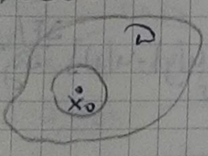
Принцип экстремума

Обозначим $m = \inf_{x\in D} u(x)$, $M = \sup_{x\in D} u(x)$

Считаем, что ф-ия опред. в $D \Rightarrow m$ и M – числа (не $\pm\infty$!)

Если в области D гармон. ф-ия достиг. m и M, $u \in C(D)$ $\Rightarrow u(x) = const$.

Док-во:



Пусть $\exists x_0 \in D : u(x_0) = M$

Рассм. область $|x - x_0| < \varepsilon \subset D$

$$\underset{M}{u(x_0)} = \frac{n}{\varepsilon^n\omega_n}\int_{\Omega_\varepsilon} \underset{\leq M}{u(y)}\, d\tau_y < M, \text{ если } \exists y \text{ в этом шаре: } u(y) < M$$

$\Rightarrow u(x) = M$ во всей окр-ти $|x - x_0| < \varepsilon$

Фикс. $\forall x \in D$. Проведем непр. ~~прямую~~ кривую от x_0 к x и последоват. продвигаем шар рад. ε к т. x $\Rightarrow u(x) = M \Rightarrow \forall x \in D \Rightarrow u(x) = const$.

ч.т.д.

Дополнение:

Если доп. положить $u(x) \in C(D \cup S)$, то $u(x)$ достиг. min и max где-то на S

~~Док-во~~

~~$u \in C$~~

$\exists\, u \in C^2(D) \cup C(D \cup S)$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D \\ u|_S = \varphi(x) \end{cases}$$

показать, что реш-е единств. и устойчиво ($\|\varphi_1 - \varphi_2\| < \varepsilon \Rightarrow \|u_1 - u_2\| < \varepsilon$)

Функция источника (ф-ия Грина)

Опр $G(x,\xi)$ — ф-ия Грина, $x,\xi \in D \cup S$, удовл. 2 условиям:

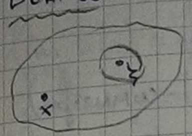
1) $G(x,\xi) = \underbrace{E(x,\xi)}_{\text{фунд. реш-е ур. Лапласа}} + \underbrace{g(x,\xi)}_{\text{гармонич. по обоим аргументам в } D}$

2) $G(x,\xi)\Big|_{x,\xi \in S} = 0$ (хотя бы одна из $x,\xi \in S$) $\quad \left(\sim g(x,\xi)\Big|_{x,\xi\in S} = -E(x,\xi)\Big|_{x,\xi \in S} \right)$

Свойства:

1) $G(x,\xi) \geq 0$ в D

Док-во:



$\ast\ D_\delta = D \setminus \{|\xi - y| \leq \delta\}$

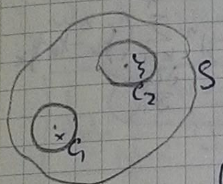
$\lim\limits_{x\to\xi} G(x,\xi) = +\infty$ (в силу $E(x,\xi)$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow G(x,\xi) > 0$ при $|x-\xi| \leq \delta$

На границе $|y-\xi| = \delta$: $G(x,y) > 0 \Rightarrow$ в силу принц. экстремума в D_δ $G(x,\xi) > 0$, ч.т.д.

2) $G(x,\xi) = G(\xi,x)$

Док-во:



$D_1 = D$ без 2 шаров, фикс. $z \in D$,

$\ast\ G(z,x),\ G(z,\xi)$.

Применим (2) для $u = G(z,x)$, $v = G(z,\xi)$:

$$\int\limits_{C_1 \cup C_2 \cup S} \left[G(z,\xi) \frac{\partial G(z,x)}{\partial \nu_z} - G(z,x)\frac{\partial G(z,\xi)}{\partial \nu_z} \right] dS_z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int\limits_S \ldots}_{=0\ (\text{по опр. } G(x,\xi))} = -\int\limits_{C_1}\ldots - \int\limits_{C_2}\ldots \Rightarrow \int\limits_{C_1}\ldots = -\int\limits_{C_2}\ldots$$

Устремим радиусы 2х сфер к нулю, расписывается $G = E + \overset{\text{гарм.}}{g} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $\delta \to 0$ $\cancel{G(x,\xi)}$ $G(\xi,x) = G(x,\xi)$ (исп. рассужд., аналог. выводу интегр. представления)

3) В ф-ле интегр. представл. возьмем $E(x,y) \xrightarrow{\text{можно, т.к.}} G(x,\xi)$: g удовлетв. зад. 2й ф-ле Грина

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int\limits_S \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \nu_\xi} \varphi(\xi)\, dS_\xi$$

Решение задачи Дирихле для шара

$D = \{|x| < 1\}$

$] x, \xi \in D$, $\ast$ $G(x,\xi) = E(x,\xi) + g(x,\xi) = E(x,\xi) - E\left(|x|\xi, \frac{x}{|x|}\right)$

$g(x,\xi) = -E\left(|x|\xi, \frac{x}{|x|}\right)$

$E(x,\xi) = \frac{1}{(n-2)|x-\xi|^{n-2}}$, $n > 2$ $\Rightarrow$ $\cancel{E(x,\xi)}$

$\Rightarrow g(x,\xi) = -\frac{1}{(n-2)\left|\frac{x}{|x|} - |x|\xi\right|^{n-2}}$

$\left|\,|x|\xi - \frac{x}{|x|}\right| = \sqrt{|x|^2\xi^2 - 2(\xi,x) + \frac{x^2}{|x|^2}} = |x| \cdot \left|\xi - \frac{x}{|x|^2}\right| = |\xi|\left|x - \frac{\xi}{|\xi|^2}\right|$

ф-ия гарм. по ξ — гарм. по x

$] |\xi| = 1 \Rightarrow |\xi - x| = \sqrt{1 - 2(x,\xi) + |x|^2} = \left|\,|x|\xi - \frac{x}{|x|}\right|$

$G(x,y)\Big|_{|x|=1} = E(x,y)\Big|_{|x|=1} - E\left(1\cdot y, \frac{x}{|x|}\right)\Big|_{|x|=1} = 0$ (т.к. $E(x,y)$ – симметр.)

Воспользуемся ф-лой из св-ва 3):

$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \nu_\xi}\varphi(\xi)\,dS_\xi$. Подставим сюда $G(x,\xi)$:

$] |\xi| = 1$

$G(x,\xi) = E(x,\xi) - E\left(|x|\xi, \frac{x}{|x|}\right) = \frac{1}{(n-2)|x-\xi|^{n-2}} - \frac{1}{(n-2)\left|\,|x|\xi - \frac{x}{|x|}\right|^{n-2}}$

(сфера $\Rightarrow$ у нормали коорд. $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$)

$\frac{\partial G}{\partial \nu_\xi}(x,\xi) = \frac{-(n-2)}{2(n-2)\underbrace{|x-\xi|^{n-2}\cdot|x-\xi|}_{|x-\xi|^n}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} 2(\xi_k - x_k)\cdot\xi_k\right) + \frac{(n-2)}{(n-2)} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(|x|\cdot\xi_k - \frac{x_k}{|x|}\right)\cdot 2|x|\xi_k}{2\left|\,|x|\xi - \frac{x}{|x|}\right|^{n}} =$

$= \{] |\xi| = 1\} = -\frac{1}{|x-\xi|^n}\sum_{k=1}^{n}\left[(\xi_k - x_k)\xi_k - \left(\xi_k - \frac{x_k}{|x|}\right)|x|\,\xi_k\right] = \frac{-1}{|x-\xi|^n}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k^2 - \cancel{x_k\xi_k} - |x|^2\xi_k^2 + \cancel{x_k\xi_k}\right) = -\frac{1}{|x-\xi|^n}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2}_{=1}\cdot(1 - |x|^2) = \frac{|x|^2 - 1}{|x-\xi|^n} = \frac{\partial G}{\partial \nu_\xi}$

$\Downarrow$

$$\boxed{u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \frac{1 - |x|^2}{|x-\xi|^n}\varphi(\xi)\,dS_\xi}$$ – ф-ла Пуассона

$n = 2$:

$\xi_1 = \cos\psi$ $\quad x_1 = |x|\cos\varphi$

$\xi_2 = \sin\psi$ $\quad x_2 = |x|\sin\varphi$ $\quad\Rightarrow u(x) = \cancel{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}}$

$|x-\xi|^2 = (|x|\cos\varphi - \cos\psi)^2 + (|x|\sin\varphi - \sin\psi)^2 = |x|^2 + 1 - 2|x|\cos(\varphi - \psi)$

$$\boxed{u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1 - |x|^2}{|x|^2 + 1 - 2|x|\cos(\varphi - \psi)}\cdot f(\psi)\,d\psi}$$

$n=3$: $\begin{cases} \xi_1 = \cos\psi \sin\theta \\ \xi_2 = \sin\psi \sin\theta \\ \xi_3 = \cos\theta \end{cases}$

$$|x-\xi|^3 = \left[(x-\xi, x-\xi)\right]^{3/2} = \left[|x|^2 + |\xi|^2 - 2|x|\overbrace{|\xi|}^{1}\cos\gamma\right]^{3/2}$$

$|x|\cdot\cos\gamma = (x,\xi)$

$$\boxed{u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \frac{(1-|x|^2) f \sin\theta}{(|x|^2+1-2|x|\cos\gamma)^{3/2}} d\psi}$$

Пусть u - гарм. в $\{|x|<R\} = D$
- непр. в $\{|x|\le R\}$

$\lim\limits_{x\to y} u(x) = \varphi(y)$, $x\in D, y\in S$

Сделаем замену: $v(z) = u(Rz)$ => $v(z)$ останется гармонической в $\{|z|<1\}$ и непр. в $\{|z|=1\}$ (по св-вам гарм. ф-ий)

По ф-ле Пуассона:

$$v(z) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} \frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^n}\varphi(R\xi)\, dS_\xi$$

$$u(x) = v\left(\frac{x}{R}\right) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} \frac{1-\frac{|x|^2}{R^2}}{|\xi-\frac{x}{R}|^n}\varphi(R\xi)\, dS_\xi = \{\cdot / R^n\} =$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1}\frac{R^n\left(1-\frac{|x|^2}{R^2}\right)}{|\xi R - x|^n}\varphi(R\xi)\, \underbrace{dS_\xi}_{=\frac{dS_R}{R^{n-1}}} = \frac{R}{\omega_n}\int_{|y|=R}\frac{1-\frac{|x|^2}{R^2}}{|y-x|^n}\varphi(y)\, dS_y =$$

$$= \boxed{\frac{1}{R\omega_n}\int_{|y|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|y-x|^n}\varphi(y)\, dS_y = u(x)}$$

ф-ла Пуассона в шаре рад. R с центром в 0.

Шар с центром в произв. точке

$D: |x-x_0| < R$

Сделаем замену $w(z) = u(z+x_0)$ = ф-ла Пуасс. =>

$$\Rightarrow u(x) = w(x-x_0) = \frac{1}{\omega_n R}\int_{|\xi - x_0| = R}\frac{R^2 - |x-x_0|^2}{|\xi - x|^n}\varphi(\xi)\, dS_\xi$$

Проверим выполнение гр. условия при $n=2$

$$n=2 \Rightarrow u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{1-|x|^2}{|y-x|^2}\overset{\varphi}{f}(y)\, dS_y = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|x|^2}{|x-\xi|^2}\overset{\varphi}{f}(\psi)\, d\psi, \quad \xi = (\cos\psi, \sin\psi)$$

ед. сфера

* $u = 1$ – гармонич. в шаре с гр. усл-ем $\varphi = 1$:

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|x|^2}{|x-\xi|^2}\, d\psi \quad \Big| \cdot \varphi(x_0)$$

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|x|^2}{|x-\xi|^2}\, \varphi(x_0)\, d\psi$$

$$u(x) - \varphi(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|x|^2}{|x-\xi|^2} \underbrace{\left(\varphi(\psi) - \varphi(x_0)\right)}_{(*)} d\psi$$

$\varphi(x)$ – непр-на на окр-ти $\Rightarrow$ равномерно непр-на $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \psi, \psi_0 ;\ |\psi - \psi_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(\psi) - \varphi(\psi_0)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow (*) : \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{\psi_0-\delta}^{\psi_0+\delta} \dots\, d\psi}_{<\varepsilon} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{C \setminus \delta\text{-окр.}} \dots\, d\psi}_{<\varepsilon,\ \text{т.к. } x \to x_0} \qquad \Rightarrow \underline{u(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \varphi(x_0)}$$

Ф-ла Пуассона задает реш-е задачи Дирихле с гр. ф-цией φ.

<u>Следствия из формулы Пуассона</u>

1) Если u – гарм. в E^n и $u(x) \geq 0$ (≤ 0), то $u = const$

<u>Док-во:</u>

Пусть $|x| < R$, $|y| = R \Rightarrow R - |x| < |x-y| < R + |x| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{(R+|x|)^{n-2}} < \frac{1}{|x-y|^{n-2}} < \frac{1}{(R-|x|)^{n-2}}$$

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R}\int_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|y-x|^n}\varphi(y)\, dS_y < \frac{1}{\omega_n R}\int_{C_R} \overbrace{\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}}^{const} u(y)\, dS_y$$

$$\vee$$

$$\frac{1}{\omega_n R}\int_{C_R} \overbrace{\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}}}^{const} u(y)\, dS_y$$

Вспомним ф-лу среднего по сфере: $u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int_{|x-y|=R} u(y)\, dS_y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{|y-x|=R} u(y)\, dS_y = u(x)\cdot \omega_n \cdot R^{n-1}$$

$$R^{n-2}\, \overbrace{\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}}}^{\to 1} u(0) < u(x) < R^{n-2}\, \overbrace{\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}}^{\to 1} u(0)$$

x – фикс. точка, устремим $R \to \infty$ $\Rightarrow u(x) = u(0)$, $\forall x$, <u>ч.т.д.</u>

2) Теорема Лиувилля

Если ф-ия гарм. в E^n, огр-на сверху или снизу, то она const.

Док-во: —

$\Downarrow$

Задачи Дирихле для полупр-ва не может иметь > 1 реш-я в классе огр ф-ий

Эллиптические уравнения общего вида

Рассм. дифф. оператор $Lu = \sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)\cdot u$ (1)

A_{ij}, B_i, C – заданы в $D \subset E^n$, $A_{ij} = A_{ji}$, $\forall x \in D$

Предположим, что A_{ij} – дифф-мы $\Rightarrow$:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} e_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \quad (2), \quad e_i = B_i - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}, i=\overline{1,n} \quad (3)$$

Предположим еще, что $e_i(x)$ – дифф-мы ($\sim A_{ij} \in C^2$)

Введем сопряженный оператор:

$$L^* v = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(e_i v) + cv \quad (4)$$

L – самосопряженный, если $\forall u$: $Lu = L^* u$

Утверждение

$L = L^* \Leftrightarrow e_i = 0, \forall i = \overline{1,n}$

Док-во:

$\Leftarrow$ Очевидно

$\Rightarrow$ $Lu = L^* u$. Подставим разные u:

$$u \equiv 1 \Rightarrow cu = cu - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial e_i}{\partial x_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial e_i}{\partial x_i} = 0$$

$$u = x_j \Rightarrow cu + e_j(x) = cu - \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial e_i}{\partial x_i}}_{=0} x_j - e_j \Rightarrow e_j \equiv 0 \ldots, \text{ ч.т.д.}$$

Следствие

$L = L^* \Leftrightarrow B_i = \sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}, i = \overline{1,n}$

Утверждение

$$v\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} - \ldots \qquad \frac{\partial(e_i v)}{\partial x_i}u + \frac{\partial u}{\partial x_i}e_i v$$

$$vLu - uL^*v = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}v - \frac{\partial v}{\partial x_i}u\right)\right) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(e_i uv) \text{ в } D \quad (5)$$

Пусть $D_\varepsilon \subset D$, в кот. усл. $p_1(x), \dots, p_n(x) \in C^1(D_\varepsilon \cup \partial D_\varepsilon)$

$\Rightarrow$ выполн. ф-ла Остроградского:

$$\int_{D_\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial x_i} \, d\tau_x = \int_{S_\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} p_i(y) \cdot \cos(y_i, \vec{n}_y) \, dS_y$$

Применим ф-лу (6).

$$\int_{D} (vLu - uL^*v) \, d\tau_y = \int_{D} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{ij} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v - \frac{\partial v}{\partial x_i} u \right)\right) d\tau + \int_{D} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (c_i uv) \, d\tau_x$$

$$= \int_{S} \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_{ij} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v - \frac{\partial v}{\partial x_i} u \right)\right) \cos(y_j, \vec{n}) \, dS_y + \int_{S} \sum_{i=1}^{n} c_i uv \cos(y_i, \vec{n}) \, dS_y$$

$$= \int_{S} \left[a \left(v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N} \right) + buv \right] dS_y, \text{ где:}$$

$$\int_{S} \left(av \frac{\partial u}{\partial N} - u a_{\partial} v \right) dS_y$$

$buv = \sum_{i=1}^{n} c_i \cos(y_i, \vec{n}) \cdot uv$ — ф-ла Грина

$a^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cos(y_j, \vec{n}) \right)^2$, N — конормаль (ед. вектор) нормаль в точке опр. грани

$\cos(N, y_i) = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cos(y_j, \vec{n})$

Рассмотрим:

$Q(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \lambda_i \lambda_j$ — полож. опр. (т.к. эллипт.)

Опр Оператор назыв. равномерно эллипт., если $\exists k_0, k_1 > 0$: $k_0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \le$

$\le Q(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \le k_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

Следствия (из эллиптичности)

1) $a^2 > 0$ (т.е. не обращ. в 0)

Док-во:

$\exists a^2 = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot \cos(y_j, \vec{n}) = 0$, $\forall i = \overline{1,n}$ — n ур-ий. Рассмотрим как СЛАУ отн-но $\cos(y_1, \vec{n}), \dots, \cos(y_n, \vec{n})$

т.к. $Q(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ полож. опр., то $\det A \ne 0 \Rightarrow \exists$ только трив. реш-е $\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(y_i, \vec{n}) = 0$, $\forall i$?!! $\Rightarrow$ $a^2 > 0$, ч.т.д.

2) $(N, \vec{n}) = \frac{1}{a} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \cos(\vec{n}, y_i) \cdot \cos(\vec{n}, y_j) > 0$ (в силу полож. опр. Q) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ конормаль ни в какой точке поверхн. не лежит в касат. пл-ти. границы обл.

* ур-ие $Lu = f$ в обл. D

Пусть L – равномерно эллипт. оператор

$$a_{ij} = \frac{\text{алг. дополнение к } A_{ij}}{\det\{A_{ij}\}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{kj} = \delta_{ij}$$

$$* \ \sigma(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(x_i - y_i)(x_j - y_j)$$

В силу равном. эллипт. кв. форма, сост. у a_{ij}, тоже равном. эллипт. (без док-ва)

$$\Rightarrow k_0 |x-y|^2 \le \sigma(x,y) \le k_1 |x-y|^2, \quad x,y \in D \cup S$$

Предположим, что $A_{ij} \in C^3(D \cup S)$, $B, C \in C^1(D \cup S)$

Функция Леви (параметрикс)

$$\psi(x,y) = \begin{cases} \sigma_0(y) \cdot \sigma^{\frac{2-n}{2}}, & n > 2 \\ -\frac{1}{4\pi\sqrt{A(y)}} \ln \sigma, & n = 2 \end{cases}, \quad \text{где } \sigma_0 = \frac{1}{\omega_n (n-2)\sqrt{A(y)}}$$

$$A(y) = \det\{A_{ij}(y)\}$$

(~ фунд. реш-ие, если не учит. коэфф. B, C)

Пусть A – единичная м-ца:

$$\sigma(x,y) = |x-y|^2 \Rightarrow \psi(x,y) = E(x,y) \text{ (с точн. до коэфф.)}$$

Перепишем $\psi(x,y)$:

$$\psi(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\omega_n \sqrt{A(y)}} \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y)(x_i - y_i)(x_j - y_j) \right]^{\frac{2-n}{2}}, & n > 2 \\ \frac{1}{2\pi\sqrt{A(y)}} \ln \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y)(x_i - y_i)(x_j - y_j) \right), & n = 2 \end{cases}$$

Проверить (при $n=3$), что $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} = 0$

$$|\psi| < \frac{\overset{\text{просто коэфф.}}{B}}{|x-y|^{n-2}}, \quad \left|\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right| < \frac{B_1}{|x-y|^{n-1}}, \quad \left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}\right| < \frac{B_2}{|x-y|^n}$$

асимптотика ψ и $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$

Потенциалы

Введем

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_D E(x,y) \underbrace{\mu(y)}_{\text{заданная ф-я}} d\tau_y$$

– Ньютоновский потенциал объема масс

$$\mu(y) \in C^1(D \cup S)$$

При $n = 2$: $u(x)$ ~~ведет себя~~ ведет себя как $\widetilde{\rightarrow}$ (при $|x| \to \infty$) $-\ln|x| \int_D \mu(y) d\tau_y$.

Продифференцируем:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{\omega_n}\int_D \frac{\partial}{\partial x_i} E(x,y)\,\mu(y)\,d\tau_y = \left\{ \frac{\partial E}{\partial x_i} = -\frac{\partial E}{\partial y_i} \right\} = -\frac{1}{\omega_n}\int_D \frac{\partial}{\partial y_i} E(x,y)\,\mu(y)\,d\tau_y =$$

$$= -\frac{1}{\omega_n}\int_S E(x,y)\,\mu(y)\cos(\hat{\nu, y_i})\,dS_y + \frac{1}{\omega_n}\int_D \frac{\partial \mu}{\partial y_i} E(x,y)\,d\tau_y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{1}{\omega_n}\int_S \frac{\partial E^{(x,y)}}{\partial x_j}\mu(y)\cos(\hat{\nu, y_i})\,dS_y + \frac{1}{\omega_n}\int_D \frac{\partial \mu}{\partial y_i}\frac{\partial E^{(x,y)}}{\partial x_j}\,d\tau_y =$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\int_S \frac{\partial E}{\partial y_j}(x,y)\cdot\mu(y)\cos(\hat{\nu, y_i})\,dS_y - \frac{1}{\omega_n}\int_D \frac{\partial \mu}{\partial y_i}\frac{\partial E(x,y)}{\partial y_j}\,d\tau_y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta u = \frac{1}{\omega_n}\int_S \frac{\partial E}{\partial \nu_y}\cdot\mu(y)\,dS_y - \frac{1}{\omega_n}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D_\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mu}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial E}{\partial y_i}\,d\tau_y,$$

Воспольз. тем, что $\lim \int_{D_\varepsilon} = \int_D$?

$D_\varepsilon = D \setminus \{|x-y| \le \varepsilon\}$

Воспользуемся гарм. $E(x,y)$: $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 E}{\partial y_i^2} = 0$ при $x \ne y$!

D_ε выделяем для того, чтобы использовать

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mu}{\partial y_i}\frac{\partial E}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\mu\frac{\partial E}{\partial y_i}\right)$$

$$\int_{D_\varepsilon}\ldots = \int_{D_\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\mu\frac{\partial E}{\partial y_i}\right)d\tau_y = \{\text{по частям}\} = \int_{S_\varepsilon}\mu\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}\,dS_y - \int_{|x-y|=\varepsilon}\mu(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}\,dS_y$$

$$\Delta u = \frac{1}{\omega_n}\int_S \frac{\partial E}{\partial \nu_y}\cdot\mu(y)\,dS_y - \frac{1}{\omega_n}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_S \mu(y)\frac{\partial E}{\partial \nu_y}dS_y - \int_{|x-y|=\varepsilon}\mu(y)\frac{\partial E}{\partial \nu_y}dS_y\right) =$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|=\varepsilon}\mu(y)\frac{\partial E}{\partial \nu_y}\,dS_y = \{\pm\mu(x)\} = -\frac{\mu(x)}{\omega_n}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|=\varepsilon}\frac{dS_y}{\varepsilon^{n-1}} - \frac{1}{\omega_n}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|y-x|=\varepsilon}\frac{\mu(y)-\mu(x)}{|y-x|^{n-1}}\,dS_y\right) = -\mu(x)$$

$\to 0$ (в силу непр. μ)

$$\Rightarrow \boxed{\Delta u = -\mu(x)}$$

Вернемся к $Lu = f$: (и $n=2$)

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{2} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f$$

$$u(x) = \omega(x) + v(x)$$

потенциал масс

ищем реш-е в виде

$\omega(x) \in C^3(D \cup S)$

$$v(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_D \ln|x-y|\,\mu(y)\,d\tau_y \Rightarrow \Delta v = -\mu \text{ в } D$$

Подставим u в ур-ие:

$u(x)$ явл. реш-ем $Lu=f$, если $\boxed{\mu(x) + \int K(x,y)\mu(y)\,d\tau_y = g(x)}$, где

$g(x) = Lw(x) - f(x)$, $\quad K(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left[\sum_{i=1}^{2} B_i(x)\frac{x_i-y_i}{|x-y|^2} + C(x)\ln|x-y|\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu(x)$ ищется из интегр. ур-ия Фредгольма 2го рода

У ядра $K(x,y)$ есть особенность в т. $x=y$ $\left(K(x,y) = O\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\right)$

Будем считать, что это интегр. ур-ие имеет реш-ие хотя бы в какой-то малой области. $\quad$ ~~$Lu = Lw - \mu$~~ $\Rightarrow$ получаем семейство реш-ий с выбором $\omega \in C^3(D\cup S)$

Рассмотрим однородное ур-ие:

$Lu=0, \quad B_i, C \in C^1(D\cup S)$

$y \in D, \quad D_\varepsilon = D \setminus \{|x-y| \le \varepsilon\}$

μ_ε - реш-ие инт. ур-ия $\quad \mu_\varepsilon + \int_{D_\varepsilon} K(x,t)\mu_\varepsilon(t,y)\,d\tau_t = g(x,y)$ $\quad$ (y - параметр)

$K(x,t) = \frac{1}{2\pi}\left(B_1(x)\frac{x_1-t_1}{|x-t|^2} + B_2(x)\frac{x_2-t_2}{|x-t|^2} + C(x)\ln|x-t|\right)$

$g(x,y) = -\underbrace{L}_{\cdot\frac{1}{2\pi}}(\ln|x-y|)$ (применили L к фунд. реш-ию $E(x,y)$)

$\Downarrow$

$(**)$ $\; u_\varepsilon(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x-y| - \frac{1}{2\pi}\int_{D_\varepsilon}\ln|x-t|\,\mu_\varepsilon(t,y)\,d\tau_t$ - удовл. $Lu_\varepsilon = 0$ в D_ε.

