Теоремы

1) [Т] [Формула Кирхгофа].

Если в задаче Коши для волнового уравнения

$$\begin{cases} \Delta u - u_{tt} = 0, & x=(x_1,x_2,x_3)\in E^3,\ t>0 \in E^1 \\ u(x,0)=\varphi(x);\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), & \text{где } \varphi(x)\in C^3,\ \psi(x)\in C^2, \end{cases}$$

то регулярное решение в точке $(x,t)\in E^4$ может быть найдено по формуле Кирхгофа:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\left(t M(\psi) + \frac{\partial}{\partial t}\left[t M(\varphi)\right]\right)},$$

где $M(\mu) = \frac{1}{t^2}\int\limits_S \mu(y)\,dS_y$, $S$ – сфера с центром в т. $x$ и радиусом $t$.

2) [Т] [Формула Пуассона]

Если в задаче Коши для волнового уравнения

$$\begin{cases} \Delta u - u_{tt} = 0, \quad x=(x_1,x_2)\in E^2,\ t>0\in E^1 \\ u(x,0)=\varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}, \quad \text{где } \varphi(x)\in C^3,\ \psi(x)\in C^2$$

то регулярное решение в точке $(x,t)\in E^3$ может быть найдено по формуле Пуассона

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_d \frac{\psi(y_1,y_2)\,dy_1\,dy_2}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_d \frac{\varphi(y_1,y_2)\,dy_1\,dy_2}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}}$$

где $d$ – круг: $(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2 < t^2$

3) [Т] [Формула Даламбера]

Если в задаче Коши для волнового уравнения

$$\begin{cases} \Delta u - u_{tt} = 0, \quad x=(x_1)\in E^1,\ t>0\in E^1 \\ u(x,0)=\varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}, \quad \text{где } \varphi(x)\in C^3,\ \psi(x)\in C^2$$

то регулярное решение в точке $(x,t)\in E^2$ может быть найдено по формуле Даламбера:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\psi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\left(\varphi(x+t)-\varphi(x-t)\right)}$$

4) [Т] [I-ая ф-ла Грина]

$u$ – гарм. в $D\subset E^n$, $S=\partial D \Rightarrow \int\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n_S}\,dS = \int\limits_D \sum\limits_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau$

5) [Т] [II-ая ф-ла Грина]

$u, v$ – гарм. в $D\subset E^n$, $S=\partial D \Rightarrow \int\limits_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n_S} - u\frac{\partial v}{\partial n_S}\right) dS = 0$

6) Опр]

Волновое уравнение: $\Delta u - u_{tt} = 0$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in E^n$, $t>0\in E^1$

$u(x,0)=\varphi(x)$ ЗК

$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)$

7) $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа ; $\Delta u = 0$ — ур-е Лапласа

8) [Опр.]

Функция $u(x)$ называется гармонической в области $D$, если она обладает в $D$ непрер. частными производными до второго порядка включительно и удовлетворяет ур-ю Лапласа

9) [Т] [интегральное представление гармонической функции]

$u$ — гармон. в $D \subset E^n$, $S = \partial D \Rightarrow$

$E(x,y)$ — элемент. решения ур-я Лапласа

$$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_S \left\{ E(x,y) \frac{\partial u}{\partial \bar{n}_S} - u \frac{\partial E(x,y)}{\partial \bar{n}_S} \right\} dS,$$

где $E(x,y) = \begin{cases} -\ln|x-y|, n=2, \\ \frac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}}, n>2 \end{cases}$, $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

10) [Т] [теорема о среднем для гармонической функции]

- $u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{C_R} u \, dS_R \frac{1}{R^{n-1}} = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{C_R} u(y) \, dS_y$ — теорема о среднем по поверхности сферы

- $u(x) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{C_R} u(y) \, d\tau_y$ — теорема о среднем по шару

11) [Т] [формула Грина для эллиптического опер-ра общего вида]

$u(x), v(x) \in C^2(D_0)$, $D \subset D_0$, $D_0 \subset E_n$

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x) u$$

где $A_{ij} = A_{ji} \in C^1$; $B_i$, $C$ — задан. в $D_0 \subset E^n$ действ. ф-ции

$$l_i(x) = B_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_j}, \quad i = \overline{1,n}, \quad l_i(x) \in C^1$$

$$L^* u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(l_i u) + Cu$$

$$\Rightarrow \int_D (vLu - uL^*v) \, d\tau_x = \int_S \left[ a\left(v \frac{du}{dN} - u \frac{dv}{dN}\right) + buv \right] dS_y$$