Хотим построить $u(x)$, переходя к $\varepsilon \to 0$

$\mu_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\rightrightarrows} \mu$, где μ - реш-ие:

$\mu(x,y) = \int_{D_\varepsilon} K(x,t)\mu(t,y)\,d\tau_y = g(x,y)$

Теперь перейдём к пределу в $(**)$:

$\Omega_0(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x-y| - \frac{1}{2\pi}\int_D \ln|x-t|\,\mu(t,y)\,d\tau_t$

↑ элементарное реш-е

$|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$

$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) = -\frac{1}{|x-y|^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|x-y|}\cdot 2(x_1-y_1) \sim \frac{1}{|x-y|}$

Свойства Ω_0:

1) В обл-ти $x \ne y$ $\quad \Omega_0$ - регулярное по x реш-ие $Lu=0$

2) Если $x \to y$, то:

$\Omega_0(x,y) = \underline{O}\left(\ln\frac{2R}{|x-y|}\right), \quad \frac{\partial\Omega_0}{\partial x_i} \underset{i=1,2}{=} \underline{O}\left(\frac{1}{|x-y|}\right), \quad L\Omega_0 = \underline{O}\left(\frac{1}{|x-y|^2}\right)$

$2R$ - диам. обл-ти D

↑ ф-ия, облад. след. св-ми, ~~явл.~~ назыв. элементарным реш-ем одн. ур-ия

Случай $n>2$

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = 0, \quad A_{ij}=A_{ji}$$

Опр $\Omega_0(x,y)$ – элемент. реш-ие, если:

1) $\Omega_0(x,y)$ – регул. по x реш-ие $Lu=0$ при $x\neq y$

2) $\Omega_0 = \underline{\underline{O}}(|x-y|^{2-n})$, $\frac{\partial \Omega_0}{\partial x_i} = \underline{\underline{O}}(|x-y|^{1-n})$, $\frac{\partial^2\Omega_0}{\partial x_i \partial x_j} = \underline{\underline{O}}(|x-y|^{-n})$,

$i,j=\overline{1,n}$ при $|x-y|\to 0$

функция Леви удовл. этим условиям!

Пусть оператор L – равномерно-эллипт.

$$\psi(x,y) = \sigma_0(y)\cdot\sigma^{\frac{2-n}{2}}, \text{ где } \sigma_0(y) = \frac{1}{\omega_n (n-2)\cdot\sqrt{|A(y)|}},$$

$$\sigma(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(x_i-y_i)(x_j-y_j), \quad \psi \text{ – ф-ция Леви}$$

Покажем, что она действ. удовл. 2):

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = -\sigma_0(y)\cdot\frac{(n-2)}{\cancel{2}}\cdot\sigma^{-\frac{n}{2}}\Big[2\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j-y_j) + \sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i}(x_l-y_l)(x_k-y_k)\Big] =$$

$$= -\sigma_0(y)(n-2)\cdot\sigma^{-\frac{n}{2}}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_k-y_k) + P_i(x,y),$$

$P_i(x,y) = \underline{\underline{O}}(|x-y|^{2-n}) \quad \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial x_i} = \underline{\underline{O}}(|x-y|^{1-n})$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j} = -\sigma_0(y)\cdot(n-2)\Big(-n\,\sigma^{-\frac{n}{2}-1}\sum_{k,l=1}^{n} a_{ik}a_{jl}(x_k-y_k)(x_l-y_l) + \sigma^{-\frac{n}{2}+1-1}a_{ij}\Big) +$$

$+P_{ij}(x,y)$, $P_{ij}(x,y) = \underline{\underline{O}}(|x-y|^{1-n})$

Подставим производные в гл. часть ур-ие:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j} = -\sigma_0(y)(n-2)\,\sigma^{-\frac{n+2}{2}}\Big(-n\sum_{k,l,i,j=1}^{n} \overset{=1,\text{ если } k=j}{A_{ij}a_{ik}}\, a_{jl}(x_k-y_k)(x_l-y_l) +$$

$$+\sigma\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}a_{ij}}_{\sum_{i,j=1}\delta_{ij}=n}\Big) + \sum_{i,j=1}^{n} P_{ij}A_{ij} =$$

$$= -\sigma_0(y)(n-2)\cdot\sigma^{-\frac{n+2}{2}}\underbrace{(-n\,\sigma(x,y)+\sigma n)}_{0} + \sum_{i,j=1}^{n} P_{ij}\cdot A_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} P_{ij}A_{ij} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L\psi = \underline{\underline{O}}(|x-y|^{1-n})$$

$\forall$ ф-ию $v = \int\limits_D \psi(x,y)\mu(y)\,d\tau_y$, $\mu \in C^1(D \cup S)$ – аналог Ньютон. потенциала

Подействуем на нее оператором:

$$Lv = -\mu(x) + \underbrace{\int\limits_D L\psi(x,y)\mu(y)\,d\tau_y}_{\text{сх-ся, т.к. } L\psi = O(|x-y|^{1-n})}$$

Если $\mu(x)$ – реш-ие интегр. ур-ия:

$$\boxed{\begin{gathered}\mu(x) + \int\limits_D K(x,y)\mu(y)\,d\tau_y = -(f - Lw), \text{ где} \\ K(x,y) = -L\psi(x,y)\end{gathered}}$$

^интегр. ур-ие Фредгольма 2го рода

, то $u(x) = w(x) + \int\limits_D \psi(x,y)\mu(y)\,d\tau_y$ – реш-ие исходного ур-ия $Lu = f$, $\forall w \in C^3(D \cup S)$

$(A_{ij} \in C^3(D \cup S),\ B_i, C, f \in C^{\cancel{3}\,1}(D \cup S))$

Ур-ие $Lu = f$ будет иметь целое семейство реш-ий (т.к. w можем брать любой)

Решение однородного ур-ия ищем в виде:

$$\Omega_0(x,y) = \psi(x,y) + \int\limits_D \psi(x,y)\mu(y)\,d\tau_y \quad \text{, где } \mu(x) \text{ – реш-ие :}$$

$$\mu(x) + \int\limits_D K(x,t)\mu(t)\,d\tau_y = L\psi$$

__Потенциал двойного и простого слоя__

$\forall D \subset E^n$, $\partial D = S$

Вспомним : $E(x,y)$ – элем. реш-ие ур-ия Лапласа:

$$E(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}}, & n > 2 \\ -\ln|x-y|, & n = 2 \end{cases}$$

Введем $\mu(y)$ – опр. на S инт-мая ф-ия

$$\boxed{\begin{gathered} v(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}\mu(y)\,dS_y \text{ – потенц. двойного слоя} \\ w(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S E(x,y)\mu(y)\,dS_y \text{ – потенц. простого слоя} \end{gathered}}$$

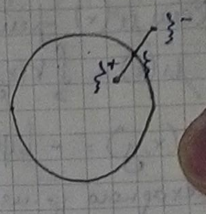
Вспомним ф-лу интегрального представления:

$$u(x) = \underbrace{\frac{1}{\omega_n}\int_S E(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}\, dS_y}_{\text{простой слой с } \mu(y)=\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}} + \underbrace{\frac{1}{\omega_n}\int_S (-u(y))\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}\, dS_y}_{\text{двойной слой с } \mu(y)=-u(y)} \qquad \omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

Случай $n=3$ (связь с эл-вом)

Пусть $D = D^+$, $E^n \setminus (D \cup S) = D^-$, $\xi^+ \in D^+$, $\xi^- \in D^-$

(ξ^+ и ξ^- располож. симметр. отн. ξ)



Пусть в т. ξ^+ сосредоточен заряд μ^0, а в т. ξ^- — $(-\mu^0)$

При $|\xi^+ - \xi^-| \to 0$: $\mu_0 |\xi^+ - \xi^-| = \mu(\xi)$

Для $\forall x \neq \xi$: потенц. поле в т. x $= \frac{\mu_0}{|x-\xi^+|} + \frac{-\mu_0}{|x-\xi^-|}$ (заряд/расстояние)

При $\xi^+ \to \xi^-$ распр-е зарядов — диполь, ν_ξ — ось диполя

$$\lim_{|\xi^+-\xi^-|\to 0} \mu_0\left(\frac{1}{|x-\xi^+|} - \frac{1}{|x-\xi^-|}\right) = \mu \lim_{|\xi^+-\xi^-|\to 0} \frac{1}{|\xi^+-\xi^-|}\left(\frac{1}{|\xi^+-x|} - \frac{1}{|\xi^- - x|}\right) = \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} E(x,\xi)$$

Свойства:

1) $v(x)$ и $w(x)$ — гармон. ф-ии в D^+ и D^- (пронос L внутрь $\int$; L_x действ. только на E, а $y \to$ на S $\Rightarrow$ E внутри и сохраняет гарм.!)

2) $v(x)$ обращается в 0 на ∞ при $\forall n$

3) $w(x) \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0$ при $n>2$

$w(x) \sim -\frac{\ln|x|}{2\pi}\int_S \mu(y)\, dS_y$ при $n=2$

$\Downarrow$

Потенц. дв. слоя — гармонич. во всей области, кроме S, исчезающая на ∞

Случай $n=2$

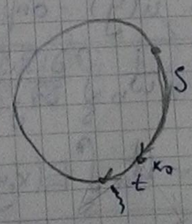
Вопрос: можно ли представить в потенц. дв. слоя точки на границе?

Пусть ~~D~~ S — простая замкнутая жорданова кривая, $\mu \in C^1(S)$

$x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

При $n=2$:

$$v(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial \nu_y} \ln|x-y|\, \mu(y)\, dS_y$$



Пусть $x_0, \xi \in S$

Дуговые абсциссы точек x_0 и ξ на S обозн. s и t

Пусть S параметризуется $y_1(z)$, $y_2(z)$, $z \in [0, l]$

Возьмём $x = x_0$:

$$\pi\, k(s,t) = \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \ln|\xi - x^0| = \frac{1}{|\xi - x^0|^2}\left[(\xi_1 - x_1^0)\cos(\hat{\nu, \xi_1}) + (\xi_2 - x_2^0)\cos(\hat{\nu, \xi_2})\right] =$$

$$= \frac{\cos\varphi}{|\xi - x^0|}, \text{ где } \cos\varphi = \frac{\xi_1 - x_1^0}{|\xi - x^0|}\cos\hat{\nu\xi_1} + \frac{\xi_2 - x_2^0}{|\xi - x^0|}\cos\hat{\nu\xi_2}$$

Докажем, что $k(s,t)$ непр-на по совокупности арг-тов на S

Введем вспомог. ф-ии:

$$\alpha(s,t) = \frac{\xi_2(t) - x_2^0(s)}{t-s}, \quad \beta(s,t) = \frac{\xi_1(t) - x_1^0(s)}{t-s}$$

$$\xi_1(t) - x_1^0(s) = (t-s)\int_0^1 y_1'(s + \tau(t-s))\,d\tau \qquad \beta(s,t) = \int_0^1 y_1'(s+\tau(t-s))\,d\tau \xrightarrow[t\to s]{} y_1'(s)$$

$$\xi_2(t) - x_2^0(s) = (t-s)\int_0^1 y_2'(s + \tau(t-s))\,d\tau \qquad \alpha(s,t) = \int_0^1 y_2' \dots d\tau \to y_2'(s)$$

$$\Downarrow \qquad \beta_t' = \int_0^1 y_1''(s+\tau(t-s))\tau\,d\tau$$

$$\pi\, k(s,t) = \frac{\beta\cdot\alpha_t' - \alpha\beta_t'}{\alpha^2+\beta^2}$$ все непр-ные проверить + выч. $\lim\limits_{t\to s}$ $\qquad \alpha_t' = \int_0^1 y_2''(s+\tau(t-s))\tau\,d\tau$

$$\alpha_t' = \frac{\xi_2'(t)\cdot(t-s) - (\xi_2(t) - x_2^0(s))}{(t-s)^2}, \quad \beta_t' = \frac{\xi_1'(t)(t-s) - (\xi_1(t) - x_1^0(s))}{(t-s)^2}$$

$$\xi_1'(t) = \int_0^1 y_1'(s+\tau(t-s))\,d\tau + (t-s)\cdot\int_0^1 y_1''(s+\tau(t-s))\tau\,d\tau$$

$$\xi_2'(t) = \int_0^1 y_2'(s+\tau(t-s))\,d\tau + (t-s)\int_0^1 y_2''(s+\tau(t-s))\tau\,d\tau$$

$$\alpha_t' = \frac{1}{(t-s)}\cdot\left(\xi_2'(t) - \int_0^1 y_2'(s+\tau(t-s))\,d\tau\right), \quad \beta_t' = \frac{1}{(t-s)}\left[\xi_1'(t) - \int_0^1 y_1'(s+\tau(t-s))\,d\tau\right]$$

$$(t-s)\int_0^1 y_2''(s+\tau(t-s))\tau\,d\tau =$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{(t-s)^2}\left[(\xi_1 - x_1^0)^2 + (\xi_2 - x_2^0)^2\right] = \frac{1}{(t-s)^2}\cdot|\xi - x^0|^2$$

$$\beta\alpha_t' - \alpha\beta_t' = \frac{\xi_1(t) - x_1^0(s)}{(t-s)^2}\left[\xi_2'(t) - \int_0^1 y_2'(s+\tau(t-s))\,d\tau\right] - \frac{\xi_2(t) - x_2^0(s)}{(t-s)^2}\left[\xi_1'(t) - \int_0^1 y_1'(s+\tau(t-s))\,d\tau\right] =$$

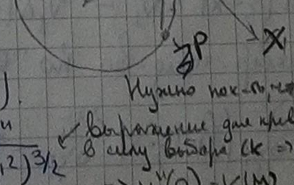
$$= \frac{1}{t-s}\left[\int_0^1 y_1'(s+\tau(t-s))\,d\tau\cdot\xi_2'(t) - \int_0^1 y_2'(s+\tau(t-s))\,d\tau\cdot\xi_1'(t)\right]$$

* случай $n=2$, потенц. дв. слоя

$$v(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial\nu_y}\ln|y-x|\,\mu(y)\,dS_y =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\cos(\widehat{(y-x), \nu_y})}{|y-x|}\mu(y)\,dS_y$$

Хотим посч. $v(x)$ при $x \in S$



Нужно пок-ть, что $\frac{\cos\varphi}{R}$ – непр.

В окр. т. x (нач. коорд.) ур-ие S имеет вид $y(x)$.

∃ Кривая имеет непрерывную кривизну $k(x) = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ ← выражение для крив.

в силу выбора СК $\Rightarrow y'(0) = 0$

$\Rightarrow y''(0) = k(M)$

$y(x) = \frac{1}{2}x^2 y''(\xi x)$, $\xi \in [0,1]$ ← в силу разлож. по Тейлору; $y(0) = y'(0) = 0$

$\rceil x_0 \in S \Rightarrow$ можно ли подст. $v(x_0)$?

$R = x_0\sqrt{1 + x_0^2\left[\frac{y''(\xi x_0)}{2}\right]^2}$ $\quad R = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2 + x^4\left[\frac{y''(\xi x)}{2}\right]^2} = x\sqrt{1+x^2\left[\frac{y''(\xi x)}{2}\right]^2}$

$\cos\varphi = \frac{x_0 y''(\xi x_0)}{2\sqrt{1+x_0^2\left[\frac{y''(\xi x_0)}{2}\right]^2}} \Rightarrow \frac{\cos\varphi}{R} = \frac{x_0 y''(\xi x_0)}{2\sqrt{\ldots}\, R}$ $\quad \cos\varphi = \frac{y}{R} = \ldots \Rightarrow \frac{\cos\varphi}{R} = \frac{y''(\xi x)}{2\left[1+x^2\left[\frac{y''(\xi x)}{2}\right]^2\right]}$

$\lim \frac{\cos\varphi}{R} = \frac{1}{2}k(x)$, при ... $\Rightarrow$ т.к. k – непр. $\Rightarrow \frac{\cos\varphi}{R}$ – непр.

Устремляем $R \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\cos\varphi}{R} = \frac{1}{2}k(x_0)$

⇓

$$v(x_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_S \frac{y - x_0}{|y-x_0|^2}\cdot \nu_y \cdot \mu(y)\,dS_y$$ $\Rightarrow$ ф-ия опр-на и на границе и она непр-на на границе

Докажем для $n=2$, для $n>2$ все аналогично.

<u>Замеч</u> Требования на пов-ть можно ослабить (взять пов-ть Ляпунова)

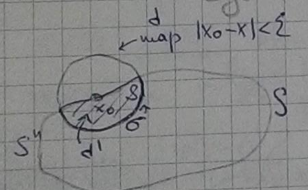
<u>Поведение потенц. дв. слоя на границе</u>

Обозначим $v^+(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in D^+}} v(x)$

$v^-(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in D^+}} v(x)$

$$\boxed{\begin{cases} v^+(x_0) - v(x_0) = -\frac{1}{2}\mu(x_0) \\ v^-(x_0) - v(x_0) = \frac{1}{2}\mu(x_0)\end{cases}}\ (*)$$, μ – пов. пл-ть

докажем



$S = S' \cup S''$

Введем $v_1(x) \in C^2(d' \cup \partial d')$:

$$\begin{cases} v_1(x) = \mu(x) \\ \frac{\partial v_1}{\partial \nu_x}(x) = 0\end{cases},\ x\in S$$

Запишем тождество: $\sum\limits_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\ln|\xi - x|\frac{\partial v_1}{\partial \xi_i} - v_1\frac{\partial}{\partial\xi_i}(\ln|\xi-x|)\right) =$

$= \ln|\xi - x|\,\Delta v_1 - v_1\Delta(\ln|\xi-x|)$ (просто проверяется одинак. слаг. уходят)

Проинтегр. тожд-во по d': (перейти к инт-лу по гр-це)

$$\int_{d'}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\ln|\xi-x|\frac{\partial v_1}{\partial\xi_i} - v_1\frac{\partial}{\partial\xi_i}(\ln|\xi-x|)\right)d\tau_\xi = \int_\sigma\Big(\ln|\xi-x|\frac{\partial v_1}{\partial \nu_\xi} - v_1\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}($$

$$\ln|\xi-x|\Big) dS_\xi - \int_{S'} \mu \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \ln|\xi-x|\, dS_\xi = \{\text{правая часть}\} =$$

$$= \int_{d'} \ln|\xi-x|\, \Delta v_1\, d\tau_\xi - \int_{d'} v_1(x)\, \Delta(\ln|\xi-x|)\, d\tau_\xi$$

Введём $q(x) = \begin{cases} 2\pi, & x \in d' \\ \pi, & x \in S' \\ 0, & x \in D^- \end{cases}$

$$\Rightarrow v_*(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{S''} \mu \frac{\partial}{\partial \nu_\xi}(\ln|\xi-x|)\, dS_\xi + \frac{1}{2\pi}\Big(\int_\sigma \Big[v_1 \frac{\partial}{\partial \nu_\xi}(\ln|\xi-x|) -$$

$$- \ln|\xi-x| \frac{\partial v}{\partial \nu_\xi}\Big] dS_\xi + \int_{d'} \ln|\xi-x|\, \Delta v_1\, d\tau_\xi - \frac{1}{2\pi} q(x) v_1(x)$$

здесь все непр. кроме q

Интегр. члены при переходе из D^+ в D^- через т. x_0 $\Rightarrow$ доказ. (*)

+ интегр. члены непр-но-дифф-мы — и — $\Rightarrow$ первая произв. не претерпевает скачков:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \nu_{x_0}}\right)^+ = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in D^+}} \frac{\partial v}{\partial \nu_x} = \overset{\text{нормаль}}{\nu_{x_0}} \cdot \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in D^+}} (\operatorname{grad} v(x))$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \nu_{x_0}}\right)^- = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in D^-}} \frac{\partial v}{\partial \nu_x} = \nu_{x_0} \cdot \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in D^-}} (\operatorname{grad} v(x))$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial \nu_{x_0}}\right)^+ = \left(\frac{\partial v}{\partial \nu_{x_0}}\right)^-$$

(т.к. $\frac{\partial v_1}{\partial \nu_x} = 0$, а q – ступенчатая)

Если у нас есть задача Дирихле для ур-ия Лапласа в D^+ $\Rightarrow$ реш-ие ищется в виде потенц. дв. слоя с неизв. плотностью:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ \text{изнутри!}}} u(x) = g(x_0), \quad \begin{matrix} x_0 \in S \\ x \in D(D^+) \end{matrix}$$

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial \nu_y}[\log|y-x|]\, \mu(y)\, dS_y, \quad x \in D^+$$

μ – неизв. пл-ть

$\Downarrow$ для поиска u надо решить:

$$u^+(x_0) - u(x_0) = -\frac{1}{2}\mu(x_0), \quad u(x_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\cos\varphi}{|y-x_0|}\mu(y)\, dS_y$$

$$u(x_0) = -\frac{1}{2}\int_S k(s,t)\mu(t)\, dt$$

$$\mu(s) + \int_S k(s,t)\mu(t)\, dt = -2g(s) \quad \Longleftarrow$$

$$g(s) + \frac{1}{2}\int_S k(s,t)\mu(t)\, dt = -\frac{1}{2}\mu(s) \quad \checkmark$$

Потенциал простого слоя

$$w(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_S E(x,y)\mu(y)\, dS_y$$

Не огр. общности, исслед. случай $n=2$:

$$w(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_S \ln|y-x| \cdot \mu(y)\, dS_y$$

Введём $w_1(x) \in C^2(d' \cup \partial d')$:

$$\begin{cases} w_1(x) = 0 \\ \dfrac{\partial w_1}{\partial \nu_x} = \mu(x), \quad x \in S \end{cases}$$

Подставим в то же тожд-во w_1, проинтегр. и получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{S'} \ln|y-x|\,\mu(y)\,dS_y + \frac{1}{2\pi} q(x) w_1(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma}\left(\ln|y-x| \frac{\partial w_1}{\partial \nu_y} - w_1 \frac{\partial}{\partial \nu_y}(\ln|y-x|)\right)dS_y =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{d'} \ln|x-y|\,\Delta w_1\,d\tau_y$$

$$w(x) \overset{S=S'\cup S''}{=} -\frac{1}{2\pi}\int_{S''} \ln|y-x|\,\mu(y)\,dS_y + \frac{1}{2\pi} q(x)\cdot w_1(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma}\Big[\ln|y-x| \frac{\partial w_1}{\partial \nu_y} -$$

$$- w_1 \frac{\partial}{\partial \nu_y}(\ln|y-x|)\Big]dS_y - \frac{1}{2\pi}\int_{d'} \ln|y-x|\,\Delta w_1\,d\tau_y$$

В отличие от $v(x)$, $w(x)$ непр-на на границе, а производная претерпевает скачок:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial w}{\partial \nu_{x_0}}\right)^+ - \dfrac{\partial w}{\partial \nu_{x_0}} = \dfrac{1}{2}\mu(x_0), & \left(\dfrac{\partial w}{\partial \nu_{x_0}}\right)^+ = \nu_{x_0} \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\in D^+}} (\operatorname{grad} w(x)) \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial \nu_{x_0}}\right)^- - \dfrac{\partial w}{\partial \nu_{x_0}} = -\dfrac{1}{2}\mu(x_0), & \text{— " —} \end{cases}$$

Принцип экстремума. Единств. реш-ия задачи Дирихле

Если всюду в обл. D $c(x) < 0$, то регулярное в D реш-ие $u(x)$ ур-ния $\overset{\text{эллипт. оп.}}{L}u = 0$ ни в одной точке $x \in D$ не может ни отриц. (локального?) относительного min, ни полож. относ. max

Док-во: (от противного)

Пусть в какой-то точке $u(x) < 0$ – отриц. относ. min $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \ i = \overline{1,n}$

$\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \underbrace{\lambda_i \lambda_j}_{\text{параметры}} \geq 0$ (η крит. Сильвестра), т.к. в т. x – относ. min

+ оператор L – эллипт. $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\lambda_i\lambda_j \geq \cancel{0}$ – пол. опр. кв. форма

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{\ell=1}^{n} g_{k\ell}\lambda_\ell\Big)^2 \Rightarrow A_{ij} = \sum_{s=1}^{n} g_{si}\, g_{sj}$

↑ можно представить

$\exists$ A – дифф-мы

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_i}}_{=0} + \underbrace{c}_{<0}\underbrace{u}_{<0} = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} e_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} +$$

$+ c(x)u$, где $e_i = B_i - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(A_{ij})$

Подставим A_{ij}: ≥ 0 (видим $\lambda_i g_{si} g_{sj}$)

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} g_{si} g_{sj} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \lambda \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow Lu > 0$, а должно быть 0!

Аналогично доказ. про относ. max, ч.т.д.

Из принципа max следует единств. реш-ия задачи Дирихле для $Lu = f$.

<u>Краевые задачи для эллипт. ур-ия</u>

<u>Кр. задача Пуанкаре</u>

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + q(x) \cdot u(x) = r(x), \quad x \in S \quad \leftarrow \text{условие на границе}$$

p_i, q, r – заданные на S ф-ии, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ и $u(x)$ на S понимаются в предельном смысле

1) Если $p_i = 0, i = \overline{1,n}$, $q(x) \neq 0 \Rightarrow$ задача Дирихле
2) Если $q = 0 \Rightarrow$ На границе задана наклонная (косая) производная
3) Если $p_i = \cos(\hat{N, x_i})$ $+ q = 0 \Rightarrow$ задача Неймана
   N к нормаль

<u>Теорема</u>

$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial e_i}{\partial x_i} - 2c \geq 0$ в $D \Rightarrow$ будет не более 1 реш-ия задачи Дирихле

<u>Док-во:</u>

$\exists$ 2 реш-ия $\Rightarrow u = u_1 - u_2 \Rightarrow \begin{cases} Lu = 0 & \text{в } D \\ u|_S = 0 \end{cases}$

$$\text{К выражение } \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij} \cdot u \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(e_i u^2) \overset{\vee}{=}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left[A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right] u\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) u + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(e_i u^2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial e_i}{\partial x_i} \cdot u^2 + 2u \sum_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overset{\vee}{=} u \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{u^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial e_i}{\partial x_i} + u \sum_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu^2 - cu^2 =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{u^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial e_i}{\partial x_i} - cu^2$$

Возьмем $\int_D$ (лев часть $\to$ ГУ $\overset{u \text{ на гр.} = 0}{}$ $\Rightarrow$ останется 0) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_D \Big[\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}}_{\geq 0, \text{ т.к. эллипт. ур-ие}} + \frac{u^2}{2} \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial e_i}{\partial x_i} - 2c \Big)}_{\geq 0 \text{ по усл}} \Big] d\tau_x = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \; = 0 \Leftrightarrow u = const$, но $u|_S = 0 \Rightarrow \underline{u \equiv 0}$, ч.т.д.

Гиперболические уравнения

Будем исследовать двумерный случай (x, y).

Запишем ур-ие в канон. виде:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + A(x,y) \frac{\partial u_1}{\partial x} + B(x,y) \frac{\partial u_1}{\partial y} + C(x,y) u_1 = F_1$$

Сделаем замену: $\xi = x + y$, $\eta = x - y$

$$\Rightarrow \underline{Lu} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = F$$

$$u(\overset{x}{\xi}, \overset{y}{\eta}) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}\right)$$

Предположим, что a и b – дифф-мы ($\sim A$ и B дифф-мы)

Рассмотрим сопряж. оператор:

$$\underline{L^* v = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}(av) - \frac{\partial}{\partial \eta}(bv) + cv}$$

Вычислить $\underline{uL^*v - vLu}$

$$uL^*v - vLu = u \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - u \frac{\partial}{\partial \xi}(av) - u \frac{\partial}{\partial \eta}(bv) + \cancel{ucv} - v \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - av \frac{\partial u}{\partial \xi} -$$

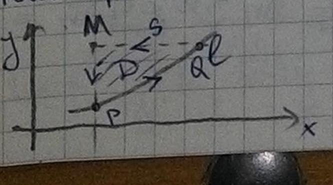
$$- bv \frac{\partial u}{\partial \eta} - \cancel{vcu} = u \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - v \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}(uav) - \frac{\partial}{\partial \eta}(buv)$$

$$u^2 \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\quad}{u}\right) \qquad u \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) - v \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

Заменим (для себя) $\xi \mapsto x$, $\eta \mapsto y$

$$vLu - uL^*v = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} + 2auv \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y}\left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} + 2buv \right) \quad (1)$$

Рассмотрим область с кривой ℓ:



Данные будут даны на кривой ℓ

ℓ – с $\forall$ прямой, $\parallel$ осям, пересек не более, чем в 1 точке (кривая Жордана)

~~Доказ~~ Возьмем т. $M(x,y)$ $\Rightarrow$ инт-ем рав-во по D:

$$\iint_D [vLu - uL^*v]\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_S \left[\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x} - 2buv\right)dx + \left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} + 2auv\right)dy\right]$$

На PM меняется только y $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}\int_{PM}\Big(\underbrace{v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{по частям}} + 2auv\Big)dy =$

$$= \frac{1}{2}uv\Big|_{M}^{P} - \int_{PM} u\left(\frac{\partial v}{\partial y} - av\right)dy$$

На QM: $\frac{1}{2}\int_{QM}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x} - 2buv\right)dx = -\frac{1}{2}uv\Big|_{Q}^{M} + \int_{MQ} u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - bv\right)dx$

$$\Rightarrow (uv)\Big|_M = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} - \frac{1}{2}\int_{PQ}\left(\left[u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x} - 2buv\right]dx + \left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} + 2auv\right)dy\right) +$$
$$+ \int_{MP} u\left(\frac{\partial v}{\partial y} - av\right)dy + \int_{QM} u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - bv\right)dx + \iint_D [vLu - uL^*v]\,dx\,dy \qquad (2)$$

$$L^*v = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(av) - \frac{\partial}{\partial y}(bv) + cv$$

$\exists$ v – реш-ие $L^*v = 0$, удовл. условием:

$$\begin{cases} v(x_0, y) = e^{\int_{y_0}^{y} a(x_0, y_1)\,dy_1} \\ v(x, y_0) = e^{\int_{x_0}^{x} b(x_1, y_0)\,dx_1}, \quad L^*v = 0 \end{cases} \quad (3) \Rightarrow \underline{v \text{ – функция Римана}}$$

(ф-ия с данными на хар-ках)

$v(x,y) = R(x, y; x_0, y_0)$

Посчитаем производные v:

$$\frac{\partial v(x_0, y)}{\partial y} = \frac{\partial R(x_0, y; x_0, y_0)}{\partial y} = R(x_0, y; x_0, y_0)\cdot a(x_0, y) \quad \text{на } PM$$

$$\frac{\partial v(x, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial R(x, y_0; x_0, y_0)}{\partial x} = R(x, y_0; x_0, y_0)\cdot b(x, y_0) \quad \text{на } QM$$

$$R(x_0, y_0; x_0, y_0) = 1$$

Пусть u – реш-ие ур-ия $Lu = f$

Пусть l – параметризована $y = g(x)$ $(x = h(y))$

$$\begin{cases} Lu = f \\ u\big|_{y=g(x)} = \varphi_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial y}\big|_{y=g(x)} = \varphi_1(x) \end{cases}$$

) данные на хар-ках

Существование ф-ии Римана

Предположим, что $\exists$ непр-ные $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y}, c \Rightarrow$ прими $L^* v = 0$

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(av) - \frac{\partial}{\partial y}(bv) + cv\right]dx_1 dy_1 = v(x,y) - \underline{v(x,y_0)} - v(x_0,y) +$$

$$+ v(x_0,y_0) - \int_{y_0}^{y} a(x,y_1)v(x,y_1)\,dy_1 + \int_{y_0}^{y} a(x_0,y_1)v(x_0,y_1)\,dy_1 -$$

$$- \int_{x_0}^{x} b(x_1,y)v(x_1,y)\,dx_1 + \int_{x_0}^{x} b(x_1,y_0)v(x_1,y_0)\,dx_1 + \int_{x_0}^{x} dx_1 \int_{y_0}^{y} c(x_1,y_1)v(x_1,y_1)\,dy_1 = 0$$

$$* \int_{x_0}^{x} b(x_1,y_0)v(x_1,y_0)\,dx_1 = \{\text{подст. } v(x_1,y_0)\} = \int_{x_0}^{x} b(x_1,y_0)\cdot e^{\int_{x_0}^{x_1} b(x_2,y_0)dx_2}\,dx_1 =$$

$$= \left(e^{\int_{x_0}^{x_1} b(x_2,y_0)dx_2}\right)\Big|_{x_1=x_0}^{x_1=x} = e^{\int_{x_0}^{x} b(x_2,y_0)dx_2} - e^{\int_{x_0}^{x_0}\dots} = \underline{v(x,y_0)} - 1$$

Аналогично $\int_{y_0}^{y} a(x_0,y_1)v(x_0,y_1)\,dy_1 = v(x_0,y) - 1$

$v(x_0,y_0) = 1$

$\Downarrow$

$$v(x,y) - \int_{x_0}^{x} b(x_1,y)v(x_1,y)\,dx_1 - \int_{y_0}^{y} a(x,y_1)v(x,y_1)\,dy_1 + \int_{x_0}^{x} dx_1 \int_{y_0}^{y} c(x_1,y_1)v(x_1,y_1)\,dy_1 =$$

$$= 1 \qquad (6)$$

интегральное ур-ие Вольтера 2го рода, кот. в с предположениями для a и b имеет ! реш-ие $\Rightarrow$ ф-ия Римана $\exists$.

Теперь подставим в (2) v-ф-ию Римана, $M(x_0,y_0)$, и реш. $Lu=f$:

$$u(x_0,y_0) = \frac{(uR)_P + (uR)_Q}{2} - \frac{1}{2}\int_{PQ}\left[\left(u\frac{\partial R}{\partial x} - R\frac{\partial u}{\partial x} - 2buR\right)dx + \left(R\frac{\partial u}{\partial y} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - u\frac{\partial R}{\partial y} + 2auR\right)dy\right] + \iint_D R f\,dx\,dy \quad \left(\text{убили } \int_{PM}, \int_{QM} \text{ засчет } \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}\right)$$

Требования на кривую важны, иначе непонятно, по какой дуге интегрировать

Св-во ф-ии Римана:

R – реш-ие уравнения $LR = 0$ отн-но (x_0, y_0)

Пример

$$\begin{cases} x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u\big|_{y=1} = f(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=1} = F(x) \end{cases}$$

$x^2(dy)^2 - y^2(dx)^2 = 0$

$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$

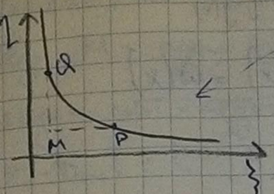
$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln y = c \cdot \ln x$

$y = cx$

Сначала приводим к канон. виду:

$$\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = \dfrac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \left(a = 0,\ b = -\frac{1}{2\xi}\right)$$

$x = \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}$, $y = \sqrt{\xi\eta}$ $\Rightarrow$ данные на хар-ке $\eta = \frac{1}{\xi}$



$M(\xi_0, \eta_0)$, $P(\xi_0, \frac{1}{\xi_0})$, $Q(\frac{1}{\eta_0}, \eta_0)$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}\Big|_{\xi\eta=1} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi}\Big|_{\xi\eta=1} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi}\Big|_{\xi\eta=1} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}f' + \frac{1}{2\xi}F$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big|_{\xi\eta=1} = \ldots = \left(-\frac{\xi^2}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\xi}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{\xi\eta=1} = -\frac{\xi^2}{2}f' + \frac{\xi}{2}F$$

$$u(M) = u(\xi_0, \eta_0) = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{PQ}\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial \xi} - u\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{uv}{\xi}\right)d\xi - \left(v\frac{\partial u}{\partial \eta} - u\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)d\eta\right]$$

, где v – ф-ия Римана

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \dfrac{1}{2\xi}\dfrac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \\ v(\xi, \eta_0) = e^{\int_{\xi_0}^{\xi} -\frac{1}{2\xi_1}d\xi_1} = \sqrt{\dfrac{\xi_0}{\xi}} \quad \text{на } MP \\ v(\xi_0, \eta) = e^{\int_{\eta_0}^{\eta} 0\, d\eta_1} = 1 \quad \text{на } MQ \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $v(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{\xi_0}{\xi}}$.

$(uv)_P = (uv)_{(\xi_0, \frac{1}{\xi_0})} = u(\xi_0, \frac{1}{\xi_0}) = f(\xi_0)$

$(uv)_Q = (uv)_{(\frac{1}{\eta_0}, \eta_0)} = \sqrt{\xi_0\eta_0}\cdot f(\frac{1}{\eta_0})$ $\Rightarrow$ все можно подст. в ф-лу $\rightarrow$

$$\Rightarrow u(\xi_0, \eta_0) = \frac{f(\xi_0)}{2} + \frac{\sqrt{\xi_0\eta_0}\, f(\frac{1}{\eta_0})}{2} + \frac{\sqrt{\xi_0}}{4}\int\limits_{\xi_0}^{1/\eta_0}\frac{f(\xi)}{\xi^{3/2}}d\xi - \frac{\sqrt{\xi_0}}{2}\int\limits_{\xi_0}^{1/\eta_0}\frac{F(\xi)}{\xi^{3/2}}d\xi$$

Задача Коши для гиперболического уравнения

Пусть задано ур-ие $Lu = f$ (1)

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u$$

Характеристики этого ур-ия – прямые, удовл. $\frac{\partial w}{\partial x}=0$, $\frac{\partial w}{\partial y}=0$ ($x=\mathrm{const}$, $y=\mathrm{const}$)

Начальные данные на некот. кривой ℓ, облад. старыми св-ми, ℓ можно параметризовать ($y=g(x)$ или $x=h(y)$, $\exists g,h\in C^1$; $g', h'\neq 0$ на ℓ, т.е. касат. к прямой ℓ не совпад. с хар-ми)

$$u\big|_{y=g(x)}=\varphi_0(x),\quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=g(x)}=\varphi_1(x) \qquad \underline{\underline{(2)}}$$

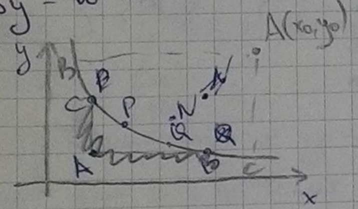
Можно показать, что если дано ↑, то задана и $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=g(x)}$

$$\underline{\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=g(x)}} = \varphi_0' - \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=g(x)}\cdot g'(x) = \underline{\varphi_0'(x)-\varphi_1(x)\cdot g'(x)=\omega(x)}$$

Обозначим $v=\frac{\partial u}{\partial x}$, $w=\frac{\partial u}{\partial y}$

Тогда (1) равносильно след. системе:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = f(x,y)-av-bw-cu \\ \frac{\partial w}{\partial x} = f(x,y)-av-bw-cu \\ \frac{\partial u}{\partial y} = w \end{cases} \qquad \underline{\underline{(3)}}$$



Первое ур-ие инт-ем по QN ($y\in[g(x),y]$)

Второе ⟼ по PN ($x\in[h(y),x]$)

⇓

$$\begin{cases} v(x,y)=\omega(x)+\int\limits_{g(x)}^{y}[f(x,y)-av-bw-cu]\,dy \\ w(x,y)=\varphi_1(x)+\int\limits_{h(y)}^{x}[f(x,y)-av-bw-cu]\,dx \\ u(x,y)=\varphi_0(x)+\int\limits_{g(x)}^{y}w(x,y)\,dy \end{cases} \qquad \underline{\underline{(4)}}$$

Надо бы показать, что $(4)\longleftrightarrow(1),(2)$:

(1),(2) → (4) – понятно, только что получили

Из третьего ур-ния след., что $u\big|_{y=g(x)}=\varphi_0(x)$

Из второго → $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=g(x)}=\varphi_1(x)$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=w \overset{\text{дифф.(4)}}{\Rightarrow} \frac{\partial u}{\partial x}=\varphi_0'(x)-w(x,y)\Big|_{y=g(x)}\cdot g'(x)+\int\limits_{g(x)}^{y}\frac{\partial w}{\partial x}\,dy =$$

$$=\varphi_0'(x)-\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=g(x)}\cdot g'(x)+\int\limits_{g(x)}^{y}[f(x,y)-av-bw-cu]\,dy =$$

$$=w(x)+\int\limits_{g(x)}^{y}[f(x,y)-av-bw-cu]\,dy \Rightarrow \text{вып. (2)} \ldots$$

$\Rightarrow (4) \Leftrightarrow (1),(2)$

Система (4) решается методом послед. приближ.:

$$\begin{cases} u_0 = \varphi_0(x) \\ w_0 = \varphi_1(x) \\ v_0 = \omega(x) \end{cases}, \quad \begin{cases} v_n(x,y) = \omega(x) + \int\limits_{g(x)}^{y} [f(x,y) - av_{n-1} - bw_{n-1} - cu_{n-1}]\,dy \\ w_n(x,y) = \varphi_1(x) + \int\limits_{h(y)}^{x} [f(x,y) - av_{n-1} - bw_{n-1} - cu_{n-1}]\,dx \\ u_n(x,y) = \varphi_0(x) + \int\limits_{g(x)}^{y} w_{n-1}\,dy \end{cases} \quad \boxed{(5)}$$

Покажем, что все равномерно сх-ся.

Обозн. $M = \max\limits_{ABC} \{|a|, |b|, |c|\}$, $K = \max\{1, M\}$, A - const ← этим огр. $v_1 - v_0$ и т.д.

Методом мат.индукции можно вывести:

$$\begin{cases} |v_n - v_{n-1}| \le K^{n-1} A \dfrac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!} \\ |w_n - w_{n-1}| \le \quad - \text{ " } - \\ |u_n - u_{n-1}| \le \quad - \text{ " } - \end{cases}$$

$|v - v_n| \le |v - v_{n-1}| + |v_n - v_{n-1}| \le \ldots \le |v - v_0| + \sum |v_{..}|$

$\Rightarrow$ можно показать фунд. $\Rightarrow$ к чему-то р/с

$\Rightarrow$ потом перейти к пределу в (5)!

Док-во: + проверить для n=1

$$|v_{n+1} - v_n| = \left| -\int\limits_{g(x)}^{y} [a(v_n - v_{n-1}) + b(w_n - w_{n-1}) + c(u_n - u_{n-1})]\,dy \right| \le$$

$$\le \int\limits_{g(x)}^{y} (|a| + |b| + |c|) K^{n-1} A \frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}\,dy \le K^n A \int\limits_{y_0}^{y} (x+y-x_0-y_0)^{n-1} \cdot \frac{1}{(n-1)!}\,dy \le$$

$$\le K^n A \cdot \frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!} \quad \checkmark \text{ (если } x > x_0)$$

Д-ть единств. реш-ия (4)

Пусть 2 реш-я $\{\hat{v}, \hat{w}, \hat{u}\}$ и $\{\tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{u}\} \Rightarrow v = \hat{v} - \tilde{v}, \ldots$

$$\begin{cases} v(x,y) = \int\limits_{g(x)}^{y} [\cancel{f(x,y)} - av - bw - cu]\,dy \\ w(x,y) = \int\limits_{h(y)}^{x} [\cancel{f(x,y)} - av - bw - cu]\,dx \\ u(x,y) = \int\limits_{g(x)}^{y} w(x,y)\,dy \end{cases}$$

Строим посл-ть $v_n = \ldots$, $v_0 = 0, w_0 = 0, u_0 = 0$

$$\cancel{\Rightarrow v_1 = \int\limits_{g(x)}^{y} f(x,y)\,dy}, \quad \cancel{w_1 = \int\limits_{h(y)}^{x} f(x,y)\,dx}, \quad u_1 = \cancel{\int\limits_{g(x)}^{y} w}\, 0 \quad \Rightarrow v_n = w_n = u_n = 0$$

Попосин

Уравнения гиперболического типа

§1 Общее гиперб. ур-ие 2го порядка с 2 независ. перем.

1° Функция Римана

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + A(x,y) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + B(x,y) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + C(x,y)\tilde{u} = \tilde{F}(x,y)$$

Перейдём к характ. переменным: $\xi = x+y$, $\eta = x-y$

$$u(\xi,\eta) = \hat{u}\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + a(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial\xi} + b(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial\eta} + c(\xi,\eta)u = F(\xi,\eta) = Lu, \quad (\xi,\eta)\in D$$

основное ур-ие

$$L^*v = \frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\xi}(av) - \frac{\partial}{\partial\eta}(bv) + cv$$

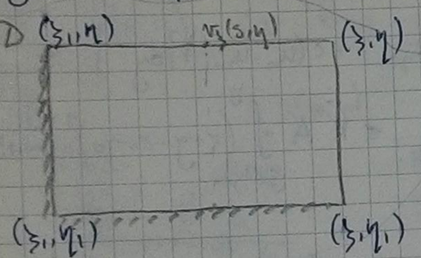
$$L^*v = v_{\xi\eta} - (av)_\xi - (bv)_\eta + cv$$

Характеристики: $\xi=\text{const}$, $\eta=\text{const}$

Опр Решением $v(\xi,\eta)$ сопряжённого (формально) ур-ие $L^*v=0$, удовлетворяющее на хар-ках $\xi=\xi_1$ и $\eta=\eta_1$ условиям:

$$v(\xi_1,\eta) = e^{\int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi_1,t)dt}, \quad v(\xi,\eta_1) = e^{\int_{\xi_1}^{\xi} b(s,\eta_1)ds}, \quad \text{где } (\xi_1,\eta_1)\in D, \quad (1)$$

называется ф-ей Римана. (В случае $a=b=c=0 \Rightarrow v(\xi,\eta)=1$)



Утверждение ($\exists$ ф-ии Римана)

Пусть a_ξ и b_ξ непрерывны. Тогда ф-ие Римана $\exists$.

Док-во:

$$v(\xi,\eta) = v(\xi_1,\eta) + \int_{\xi_1}^{\xi} v_\xi(s,\eta)ds = v(\xi_1,\eta) + \int_{\xi_1}^{\xi} ds\left[v_\xi(s,\eta_1) + \int_{\eta_1}^{\eta} v_{\xi\eta}(s,t)dt\right] =$$

$$= v(\xi_1,\eta) + v(\xi,\eta_1) - v(\xi_1,\eta_1) + \int_{\xi_1}^{\xi} ds \int_{\eta_1}^{\eta} v_{\xi\eta}(s,t)dt$$

$L^*v=0 \Rightarrow v_{\xi\eta} = (av)_\xi + (bv)_\eta - cv \Rightarrow$ подставим

$$v(\xi,\eta) = v(\xi_1,\eta) + v(\xi,\eta_1) - v(\xi_1,\eta_1) + \int_{\eta_1}^{\eta}[av]_{(\xi_1,t)}^{(\xi,t)}dt + \int_{\xi_1}^{\xi}[bv]_{(s,\eta_1)}^{(s,\eta)}ds -$$

$$- \int_{\xi_1}^{\xi}\int_{\eta_1}^{\eta} cv\,ds\,dt$$

Теперь используем условия (1):

$$\frac{\partial v}{\partial\eta}(\xi_1,\eta) = a(\xi_1,\eta)\cdot v(\xi_1,\eta) \quad \Big| \int_{\eta_1}^{\eta}$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta} \frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi_1,\eta)\,d\eta = \{v(\xi_1,\eta) - \underbrace{v(\xi_1,\eta_1)}_{=1}\} = \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi_1,t)\,v(\xi_1,t)\,dt$$

$$\Rightarrow v(\xi,\eta) = \cancel{v(\xi_1,\eta)} + \cancel{v(\xi,\eta_1)} - v(\xi_1,\eta_1) + \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi,t)\,v(\xi,t)\,dt - \cancel{v(\xi_1,\eta)} +$$
$$+ v(\xi_1,\eta_1) + \int_{\xi_1}^{\xi} b(s,\eta)\,v(s,\eta)\,ds - \cancel{v(\xi,\eta_1)} + v(\xi_1,\eta_1) - \int_{\xi_1}^{\xi}\int_{\eta_1}^{\eta} cv\,ds\,dt =$$
$$= \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi,t)\,v(\xi,t)\,dt + \int_{\xi_1}^{\xi} b(s,\eta)\,v(s,\eta)\,ds - \int_{\xi_1}^{\xi}\int_{\eta_1}^{\eta} cv\,ds\,dt + 1 = v(\xi,\eta)$$

интегр. оп. Вольтерра — " — — " —

$\Rightarrow$ получили инт. ур-ие Вольтерра 2го рода.

Сделаем замену:

$$v(\xi,\eta) = w(\xi,\eta) + \int_{\xi_1}^{\xi} w(t,\eta)\,b(t,\eta)\,e^{\int_{t}^{\xi} b(t_1,\eta)\,dt_1}\,dt +$$
$$+ \int_{\eta_1}^{\eta} w(\xi,\tau)\,a(\xi,\tau)\,e^{\int_{\tau}^{\eta} a(\xi,\tau_1)\,d\tau_1}\,d\tau$$

$\Downarrow$

$$w(\xi,\eta) + \int_{\xi_1}^{\xi} dt \int_{\eta_1}^{\eta} K_0(\xi,\eta;t,\tau)\,w(t,\tau)\,d\tau = 1$$

непрерывное ядро $\Rightarrow$ оно однозначно разрешимо $\Rightarrow \exists\, v(\xi,\eta)$, ч.т.д.

Будем обозначать: $v = R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ — ф-ия Римана

Из (1) сразу следует:

$$\frac{\partial R}{\partial \eta} - a(\xi_1,\eta)R = 0 \qquad \frac{\partial R}{\partial \eta_1} + a(\xi,\eta_1)R = 0$$
$$\frac{\partial R}{\partial \xi} - b(\xi,\eta_1)R = 0 \qquad \frac{\partial R}{\partial \xi_1} + b(\xi_1,\eta)R = 0 \qquad (2)$$
$$R(\xi_1,\eta_1;\xi_1,\eta_1) = 1 \qquad R(\xi,\eta;\xi,\eta) = 1$$

]:

Пусть u и v — достаточно гладкие ф-ии. Тогда:

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}(uv) = \frac{\partial}{\partial\eta}(u_\xi v + u v_\xi) = u_{\xi\eta}v + u_\xi v_\eta + u_\eta v_\xi + u v_{\xi\eta}, \text{ поэтому}$$

$$(uv)_{\xi\eta} - vLu = u_\xi v_\eta + u_\eta v_\xi + u v_{\xi\eta} - v a u_\xi - v b u_\eta - \cancel{cvu}\,cvu =$$
$$= u_\xi(v_\eta - av) + u_\eta(v_\xi - bv) + u(v_{\xi\eta} - cv) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial\xi}[u(v_\eta - av)] - u\frac{\partial}{\partial\xi}[v_\eta - av] + \frac{\partial}{\partial\eta}[u(v_\xi - bv)] - u\frac{\partial}{\partial\eta}[v_\xi - bv] +$$
$$+ u(v_{\xi\eta} - cv) = M - u(v_{\xi\eta} - (av)_\xi + \cancel{v_{\xi\eta}} - (bv)_\eta - \cancel{v_{\xi\eta}} + cv) =$$
$$= M - uL^*v$$

Возьмем $\xi = \xi_1$, $\eta = \eta_1$, $v = R(\xi_1, \eta_1; \xi_*, \eta_*)$

$\Downarrow$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \eta_1}\left(u(\xi_1, \eta_1) R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)\right) = vLu + \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left[u(R_{\eta_1} - aR)\right] + \frac{\partial}{\partial \eta_1}\left[u(R_{\xi_1} - bR)\right]$$

Интегрируем в промежутках $\xi_0 \le \xi_1 \le \xi$, $\eta_0 \le \eta_1 \le \eta$:

$$u(\xi, \eta) = u(\xi_0, \eta_0) R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) + \int_{\xi_0}^{\xi} R(\xi_1, \eta_0; \xi, \eta)\left[\frac{\partial u}{\partial \xi_1}(\xi_1, \eta_0) + b(\xi_1, \eta_0) \cdot u(\xi_1, \eta_0)\right] d\xi_1 + \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_0, \eta_1; \xi, \eta)\left[\frac{\partial u}{\partial \eta_1}(\xi_0, \eta_1) + a(\xi_0, \eta_1) u(\xi_0, \eta_1)\right] d\eta_1 +$$
$$+ \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) Lu(\xi_1, \eta_1)\, d\xi_1 d\eta_1$$

Если $u(\xi, \eta) = R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)$, то: (возникают усл-ия (2))

$$\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} R(\dots) LR(\xi_0, \eta_0; \xi_1, \eta_1)\, d\xi_1 d\eta_1 = 0, \quad \forall \xi_0, \xi_1, \eta_0, \eta_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow LR = 0 \Rightarrow$ по второй паре аргументов R явл. реш-ем $LR = 0$!