Формула Грина

где $N$ — един. вектор — конормальный в т. $y \in S$, напр. косинусами

$$\cos \widehat{Ny_i} = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cos \widehat{\nu y_i}, \quad i = \overline{1,n}; \quad a^2 = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cos \widehat{\nu y_i} \right)^2$$

$$b = \sum_{i=1}^{n} l_i \cos \widehat{\nu y_i}$$

(12) [Опр.] <u>Решение $v(\xi,\eta)$ - сопряженного уравнения</u>

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\xi}(av) - \frac{\partial}{\partial\eta}(bv) + cv = 0,$$ удовл. на характеристиках $\xi=\xi_1$, $\eta=\eta_1$ условиям: $v(\xi_1,\eta)\, e^{\int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi_1,\eta_2)\,d\eta_2}$

$$v(\xi,\eta_1) = e^{\int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2,\eta_1)\,d\xi_2}$$

где $(\xi_1,\eta_1)$ - произвольные фиксир. точки области $D$ задания уравнения $Lu=f$ наз. <u>**ФУНКЦИЕЙ РИМАНА**</u>

[при доп. ~~требованиях~~ непр-ти $\frac{\partial a}{\partial\xi}$, $\frac{\partial b}{\partial\eta}$ и $c$ функция Римана $\exists$-ет]

(13) [Опр]

Оператор назыв. <u>РАВНОМЕРНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ</u>, если $\exists\ k_0, k_1 > 0:\ k_0 \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \le Q(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \le k_1 \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2$

(14) [Опр]

<u>ФУНКЦИЯ ЛЕВИ</u>

удовл. усл.

$$\psi(x,y) = \begin{cases} \sigma_0(y)\cdot\sigma^{\frac{2-n}{n}}; & n>2 \\ -\frac{1}{4\sqrt{A(y)}}\ln\sigma; & n=2 \end{cases},\ \text{где}\quad \sigma_0 = \frac{1}{\omega_n(n-2)\sqrt{A(y)}},\quad A(y) = \det\{A_{ij}(y)\}$$

(15) [Опр.]

$\Omega_0(x,y)$ — <u>ЭЛЕМЕНТАРНОЕ РЕШЕНИЕ</u>, если:

1) $\Omega_0(x,y)$ - регулярное по $x$ реш-ия $Lu=0$ при $x\neq y$

2) $\Omega_0 = \underline{O}(|x-y|^{2-n})$, $\frac{\partial\Omega_0}{\partial x_i} = \underline{O}(|x-y|^{1-n})$, $\frac{\partial^2\Omega_0}{\partial x_i\partial x_j} = \underline{O}(|x-y|^{-n})$

$j,i=\overline{1,n}$

(16) [Опр.]

<u>НЬЮТОНОВСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ОБЪЁМА МАСС</u>

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_D E(x,y)\,\underbrace{\mu(y)}_{\text{заданная пл-ть}}\,d\tau_y$$

$\mu(y)\in C^1(D\cup S)$

(17) [Опр.]

<u>ПОТЕНЦИАЛ ДВОЙНОГО СЛОЯ</u>

$$v(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial\nu_y}\,\mu(y)\,dS_y$$

<u>ПОТЕНЦИАЛ ПРОСТОГО СЛОЯ</u>

$$w(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S E(x,y)\,\mu(y)\,dS_y$$

(18) [Т] <u>ПРИНЦИП ЭКСТРЕМУМА</u> (для гармонич. функций)

Если всюду в области $D$ $c(x)<0$, то регулярное в $D$ решение $u(x)$ ур-ния $L^{\text{элл. оп.}}u=0$ ~~внутри~~ области гармоничная функция не достигает ни своего наибольшего, ни своего наименьшего значения (если она не постоянная)

19) [Опр.] ~~...~~ КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД ГИПЕРБ. УР-Я ОБЩЕГО ВИДА

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x,y)u = F(x,y)$$

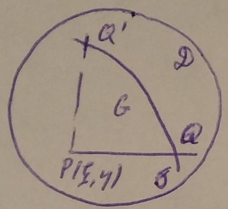
$\xi = x+y$, $\eta = x-y$ (характеристики) $\Rightarrow Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a\frac{\partial u}{\partial \xi} + b\frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = F$

где $4a = A+B$, $4b = A-B$, $4c = C$, $4F = F_1$

$a, b$ – дифф. $\Rightarrow L^*$ – сопр. опер-р: $L^* v = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}(av) - \frac{\partial}{\partial \eta}(bv) + cv$

20) [Опр.]