2° Задача Гурса

Предположим, что $u(\xi, \eta)$ – реш-ие $Lu = F$

$$u(\xi, \eta) = R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) u(\xi_0, \eta_0) + R(\xi_0, \eta; \xi, \eta) u(\xi_0, \eta) - R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) \cdot u(\xi_0, \eta_0) + \int_{\xi_0}^{\xi}\left[b(t, \eta_0) R(t, \eta_0; \xi, \eta) - \frac{\partial}{\partial t} R(t, \eta_0; \xi, \eta)\right] u(t, \eta_0)\, dt +$$
$$+ \int_{\eta_0}^{\eta}\left[a(\xi_0, \tau) R(\xi_0, \tau; \xi, \eta) - \frac{\partial}{\partial \tau} R(\xi_0, \tau; \xi, \eta)\right] u(\xi_0, \tau)\, d\tau +$$
$$+ \int_{\xi_0}^{\xi} dt \int_{\eta_0}^{\eta} R(t, \tau; \xi, \eta) F(t, \tau)\, d\tau$$

$\Rightarrow$ выразили u через значения в углах и инт-лы по 2 сторонам.

Задача, когда искомая ф-ия задается на хар-ках, назыв. задачей Гурса.

Пусть $u(\xi, \eta_0) = \varphi(\xi)$, $u(\xi_0, \eta) = \psi(\eta)$ из $C^1(\dots)$, $\varphi(\xi_0) = \psi(\eta_0)$

$u(\xi_0, \eta_0)$ – произв. постоянная

$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} u(\xi, \eta) = {} & R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)\varphi(\xi) + R(\xi_0, \eta; \xi, \eta)\psi(\eta) - R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)\varphi(\xi_0) + \\ & + \int_{\xi_0}^{\xi}\left[b(t, \eta_0) R(t, \eta_0; \xi, \eta) - \frac{\partial}{\partial t} R(t, \eta_0; \xi, \eta)\right]\varphi(t)\, dt + \\ & + \int_{\eta_0}^{\eta}\left[a(\xi_0, \tau) R(\xi_0, \tau; \xi, \eta) - \frac{\partial}{\partial \tau} R(\xi_0, \tau; \xi, \eta)\right]\psi(\tau)\, d\tau + \int_{\xi_0}^{\xi} dt \int_{\eta_0}^{\eta} R(t, \tau; \xi, \eta) F(t, \tau)\, d\tau \end{aligned}}$$

§2 Метод разделения переменных

1° Основная смешанная задача для ур-ия колебаний струны

$u_{xx} - u_{tt} = 0$

Будем искать решение в виде $u(x,t) = v(x)\cdot w(t)$

$v''(x)\,w(t) - v(x)\cdot w''(t) = 0$

$\frac{v''(x)}{v} = \frac{w''(t)}{w} = -\lambda = const$

$\Downarrow$

$\begin{cases} v'' + \lambda v = 0 \\ w'' + \lambda w = 0 \end{cases}$

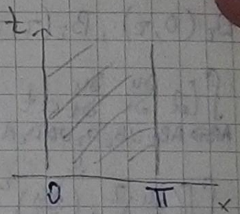
П $\lambda = 0 \Rightarrow v(x) = c_1 x + c_2$, $w(t) = c_3 t + c_4$

$\lambda < 0 \Rightarrow v(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, $w(t) = c_3 e^{\sqrt{-\lambda}t} + c_4 e^{-\sqrt{-\lambda}t}$

$\lambda > 0 \Rightarrow v(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$, $w(t) = c_3 \cos\sqrt{\lambda}t + c_4 \sin\sqrt{\lambda}t$

Пусть $x \in [0,\pi]$, $t \geq 0$

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \Rightarrow v(0) = v(\pi) = 0$



$\Rightarrow v(x) = \sin\sqrt{\lambda}x$

$v(\pi) = \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = n \Rightarrow \lambda = n^2$, $n = 1,2,\dots$

$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_n = n^2,\ n = 1,2,\dots \\ v_n(x) = \sin(nx) \end{array}}$

Поставим нач. условия ~~на ...~~: $u(x,0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$

П φ, ψ – достаточно гладкие ф-ии.

$u_n(x,t) = \sin(nx)\cdot(\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt))$ – удовл. ур-ию и КУ.

Ищем реш-е в виде:

$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$

$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \sin(nx) = \varphi(x)$

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\beta_n \cdot \cancel{\cos}\sin(nx) = \psi(x)$ $\Rightarrow$ нужно разлож. φ и ψ по sin

$\Downarrow$

$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)\cdot\sin(nx)\,dx$, $\beta_n = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} \psi(x)\sin(nx)\,dx$

Если мы ищем классич. реш-е $(u \in C^2(\Omega) \cap C^{(0,1)}(\overline{\Omega}))$ ~~⇒~~, то нужны доп. условия для φ и ψ (для сх-ти ряда) $\exists$: φ'', ψ' – непр-ны
$\left.\begin{array}{l} \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0 \\ \psi(0) = \psi(\pi) = 0 \end{array}\right\}$ этого хватит для $u \in C(\Omega)$

$\Rightarrow \varphi''', \psi''$ – непр.

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(0)=\varphi(\pi)=\varphi''(0)=\varphi''(\pi)=0\\&\psi(0)=\psi(\pi)\end{aligned}\right\}\text{ для классич. реш-ия}$$

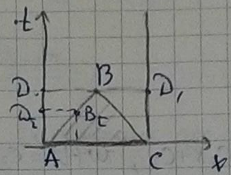
<u>Утверждение</u>

Однородная смешанная задача не может иметь более 1 реш-ия

<u>Док-во</u>:

$A(0,0)$, $B(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $C(\pi,0)$, $D(0,\frac{\pi}{2})$,

$D_1(\pi,\frac{\pi}{2})$



$\exists$ есть ~~не~~ 2 реш-ия, вычтем...

Нач. данные на AC полностью опред. реш-е в $\triangle ABC$ $\Rightarrow$ по ф-ле Д'Аламбера

$u\equiv 0$ в $\triangle ABC$ $\Rightarrow$ $u\equiv 0$ на AB и BC

$$-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2=0 \quad \Big| \text{ проинтегр. по } \triangle ABD$$

$D_\tau(0,\tau)$, $B_\tau(\tau,\tau)$

$$\int\limits_{AB_\tau\cup B_\tau D_\tau\cup D_\tau A}\left[2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}dt+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2dx\right]=0$$

$\Downarrow$ инт. по AB_τ даст 0 из ГУ; по AD_τ из ГУ

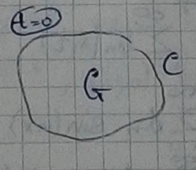
$$\int\limits_{B_\tau D_\tau}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dx=0 \quad \Rightarrow \text{ если потреб. непр. } \frac{\partial u}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{B_\tau D_\tau}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{B_\tau D_\tau}=0 \Rightarrow \underline{u|_{B_\tau D_\tau}=0} \Rightarrow u|_{\triangle ABD}=0$$

Аналогично $u|_{\triangle CBD_1}=0$ $\Rightarrow$ и т.д., <u>ч.т.д.</u>

<u>2° Задача о колебаниях мембраны</u>

Рассм. область G с границей C
(мембрана)



$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}-u_{tt}=0\\u(x,y,0)=\varphi(x,y)\\\left.\dfrac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x,y)\\u|_C=0\end{cases}$$

Разделим переменные: $u(x,y,t)=v(x,y)\cdot w(t)$

$v_{xx}w+v_{yy}w-vw''=0$

$$\frac{v_{xx}+v_{yy}}{v} = \frac{w''}{w} = -\lambda = const$$

$$v_{xx}+v_{yy}+\lambda v = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta v + \lambda v = 0 \\ v|_C = 0 \end{cases}$$ – ур-ие Гельмгольца (метагарм.)

Предполагаем, что C – кус.-гладкая кривая Жордана

$$v_x^2+v_y^2 = \frac{\partial}{\partial x}(v v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(v v_y) - v\cdot\Delta v \quad \Big| \int_G$$

$$\int_G (v_x^2+v_y^2)\,dx\,dy = \int_C \underbrace{v \frac{\partial v}{\partial \nu}}_{0}\,ds - \int_G v\Delta v\,dx\,dy = \lambda \int_G v^2\,dx\,dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda > 0}$$

+ если λ – с.ч. $\Rightarrow \lambda = \dfrac{\int_G (v_x^2+v_y^2)\,dx\,dy}{\int_G v^2\,dx\,dy}$ $\qquad \Delta = (\nabla,\nabla) \xrightarrow[\nabla\to S]{} (N,\nabla)$

$\exists\, \lambda = \mu^2$

$\Downarrow$

$w'' + \mu^2 w = 0 \Rightarrow$ можно решить

$$\begin{matrix} v_1\cdot\Delta v_2 + \lambda_2 v_2 v_1 = 0 \\ v_2\,\Delta v_1 + \lambda_1 v_1 v_2 = 0 \end{matrix} \ominus \Rightarrow \overset{(\lambda_1-\lambda_2)}{\int_G} v_1 v_2\,dx\,dy = -\int_G [\underbrace{v_1\Delta v_2 - v_2\Delta v_1}_{0}]\,dx\,dy$$

по ф-ле Грина и $v|_C = 0$

Упр. Если v_1 отвеч. λ_1, v_2 отвеч. λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow v_1 \perp v_2$

Случай круговой мембраны

$G: x^2+y^2<1$

$\Delta u = u_{xx}+u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$ $\quad (r,\theta)$ – пол. коорд.

$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} + \mu^2 v = 0$

$\exists\, v(r,\theta) = R(r)\cdot\Phi(\theta) \Rightarrow R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' + \mu^2 R\Phi = 0 \;\Big|: R\Phi$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} + \mu^2 = 0$$

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \mu^2 r^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \cancel{\lambda} + \omega^2$$

$$r^2R'' + rR' + (\mu^2 r^2 - \omega^2)R = 0 \quad \text{и} \quad \Phi'' + \omega^2\Phi = 0$$

$\omega = n$ (из периодичности $\Phi(\theta)$)

Сделаем замену $\mu r = \rho$, $R(\frac{\rho}{\mu}) = J(\rho)$ $\quad \Rightarrow \cancel{R''}\ \ R' = J'\cdot\mu$

$J''(\rho) + \frac{1}{\rho}J'(\rho) + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)J = 0$ – ур-ие Бесселя

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\rho^{2k+n}}{2^{2k}\cdot k!\,(k+n)!} = J_n(\rho)$$ – одно из реш-ий ур-ия (ф-ия Бесселя) $n = 0,1,2,\dots$

Второе реш-ие имеет особенность в нуле $\Rightarrow$ оно нам не подходит

Каждая ф-ия Бесселя имеет счетный набор корней на полож. полуоси.

Корни: $\rho_{n,m}$, $m=1,2,\ldots$ $J(\rho\mu)|_{r=1}=0 \Rightarrow \mu=\rho_{n,m}$

У нас есть условие $R(1)=0$: $R(\frac{\rho}{\mu})=J(\rho)$ $\Rightarrow$ подст. $\Rightarrow$

$\Rightarrow J_n(\rho_{n,m} r)$ — собств. ф-ции

$\Downarrow$

$J_n(\rho_{n,m} r)\cos n\theta$ и $J_n(\rho_{n,m} r)\sin n\theta$

§3 Понятие о вариационных методах

1° Принцип Дирихле (Римана?)

Рассмотрим функционал $D(u)=\int\limits_G (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy$

Покажем, что задача $\min D(u)$ приводит к ур-ию Лапласа

<u>Опр</u> Ф-ции, непрерывные в $G \cup C$ $(C=\partial G)$, имеющие кусочно-непр. первые произв. в G с ограниченным (конечным) $D(u)$ и принимающие заданные значения на границе: $u(x,y)|_C=\varphi(x,y)$, называются допустимыми.

<u>Первая вариационная задача:</u>

Среди допустимых ф-ий найти ту, которая минимизирует $D(u)$

<u>Утверждение</u>

Если класс допустимых ф-ий не пуст, то первая вариац. задача и краевая задача Дирихле для опер. Лапласа эквивалентны.

<u>Док-во:</u>

$\forall D(u+\varepsilon h)$ $\cdot +$ $\forall$ ск. произв. $D(u,h)=\int\limits_G (u_x h_x + u_y h_y)\,dx\,dy$

$h|_{\partial G}=0$

$D(u+\varepsilon h)=D(u)+2\varepsilon D(u,h)+\varepsilon^2 D(h)$

$\Rightarrow$ Если u — ф-ия, на кот. дости. min $\Rightarrow D(u+\varepsilon h)\geq D(u)$, $\forall \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow D(u,h)=0$, $\forall h: h|_{\partial G}=0$

$D(u,h)=\{$прим. ф-лу Грина$\}=-\int\limits_G(\Delta u)\,h\,dx\,dy=0$, $\forall h: h|_{\partial G}=0$

Класс таких h всюду плотный $\Rightarrow$ <u>$\Delta u=0$</u>

$\Leftarrow$ Так же в обр. сторону, <u>ч.т.д.</u>

2° Задача на собственные значения

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & (x,y) \in G \\ u|_{\partial G} = 0 \end{cases}$$

$\forall\ H(u) = \int\limits_G u^2\,dx\,dy$, $J(u) = \dfrac{D(u)}{H(u)}$ $\qquad H(u,h) = \int\limits_G u h\,dx\,dy$

Посмотрим связь задачи на с.з. и $\min J(u)$: (Вторая вариац. задача)

$$J(u+\varepsilon h) = \frac{D(u+\varepsilon h)}{H(u+\varepsilon h)} = \frac{D(u) + 2\varepsilon D(u,h) + \varepsilon^2 D(h)}{H(u) + 2\varepsilon H(u,h) + \varepsilon^2 H(h)}$$

Если u дост. min $\Rightarrow \exists \left.\dfrac{dJ}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \dfrac{2D(u,h)\cdot H(u) - D(u)\cdot 2H(u,h)}{H^2(u)} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow D(u,h)\,H(u) - D(u)\cdot H(u,h) = 0$. Обозн. $\min J = \lambda$ – min с.з.!

$\underbrace{H(u)}_{\neq 0,\ \text{т.к. ищем нетрив. реш-ие}} [D(u,h) - \lambda H(u,h)] = 0$

+ сказать про следующие с.з.!! (нужно усл-ие $H(u_1,u_2)=0$) + исп. $\xi(x,y) = \eta(x,y) - H(\eta,u)u_1$

$\Rightarrow D(u,h) = \int\limits_G (u_x h_x + u_y h_y)\,dx\,dy = \{\text{ф-ла Грина}\} = -\int\limits_G (\Delta u)\,h\,dx\,dy \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_G (\Delta u + \lambda u)\,h\,dx\,dy = 0$, $\forall h$ в: $h|_{\partial G} = 0$ $\Rightarrow$

(λ_{min}?)

$\Rightarrow \underline{\Delta u + \lambda u = 0}$

Если $u(x,y)$ – реш-е 2ой min задачи ($\min J(u)$), то $\lambda = J(u)$ – min с.з. задачи.. причем $u \not\equiv$ не поль

Посмотреть в обр. сторону! Докажем, что $J(u)$ – min с.з. $\exists\ \lambda^*, u^*$ – другая пара с.з./с.ф.

$\Rightarrow H(\underbrace{\Delta u^* + \lambda^* u^*}_{=0}, h) = -D(u^*) + \lambda^* H(u^*) = 0$

$\Rightarrow \lambda^* = \dfrac{D(u^*)}{H(u^*)} \geq \dfrac{D(u)}{H(u)} = \lambda \Rightarrow \lambda^* \geq \lambda$ ✓

$(F(u) \geq 0)$

$F(u) \to \min$ $\{\ \}$ $\exists \inf F(u) = d \Rightarrow \exists$ min посл-ть: $F(u_n) \to d$

$\{u_n\}$ – минимизирующая посл-ть

$\exists$ min посл-ти не гарант. $\exists$ реш-ия вар. задачи

Надо следить за пр-вами (в нужном нам пр-ве может $\nexists$ предела $\{u_n\}$)

3° Понятие о методе Ритца

$F(u) \to \min$ Прямые методы ~ не используют ур-ие в ЧП

$\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ – полная система допустимых ф-ий (можно $\forall$ эл-т прибл. лин. ком.

Будем искать min посл-ть: $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k v_k$, c_k – коэффициенты $\Rightarrow$

$\Rightarrow F(u_n) = \tilde{F}(c_1, \ldots, c_n) \xrightarrow[c_1,\ldots,c_n]{} \min$

Пример + вторую вар. задачу в C_δ

$G = (0,\pi)\times(0,\pi)$ + $H(u) = 1$

выбираем такую полн. сис-му доп. ф-ий

$v_{kl} = \sin(kx)\cdot\sin(ly)$

Будем минимизировать $\tilde{J}(u)$.

$u_{mn} = \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{\ell=1}^{n} c_{k\ell} \sin(kx) \cdot \sin(\ell y)$

$H(u_{mn}) = \int\limits_{G} u^2 dx dy = \int\limits_{G} \left[\sum\sum c_{k\ell} \sin(kx) \sin(\ell y)\right]^2 dx\, dy$ = {смеш. произв. = 0}

$= \sum\sum c_{k\ell}^2 \int\limits_0^{\pi} \sin^2(kx) dx \int\limits_0^{\pi} \sin^2(\ell y) dy = \frac{\pi^2}{4} \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{\ell=1}^{n} c_{k\ell}^2$

$D(u_{mn}) = \ldots = \frac{\pi^2}{4} \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{\ell=1}^{n} (k^2 + \ell^2) c_{k\ell}^2$

(поиск. min значения)

$\Rightarrow$ задача min ~ задача на усл. экстремум $(H(u) = 1)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{\ell=1}^{n} c_\ell^2 = 1 \Rightarrow \min \sum\limits_{\ell=1}^{n} \ell^2 c_\ell^2$

$L = \sum\limits_{\ell=1}^{n} \ell^2 c_\ell^2 - \lambda \sum\limits_{\ell=1}^{n} c_\ell^2 + \lambda = \sum\limits_{\ell=1}^{n} c_\ell^2 (\ell^2 - \lambda) + \lambda$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\sum\limits_{\ell=1}^{n} c_\ell^2 + 1 = 0$

$\frac{\partial L}{\partial c_\ell} = 2 c_\ell (\ell^2 - \lambda) = 0$

$c_{11} = \frac{2}{\pi}$, ост. $= 0 \Rightarrow D(u_{mn}) = 2 \Rightarrow u_{mn} = \frac{2}{\pi} \sin x \sin y$

$\Rightarrow \underline{c_{11} = 1}$, $\underline{c_{ij} = 0}$ (ост.) $\Rightarrow \underline{\lambda = 2}$ $\to$ сразу получили точный ответ $(\lambda_{min} = 2)$

4° Метод Бубнова - Галёркина

$u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k v_k$ $\qquad \begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ u|_{\partial G} = 0 \end{cases}$

Подставляем комбинацию в задачу

$H(\Delta u_n + \lambda u_n, v_m) = 0$, $m = \overline{1,n}$ $\to$ получаем СЛАУ отн-но $c_1, \ldots, c_n$

$\Rightarrow$ смотрим на $\det = 0$, чтобы найти нетрив. реш-е

$\det = \begin{vmatrix} H(\Delta v_1 + \lambda v_1, v_1) & \ldots & H(\Delta v_n + \lambda v_n, v_n) \\ & \vdots & \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ находим $\underline{\underline{\lambda_n}}$

~~Для вариантов~~

Пример

$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$ $\qquad$ Точное реш-ие $\lambda_m = (\pi m)^2$, $m = 1, 2, \ldots$

$u_m = \sin(\pi m x)$

Возьмем $v_1(x) = x(1-x)$

$H(u, h) = \int\limits_0^1 u h\, dx$

$D(u, h) = \int\limits_0^1 u' h' dx = -\int\limits_0^1 u'' h\, dx$

$H(v_1'' + \lambda v_1, v_1) = 0 \ : \ \int_0^1 v_1'' v_1 \, dx + \lambda \int_0^1 v_1^2 \, dx = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{\int_0^1 (v_1')^2 dx}{\int_0^1 v_1^2 dx}$.

$\int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = B(3,3) = \dfrac{\Gamma^2(3)}{\Gamma(6)} = \dfrac{2^2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \dfrac{1}{30}$

$\int_0^1 (1-2x)^2 dx = 4\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 dx = \frac{8}{3}(x-\frac{1}{2})^3 \Big|_{1/2}^1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\tilde{\lambda}_1 = 10}$, а $\underline{\lambda_1 = \pi^2}$

§4 Обобщенные решения краевых задач

H – гильбертово пространство

$A: H \to H$ – линейный оператор, действующий в H

$D(A)$ – область опр-ия оператора A.

Предполагаем, что $\overline{D(A)} = H$ ($D(A)$ всюду плотна в H)

Замечание

A может быть (и будет) неогранич.

Опр Оператор A назыв. симметричным, если $(Au, v) = (u, Av)$, $\forall u, v \in D(A)$ $(\overline{D(A)} = H)$

Опр Симметричный оп. A назыв. полож. определенным, если $\exists \gamma > 0$: $(Au, u) \geq \gamma^2 (u,u)$, $\forall u \in D(A)$, т.е. $\inf\limits_{\substack{u \neq 0 \\ u \in D(A)}} \dfrac{(Au,u)}{(u,u)} > 0$

Энергетическое пространство

Определим в H новое скал. произв.: $[u,v]_A = (Au, v)$, $u, v \in D(A)$
обладает всеми свойст. скал. произв.

Скал. произв. порождает норму: $\|u\|_A^2 = [u,u]_A$ – энерг. норма

$\Rightarrow$ из полож. опр.: $\|u\|_A^2 \geq \gamma^2 \|u\|^2 \Rightarrow \boxed{\|u\| \leq \frac{1}{\gamma}\|u\|_A}$ – основное оценка нормы
$\forall u \in D(A)$

Пополним $D(A)$ по построенной норме.

Опр Энергетическое пр-во – пополнение $D(A)$ по норме $\| \ \|_A$.

$\Downarrow$

получаем новое гильб. пр-во.

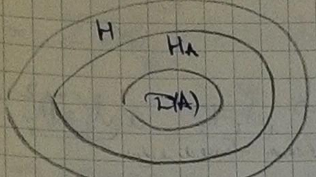
Обозн H_A – гильб. пр-во

Теорема 1

H_A ограниченно вкладывается в H.

Док-во:

Верно в силу нер-ва (см функцию) $\|u\| \le \frac{1}{\gamma}\|u\|_A$, кот. сохр. при переходе к пределу, ч.т.д.



$D(A) \subset H_A \subset H$

Теперь мы можем распространить $[u,v]_A$ на H_A:

$u, v \in D(A) \Rightarrow u \in D(A), v \in H_A$ (берем фунд. посл-ть, сход. к v)

$\exists \|v_n - v\|_A \to 0 \Rightarrow \|v_n - v\| \to 0$ (в силу оценки) $\Rightarrow$ можно перейти в (Au, v) к пределу $v_n \to v$!

Теорема 2 (критерий принадл. H_A)

$u \in H_A \Leftrightarrow \exists \{u_n\} \in D(A): \|u_n - u_m\|_A \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$ (фунд. в $\|\ \|_A$), $\|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Док-во:

$\Rightarrow$ $u \in H_A \Rightarrow$ т.к. u – из пополнения $D(A)$ по норме $\|\ \|_A$, то $\exists \{u_n\}: \|u_n - u\|_A \to 0$

Из основной оценки получаем: $\|u_n - u\| \le \frac{1}{\gamma}\|u_n - u\|_A \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\|u_n - u_m\|_A \le \|u_n - u\|_A + \|u_m - u\|_A < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ ($N = \max(n,m)$) $\Rightarrow$ посл-ть фунд.! $\Rightarrow$ ✓

$\Leftarrow$ Нужно д-ть, что $\exists \{u_n\} \in D(A): \|u_n - u\|_A \to 0$

~~$\|u_n - u\|_A^2 = (A(u_n - u), u_n - u)$~~

$\exists \{u_n\} \in D(A): \|u_n - u_m\|_A \to 0$. Пр-во $\overline{D(A)} = H_A$ – полное $\Rightarrow \exists \tilde{u} \in H_A: \|u_n - \tilde{u}\|_A \to 0$

Т.к. $\|u_n - \tilde{u}\|_A \to 0 \Rightarrow \|u_n - \tilde{u}\| \to 0$. В силу единств. предела $u = \tilde{u}$, ч.т.д.

$\Rightarrow$ $\exists u \in H_A \Rightarrow \exists \{u_n\} \in D(A): \|u_n - u\|_A \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \xRightarrow{\text{сх-ть} \Rightarrow \text{фунд.}} \|u_n - u_m\|_A \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$

Из основной оценки вытекает $\|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Leftarrow$ $\{u_n\}$ – фунд. в $\|\ \|_A \Rightarrow \exists \tilde{u} = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ в $\|\ \|_A$, $\tilde{u} \in H_A \xRightarrow{\text{Т.1}} \exists u' \in H$, соответствующий $\tilde{u} \Rightarrow$ {единств. предела} $\Rightarrow u' = u$, ч.т.д.

Пример

$Au = -u''$, $H = L_2(0,1)$, $u \in C^2[0,1]$, $u(0) = u(1) = 0$ (+ граничные?)

Здесь $D(A) \subset L_2$, но $D(A) \neq L_2$!

$(Au,u) = -\int_0^1 u'' \cdot u\, dx = \int_0^1 [u']^2 dx \overset{?}{\geq} \gamma \int_0^1 u^2 dx$ → нер-во Фридрихса

Т.к. $u(0)=0 \Rightarrow u(x) = \int_0^x u'(t)\,dt$, далее исп. Коши-Буняк.

<u>Утверждение</u>

H_A совпадает $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$:

1) u - абс. непр-на на $[0,1]$ ~ справедл. ф-ла Ньютона-Лейбница

2) $\exists$ обобщ. произв. $u' \in L_2(0,1)$

3) $u(0)=u(1)=0$

<u>Док-во</u>:

$[u,v]_A = -\int_0^1 u'' v\, dx = \int_0^1 u'v'\, dx$, $\|u\|_A^2 = \int_0^1 (u')^2 dx$

1) Пусть $u \in H_A$ ~~$\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$~~ $\Rightarrow$ воспользуемся <u>т. 2</u>.

$\|u_n - u_m\|_A \to 0 \iff \int_0^1 (u_n' - u_m')\,dx \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0 \Rightarrow \{u_n'\}$ - фунд. в L_2-полное $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} u_n'(x) = w(x)$

$\left.\begin{array}{l} \|u_n' - w\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ \|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{array}\right| \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow}$ $\overset{\in L_2}{w(x)}$ - обобщ. произв. $u(x)$ $\Rightarrow u(x)$-абс. непр.

Осталось $u(0)=u(1)=0$

$|u_n(0) - u(0)| \leq \|u_n - u\|_{C[0,1]} \leq \{W_2^1$ огр. вклад. в $C\} \leq const\, \|u_n - u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow u_n(0) \to u(0)$, а $u_n(0) = 0 \Rightarrow u(0)=0$

Аналогично $u(1)=0$

2) Пусть $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1) \overset{?}{\Rightarrow} u \in H_A$

$u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1) \rightarrow \exists u' \overset{\text{обобщ.}}{\in} L_2(0,1)$

Разложим $u'(x)$ в ряд Фурье: $u'(x) \overset{L_2}{=} \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\pi k x)$

$a_0 = \int_0^1 u'(x)\,dx = u(1) - u(0) = 0$

Интегрируем почленно (ряды Фурье в L_2 можно) от 0 до x:

$\int_0^x u'(t)\,dt = u(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\pi k x)$, $b_k = \frac{a_k}{\pi k}$

$u_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \sin(\pi k x)$. $u_n(x) \in D(A) = C^2[0,1]$ - все чудесно

$\|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (разность = остаток ряда, а ряд сх-ся среднеквадратично)

Проверим $\|u_n-u_m\|_A^2=\int_0^1[u_n'-u_m']^2dx=\{\exists n>m\}=\int_0^1\left[\sum_{k=m+1}^{n}a_k\cos(\pi kx)\right]^2dx=$

$=\sum_{k=m+1}^{n}a_k^2\cdot\frac{1}{2}\underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow}0$ (в силу сх-ти ряда $\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(\pi kx)$), ч.т.д.

§5 Функционал энергии. Задача о его минимуме

Пусть H - гильб. пр-во, $A\geq\gamma I>0$, $\overline{D(A)}=H$, $f\in H$

Опр Функционалом энергии оператора A называется:

$F(u)=(Au,u)-2(f,u)$

$D(F)=D(A)$

Теорема 1

$u_0=\arg\min\limits_{u\in D(A)}F(u)\iff Au_0=f$. Если $u_0\ \exists$, то u_0 - единственно.

Док-во: $h\in D(A),\ t\in\mathbb{R}$ ($h\in D(A)$?)

$F(u+th)=(A(u+th),u+th)-2(f,u+th)=(Au,u)+t(Ah,u)+$
$+t(Au,h)+t^2(Ah,h)-2(f,u)-2t(f,h)=F(u)+2t(Au,h)-$
$-2t(f,h)+t^2(Ah,h)=F(u)+2t[(Au-f,h)]+t^2(Ah,h)$

$\exists u_0=\arg\min\ldots\Rightarrow F(u_0+th)\geq F(u_0)\Rightarrow$

$\Rightarrow\left.\frac{dF}{dt}\right|_{t=0}=2(Au_0-f,h)=0$, $\forall h\in D(A)$, а $D(A)$ - всюду плотно в H

$\Rightarrow Au_0-f$ ортог. всюду плотному подмн-ву $\Rightarrow$ $Au_0=f$

$\exists Au_0=f\Rightarrow F(u_0+th)=F(u_0)+\underbrace{t^2(Ah,h)}_{\substack{>0\\ t\neq0}}\Rightarrow F(u_0+th)\geq F(u_0)$

$t=0$ - точка строгого min ($F(u)>F(u_0)$, $t\neq0$) $\Rightarrow\ldots$

Единственность: $\exists$ есть 2 $\Rightarrow$ $\begin{matrix}F(u_0)>F(u_1)\\F(u_1)>F(u_0)\end{matrix}$?!! $\Rightarrow u_0=u_1$, ч.т.д.

§6 Обобщенное решение

Расширим область определения ф-ла с $D(A)$ на H_A:

$F(u)=\|u\|_A^2-2(f,u)$

Пример

$Au=-u''$, $u\in C^2[0,1]$, $u(0)=u(1)=0$

$F(u)=\int_0^1u'^2dx-2\int_0^1fu\,dx$

Решаем задачу минимизации в H_A

Замеч. $u_0^{H_A}$ назыв. обобщенным реш-ем ур-ия $Au=f$

Теорема 1

$\exists!\, u_0 = \underset{u \in H_A}{\arg\min}\, F(u)$.

Док-во:

$\ast$ линейный ф-л $(f,u) = l(u)$

$|(f,u)| \overset{\text{К.Б.}}{\le} \|f\| \cdot \|u\| \le \|f\| \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \|u\|_A = \overset{\text{const}}{c} \cdot \|u\|_A$, $c = \frac{1}{\gamma} \cdot \|f\|$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $l(u)$ – лин. огр. ф-л, действ. в H_A – по шлод.

По теореме Рисса $\exists!\, u_0 \in H_A$: $l(u) = (u_0, u)_A$ $\leftarrow -2(u_0,u)_A$

$F(u) = \|u\|_A^2 - 2(f,u) = \|u - u_0 + u_0\|_A^2 - 2(f,u) = \|u-u_0\|_A^2 + 2(u-u_0,u_0)_A +$

$+ \|u_0\|_A^2 - 2(u_0,u)_A = \|u-u_0\|_A^2 + 2\cancel{(u_0,u)_A} - 2(u_0,u_0)_A + \|u_0\|_A^2 -$

$- 2(u_0,u)_A = \|u-u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2$ – достиг. единств. min на u_0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow u_0 = \underset{u \in H_A}{\arg\min}\, F(u)$, единственный; $\min F(u) = -\|u_0\|_A^2$, ч.т.д.

Другой подход

Предположим, что $Au = f$ $|\ast(\cdot, h)$

$(Au, h) = (f, h)$, $\forall h \in H_A$

Будем искать реш-е отсюда.

Оценим норму обобщенного решения:

$(u_0,u)_A = (f,u)$, $\forall u \in H_A$ (из т. Рисса)

Возьмём $u = u_0$ $\Rightarrow$ $\|u_0\|_A^2 = (f, u_0) \le \|f\| \cdot \|u_0\| \le \|f\| \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \|u_0\|_A$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\|u_0\|_A \le \frac{1}{\gamma} \cdot \|f\|}$

$\boxed{\|u_0\| \le \frac{1}{\gamma}\|u_0\|_A = \frac{1}{\gamma^2} \|f\|}$

Пусть H_A – сепарабельное (H_A-сеп. $\Leftrightarrow$ H-сеп.), тогда выберем в нём полную ОНС $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$: ~~$(u_n, u$~~ $(e_n, e_m)_A = \begin{cases} 0, & n \ne m \\ 1, & n = m \end{cases}$

Разложим обобщ. реш-ие u_0 по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$, $\alpha_n = (u_0, e_n)_A$ $\Rightarrow$ $u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (u_0, e_k)_A e_k$

$\ast\ S_n = \sum_{k=1}^{n} (u_0, e_k)_A e_k$. Понятно, что $\|u_0 - S_n\|_A \to 0$

$(u_0, e_k)_A = (f, e_k)$ $\Rightarrow$ $u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k$

Ряд сходится и в старой норме!

$\|u_0 - S_n\|_2 \le \frac{1}{\gamma} \|u_0 - S_n\|_A \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Холомеева

Обобщенные функции

Пусть G - огр. область в E^n, $n > 2$

$S = \partial G$ - (n-1)-мерная поверхность

Пусть $u(x)$ задана на G.

Опр $D(u) = \int_G \nabla u \cdot \nabla u \, dx$ (произв.; эл-т объема) назыв. интегралом Дирихле

Опр Допустимые ф-ии — $u(x) \in C(G \cup S)$, кот. имеют кусочно-непр. производные 1го порядка в G, для них $\exists D(u)$, на S $u(x) = g(x)$, $x \in S$, $g(x)$ - заданная непр-ная на S ф-ия.

Первая вариационная задача: найти среди всех допустимых $u(x)$ такую, на которой $D(u) \to \min$.

Допустимые ф-ии: $\{u + 2h\}$, где $h(x)|_S = 0$

$\ast D(u,h) = \int_G \nabla u \cdot \nabla h \, dx$

Дополнительно: а) $u \in C^{2,0}(G)$

б) для G можно прим. ф-лу О-Г.

можно записать тожд-во:

в) $\nabla (h \nabla u) = \nabla u \nabla h + h \nabla u$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ инт. в) по G и применяя б), получим:

$D(u,h) = -\int_G h \Delta u \, dx$

(если не вып. а)-б))

Можно ли назвать u - реш-ем задачи Дирихле для ур-ия Лапласа?

Пусть $S = \partial G$ и нет никаких предположений о её гладкости.

$\forall \varphi(x)$, заданную на G.

Опр $\varphi(x)$ финитная на G, если $\varphi(x)$ беск. дифф-ма ~~на G~~ и равна нулю вне некоторого компакта K, $K \subset G$. K назыв. носителем ф-ии $\varphi(x)$

Обозн $K = \mathrm{supp}\,\varphi$; $\varphi(x) \in C_0^\infty(G)$

Пусть G - открытое мн-во, применим ф-лу Г.-О.:

$$\int_G \frac{\partial P}{\partial x_i} dx = \int_{\partial G} P \cos(\vec{n}, x_i) \, dS, \quad (P \in C^1(G \cup \partial G))$$

$\rceil u, v \in C_0^\infty(G) \Rightarrow \int\limits_G v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int\limits_G \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) - u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right] dx = \{\Gamma.-O\} =$

$= \int\limits_S \cos(\vec{n}, x_i) \cdot \overset{=0}{\overline{uv}}\, ds - \int\limits_G u \frac{\partial v}{\partial x_i} ds \Rightarrow \underbrace{\int\limits_G u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int\limits_G \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx}_{\forall u,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(G)}$

Обозначим $\underline{D^m \varphi = \frac{\partial^m \varphi}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x_n^{m_n}}}$, $m = \sum\limits_{i=1}^n m_i$

$(\vec{m} = (m_1, \ldots, m_n) \Rightarrow m = |\vec{m}|)$

Пусть u, v – локально суммируемые ф-ии (т.е. инт.-мя по Лебегу на каждой подобласти $U: \overline{U} \subset G$)

$u, v \in L^{loc}(G)$

Опр $\cdot v$ – лок. сумм. обобщ. произв. ф-ии $u(x)$ порядка m, если выполнено тождество:

$\int\limits_G u D^m \varphi\, dx = (-1)^m \int\limits_G v \varphi\, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G).$

Замечание

Пусть произв. ф-ии $u(x)$ $D^m u$ – лок. суммируемая $\Rightarrow \int\limits_G u D^m \varphi dx = (-1)^m \int\limits_G D^m u \cdot \varphi dx$

$\Rightarrow$ обобщ. произв. совп. с обычной.

Утверждение

Обобщ. произв., если $\exists$, то единств.

Док-во:

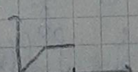
$\rceil \exists v, v_1 \in L^{loc}(G): \int\limits_G u D^m \varphi dx = (-1)^m \int\limits_G v\, \varphi dx$ (– и – с v_1)

Тогда $\forall \varphi \in C_0^\infty(G)$: $0 = \int\limits_G (v - v_1) \varphi dx$ ~~по основ~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{\varphi_m\} \in C_0^\infty(G): \varphi_m \xrightarrow[L^{loc}]{G} v - v_1 \Rightarrow$ запишем тожд. с φ_m и

перейдем к пределу $\Rightarrow v \equiv v_1$, ч.т.д.

Примеры

1) $\rceil u = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \end{cases}$  , $G = (0, 2)$

$\Downarrow$

$v = u' = \begin{cases} 1, & 0 < x \le 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$

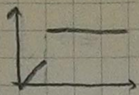
$\forall \varphi \in C_0^\infty(G)$: $\int\limits_0^2 u \varphi' dx = \int\limits_0^1 x \varphi' dx + \int\limits_1^2 \varphi' dx = x\varphi\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \varphi dx +$

$+ \int\limits_1^2 \varphi' dx = \{\varphi(2) = \varphi(0) = 0\} = \varphi(1) - \varphi(1) + \overset{=0}{\varphi(0)} - \int\limits_0^1 \varphi dx =$

$= -\int\limits_0^2 v \varphi dx \Rightarrow$ отсюда $\underline{v}$.

2) Пример ф-ии, не имеющей обобщ. произв.

$u = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1 \\ 2, & 1 < x < 2 \end{cases}$



$v' = \delta(x-1) + \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & x \in (1,2) \end{cases}$

Пусть $\exists v \in L^{loc}(G) \Rightarrow \forall \varphi \in C_0^\infty(G): \int\limits_0^2 u\varphi' dx = -\int\limits_0^2 v\varphi dx$

$\int\limits_0^2 u\varphi' dx = x\varphi\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \varphi dx + 2[\varphi(2) - \varphi(1)] = -\varphi(1) - \int\limits_0^1 \varphi dx \overset{?}{=} -\int\limits_0^2 \varphi v dx$

Рассмотрим $\{\varphi_m(x)\}$, $\varphi_m(1) = 1$, $\varphi_m(x) \to 0, m \to \infty, \forall x \ne 1$, $\varphi_m \in [0,1]$

$\Rightarrow \underset{1}{\overset{\shortparallel}{\varphi_m(1)}} = -\int\limits_0^2 u\varphi_m' dx - \int\limits_0^1 \varphi_m dx = -\int\limits_0^1 \varphi_m dx + \int\limits_0^2 \varphi_m v dx \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$?!! $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ у ф-ии нет обобщ. произв.

<u>Следствие</u>

Обобщ. произв. не всегда совпадает с произв. почти всюду

3) Пусть $u(x) \in C[0,1]$, но не явл. абсолютно непр. (для отрезка $\to$ не явл. непр.

$\exists \int\limits_0^1 u\varphi' dx = -\int\limits_0^1 v\varphi dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(0,1)$

$\ast\ w(x) = \int\limits_0^x v(\xi) d\xi \Rightarrow -\int\limits_0^1 v(x)\varphi(x) dx = \int\limits_0^1 w(x)\varphi'(x) dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 [u - w]\varphi' dx = 0$. $\int\limits_0^1 \varphi'(x) dx = 0$

$\overset{\shortparallel}{u} = w + c \Rightarrow u$ - абс. непр., т.к. w - абс. непр. ?!! $\Rightarrow$

$\Rightarrow u$ не имеет обобщ. произв.

4) $u = u(x,y) = f_1(x) + f_2(y)$, где f_1 и f_2 - не дифф-мы, но $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \overset{\text{обобщ.}}{=} 0$

$\int\limits_G u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx dy = \int\limits_G f_1(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx dy + \int\limits_G f_2(y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx dy =$

$= \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \text{ на гр.}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \text{ на гр.} \right\} = \int\limits_a^b f(x) \underbrace{\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dy}_{=0} dx + \ldots = 0.$

<u>Пространство Соболева</u>

$L_2(G)$ - гильб. пр-во ф-ий, заданных на G.

Тогда $W_2^1(G)$ - мн-во ф-ий из $L_2(G)$, кот. имеют обобщ. произв. 1го порядка, суммируемые с квадратом в G.

$H^1 = W_2^1$

Введём ск. произв.:

$(u,v)_{W_2^1} \overset{def}{=} \int_G (\nabla u \nabla v + uv)\,dx \quad, \forall u,v \in W_2^1(G)$

$\|u\|_{W_2^1} = \left(\int_G (\nabla u \nabla u + u^2)\,dx\right)^{1/2}$

$W_2^1(G)$ - сепарабельное банахово пр-во.

Рассмотрим $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ - замыкание мн-ва всех финитных ф-ий с компактным носителем в G по норме W_2^1 (замык. $C_0^\infty(G)$). $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ явл. собственным подпр-вом W_2^1.

$(u,v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} = \int_G \nabla u \nabla v\,dx \quad, \forall u,v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$

$C_0^\infty \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1 \subset W_2^1 \subset L_2$

Теорема (Реллиха)

Каждое огр. мн-во на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ компактно в $L_2(G)$. ($\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ вклад. в L_2 компактно)

Док-во: (не надо)

Неравенство Пуанкаре-Стеклова

$\int_G u^2\,dx \le c^2 \int_G \nabla u \nabla u\,dx \quad (\|u\|_{L_2(G)} \le c\,\|\nabla u\|_{L_2(G)}), \forall u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$,

т.е. $\|u\|_1 = \left(\int_G \nabla u \nabla u\,dx\right)^{1/2} = [D(u)]^{1/2} \to$ если замыкать мн-во финитн. ф-ий по этой норме, снова получим $\overset{\circ}{W}{}_2^1$.

$\|\cdot\|_{W_2^1}$ и $\|\cdot\|_1$ эквивалентны!

Обобщенные решения

Пусть G лежит в области заданного равномерно-эллипт. лин. ур-ия 2го пор.:

$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + \sum_{i=1}^n e_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x)$ (1) (A-дифф. нач.)

Постановка задачи Дирихле: найти u - рег. реш-ие в G, $u \in C^{0,0}(G \cup S)$:

$u(x) = g(x)$ ← непр. ф-ия, $x \in \partial G$

Далее будем считать, что $u(x)\big|_{\partial G} = 0$ (2)

Опр. Пусть A_{ij}, e_i, c - огранич. измеримые ф-ии, $f \in L_2(G)$. Тогда $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ явл. обобщ. реш-ем задачи (1), (2) в пр-ве $\overset{\circ}{W}{}_2^1$, если выполн. тожд-во: $\int\limits_G \left(-\sum\limits_{i,j=1}^n A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^n e_i\frac{\partial u}{\partial x_i}v + cuv - fv\right)dx = 0$, $\forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$.

Если $u \in C^{2,0}(G \cup S)$ и A_{ij}, ~~e_i~~ на S дост. гладкие, то, инт-уя по частям,
$\Rightarrow \int\limits_G (Lu - f)v\,dx = 0$ (3) $\Rightarrow$ если Lu и f непр., то u - классич. реш-ие

Обозначим $L^*w = \sum\limits_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(e_i w) + cw$

Опр $w(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ - обобщ. реш-ие $\begin{cases} L^*w = 0 \\ w|_{\partial G} = 0 \end{cases}$ сопр. задача, если вып. тожд-во:
$\int\limits_G \left(-\sum\limits_{i,j=1}^n A_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(e_i w)v + cwv\right)dx = 0$, $\forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$

Аналогично, если $w \in C^{2,0}(G \cup S) \Rightarrow w$ - классич. реш-е.

Утверждение 1

Пусть $\begin{cases} Lu = 0 & \text{в } G \\ u = 0 & \text{на } S \end{cases}$, $\begin{cases} L^*w = 0 & \text{в } G \\ w = 0 & \text{на } S \end{cases}$. Тогда эти 2 задачи имеют одинаковое, не более чем конечное число ЛНЗ решений.

Утверждение 2

Пусть $\begin{cases} Lu = f \\ u|_S = 0 \end{cases}$. Для разрешимости задачи $\Leftrightarrow \int\limits_G f w_i\,dx = 0$, $i = \overline{1,l}$
w_i - все ЛНЗ реш-ия $\begin{cases} L^*w = 0 \\ w|_S = 0 \end{cases}$

Утверждение 3

В области G дост. малой меры одн. задача $\begin{cases} Lu = 0 \\ u|_S = 0 \end{cases}$ имеет только трив. реш-е.

Теорема (сл. из 1 и 2)

Неоднородная задача Дирихле $\begin{cases} Lu = f \\ u|_S = 0 \end{cases}$ для $\forall f \in L_2(G)$ разрешима однозначно $\Leftrightarrow$ соотв. однородная задача не имеет нетрив. реш-ий.

Сл. На области дост. малой меры ~~...~~ всегда $\exists$ и реш-е и единств.

О поведении обобщ. на границе

Пусть σ - участок границы S ($x_n = 0$ - граница). Рассмотрим цилиндр G_0 высоты h с образующей $\parallel$ оси x_n, $G_0 \subset G$

Пусть $u \in C_0^\infty(G) \Rightarrow$ для неё вып.: $u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \int\limits_0^{x_n} \frac{\partial u(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)}{\partial t}dt$,
$x_n \in [0, h]$ (нижняя подст. $= 0$ в силу финитности)

Восп. К.-Б. $\Rightarrow \left(\int\limits_0^{x_n} \frac{\partial u(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)}{\partial t}dt\right)^2 \le x_n \int\limits_0^{x_n}\left(\frac{\partial u(x_1, \ldots, t)}{\partial t}\right)^2 dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_\sigma u^2(x_1,\dots,x_n)\,d\sigma \le x_n \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2 dx \quad, \forall u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$$

Вблизи σ: $\lim\limits_{x_n\to 0} \int_\sigma (u(x_1,\dots,x_n))^2\,d\sigma = 0$

Обобщенные решения для уравнений гиперб. типа

Рассмотрим ур-ие:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Lu = f(x,t) \quad (1) \qquad Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left[A_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right] + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u \quad (2)$$

L − равномерно-эллипт. оператор в области Ω, $\Omega \subset E^{n+1}$

G − некот. огр. область из E^n, $Q = \{G \times (0<t<T)\}$ − подобл. Ω.

G − нижнее основание Q, $S = \partial G \times (0 \le t \le T)$ − бок. пов-ть Q, $T>0$ задано

Смешанная задача для ур-ия (1)

Определить регулярное в Q решение $u(x,t)$ ур-ия (1), непрерывное в замыкании Q и удовл. условиям:

$$\begin{cases} u(x,0) = \tau(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \nu(x) \end{cases}, \quad u\big|_S = 0$$

Опр $u(x,t) \in W_{2\,0}^1(Q)$ (замыкание по норме W_2^1 гладких на Q ф-ций, обращающихся в 0 вблизи границы S), $u\big|_{t=0} = \tau(x)$ назыв. обобщ. реш-ем задачи (1), (2), если выполн.:

$$\int_Q \left(-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v - cuv\right) dx\,dt =$$

$$= \int_G \nu(x)\,v(x,0)\,dx + \int_Q f v\,dx\,dt \quad, \forall v \in W_{2\,0}^1(Q),\ v\big|_{t=T} = 0.$$

($f \in L_2(Q)$, $\nu \in L_2(G)$, коэфф. A_{ij}, b_i, c − огр. и измеримы)

При $\tau = 0$ справ. и для классич. решений при гл. ν, b, A, c, и т.д.

Второй способ введения обобщ. реш-я (как предел)

$\exists \{f_k(x,t)\}$ − огр. посл-ть ф-ций из $L_2(G)$: $\forall t \in [0,T]$ $f_k(x,t) \to f(x,t)$

$\Rightarrow$ для каждой f_k решаем (1)

Если для $\forall f_k$ $\exists$ классич. реш-ие $\Rightarrow$ оно единств. и $u_k(x,t) \in L_2(G)$

Обобщ. реш-е будем искать как $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k(x,t)$.

Пример

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x,t) & \text{в } Q \\ u(x,0)=0 & \\ u_t(x,0)=0 & x\in G \\ u|_S = 0 & \end{cases}$$

$\int_0^t v\cdot v'\,dt = v^2\Big|_0^t - \int_0^t v' v\,dt \Rightarrow \int_0^t v v'\,dt = \frac12 v^2\Big|_0^t$!