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБ. УР-Я ОБЩЕГО ВИДА:




$\sigma$ – разомкнутая дуга Жордана с непрерывной кривизной не имеющая точек касания с характеристиками

$Q'$, $Q$ – точки пересечения характеристик с кривой

$$\begin{cases} Lu = F_1 \\ u(p) = \varphi(p) \\ \frac{\partial u(p)}{\partial l} = \psi(p) \end{cases}, \ p \in \sigma \quad \text{– з. Коши.}$$

21) КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УР-Я ОБЩЕГО ВИДА

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u$$

$A_{ij}$, $B_i$, $C$ – заданы в $D \subset E^n$, $A_{ij} = A_{ji}$, $\forall x \in D$

22) ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УР-Я ОБЩЕГО ВИДА

$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

$$\begin{cases} Lu = F_1 & \text{– з. Гурса} \\ u(\xi, \eta_0) = \varphi(\xi) & \text{, где } \varphi(\xi), \psi(\eta) \text{ – непр. дифф.} \\ u(\xi_0, \eta) = \psi(\eta) & , \ \varphi(\xi_0) = \psi(\eta_0) \end{cases}$$

23) ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Задача отыскания регулярного решения уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ удовлетворяющего условию $u|_L = \varphi$, $\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_L = \psi$, также называют задачей Коши

24) [Опр] [КЛАССИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ]

КЛАССИЧЕСКИМИ НАЗЫВАЮТСЯ РЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, удовлетворяющие соотв. краевым, начальным, смешанным и т.д. условиям рассматриваемой задачи в обычном смысле, т.е. в каждой точке носителя данных.

## 25) [ИНТЕГРАЛ ДИРИХЛЕ]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad , (x,y) \in G$$

$u(x,y) = \varphi(x,y)$ , $(x,y) \in S$

$\varphi(x,y)$ - непр. в $S$

$D(u) = \int\limits_G (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy$ – ИНТЕГРАЛ ДИРИХЛЕ

## 26) [ОПР] [ДОПУСТИМЫЕ ФУНКЦИИ] (для интеграла Дирихле)

Функции, непрерывные в $G \cup S$ и имеющие кусочно-непр. производные первого порядка в $G$, такие что для них существует интеграл Дирихле, и они удовлетворяют краевому условию, называются ДОПУСТИМЫМИ ФУНКЦИЯМИ

## 27) [ОПР] [ПЕРВАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА]

ПЕРВАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА – это задача отыскания среди допустимых функций той функции, для которой интеграл Дирихле минимален.

## 28) [Т] [ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ]

Если заданная на $S$ ф-я $u(x,y)$ такова, что класс допустимых ф-ций не является пустым, то задача Дирихле и первая вариационная задача эквивалентны.

## 29) [Опр.] [ДОПУСТИМЫЕ ФУНКЦИИ] (для функционала $Y(u)$) (см. след. опр.)

ДОПУСТИМЫМИ ФУНКЦИЯМИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛА $Y(u)$ будем считать отличные от постоянной, удовлетворяющие краевому условию, ~~считать~~ непрерывные в $G \cup S$ действительные функции с кусочно-непрерывн. в $G$ производными первого порядка, для которых интеграл Дирихле $\exists$-ет

## 30) [Опр.] [Задача НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ]

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \quad , (x,y) \in G \quad , \lambda = const \\ u(x,y) = 0 \quad , \quad (x,y) \in S \end{cases}$$

ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ: найти $\lambda$, при которых имеются нетривиальные решения:

$$Y(u) = \frac{D(u)}{H(u)} \quad ,$$

где $D(u) = \int\limits_G (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy$ , $H(u) = \int\limits_G u^2\,dx\,dy$

31) [Опр.] [ВТОРАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА]

ВТОРАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА – это задача нахождения в классе допустимых функций минимума функционала $\mathcal{Y}(u)$ и построение соответствующей минимизирующей функции

32) [Утв.]

При определённых дополнительных предположениях при наличии решения второй вариационной задачи, если $u(x,y)$ – минимизирующая функция, то $\lambda = \mathcal{Y}(u)$ является наименьшим собственным числом задачи на собственные значения, а $u(x,y)$ – соотв. $\lambda$ собств. функции.