* $E_k^2(t) = \frac12\int_G \left[\left(\frac{\partial u_k}{\partial t}\right)^2 + (\nabla u_k)^2\right] dx$ (аналог нормы в $\mathring{W}_2^1$)

$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} - \Delta u_k(x,t) = f_k(x,t)$ в Q $\Big| \cdot \frac{\partial u_k}{\partial t}(x,t)$ и инт-ем по Q

$$\int_0^t dt_1 \int_G f_k(x,t_1)\frac{\partial u_k}{\partial t}(x,t_1)\,dx = \int_0^t dt_1\int_G \Big[\underbrace{\frac12 \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial u_k}{\partial t_1}\right)^2}_{\frac{\partial u_k}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial^2 u_k}{\partial t_1^2}} + \underbrace{\nabla u_k \nabla \frac{\partial u_k}{\partial t_1}}_{\sum \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial t_1}} -$$

$$- \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial t_1}\right)\Big]dx = \{\text{меняем } \textstyle\int,\ u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=0 \text{ + ф-ла Г.О.}\} =$$

$$= \frac12\int_G \left[\left(\frac{\partial u_k}{\partial t_1}\right)^2 + (\nabla u_k)^2\right]\Big|_{\underset{\text{уходит в силу н.у.}}{t_1=0}}^{t_1=t} dx - \int_0^t dt_1 \int_{\partial G} \underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial t_1}}_{=0}\frac{\partial u_k}{\partial n_x}\, dS_x = E_k^2(t)$$

$$\Rightarrow E_k^2(t) = \int_0^t dt_1\int_G f_k(x,t_1)\frac{\partial u_k}{\partial t_1}\,dx$$

Запишем очевидное равенство:

$$\frac{d}{dt}\left[E_k^2(t)\right] = 2E_k\cdot\frac{d}{dt}(E_k) = \int_G \frac{\partial u_k}{\partial t}(x,t)\, f_k(x,t)\,dx \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}\Rightarrow 2E_k \dfrac{dE_k}{dt} \le \left\|\dfrac{\partial u_k}{\partial t}\right\|\cdot\|f_k\| \\ \left\|\dfrac{\partial u_k}{\partial t}\right\|\le\sqrt2\, E_k(t)\end{matrix}\right| \Rightarrow \frac{dE_k}{dt}\le \frac1{\sqrt2}\|f_k\|$$

$$E_k(t)\le \frac1{\sqrt2}\int_0^t \|f_k(t_1)\|\,dt_1 \Rightarrow \left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\| \le \int_0^t\|f_k(t_1)\|\,dt_1$$

$$2\|u_k\|\frac{d}{dt}(\|u_k\|) \le 2\|u_k\|\cdot\left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\|u_k\|) \le \int_0^t \|f_k(t_1)\|\,dt_1 \Rightarrow \|u_k\|\le \int_0^t dt_1\int_0^{t_1}\|f_k(t_1)\|\,dt$$

$\Rightarrow$ если $\{f_k\}$ - огр., то огр. и $\{u_k\}$!

если $\{f_k\}$ - сх-ся $\Rightarrow$ $\{u_k\}$ - фунд., L_2 - гильб. $\Rightarrow$ посл-ть $\{u_k\} \to u\in L_2$, и назовём обобщ. реш-ем.

\+ из этих же оценок можно получить единств. (если $f\equiv0 \to u\equiv0$)

Обобщенные решения задач для ур-ий парабол. типа

Общий вид ур-ия:

$\frac{\partial u}{\partial t} = -Lu - f(x,t)$ (1)

$Lu = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum\limits_{i=1}^{n} e_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u = 0$

L - равном. эллипт. в Ω.

$G \subset E^n$, $\cancel{\Omega}\,Q = G \times (0 < t < T)$ - цилиндр. в Ω с осн. G и бок. пов-тью

$S = \{\partial G \times (0 \le t \le T)\}$, $T = const > 0$.

Первая краевая задача для (1):

В классич. смысле найти $u(x,t) \in C^{2,0}(Q) \cap C^{0,0}(Q \cup \partial Q)$ - реш. ур-ия (1) в обл. Q, удовл.:

(2) $u(x,0) = \varphi(x)$, $x \in G$

(3) $u(x,t)|_S = 0$, $(x,t) \in S$

$\forall u, v \in L_2(Q)$ Пусть u, v имеют обобщ. произв. из L_2 1го порядка по простр. перем.

Введем ск. произв.: $(u,v) = \int\limits_Q \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i} + uv\right) dx\,dt$, $\|u\| = \sqrt{(u,u)} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ получим гильб. пр-во $W_2^{1,0}(Q)$.

Введём $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}$ - замык. пр-ва $W_2^{1,0}$ по введенной норме
пр-во гладких ф-ий на замык. Q, обр. в 0 вблизи границы S

Опр Обобщенное реш-е задачи (1)-(3) из пр-ва $W_2^{1,0}$ назыв. ф-ия $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}$: $\int\limits_Q \left[-u\frac{\partial v}{\partial t} + \sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v - cuv\right) dx\,dt =$

$= \int\limits_G \varphi(x)\,v(x,0)\,dx + \int\limits_Q f v\,dx\,dt$ (4), $\forall v(x,t) \in W_2^{1,0}$, $v(x,t)|_{t=T} = 0$

это здесь, чтобы исключить

Классич. реш-ие удовл. (4)! $\Rightarrow$ нет противоречий

Также обобщ. реш-ие можно ввести как предел классич. реш-ий:

$\exists \{f_k\}, \{\varphi_k\}$ - функц. посл-ти дост. гладких ф-ий: $\{f_k\} \rightrightarrows f$, $\{\varphi_k\} \rightrightarrows \varphi$.

Если для задач (1)-(3) с подстановкой f_k, φ_k $\exists$ классич. реш-ия $\{u_k\}$, то предел $\{u_k\} \rightrightarrows u$ - обобщ. реш-ие, ~~и $\in$~~ в $Q \cup \partial Q$.

Пример

$\begin{cases} \frac{\partial u_k}{\partial t} - \Delta u_k = f_k(x,t), & (x,t) \in Q \end{cases}$

$$\begin{cases} u_k(x,0)=0, & x\in G \\ u_k|_S=0 \end{cases} \qquad \{f_k\}\rightrightarrows f$$

Докажем, что $\exists u:\ \{u_k\}\rightrightarrows u$.

Т.к. $\{f_k\}$ сх-ся, то $\max\limits_{(x,t)\in Q\cup\partial G}|f_k(x,t)|\le M_k \overset{?\ \Rightarrow\ \text{докажем}}{\Rightarrow} |u_k(x,t)|\le TM_k$

Предположим, что $\exists(x',t'):\ u_k(x',t')>TM_k$.

$\ast\ v(x,t)=u_k(x,t)+M_k(T-t)$. Т.к. u_k удовл. ур-ию, то:

$\Delta v-\frac{\partial v}{\partial t}=\underbrace{-f(x,t)+M_k}_{\geq 0}$ $\Rightarrow$ для v_k наруш. принцип max

(max достиг. внутри) $\Rightarrow$ $\underline{|u_k(x,t)|\le TM_k}$

Теперь докажем $\{u_k\}\rightrightarrows u$; ← равном. сх-ть (кр. Коши)

$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)>0;\ \forall p\ \ |f_{N+p}-f_N|<\varepsilon$ (из сх-ти f_k)

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)(u_{N+p}-u_N)=f_{N+p}-f_N \\ u_{N+p}(x,0)-u_N(x,0)=0 \end{cases} \overset{\text{из пред.}}{\Longrightarrow} |u_{N+p}-u_N|\le T\varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ посл-ть $\{u_k\}$ фунд. в смысле $C^{0,0}(Q\cup\partial Q)$ $\Rightarrow$ равномерно сх-ся к некот. непр-ной ф-ии.

<u>Однородная задача Дирихле для ур-ия Пуассона</u>

$$\begin{cases} \Delta u=-f(x), & x\in G \\ u(x,\cancel{t})=0, & x\in\partial G \end{cases}$$

$f(x)\in L_2(G)$

Обобщ. реш-ие: $u(x,t)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$, $\int\limits_G(\nabla u\cdot\nabla v-fv)\,dx=0$, $\forall v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$

$(u,v)=\int\limits_G\nabla u\cdot\nabla v\,dx$, $\forall u,v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ $\Rightarrow$ $\|u\|=\sqrt{(u,u)}$

$\overset{\circ}{W}{}_2^1$ – гильб. пр-во

$\ast$ ф-л $F(v)=\int\limits_G fv\,dx \overset{\text{по т. Рисса}}{\Longrightarrow} \exists!\,u(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(G):\ F(v)=(u,v)=\int\limits_G\nabla u\,\nabla v\,dx$ $\forall v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$

Таким образом, обобщ. реш-ие $\exists!$

Здесь не останавливаемся на том, что классич. и обобщ. совпадают

Нелинейные уравнения

Пример

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u^3, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

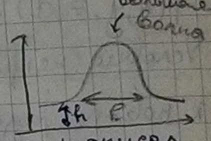
Тут возможны режимы с обострением: при каких-то нач. данных реш-ие неогр. растёт за конечное время.

Уравнение Кортевега-де Фриза (Korteweg-de Vries)

Важный момент скорость распростр. волны в бассейне зависит от амплитуды волны. Траектории ч-ц больше похожи на окружности.

Длинные волны => ск. волны $\sim \sqrt{g(a+h)}$ ← глубина бассейна; g — гравит. уск.; a — амплитуда

Короткие волны => ск. волны $\sim \sqrt{\dfrac{T}{a\rho}}$; T — поверхн. натяжения; ρ — плотность



Шотландский учёный Рассел (1834г.) впервые отметил этот феномен и описал => явление уединенной волны (трансляции)

Уединенные волны проходят друг через друга без какого-либо изменения (волны-солитоны)

=> XIX Буссинеск и Рэлей развили эту теорию и вывели некот. ур-ние; выяснили, что эффект возникает из-за нелинейности (физ: дисперсия в среде; ч-цы двигаются и по вертикали)

В 1895г. получили ур-ие Кортевега-де-Фриза.

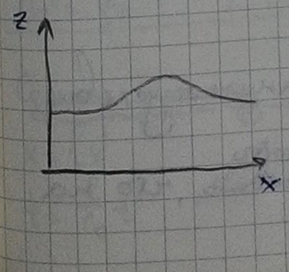
Рассмотрим малые возмущения на пов-ти жидкости.

Предположим, что $\rho_0 = const$ — плотность жидкости. =>

=> $\underline{\operatorname{div} \vec{u} = 0}$ (1) — ур-ие неразрывности

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho_0}\nabla p = \vec{g} \quad (2)$$

$\vec{g} = (0, 0, -g)$; (2) — ур-ие движения с гравит.



∃ в первонач. момент времени жидк. покоится или поток однороден => тогда ~~не~~ будет безвих вой процесс : $\boxed{\vec{\omega} = \text{rot}\,\vec{u} = 0}$ (3) $\Rightarrow$ $\vec{u} = \text{grad}\,\varphi$ ($\vec{\varphi}$ - потенц. скорости)

(1) $\mapsto$ $\boxed{\Delta\varphi = 0}$ (4)

$[\vec{u}, \text{rot}\,\vec{u}] + (\vec{u}, \nabla)\vec{u} = \frac{1}{2}(\nabla\vec{u}^2)$ - известная ф-ла $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (2) $\mapsto$ $\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\vec{u}^2) + \frac{\nabla p}{\rho_0} + \vec{g} = 0$

Проинтегрировав по z и исп. $\vec{u} = \text{grad}\,\varphi$: (считаем, что по пр-ву есть зависимость только от z?)

$$\boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{p-p_0}{\rho_0} + gz = 0} \quad (5)$$

p_0 - давление на пов-ти жидкости со стороны атмосферы (движение воздуха над пов-тью водой не учитываем)

Поверхность раздела - пов-ть, кот. не пересек. ч-цы жидкости

Пусть $f(x,y,z,t) = 0$ - опис. пов-ть раздела

Условие непротекания: компонента скорости жидкости, нормальная к пов-ти раздела, = норм. комп. скорости пов-ти раздела.

Пусть $\vec{u} = (u_1, v, u_2)$ на границе $\Rightarrow$ усл-ие непротек.: $\frac{u_1 f_x + v f_y + u_2 f_z}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} = -\frac{f_t}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}$

$\Rightarrow$ $\boxed{u_1 f_x + v f_y + u_2 f_z + f_t = 0}$ (6) $\quad \{f_x, f_y, f_z\}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dots}}$ - норм. к пов-ти

Поверхн. раздела через отклон. от полож. равн.: $z = \eta(x,y,t) + h$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f = h + \eta(x,y,t) - z$ $\Rightarrow$ подст. в (6):

$\eta_t + u_1\eta_x + v\eta_y = u_2$

Будем считать, что по y возмущений нет:

$\boxed{\eta_t + u_1\eta_x = u_2}$ (7)

Получим граничные условия

Пусть $\tilde{\varphi}(x,z,t)$ - значения потенц. скорости на поверхности

Тогда $u_1 = \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}$, $u_2 = \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial z}$

(7) $\mapsto$ $\boxed{\tilde{\varphi}_z = \eta_t + \eta_x\tilde{\varphi}_x}$ (7.1) - кинематическое граничное условие

Выведем динамическое гр. усл-ие (будем ~~учитывать~~ считать, что на пов-ти давл. жидкости = давл. в атмосфере)

Тогда запишем (5) для пов-ти: $\boxed{\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t} + \frac{(\nabla\tilde{\varphi})^2}{2} + g z_1 = 0}$ $\left(+T\, \cancel{\rho_0 \nabla n}\right)$

Продифф. по x: $\boxed{\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + g\eta_x = 0}$ (8)

Пусть наше дно соотв. границе жидкости $z=0$ (плоское и горизонтальное)

$\Rightarrow$ $\boxed{\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0} = 0}$ (9)

непротек. через дно

Задача для потенциала скорости

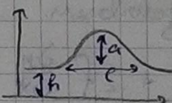
$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \eta_t + u_1\eta_x = u_2 \\ u_{1_t} + u_1 u_{1_x} + u_2 u_{2_x} + g\eta_x = 0 \\ \varphi_z|_{z=0} = 0 \end{cases}$$

– задача о нелин. волнах на пов-ти воды

$\eta_t + u_1\eta_x = u_2$, $u_{1_t} + u_1 u_{1_x} + u_2 u_{2_x} + g\eta_x = 0$ – усл-ия на верхн. гр.

$\varphi_z|_{z=0} = 0$ – усл-ие на нижней гр.

Длинные волны на мелкой воде (предположение)



$a << h << l$ – длина возмущ. много больше глубины жидк.

амплитуда много меньше глуб. жидк.

Введём обозначения: $\delta = \frac{h}{l} << 1$, $\varepsilon = \frac{a}{h} << 1$

Далее по книге: Лэм, „Введение в теорию солитонов"

Будем искать решение в виде: $\varphi(x,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x,t)\cdot z^n$, $z \in [0, z_1]$

При подстановке в $\Delta\varphi = 0$ получим:

$\varphi_{n_{xx}} + (n+2)(n+1)\varphi_{n+2} = 0$

Из усл-ия (9) $\longrightarrow$ $\varphi_1 = 0$ $\Rightarrow$ $\varphi_{2k+1} = 0$

$$\varphi(x,z,t) = \varphi_0(x,t) - \frac{z^2}{2}\varphi_{0xx} + \frac{z^4}{24}\varphi_{0xxxx} + \ldots$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= \tilde{\varphi}_x = f - \frac{z_1^2}{2} f_{xx} + \ldots \\ u_2 &= \tilde{\varphi}_z = -z_1 f_x + \frac{z_1^3}{6} f_{xxx} + \ldots \end{aligned}} \quad (10)$$

, где $\boxed{f(x,t) = \frac{\partial\tilde{\varphi}_0(x,t)}{\partial x}}$ (11)

Сделаем замену перем., вводя безразм. параметры:

$x = l x'$

$t = \frac{l}{c_0} t'$, $c_0 = \sqrt{gh}$ (~ скорость, с кот. ч-цы на выс h дойдут до дна)

$\eta = a\eta'$, $u_1 = \varepsilon c_0 u_1'$, $u_2 = \varepsilon\delta c_0 u_2'$, $f = \varepsilon c_0 f'$, $z_1 = h(1+\varepsilon\eta')$

Число Струхаля: $Sh = \frac{fL}{v} = \frac{L}{Tv}$ (f – частота волны)

Далее штрихи ставить не будем!

Перепишем (10) в этих перем. и пренебрежем $\bar{o}(\varepsilon)$ и $\bar{o}(\delta^2)$:

$$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= f - \frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (12)\\ u_2 &= -(1+\varepsilon\eta)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\delta^2}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \quad (13)\end{aligned}}$$

Подставим перем. в (7) и (8):

$$\begin{cases} u_2 = \eta_t + \varepsilon\eta_x u_1 \\ u_{1t} + \varepsilon u_1 u_{1x} + \eta_x = 0 \end{cases}$$

Подставим в (12) и (13):

$$\begin{cases} \frac{\partial\eta}{\partial t} + \varepsilon f\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon\eta\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\delta^2}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \\ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} + \varepsilon f\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial t} = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Нужно решать (*).

Если ε и $\delta = 0$ => получим лин. систему => f и η удовл. волн. ур-ию

=> $f = \pm\eta$ (в нул. приближ.) => имеем право исп. разлож. по малым параметрам

Метод возмущений

Будем решать (*) с предполож., что $f = \eta + \varepsilon f^{(1)} + \delta^2 f^{(2)}$ ($f^{(1)}, f^{(2)}$ – реш-ия лин. сис-м) (разлож. по малым параметрам) => после подст. оставлен только члены с ε и δ^2.

Потом вычтем из 1го ур-ия 2ое:

$$\varepsilon\left[\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \eta\frac{\partial\eta}{\partial x}\right] + \delta^2\left[\frac{\partial f^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial f^{(2)}}{\partial t} - \frac{1}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} + \frac{1}{2}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\partial t}\right] = 0$$

Т.к. ε и δ независ., приходим к:

$$\begin{cases} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \eta\frac{\partial\eta}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial f^{(2)}}{\partial t} - \frac{1}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} + \frac{1}{2}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\partial t} = 0 \end{cases}$$

$\cancel{\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x}}$ Из лин. системы следует, что:

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = -\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial t} = -\frac{\partial f^{(2)}}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)} = -\frac{\eta^2}{4}, \quad f^{(2)} = \frac{1}{3}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

Тогда $\dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \dfrac{\partial \eta}{\partial x} + \dfrac{3}{2}\varepsilon\eta\dfrac{\partial \eta}{\partial x} + \dfrac{\delta^2}{6}\dfrac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0$ (из (*))

Введём перем $\tau = x + t$ + опять безразм. парам. $\Rightarrow$

u ~ опис. поверхность волны

$\Rightarrow \boxed{u_\tau + 6uu_x + u_{xxx} = 0}$ – ур-ие длинных волн (Кортвега-де Фриза)

$(u_t + uu_x + \beta u_{xxx})_x + 3\delta^2 u_{yy} = 0$ – ур-ие Кадомцева-Петвиашвили

Рассмотрим простейшее волновое ур-ие:

$u_t + cu_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,t) = F(t - \frac{x}{c})$ – распростр. возмущение с пост. скоростью без искажения формы!

Уравнение простых волн

$u_t + V(x,t,u)\,u_x = 0$ (V ~ ск. волны в кажд. точке опр. координатами и значением ф-ии в этой точке)

$\exists\, V = V(x)$

$u_t + V(x)\,u_x = 0$

Решим методом разделения переменных:

$\exists\, u(x,t) = f(x)\cdot g(t) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{g_t}{g} = -V(x)\dfrac{f_x}{f} = c = const$

$$\boxed{u_c(x,t) = A\exp\left\{ct - \int_{x_0}^{x}\frac{c\,dx_1}{V(x_1)}\right\}}$$

Пусть $c = i\omega$ – мнимое $\Rightarrow u_\omega(x,t) = A\exp\left\{i\omega t - i\int_{x_0}^{x}\dfrac{\omega\,dx_1}{V(x_1)}\right\}$

простая монохроматическая волна (т.е. в спектре всего 1 составл. по частоте)

$\exists\, u(x_0,t) = Ae^{i\omega t}$ (гр. условие)

$\forall$ ГУ особого вида: $u(x_0,t) = g(t) \Rightarrow u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_\omega \exp\left\{i\omega t - i\int_{x_0}^{x}\frac{\omega\,dx_1}{V(x_1)}\right\}$ = {где g_ω – образ ф-ии $g(t)$} $= g\left(t - \displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{dx_1}{V(x_1)}\right)$

Нелинейное уравнение

$u_t + V(u)u_x = 0$ — скорость распростр. возмущ. зависит от величины возмущения

$\Rightarrow u_t = F' \cdot (-V(u) + t \cdot V' \cdot u_t)$
$u_x = F' \cdot (1 - t \cdot V' \cdot u_x)$

ф-ла Римана

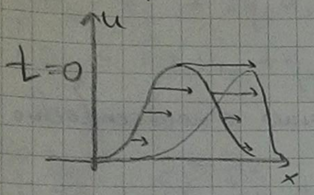
$u(x,t) = F(x - V(u)t)$, F — $\forall$ дифф-мая ф-ия

$\ast$ нелинейность первого порядка:

$\cancel{u(x} \; u_t + uu_x = 0 \quad \to \quad u(x,t) = F(x - ut)$. Проверим:

$u_x = (1 - u_x t) \cdot F'$, $u_t = F'(-u_t \cdot t - u)$ ✓

$F' = \frac{dF}{d\xi}$, $\xi = x - ut$ $\quad \to u_x = \frac{F'}{1 + F't}$

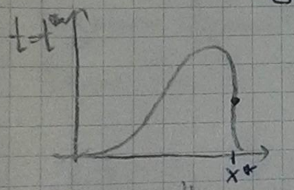


В нелин. задачах различные точки двил. с разными скоростями, скорость казд. точки пропорц. u.

$\Downarrow$

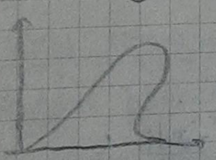
крутизна переднего фронта волны со временем увеличивается (укручение волны)

Также наблюдается опрокидывание волны:



$u_x(x^*, t^*) = \infty$ (происх. при $1 + F't = 0$)

$\Downarrow$



← неоднозначное реш-ие!

Спектральный подход

$Ju = \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \varepsilon^3 u^{(3)}$

Пусть $u(x,0) = \varepsilon a \sin(kx)$, а близко к 1
$u_t + uu_x = 0$

Подставим разложение u в ур-ие:

$\varepsilon \,|\; u_t^{(1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad u^{(1)} = a\sin(kx)$

$\varepsilon^2 \,|\; u_t^{(2)} = -u^{(1)} u_x^{(1)} = \{цеп. нч\} = -\frac{a^2 k}{2}\sin(2kx) \Rightarrow$

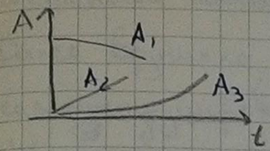
$\Rightarrow u^{(2)} = -\frac{a^2 k t}{2}\sin(2kx)$

Уже видно, что нелинейность приводит к генерации высших гармоник!

$\varepsilon^3 \big| \; u_t^{(3)} = -u^{(1)}u_x^{(2)} - u^{(2)}u_x^{(1)} = -\frac{a^3k^2t}{4}\left[\sin kx - 3\sin(3kx)\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow u^{(3)} = -\frac{a^3k^2t^2}{8}\sin(kx) + \frac{3a^3k^2t^2}{8}\sin(3kx)$

Происходит истощение первой гармоники засчет высших + возникает третья гармоника с ампл. $\sim t^2$



Теперь рассмотрим диссипативную среду

$\omega = \omega_r(k) + i\omega_i(k)$ – дисперсионное соотношение (связь ω и k (волн. число))

В общем виде: $P(\omega, k) = 0$

Ставим в соотв.: $\omega \mapsto -i\frac{\partial}{\partial t}$, $k \mapsto i\frac{\partial}{\partial x}$ $\Big|$ $\Rightarrow$ получим привычное ур-ие

Частный случай

$\exists\ \omega_i = \nu k^2$, $\nu > 0$ (опис. вязкость, теплопроводность и диффузию)

высокочастотная диссипация

Если нет дисперсии $\Rightarrow \omega = c_0 k + i\nu k^2$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{u_t + c_0 u_x = \nu u_{xx}}$$

Если перейдем в систем. отсчета, кот. движ. со ск. c_0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow u_t = const \cdot u_{xx}$

Если есть дисперсия $\Longrightarrow$ $\boxed{u_t + uu_x = \nu u_{xx}}$ – ур-ие Бюргерса (опис. нелин. волны в диссипат. (?недисперги-рующей) среде)

Уравнение Бюргерса

$u_t + uu_x = \nu u_{xx}$

Применим спектр. подход: $u = \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)}$, $u(x,0) = \varepsilon a \sin(kx)$

$\varepsilon \big| \; u_t^{(1)} = \nu u_{xx}^{(1)} \Rightarrow u^{(1)} = a\exp\{-\nu t \cdot k\}\sin(kx)$

экспоненц. затухающая синусоид. волна

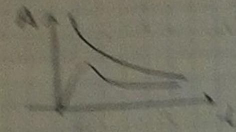
$\varepsilon^2|\ u_t^{(2)} = -u^{(1)}u_x^{(1)} + \nu u_{xx}^{(2)} = \frac{a^2 k}{2} e^{-2\nu k^2 t}\sin(2kx) + \nu u_{xx}^{(2)}$

Будем искать $u^{(2)} = \psi(t)\sin(2kx)$ ⇒

⇒ $\psi_t = -4\nu k^2 \psi - \frac{a^2 k}{2} e^{-2\nu k^2 t}$

⇓

$u^{(2)} = \frac{a^2 e^{-2\nu k^2 t}}{4\nu k}\left(e^{-2\nu k^2 t} - 1\right)\sin 2kx$



В этом случае опрокидывания волны не происходит.
Влияние диссип. наиболее сильно сказ. там, где наибольшие градиенты ⇒ вблизи переднего фронта волны ⇒ опрокид. предотвращение волны

Взаимодействие нелинейности и диссипации
Могут возникать стационарные волны

Рассмотрим консервативную среду с дисперсией в области больших длин
Дисперс. соот.: $\omega = c_0 k - \beta k^3$
Будем расс. дост. малые k (длинные волны)

$u_t + c_0 u_x + \beta u_{xxx} = 0$ (в движ. с.к. $u_t + u u_x + \beta u_{xxx} = 0$) (ур-ие Кортевега-де Вриза)

Опрокидыванию волны предотвр. дисперсия
Опять восп. спектральным подходом:

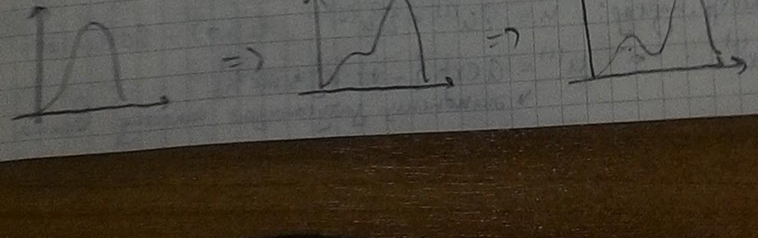
$\varepsilon|\ u_t^{(1)} = -\beta u_{xxx}^{(1)} \Rightarrow u^{(1)} = a\sin(kx + \beta k^2 t)$ (k^3?)

$\varepsilon^2|\ u_t^{(2)} = -u^{(1)}u_x^{(1)} - \beta u_{xxx}^{(2)} = -\frac{a^2 k}{2}\sin(2kx + 2\beta k^3 t) - \beta u_{xxx}^{(2)}$

$u^{(2)}(x,0) = 0$

Ищем реш-ие в виде: ⇒ $u^{(2)} = -\frac{a^2}{6\beta k^2}\sin(3\beta k^2 t)\cdot\sin(2kx + 5\beta k^3 t)$

⇒ период. зав-ть ампл. гармоники от времени



Уравнение синус-Гордона (sin-Gordon)

Рассмотр. гиперб. ур-ие $u_{xx} - u_{tt} = F(u)$ - ур-ие Клейна - Гордона (возникает в теории поля)

Если $F(u) = \alpha \cdot \sin u$ => ур-ие синус-Гордона

Впервые ур-ие возникло в дифф. геме как модель описания поверхности постоянной отрицательной кривизны ($u_{xt} = \alpha \sin u$)

Далее возникло в квант. оптике как описание распростр. волны самоиндуцированной прозрачности (СИП) (МакКолл, Хан, 1965г.)

(процесс распростр. ультракоротких эл/м импульсов в среде)

Пусть среда → диэлектрик, кот. сост. из атомов с 2 сос.: основное и возбужденное

Пусть сначала атомы в основном сост, потом начинается взаимод. с эл/м излуч. => атомы поглощают энергию и переходят в возбужд. состояние => возвращ. энергию при вынужд. переходе в основн. состояние => импульс при дост. большой мощности проходит через среду почти без потерь

Из всего семейства ур-ий Клейна - Гордона только это ур-ие имеет солитонное реш-ие

Решение типа бегущей волны и автомод. реш-ие

Пусть есть ф-ия $u(x,t)$

Введём $\xi = x - Ut$ ($U = \frac{\omega}{k}$ - скорость распр. волны)

Возьмем ур-е К-де Фриза:

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad \left(\beta = \frac{1}{6}\right)$$

Ищем $u(\xi)$, $\xi = x - Ut$ => $u_t = -Uu'$, $u_x = u'$

$$-Uu' + uu' + \beta u''' = 0$$

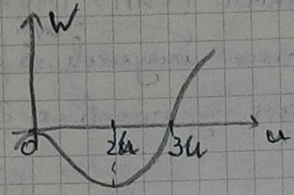
$$\beta u''' + \left(\frac{u^2}{2} - Uu\right)' = 0$$

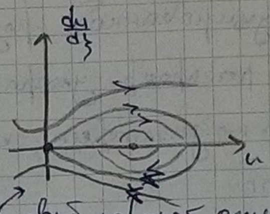
Интегрируем => $u'' = -\frac{dW}{du}$, где $W = -\frac{1}{\beta}\left(Cu + \frac{Uu^2}{2} - \frac{u^3}{6}\right)$

Получим ур-ие консервативного нелинейного осциллятора. ($\ddot{x}+f(x)=0$)
W - потенциальная энергия осциллятора.
Те точки, где $f(x)=0$ ⟼ состояния равновесия
↳ это те точки, где произв. потенц. энергии $=0$
$f(x_0)=0 \Rightarrow \frac{dW}{du}(x_0)=0 \Rightarrow$ экстремум потенц. энергии!
min W ⟼ устойчивое равновесие
max W ⟼ неустойчивое равновесие

Исследуем W

Пусть $c=0 \Rightarrow$





фазовый портрет осциллятора

Принято выделять особые траектории — сепаратриссы (траектории, „входящие" в седло или „выходящие" из него)
на самом деле эти траект. при $t\to+\infty$ асимп. приближ. к седлу, а при $t\to-\infty$ асимп. из него выходят
Сепаратриссы разбивают фаз. пл-ть на области качественно различной динамики (в этих обл. лежат траектории качественно разного топологического типа)
Вблизи уст. состояния равновесия колебания будут слабо-нелинейные и решением будет стационарная волна (квазигармоническая)
Вблизи сепаратриссы будут периодические кноидальные волны.
Движение по сепаратриссе ⟼ уединенная волна (солитон)

$$u'' = -\frac{dW}{du}$$

~~При~~ Положим $c=0$ и проинтегр.
const от интегр.
(или полная?)
$$\frac{(u')^2}{2} = \mathcal{E} - W(u)$$, $\mathcal{E}$ назовем кинет. энергией

$$u' = \pm\sqrt{2\mathcal{E} + \frac{uu^2}{\beta} - \frac{u^3}{3\beta}}$$ → движение либо в 1 ст., либо в другую
„+" - верхняя полупл-ть фаз. портрета
„-" - нижняя -//-

Зададим НУ: $u(0)=u_0$, $u'(0)=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{E} = -\frac{1}{2\beta}\left(U u_0^2 - \frac{u_0^3}{3}\right)}$

Подставим в ур-ие для u' и домн. на $\sqrt{\beta}$:

$$\sqrt{\beta}\cdot u' = \pm\sqrt{-U(u^2-u_0^2) - \frac{u^3-u_0^3}{3}}$$

Выражение под корнем раскклад. на множители

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{\beta}\,u' = \sqrt{(u_0-u)(u-u_1)(u-u_2)}, \quad u_{1,2} = \frac{1}{2}\left(3U - u_0 \pm \sqrt{3(U+u_0)(3U-u_0)}\right)$$

$u_2 \quad u_1 \quad u_0$ $\Rightarrow$ будем рассм. $u \in [u_1, u_0]$

Проинтегрируем по u обе части:

$$\frac{\xi}{\sqrt{3\beta}} = -\int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{(u_0-u)(u-u_1)(u-u_2)}}$$

Сделаем замену: $\begin{vmatrix} u = u_1 + a\cos^2\varphi \\ a = u_0 - u_1 \end{vmatrix}$, введём $k^2 = \frac{u_0-u_1}{u_0-u_2}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\xi}{\sqrt{3\beta}} = \frac{2}{\sqrt{u_0-u_2}} \overbrace{\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}}^{=F(\varphi,k)}, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

↳ неполный эллиптический интеграл 1го рода с модулем k

(полный интеграл 1го рода $\Rightarrow$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ в верхнем пределе)

$$\boxed{\xi = \sqrt{\frac{12\beta}{u_0-u_2}}\,F(\varphi,k)} \Rightarrow \boxed{\varphi = \mathrm{am}\left(\sqrt{\frac{u_0-u_2}{12\beta}}\,\xi, k\right)}$$

$\mathrm{am}(x,k)$ – амплитуда Якоби (обратная к $F(\varphi,k)$)

$\cos\varphi = \cos(\mathrm{am}(x,k)) = \mathrm{cn}(x,k)$ – эллиптический cos Якоби

↳ кноида

$\mathrm{cn}(x,k)$ – периодич. ф-ия с периодом $4K(k)$, где $K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$

Подставляя обратно, получим:

$$\boxed{u = u_1 + a\cdot\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{\frac{u_0-u_2}{12\beta}}, k\right)}$$

↳ периодич. волна с ампл. a и $\lambda = 4\sqrt{\frac{3\beta}{u_0-u_2}}\,K(k)$

Некоторые предельные случаи

1) Пусть $a \to 0$ $(u_1 \to u_0)$ $\Rightarrow k \to 0 \Rightarrow$ слабонелинейные колебания

$u_{0,1} \approx 2U$, $u_2 \approx -U$

2) Пусть $k \to 1$ $\Rightarrow u_2 \approx u_1 \approx 0$ $\Rightarrow u_0 \approx 3U$

солитон $u = a\, ch^{-2}\left(\frac{\xi}{\Delta}\right)$, где $\Delta = \sqrt{\frac{k\beta}{a}}$, $a = 3U$

ширина солитона; амплитуда солитона

Исследуем ур-ие синус-Гордона

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \omega_0^2 \sin u = 0$$

Проведем аналогичную замену перем.:

$$u'' + \frac{\omega_0^2}{U^2 - c^2} \cdot \sin u = 0$$

U-скорость бегущ. волны

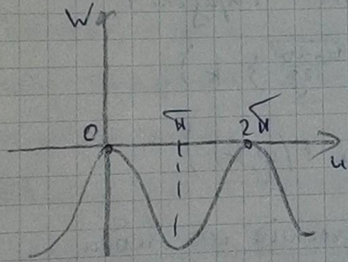
уравнение маятника

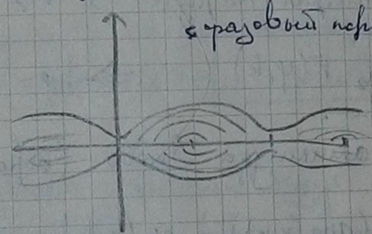
Предположим, что $U^2 < c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ маятник начинает движ. из неустойчивого сост. равновесия

Проинтегрируем по u $\Rightarrow$

$$\Rightarrow W(u) = \frac{\omega_0^2 \gamma^2}{c^2}(\cos u - 1), \text{ где } \gamma = \left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$





фазовый портрет

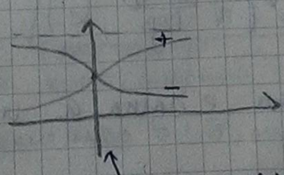
При опред. нач. данных можно утв., что $\mathcal{E} = 0$ (полная энерг. осц.)

$$u' = \pm\sqrt{\frac{2\omega_0^2\gamma^2}{c^2}(1-\cos u)} \Rightarrow \frac{\omega_0 \gamma \sqrt{2}}{c}\xi = \pm\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-\cos u}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^u \frac{du}{\sin\frac{u}{2}}$$

„+" $\Rightarrow$ u возр. от 0 до 2π (это её значения!)

„−" $\Rightarrow$ u убывает от 2π до 0

$$u = 4\,\mathrm{arctg}\,\exp\left\{\pm\frac{\omega_0\gamma}{c}\xi\right\}$$



кинк и анти-кинк

Автомодельные решения

Будем искать $w(x,t) = t^{\alpha} u(\xi)$, где $\xi = x t^{\beta}$

Утверждение

Автомодельное реш-е существует, если при преобразовании подобия (растяжении и сжатии) независимых переменных $t = c\tilde{t}$, $x = c^k \tilde{x}$ и ф-ии $w = c^m \tilde{w}$, $c>0$, k, m - const, исходное ур-ие $F(x, t, w, w_x, w_t, \dots) \overset{(1)}{=} 0 \Leftrightarrow F(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{w}, \tilde{w}_{\tilde{x}}, \tilde{w}_{\tilde{t}}, \dots) \overset{(2)}{=} 0$ (вид ур-ия не меняется)

Док-во:

$\exists\ w(x,t)$ - реш-е (1) $\rightarrow \tilde{w} = w(\tilde{x}, \tilde{t})$ - реш-е (2) (т.к. оно не меняет вид). $w = t^{\alpha} u(\xi) \rightarrow \tilde{w} = \tilde{t}^{\alpha} u(\tilde{x}\tilde{t}^{\beta})$, т.к. $\tilde{t} = \frac{t}{c}$, $\tilde{x} = \frac{x}{c^k}$, $\tilde{w} = \frac{w}{c^m}$

$c^{-m} w = c^{-\alpha} t^{\alpha} u(c^{-k} x c^{-\beta} t^{\beta})$

Ур-ие (2) не зависит от c; $w = c^{m-\alpha} t^{\alpha} u(c^{-k} c^{-\beta} x t^{\beta}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} m - \alpha = 0 \\ -k - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = m \\ \beta = -k \end{cases} \Rightarrow$ автомод. реш-е $\exists$ при таких α, β; ч.т.д.

Параметры автомодельного реш-ия определяются параметрами коэфф. преобр. подобия для ур-ия.

* ур-ие Бюргерса:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = w\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$ - ур-ие диффузии с доп. нелин. членом

(или ур-ие простых волн с диссипат. членом)

* ур-ие теплопроводн. с нелин. источником степенного типа

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b w^n$$

$$\begin{cases} t = c\tilde{t} \\ x = c^k \tilde{x} \\ w = c^m \tilde{w} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} w_t &= c^m \cdot \tilde{w}_{\tilde{t}} \cdot \frac{1}{c} = c^{m-1} \cdot \tilde{w}_{\tilde{t}} \\ w_x &= c^m \cdot \tilde{w}_{\tilde{x}} \cdot \frac{1}{c^k} = c^{m-k} \tilde{w}_{\tilde{x}} \\ (w_x)_x &= c^{m-k} \tilde{w}_{\tilde{x}\tilde{x}} \cdot \frac{1}{c^k} = c^{m-2k} \cdot \tilde{w}_{\tilde{x}\tilde{x}} \end{aligned}$$

$$c^{m-1} \tilde{w}_{\tilde{t}} = a c^{m-2k} \tilde{w}_{\tilde{x}\tilde{x}} + b \cdot c^{mn} \tilde{w}^n$$

$$\begin{cases} m - 1 = m - 2k \\ m - 2k = mn \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 1/2 \\ m = \frac{1}{1-n} \end{cases}$$ $\Rightarrow$ можно подобрать, если $n \neq 1$

Тогда по утв. нужно взять: $\alpha = \frac{1}{1-n}$, $\beta = -\frac{1}{2}$

$w(x,t) = t^{\frac{1}{1-n}} u(\xi)$, $\xi = x \cdot t^{-1/2}$ — замена

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{1-n} t^{\frac{1}{1-n}-1} u(\xi) + t^{\frac{1}{1-n}} \cdot u' \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x t^{-3/2} =$$

$\xi \cdot t^{-1}$

$$= t^{\frac{1}{1-n}-1}\left[\frac{1}{1-n} u(\xi) + u'(\xi)\cdot\left(-\frac{\xi}{2}\right)\right]$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = t^{\frac{1}{1-n}} u' \cdot t^{-1/2}; \quad w_{xx} = t^{\frac{1}{1-n}-\frac{1}{2}} \cdot u'' \cdot t^{-1/2} = t^{\frac{1}{1-n}-1} \cdot u''(\xi)$$

$$\cancel{t^{\frac{1}{1-n}-1}}\left(\frac{1}{1-n} u(\xi) - \frac{1}{2} u' \cdot \xi\right) = a\, t^{\frac{1}{1-n}-1} u''(\xi) + b\, \cancel{t^{\frac{n}{1-n}}} u^n(\xi)$$

Ур-ие Бюргерса

найти то же для к.у.ф.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = w\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\begin{cases} t = c\tilde{t} \\ x = c^k \tilde{x} \\ w = c^m \tilde{w} \end{cases} \Rightarrow \quad w_t = c^{m-1}\tilde{w}_{\tilde{t}}, \quad w_x = c^{m-k}\tilde{w}_{\tilde{x}}, \quad w_{xx} = c^{m-2k}\tilde{w}_{\tilde{x}\tilde{x}}$$

$$c^{m-1}\tilde{w}_{\tilde{t}} - c^{m-2k}\tilde{w}_{\tilde{x}\tilde{x}} \cdot c^{2m-k}\tilde{w}_{\tilde{x}}\cdot\tilde{w}$$

$m-1 = m-2k \Rightarrow k = +\frac{1}{2}$

$m-1 = 2m-k \Rightarrow m = k-1 = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Будем искать $w(x,t) = t^{-1/2} u(\xi)$, $\xi = x t^{-1/2}$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{2} t^{-3/2} u + t^{-1/2} u' \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) t^{-3/2} \cdot x = -\frac{1}{2} t^{-3/2}\left[u + \xi u'\right]$$

$\xi \cdot t^{-1}$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = t^{-1/2} \cdot u' \cdot t^{-1/2} = t^{-1} u'; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = t^{-1} \cdot u'' \cdot t^{-1/2} = t^{-3/2} u''$$

$$-\frac{1}{2}\cancel{t^{-3/2}}\left[u + \xi u'\right] = \cancel{t^{-3/2}} u'' + \cancel{t^{-1/2}} u \cdot \cancel{t^{-1}} u'$$

$$\boxed{u'' + u' \cdot u + \frac{\xi}{2} u' + \frac{u}{2} = 0}$$ — решать его затруднительно

Решение в виде бегущей волны

$$w_t = w_{xx} + w w_x$$

$\exists\, w = f(x - Ut) \Rightarrow w_t = -U f'$

$w_x = f'$, $w_{xx} = f''$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f'' + f'(f + \overset{\text{const}}{U}) = 0$$

Заменим $f \mapsto f + u$

$\underline{f'' + f' \cdot f = 0} \rightarrow \underline{f_x + \frac{f^2}{2} = c}$

1) $c = 0 \Rightarrow f_0(x) = \frac{2}{x+d}$

2) $c = 1/2 \Rightarrow f_+(x) = \operatorname{th} \frac{x+d}{2}$

3) $c = -1/2 \Rightarrow f_-(x) = \operatorname{tg} \frac{x+d}{2}$

Каждое из этих реш-ий порождает двухпараметр. реш-е ур-ие Бюргерса

Записать для каждого выраж w! (f_+ будет неогр.)

Подстановка Хопфа-Коула

Представляем реш-е $w = \varphi_x = \cancel{2\frac{u_x}{x}}\ 2\frac{u_x}{u} = 2\frac{\partial}{\partial x}(\ln u)$

Подставим в ур-ие Бюргерса и проинтегр. обе части по t:

$$\varphi_t = \varphi_{xx} + \frac{\varphi_x^2}{2} + c(t)$$

$$\varphi = 2\ln u \Rightarrow \varphi_t = \frac{2u_t}{u},\ \varphi_x = \frac{2u_x}{u},\ \varphi_{xx} = 2\frac{u_{xx} \cdot u - u_x^2}{u^2}$$

$$\Downarrow$$

$$2 \cdot \frac{u_t}{u} = 2\frac{u_{xx}}{u} + \cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{2u_x}{u}\right)^2} - \cancel{\frac{2u_x^2}{u^2}} + c(t)$$

$$u_t = u_{xx} + c(t)\, u$$

Делаем замену $u(x,t) = \tilde{u}(x,t) e^{\int c(t) dt}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\tilde{u}_t = \tilde{u}_{xx}}$$

Эта замена назыв. подстановкой, т.к. w опред. u с точностью до произв. ф-ии по времени!

Из ур-ия Бюргерса следует:

$$w_{xx} + w w_x = \frac{\partial}{\partial t}\left(2\frac{\partial}{\partial x}\ln u\right) \quad \Big| \text{интегр.}$$

$$2w_x + w^2 = 4\frac{\partial}{\partial t}(\ln u) \quad \text{- ур-ие для опред. } u$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} w = 2\frac{\partial}{\partial x}(\ln u) \\ 2w_x + w^2 = 4\frac{\partial}{\partial t}(\ln u) \end{cases}$$

– <u>преобразование Беклунда</u> (частн. случай) (связ. ур-ие Бюргерса с реш-ем $\tilde{u}_t = \tilde{u}_{xx}$)

$$\boxed{w(x,t) = 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\int_{-\infty}^{x} w(x_2, 0)\, dx_2 - \frac{(x-x_1)^2}{4t}\right) dx_1\right]\right)}$$

Преобразование Беклунда

ввел в 80х годах для изуч. поверхн. отриц. кривизны $ds^2 = du^2 + 2\cos w\, du\, dv + dv^2$ $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \sin w\right)$

Опр Пусть $w = w(x,y)$ - реш-е ур-ия $F_1(x, y, w, w_x, w_y, \dots, w_{yy}) = 0$ (1),
а $u = u(x,y)$ - реш-е ур-ия $F_2(x, y, u, u_x, u_y, \dots, u_{yy}) = 0$ (2).
Говорят, что ур-ие (1) и (2) связаны преобр. Беклунда:

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y, w, w_x, w_y, u, u_x, u_y) = 0 \\ \Phi_2(x, y, w, w_x, w_y, u, u_x, u_y) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

, если из совместности пары (1), (3) следует ур-ие (2) ; из совместности (2), (3) следует ур-ие (1).

Если для некот. реш-ия $u = u(\xi, \eta)$ ур-ие (2) можно разрешить систему (3) отн-но w , то w - реш-е ур-ие (1).
~~Услов~~ (3) также назыв. дифференц. связи
Если (1) и (2) одного вида => (3) - автопреобр. Беклунда (оно позволяет „размножать" ~~уре~~ реш-е 1 ур-ия)

Законы сохранения (интегралы движения)

$P_t + Q_x = 0$ - закон. сохр.
P - сохраняющаяся плотность, Q - поток

Для ур-ия Кортевега-де-Фриза:

$$\begin{cases} u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \\ u(\pm\infty, t) = 0 \\ u_x(\pm\infty, t) = 0 \\ u_{xx}(\pm\infty, t) = 0 \end{cases}$$

} ~ ф-ия из класса потенциалов

$u_t + (3u^2 + u_{xx})_x = 0$ - в виде закона сохр.

$\Rightarrow I_0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u\, dx = const$

$u u_t + 6u^2 u_x + u u_{xxx} = 0$

$\left(\frac{u^2}{2}\right)_t + \left(2u^3 + uu_{xx} - \frac{u_x^2}{2}\right)_x = 0$

Ур-ие неразрывности из гиддин.:

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0$ | инт. по x

$\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho\, dx = \rho u \Big|_{-\infty}^{x=+\infty} = (\text{усл. на } \infty = 0) = 0 \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho\, dx = const$

Общ. вид закона сохр.:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[F(w, w_x, w_t, \dots)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[G(w, w_x, w_t, \dots)\right] = 0$$

$$\exists\, d\xi = F(w, w_x, w_t, \dots)\,dt - G(w, w_x, w_t, \dots)\,dx,$$

$$d\eta = dt$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = -G, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = F$$

Тогда $\frac{\partial}{\partial x} = -G\frac{\partial}{\partial \xi}$, $\frac{\partial}{\partial t} = F\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$

Пример (нелин. ур-ие теплопроводности)

$$w_t = (f(w)\,w_x)_x$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(-w) + \frac{\partial}{\partial x}(f(w)\,w_x) = 0$$

$$\begin{cases} d\xi = f(w)\,w_x\,dt + w\,dx \\ d\eta = dt \end{cases} \Rightarrow \quad dx = \dots \quad dt = \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = w\frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = f(w)\,w_x\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\Downarrow$$

$$w_\eta + f(w)\,\cancel{w_x \cdot w_\xi} = (f(w)\cdot w \cdot w_\xi)_x = f(w)\cdot \cancel{w_\xi \cdot w_x} + (f(w)\,w_\xi)_x\, w$$

$$\boxed{w_\eta = w^2\,(f(w)\,w_\xi)_\xi}$$

Сделаем замену $w = \frac{1}{u}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{dw}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow -\cancel{\frac{1}{u^2}}\, u_{\xi\eta} = \cancel{\frac{1}{u^2}}\left(f\left(\tfrac{1}{u}\right)\cdot\left(-\tfrac{1}{u^2}\right)\cdot u_\xi\right)_\xi$$

$$\boxed{u_{\xi\eta} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{u^2} f\left(\tfrac{1}{u}\right) u_\xi\right)}$$

— ур-ие теплопр., если $\frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) = a$, т.е. $f\left(\frac{1}{u}\right) = a u^2 \Rightarrow \underline{f(w) = \frac{a}{w^2}}$

Пример (ур-ие синус-Гордона)

$$\varphi_{\xi\eta} = \sin\varphi$$

Найдем автопреобр. Беклунда.