33) [МЕТОД БУБНОВА-ГАЛЁРКИНА] (для 2-ой вариац. задачи)

задача на собств. знач-я: $\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{в } G \\ u(x,y) = 0 & \text{в } S = \partial G \end{cases}$

Требуется минимиз-ть фун-ал $\mathcal{Y}(u) = \dfrac{D(u)}{H(u)}$

$D(u) = \int\limits_G (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy$, $H(u) = \int\limits_G u^2(x,y)\,dx\,dy$, $H(u) = 1$

$\{V_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ – полная система допустимых функций

$u_n$ ищется в виде: $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k V_k$, $n = 1, 2, \ldots$; $C_k = \text{const}$

$C_k$ находится из СЛАУ $\sum\limits_{k=1}^{n} H(\Delta V_k + \lambda V_k, V_m)\,C_k = 0$, $m = \overline{1,n}$

$\Rightarrow u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k V_k \to$ находим $\lambda$

34) [МЕТОД РИТЦА] (для 1-ой и 2-ой вариацион. задачи)

$\mathcal{Y}(u) = \dfrac{D(u)}{H(u)}$ – требуется минимизировать ф-ал

$D(u) = \int\limits_G (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy$, $H(u) = \int\limits_G u^2(x,y)\,dx\,dy$, $H(u) = 1$

~~$\{u_n\}$~~ $\{V_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ – полная система допустимых функций

Составим последовательность: $\{u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k V_k\}$, $n = 1, 2, \ldots$; $C_k = \text{const}$.

~~Определим коэффициенты $C_k$, $k = \overline{1,n}$, т.к. выраж-е $\varphi_n = \Phi(u_n)$~~, как функция будем искать миним. посл. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k V_k$, $C_k$ – коэффициент

$\Rightarrow F(u_n) = \tilde{F}(C_1, \ldots, C_n) \to \min\limits_{C_1, \ldots, C_n}$

35) [Опр.] [ОБОБЩЁННАЯ ПРОИЗВОДНАЯ]

Функция $v = D^k u \in L_p(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$, $\partial\Omega$ – дост. гладкая, называется ОБОБЩЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ порядка $K$ от функции $u \in L_p(\Omega)$, если $\forall\ \varphi \in C_0^2(\overline{\Omega})$ выполнимо равенство:

$$\int\limits_\Omega D^k u\,\varphi\,d\Omega = (-1)^{|k|} \int\limits_\Omega u\,D^k \varphi\,d\Omega$$

, $D_k$ – частная произв. порядка $k$

36) [Опр.]

Пространством Соболева $W_p^l(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$, $\partial\Omega$ - дост. гладкая назыв. ПОПОЛНЕНИЕ ПР-ВА $l$ РАЗ непр. дифф. ф-й $C^l(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{W_p^l} = \left[\int_\Omega \left(|u|^p + \sum_{1\le|\alpha|\le l} |D^\alpha u|^p\right) d\Omega\right]^{1/p}, \quad p \geq 1, \quad D^\alpha \text{- частич. произв. порядка } |\alpha|$$

37) [Опр.] [Функция Леви]

Ф-ЦИЯ ЛЕВИ : $\Psi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sigma(x,y)^{\frac{2-n}{n}}}{(n-2)\sqrt{A(y)}\,\omega_n}, & n>2 \\ -\dfrac{1}{4\pi\sqrt{A(y)}}\ln\sigma, & n=2 \end{cases}$

$\omega_n$ - площадь ед. сферы в $E_n$

$A = \det\|A_{ij}\|$

$\sigma(x,y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)(x_i-y_i)(x_j-y_j)$, $\quad a_{ij} = \dfrac{\text{алгебр. доп-е к эл-ту } A_{ij}(x)}{\det\|A_{ij}\| = A}$

для эллиптического ур-я : $Lu = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = f(x)$

38) [Т.] [ПРИНЦИП МАКСИМУМА]

Если в области $D$ всюду $c(x)<0$, то регулярное в этой области решение $u(x)$ однородного уравнения $\Delta u=0$ ни в одной точке $x\in D$ не может достигать ни отрицательного минимума, ~~или~~ ни положительного максимума.