Предположим, что есть 2 реш-ия: $\varphi = u + v$, $\psi = u - v$, где u и v опр. из ур-ий:

$$\begin{cases} u_\xi = f(v) \\ v_\eta = g(u) \end{cases}$$

Наша задача — подобрать f, g, чтобы переводилось в такое же ур-ие:

$$\begin{cases} u_{\xi\eta} = f'_v\, v_\eta = f' g \\ v_{\eta\xi} = g'_u \cdot u_\xi = g' f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'g + g'f = \varphi_{\xi\eta} \\ f'g - g'f = \psi_{\xi\eta} \end{cases} \overset{\varphi, \psi\text{-реш.}}{\Rightarrow} \begin{cases} f'g + g'f = \sin\varphi \\ f'g - g'f = \sin\psi \end{cases}$$

Возьмём полусумму и полуразность:

$$\begin{cases} f'g = \frac{1}{2}(\sin\varphi + \sin\psi) = \sin u \cdot \cos v \\ g'f = \frac{1}{2}(\sin\varphi - \sin\psi) = \sin v \cdot \cos u \end{cases} \quad / :$$

$$\frac{f'g}{g'f} = \frac{\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} v} \Rightarrow \frac{f'_v}{f} \cdot \operatorname{tg} v = \frac{g'_u}{g} \cdot \operatorname{tg} u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f = c_1 \sin v \\ g = c_2 \sin u \end{cases},$$

$\exists\, c_1 = a$ – параметр преобр. Беклунда

$f' = a \cos v$

$g(u) = \frac{\sin u}{a} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{a}$

$u = \frac{\varphi + \psi}{2}, \quad v = \frac{\varphi - \psi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_\xi + \psi_\xi = 2a \sin\frac{\varphi - \psi}{2} \\ \varphi_\eta - \psi_\eta = \frac{2}{a} \sin\frac{\varphi + \psi}{2} \end{cases}$ $(u_\xi = f(v))$ (авто)-преобр. Беклунда (связ. реш-ие 2 нелин. ур-ий)

У нас есть тривиальное реш-ие $\psi = 0$ ⇒ подставим

$$\begin{cases} \varphi_\xi = 2a \sin\frac{\varphi}{2} \to \text{инт-ем по } \xi \\ \varphi_\eta = \frac{2}{a} \sin\frac{\varphi}{2} \to \text{инт-ем по } \eta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4} = T(\eta)\, e^{2a\xi} \\ \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4} = X(\xi)\, e^{\frac{2\eta}{a}} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} X(\xi) = e^{2a\xi} \\ T(\eta) = e^{\frac{2\eta}{a}} \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4} = \exp\left\{2\left(a\xi + \frac{\eta}{a}\right)\right\}$$

$$\boxed{\varphi = 4 \operatorname{arctg}\left[\pm \exp\left\{a\xi + \frac{\eta}{a}\right\}\right]}$$

тут если надо $+\varphi_0$ (учитывается нач. фаза)

снова получим солитонное реш-е! (единичный солитон)

Если $a > 0$ ⇒ получим „кинк"
$a < 0$ ⇒ –″– „антикинк"

Пусть у нас изнач. есть 2 реш-ия: φ_1, φ_2 с параметрами a_1 и a_2

Хотим, используя преобр. Беклунда, получить еще несколько реш-ий

$\exists\, \varphi_3$ связано с φ_2 с парам. a_1
с φ_1 с парам. a_2

φ_1 и φ_2, в свою очередь, получаются не из трив. реш-ия, а из φ_0

Получим:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\varphi_0+\varphi_1)_\xi = a_1 \sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2} \\ \frac{1}{2}(\varphi_0+\varphi_2)_\xi = a_2 \sin\frac{\varphi_0-\varphi_2}{2} \\ \frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_3)_\xi = a_2 \sin\frac{\varphi_1-\varphi_3}{2} \\ \frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_3)_\xi = a_1 \sin\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2} \end{cases}$$

$$① + ④ - ② - ③ \longmapsto 0 = a_1 \sin\frac{\varphi_0-\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3}{4}\cos\frac{\varphi_0-\varphi_1-\varphi_2+\varphi_3}{4} - a_2 \sin\frac{\varphi_0-\varphi_2+\varphi_1-\varphi_3}{4}\cdot\cos\frac{\varphi_0-\varphi_2-\varphi_1+\varphi_3}{4} \Leftrightarrow a_1\cdot\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3}{4} = a_2\sin\frac{\varphi_0-\varphi_2+\varphi_1-\varphi_3}{4}$$

$$a_1\sin\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{4}+\frac{-\varphi_3+\varphi_0}{4}\right) = a_2\sin\left(\frac{\varphi_0-\varphi_3}{4}-\frac{\varphi_2-\varphi_1}{4}\right)$$

↳ раскр. $\sin(\alpha+\beta)$ и $\sin(\alpha-\beta)$, $: \cos^2\frac{\varphi_2-\varphi_1}{4}$, $: \cos^2\frac{\varphi_0-\varphi_3}{4}$

$$a_1 \operatorname{tg}\frac{\varphi_2-\varphi_1}{4} - a_1\operatorname{tg}\frac{\varphi_3-\varphi_0}{4} = -a_2\operatorname{tg}\frac{\varphi_2-\varphi_1}{4} - a_2\operatorname{tg}\frac{\varphi_3-\varphi_0}{4}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_3-\varphi_0}{4} = \frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}\operatorname{tg}\frac{\varphi_2-\varphi_1}{4}$$

φ_2 и φ_1 соотв. выраж. через φ_0 через a_2 и 0, через arctg

$\Downarrow$

$$\boxed{\varphi_3 = 4\operatorname{arctg}\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}\cdot\frac{e^{\theta_1}-e^{\theta_2}}{1+e^{\theta_1+\theta_2}}}, \text{ где } \theta_i = a_i\xi + \frac{\eta}{a_i}+\varphi_{0i}$$

↳ двухсолитонное реш-ние (опис. взаим. 2 солитонов)

Метод обратной задачи рассеяния

∀ механич. Гамильт. сис-ма с ⓝ степ. свободы, имеющая ⓝ незав. интегралов движений, является интегрируемой, т.е. допускает точное реш-е введением новых перем.

У ур-ния Кортевега-де-Фриза беск. число интегралов движений!

Рассмотрим комплексное преобр. Миуры:

$$\boxed{u = v^2 - iv_x}$$

↳ переводит К-д-Ф в модифиц. К-д-Ф:

$$v_t + 6v^2v_x + v_{xxx} = 0$$

Преобр. Гарднера-Миуры:

$$u = w + i\varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2, \quad \varepsilon\text{-параметр}$$

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = \left(1+2\varepsilon^2 w + i\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\right)\underbrace{\left(w_t + 6(w+\varepsilon^2w^2)w_x + w_{xxx}\right)}_{\substack{=0 \\ w\text{ - реш-ие}}} = 0$$

Предположим, что для u заданы нул. ГУ на бесконечности. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ для w заданы такие же усл-ия

Интегрируем ур-ие для w: $\int_{-\infty}^{+\infty} dx$: $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} w\,dx = 0 \quad \Rightarrow \underbrace{I = \int_{-\infty}^{+\infty} w\,dx = const}$

Предположим, что w раскладывается: $w = w_0(u) + \varepsilon w_1(u) + \varepsilon^2 w_2(u) + \ldots$

Подставим разл-е в преобразование Г-М:

$$\begin{cases} w_0 = u \\ w_1 = -u_x \end{cases}, \quad w_2 = -u_{xx} - u^2 \quad \ldots, \quad w_{n+2} + i(w_{n+1})_x + \sum_{k=0}^{n} w_k w_{n-k} = 0$$

Далее можно получить беск. число интегралов:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} u\,dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx, \quad I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(u^3 - \frac{u_x^2}{2}\right)dx, \ldots \quad I_{2k+1} = 0$$

доказали, что интгр. беск. число

Метод обр. задачи рассеяния

– специальный метод реш-ия задачи Коши для нелин. ур-ий (использ. для ур-ий, имеющих солитонное реш-е)

Идея: используется „неявная" линеаризация ур-ий

Вместо нелин. ур-ия отн-но w рассматривается сис-ма лин. дифф. ур-ий отн-но некот. ф-ии φ (φ может быть векторной), коэфф. в этой сис-ме завис. от w и w_x.

Допустим, что нелин. ур-ие запис. в виде:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = F(w) \quad (1)$$

$F(w)$ – завис. от $w, w_x, w_{xx}, \ldots$

$$\begin{cases} L\varphi = \lambda\varphi & (2) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -M\varphi & (3) \end{cases}, \quad L, M \text{ – некот. лин. дифф. оператор}$$

L и M должны быть связаны друг с другом.

λ не завис. от t $\Rightarrow$ продифф. (2) $\Rightarrow$ $L_t\varphi + L\varphi_t = \lambda\varphi_t$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow L_t\varphi - LM\varphi = -\lambda M\varphi = -M\lambda\varphi = -ML\varphi$

$L M\varphi - M L\varphi = L_t\varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dfrac{\partial L}{\partial t} = LM - ML} \quad (4) \longrightarrow [L, M]$ - коммутатор 2 операторов

Операторы L и M, заданные через (4), назыв. парой Лакса для ур-ие (1)

Опр Говорят, что лин. опер. L и M образ. пару Лакса для нелин. ур-ие (1), если условие совместности (4) совпадает с ур-ием (1).

Оператор M определяется неоднозначно, а с точностью до слаг. $p(t)$!

Рассмотрим ур-ие К-д-Ф:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(w_x\varphi + w\varphi_x) = \frac{\partial}{\partial x}(w_{xx}\varphi + 2w_x\varphi_x + w\varphi_{xx}) = (w_{xxx}\varphi +$$

$$w_t + w_{xxx} - 6ww_x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(w_x\varphi_x + w\varphi_{xx}) = w_{xx}\varphi_x + 2w_x\varphi_{xx} + w\varphi_{xxx}$$

$$L = w - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$M = 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} - 6w\frac{\partial}{\partial x} - 3\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\varphi + p(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(w_{xx}\varphi + w_x\varphi_x) = w_{xxx}\varphi + 2w_{xx}\varphi_x + w_x\varphi_{xx}$$

$$\begin{matrix}(2)\\(3)\end{matrix} \rightarrow \begin{cases} \varphi_{xx} + (\lambda - w)\varphi = 0 & \text{лин. стац. ур-ие Шредингера} \\ \varphi_t + 4\varphi_{xxx} - 6w\varphi_x - 3w_x\varphi + p\varphi = 0 \end{cases}$$

$$LM\varphi = w(4\varphi_{xxx} - 6w\varphi_x - 3w_x\varphi + p\varphi) - 4\varphi_{xxxxx} + 6\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(w\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + 3\frac{\partial^2}{\partial x^2}(w_x\varphi) -$$

$$- p\varphi_{xx} = 4w\varphi_{xxx} - 6w^2\varphi_x - 3ww_x\varphi + pw\varphi - 4\varphi^{(5)}_x + 6w_{xx}\varphi_x + 12w_x\varphi_{xx} +$$

$$+ 6w\varphi_{xxx} + 3w_{xxx}\varphi + 6w_{xx}\varphi_x + 3w_x\varphi_{xx}$$

$$ML\varphi = 4\frac{\partial^3}{\partial x^3}(w\varphi - \varphi_{xx}) - 6w\frac{\partial}{\partial x}(w\varphi - \varphi_{xx}) - 3w_x(w\varphi - \varphi_{xx}) + p(w\varphi - \varphi_{xx}) =$$

$$= 4w_{xxx}\varphi + 12w_{xx}\varphi_x + 12w_x\varphi_{xx} + 4w\varphi_{xxx} - 4\varphi^{(5)}_x - 6ww_x\varphi - 6w^2\varphi_x + 6w\varphi_{xxx} -$$

$$- 3ww_x\varphi + 3w_x\varphi_{xx} + pw\varphi - p\varphi_{xx}$$

$$(LM - ML)\varphi = \cancel{-6w_{xx}\varphi_x} - w_{xxx}\varphi + \cancel{6w_{xx}\varphi_x} + 6ww_x\varphi + p\varphi_{xx} =$$

$$= 6ww_x\varphi - w_{xxx}\varphi = (-w_{xxx} + 6ww_x)\varphi \quad \checkmark$$

Лин. стац. ур-ие Шредингера опис. процесс рассеивания φ с потенц. w.

1) Сначала нужно решить спектр. задачу (2) (прямая задача рассеяния), ищем с.з. и с.ф. в зависимости от w

У данного оператора есть дискр. и непр. спектр

Лин. стац. ур-ие Шредингера:

$$\varphi''_{xx} + [\lambda - f(x)]\varphi = 0, \quad f \text{ - потенциал}$$

Ограничение на f: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|)\,|f(x)|\,dx<\infty$ (нужно, чтобы было конечное число с.з.)

<u>ПЗ рассеяния</u> – найти с.з. и с.ф. при заданном f

У этой задачи есть дискр. и непр. спектр:

$\lambda_n=-\varkappa_n^2$, $n=1,\dots,N$ – дискр. спектр ; $\min f(x)<\lambda_n<0$

$\lambda=k^2$, $-\infty<k<+\infty$ – непр. спектр ; $f(x)<0 \Rightarrow \lambda>0$

Занумеруем λ_n: $\lambda_1<\lambda_2<\dots<\lambda_N<0$ и $\varphi_n(x)$ – с.ф. из L_2, обр. в 0 на $\pm\infty$

С.ф. определяются с точностью до множителя, будем искать их с заданными ассимптотиками:

$\varphi_n\to\exp\{\varkappa_n x\}$ на $-\infty$

$\varphi_n\to c_n\exp\{-\varkappa_n x\}$ на $+\infty$

φ_n имеет $(n-1)$ ноль и $c_n=(-1)^n|c_n|$

* $\lambda=k^2$ – непр. спектр. Здесь ассимптотики:

$\varphi\to e^{-ikx}$ на $-\infty$

$\varphi\to\underbrace{a(k)e^{-ikx}}_{\text{прошедшая волна}}+\underbrace{b(k)e^{ikx}}_{\text{отраж. волна}}$ ($a(k)$ и $b(k)$ – амплитуды волн; опред. из ур-ия Шредингера в завис. от f)

$r(k)=\frac{b(k)}{a(k)}$ – коэффициент отражения

Решение этой задачи полностью определяется <u>данными рассеяния</u>:

$S=\{\varkappa_n, c_n, r(k), n=\overline{1,N}\}$

$|a(k)|=(1-|r(k)|^2)^{-1}$

$\arg a(k)=\frac{1}{i}\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{k-i\varkappa_n}{k+i\varkappa_n}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln|a(s)|}{s-k}ds$

S иногда записывается в виде матрицы рассеяния.

<u>ОЗ рассеяния</u>

по S надо восстановить потенциал $f(x)$

сводится к реш-ю интегр. ур-ию Гельфанда – Левитана – Марченко:

$$\underbrace{K(x,y)}_{\text{неизв.}}+\underbrace{\Phi(x,y)}_{\text{опр. по } S}+\int\limits_{x}^{+\infty}K(x,z)\,\Phi(z,y)\,dz=0$$

Получено: $\Phi(x,y) = \bar{\Phi}(x+y)$, $\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{i\,a'(i\varkappa_n)} e^{-\varkappa_n(x+y)} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} r(k)\, e^{ik(x+y)}\, dk$

Если решим это ур-ие, то найдём потенциал:

$$\boxed{f(x) = -2\frac{d}{dx}K(x,x)}$$

Вернемся к ур. К-д-Ф:

$$w_t + w_{xxx} - 6ww_x = 0$$

$\Downarrow$ пара Лакса

$$\begin{cases} \varphi_{xx} + (\lambda - w)\varphi = 0 \\ \varphi_t + 4\varphi_{xxx} - 6w\varphi_x - 3w_x\varphi + p(t)\varphi = 0 \end{cases}$$ ~ эволюция с.ф. по времени

Поставим доп. условия:

$w(x,0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|)\,|f(x)|\,dx < \infty$

Схема реш-я:

1) Подставить НУ в первое из ур-ий пары Лакса, решаем ПЗ рассеяния => получим стационарные данные рассеяния S.

2) Подставляем в первое $w(x,t)$ => нестац. задача (с.з. сохраняются, а с.ф. меняются)

3) $\varphi \to e^{-ikx}$ на $-\infty$ (для с.з. $\lambda > 0$) => подставим во 2ое ур-ие пары Лакса

Т.к. $w \to 0$ при $x \to -\infty$ => ~~$6w\varphi_x$~~ => $p(t) = -4ik^3$ (const) =>

=> второе ур-ие на $(+\infty)$ бесконечности:

$(ik)^3 = k^3(-i)$
$(-ik)^3 = ik^3$

$\varphi_t + 4\varphi_{xxx} - 4ik^3\varphi = 0$ (~ линеаризованное ур-ие)

$\varphi \to a(k,t)e^{-ikx} + b(k,t)e^{ikx}$, $x \to +\infty$ => подставим

$a_t e^{-ikx} + b_t e^{ikx} + 4(-ik)^3 a e^{-ikx} + 4(ik)^3 b e^{ikx} - 4ik^3 a e^{-ikx} - 4ik^3 b e^{ikx} =$

$= e^{-ikx}[a_t] + e^{ikx}[b_t - 8bik^3] = 0$ =>

=> $\begin{cases} a_t = 0 \\ b_t = 8bik^3 \end{cases}$ => можем решить, если есть нач. данные =>

=> $r(k,t) = \frac{b(k,t)}{a(k,t)} = r(k,0)\,e^{8ik^3 t}$

Аналогично находится амплитуда c_n в случае дискр. спектра (подставляется асимп. в линеариз. ур-ие)

$\Rightarrow$ получаем данные рассеяния, зависящие от времени:

$S(t) = \{ \varkappa_n, \ c_n(t) = c_n(0) e^{8\varkappa_n^3 t}, \ r(k,t) = r(k,0) e^{8ik^3 t}, \ n = \overline{1,N} \}$

~ эволюция данных рассеяния

3) По найденным $S(t)$ ищем потенциал $w(x,t)$.

$$\Phi(x,y,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r(k,0) e^{i[8k^3 t + k(x+y)]} dk + \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n(0)}{ia'(i\varkappa_n)} e^{8\varkappa_n^3 t - \varkappa_n(x+y)}$$

Решаем ур-ие: $K(x,y,t) + \Phi(x,y,t) + \int_x^{+\infty} K(x,z,t)\Phi(z,y,t)\,dz = 0$,

$w(x,t) = 2\frac{d}{dx} K(x,x,t)$

<u>Разрывы в простой волне</u>

Если среда диспергирующая, то может наблюдаться эффект укру-чения и опрокидывания волны

Все записи с произв. корректны до момента опрокидывания!

Диссипация может являться фактором, препятствующим опрокид. волны, в таком случае может возникнуть УВ.

Ширина фронта УВ тем меньше, чем меньше коэфф. вязкости среды ν. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ один из подходов к исслед.: в пределе при $\nu \to 0$ воспольз. ~~его~~ решением ур-ия простой волны, исключив неоднозначность введением разрыва (разрыв — бесконечно быстро изменяющийся профиль волны)

Рассмотрение разрыва ~ поиск слабого реш-ия задачи.

<u>В одном. случае</u>

$\exists \rho(x,t)$ — плотность на ед. длины

$q(x,t)$ — расход некот. величины на ед. времени

$v = \frac{q}{\rho}$ — скорость течения

$v = Q(\rho)$ — простейшая задача распростр. волны

поток

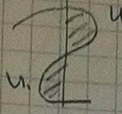
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(x)}{\partial x} = 0 \quad \text{— закон сохр.}$$

Запишем ур-ие простой волны:

$$u_t + uu_x = 0 \quad \Rightarrow \quad u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$$

$\exists\, u = 0$ на $\pm\infty$ $\Rightarrow$ $\frac{dS}{dt} = 0$, где $S = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx$ — интеграл движения

Считаем, что разрывное реш-е тоже сохр. величину S:



— площади слева и справа от разрыва должны быть равны.

Будем считать, что разрыв беск. тонкий $\Rightarrow$ ф его движ. характ. только его скоростью $U(t)$

Перейдем в систему отсчета, связ. с движ. разрывом:

$$x' = x - \int_0^t U(t_1)\,dt_1$$

$\Downarrow$

$$u_t - U u_x + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0.$$

Выберем произв. x_1 и x_2, $x_2 < x_1$, x_1 стрем. к разр. слева, x_2 — справа

Проинтегр. ур-ие $\Rightarrow \int_{x_2}^{x_1}$: $\int_{x_2}^{x_1} u_t\,dx - U(t)[u_1 - u_2] + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2} u\,dx - Uu\Big|_{x_2}^{x_1} + \frac{u^2}{2}\Big|_{x_2}^{x_1} = 0$$

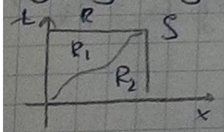
Устремим x_1 и x_2 к разрыву $\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} u\,dx \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{-U[u] + \left[\frac{u^2}{2}\right] = 0}$, $[\ ]$ — скачок величины на разрыве

$\Rightarrow \underline{U = \frac{1}{2}(u_2 + u_1)}$

Пусть дано ур-ие $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(x)}{\partial x} = 0$ и условия на разрыве: $-U[\rho] + [Q(\rho)] = 0$

$\Rightarrow$ слабое реш-е



$$-\iint_R (\rho\varphi_t + Q(\rho)\varphi_x)\,dx\,dt = 0$$ (φ - пробная, обл. непр. произв. в R и обращ. в 0 на границе)

Если Q и ρ непр. дифф, то эквивалентны.

<u>Характеристики</u>

$\rho_t + c_0\rho_x = 0$ — распростр. простой волны ($c_0 = const$)

$\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0$ — нелинейный случай

полная произв. вдоль кривой, кот. в каждой своей точке имеет след. наклон: $\frac{dx}{dt} = c(\rho)$ — кривая ℓ

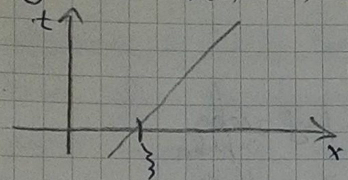
Пусть x и ρ — ф-ии перем. t, тогда:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

На кривой ℓ: $\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = 0 \\ \frac{dx}{dt} = c(\rho) \end{cases}$

Можно сделать вывод, что на ℓ $\rho = const \Rightarrow c(\rho) = const$ на $\ell \Rightarrow$ $\Rightarrow$ наклон у ℓ в каждой точке пост. $\Rightarrow$ ℓ — прямая с наклоном $c(\rho)$ (вообще говоря, это семейство ~~кр~~ прямых)

$\exists\ \rho(x,0) = f(x)$, $\exists\ x = \xi, t = 0$



$\Rightarrow$ выпустим из точки прямую с накл. $c(\rho)$

$\rho = f(\xi) \Rightarrow$ наклон $c(f(\xi)) = F(\xi)$:

$\underline{x = \xi + F(\xi)\cdot t}$ (семейство с парам. ξ)

Будем считать, что ρ ~~неявно~~ задается след. ур-ями:

$$\begin{cases} \rho = f(\xi) \\ \xi = \xi(x,t) \\ x = \xi + F(\xi)t \\ F(\xi) = c(f(\xi)) \end{cases}$$

Убедимся, что постановка эквивал. изнач. ур-ию.

$\rho_t = f'(\xi)\xi_t$ $\qquad \begin{cases} 1 = \xi_x + F'(\xi)\xi_x t \\ 0 = \xi_t + F'(\xi)\xi_t \cdot t + F(\xi) \end{cases} \Rightarrow$ находр. ξ_x и $\xi_t \Rightarrow$

$\rho_x = f'(\xi)\xi_x$

$$\Rightarrow \rho_t = -\frac{F(\xi)f'(\xi)}{1 + F'(\xi)t}, \quad \rho_x = \frac{f'(\xi)}{1+F'(\xi)t} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \rho_t + F(\xi)\rho_x = 0$, $F(\xi) = c(f(\xi)) = c(\rho)$ $\Rightarrow$ ур-ие совп. ✓

$\exists\ t = 0 \Rightarrow x = \xi \Rightarrow \rho = f(x) = f(\xi) \Rightarrow$ НУ тоже выполн.

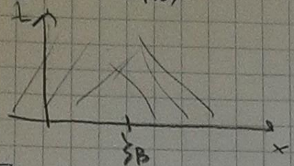
~~Все~~ Каждая хар-ка в (x,t) опис. волну. Поведение реш-ия на хар-ке соотв. переносу волновой информ.

$\exists\ c'(\rho) > 0 \Rightarrow$ чем больше ρ, тем быстрее скорость распростр.

$c'(\rho) < 0 \Rightarrow$ наоборот

Эффект опрокид. происх., когда $\rho_x, \rho_t \to \infty$, т.е. $\boxed{t = -\frac{1}{F'(\xi)}}$

$t_{\xi_B} = -\frac{1}{F'(\xi_B)}$



$\forall\ \xi_B$ сжимающиеся хар-ки. Они пересекаются и образуют область, где реш-ие неоднозначно.

Граница области неодн. — огибающая хар-к

$\forall$ 2 соседние пересек. хар-ки:

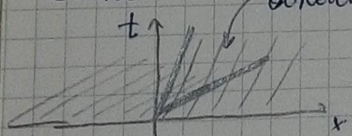
$$\begin{cases} x = \xi + F(\xi)\,t \\ x = \xi + \delta_\xi + F(\xi + \delta_\xi)\,t \end{cases} \Rightarrow \underline{0 = 1 + F'(\xi)\,t}$$ (поделили на δ_ξ и $\delta_\xi \to 0$)

неявно задает огибающую.

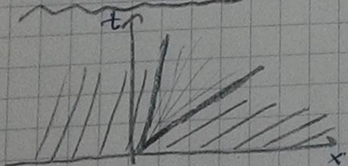
В предельном случае опрокид. происходит, когда исходное распр-е f имеет разрыв.

$$] \; f(x) = \begin{cases} \rho_1, & x>0 \\ \rho_2, & x<0 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} \overset{=c_1}{c(\rho_1)}, & x>0 \\ \underset{=c_2}{c(\rho_2)}, & x<0 \end{cases}$$

Если $c'(\rho) > 0$ и $\rho_2 > \rho_1 \Rightarrow c_2 > c_1$ и опрокид. наступит мгновенно!



Если $c_2 < c_1$:



- расширение волны

Рассм. доп. хар-ки, выход из нач. коорд. под углами от c_2 до c_1: $c_2 < F < c_1$ (веер характеристик), на них на всех $\xi = 0$

$$c = \begin{cases} c_2, & \frac{x}{t} < c_2 \\ \frac{x}{t}, & c_2 < \frac{x}{t} < c_1 \\ c_1, & \frac{x}{t} > c_1 \end{cases}$$

Как найти ρ? Вспоминаем, что $c = f(\rho)$ и находим

1) Тихонов, Самарский А.А. „Ур. мат. физ."

2) Бицадзе А.В., „Доп. главы ур-ий в частн. произв"

3) — " —, „Ур-ия мат. физики ..."

4) Р. Курант „Ур-ия с частными произв"

5) К Миранда „Ур-ия с частными произв. эллипт. типа"

Обобщ ф-ии: Смирнов, „Курс высшей математики", 4 том

Лит-ра для нелинейных задач:

1) Уизем „Линейные и нелинейные волны"

2) Полянин, ..., „Методы решений лин. и нелин. ур-ий"

3) Самарский, ~~В~~ Галактионов, „Режимы с обострением в квазилин ~~в~~ парабол. ур-иях"