39) [Опр.] [ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ]

• ЭЛЛИПТИЧ. ТИПА : $Lu = \sum_{i,j=1}^n \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^n l_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x)$

$x\in G$, $G\subset E_n$ - огр., $S=\partial G \subset E^{n-1}$

L В предположении $A_{ij}$, $l_i$, $c$ - огр., измеримые функции. $f\in L_2(G)$, под ОБОБЩ. РЕШЕНИЕМ задачи ↑ $Lu=f$ в пр-ве $W_2^1$ понимается ф-я $u(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ для которой справедливо:

$$\int_G \left(-\sum_{i,j=1}^n A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n l_i\frac{\partial u}{\partial x_i}v + cuv - fv\right)dx = 0, \quad \forall\, x\in \overset{\circ}{W}{}_2^1,$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ - обобщ. произв-ые $u(x)$ 1-го порядка.

• ~~ГИПЕР~~

• ГИППЕРБОЛИЧ. ТИП : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Lu = f(x,t)$ ;

$$Lu = \sum_{i,j}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left[A_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right] + \sum_{i=1}^n l_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u$$

$G\subset E_n$ - огр., $S=\{\partial G\times(0\le t\le T)\}$, $T=const>0$

$u(x,0)=\tau(x)$, $\left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \nu(x)$

$u|_S = 0$

L В предположении $A_{ij}$, $l_i$, $c$ - огр. измеримые ф-ции,

$f \in L_2(G)$, назыв ОБОБЩЁННЫМ РЕШЕНИЕМ з-чи ↑ в пр-ве $W_2^1$ понимается ф-я $u(x,t) \in W_2^1$, удовл. нач. условиям ↑ и тождеству:

$$\int_Q \left(-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} l_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v - cuv\right)dx\,dt =$$

$$= \int_G \nu(x) v(x,0)\,dx + \int_Q f v\,dx\,dt \quad , \forall v(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q), \; v(x,T)=0$$

$$Q = \{G \times (0<t<T)\} \subset \Omega \subset E_{n+1}$$

(!) $L$ - равномерно эллиптический оператор в $\Omega \subset E_{n+1}$

• ПАРАБОЛИЧ. ТИПА: $\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = f(x,t)$, где $L$ - равном. эллиптич. в $\Omega \subset E_{n+1}$

$G \subset E_n$ - огр. область, $Q = \{G \times (0<t<T)\} \subset \Omega$, $S = \{\partial G \times (0 \le t \le T)\}$

$T = const > 0$, $u(x,0) = \varphi(x) \in G$,

$u(x_0,t) = \psi(x)$, $(x_0,t) \in S$

L В предположении, что $\varphi \in L_2(Q)$, под обобщённым решением задачи ↑ понимается ф-ция $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$, т.ч.

$$\int_Q \left(-u\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} l_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v - cuv\right)dx\,dt =$$

$$= \int_G \varphi v(x,0)\,dx + \int_Q f v\,dx\,dt \quad , \text{для } \forall\; v(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1, \; v(x,T)=0$$

40) Опр.

Оператор $Z$ для ур-я 2-го порядка

$$Zu = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = f(x)$$

по опр-ю, обладает свойством равномерной эллиптичности, если для соотв. ему квадратичной формы $Q(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j$, $\exists\, k_0, k_1 > 0$, т.ч.: $k_0 \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \le Q(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \le k_1 \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$

---

26 билет

41) [Опр.]

Если $Lu = \sum_{k=0}^{m} \sum_{i_1\dots i_n} A^k_{i_1\dots i_n} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}} = f(x)$

$A^k_{i_1\dots i_n}$ - зависит не только от $x=(x_1,\dots,x_n)$, а ещё и от $u, u_{x_1}, \dots$ и т.д., то ур-е назыв. НЕЛИНЕЙНЫМ

42) [Спектральный подход]

СПЕКТРАЛЬНЫЙ ПОДХОД: ∃ решение раскладывается по малому параметру $u = \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \varepsilon^3 u^{(3)}$

∃ нач. возмущение описываются $u(x,0) = \varepsilon a \sin(kx)$

$a$ - близко к 1; подст. выр-е $u_t + uu_x = 0$

Получим: $u^{(1)} = a\sin(kx)$; $u^{(2)} = -\frac{a^2kt}{2}\sin(2kx)$

Вывод: нелинейность приводит к генерации внешних гармоник

43) [Опр.]

ДИССИПАТИВНАЯ СРЕДА

$\omega = \omega_r(k) + i\omega_i(k)$ – дисперсионное соотношение

$\omega$ – частота

$k$ – волны

44) [Опр.]

$\boxed{u_t + uu_x = \nu u_{xx}}$ → УРАВНЕНИЕ БЮРГЕРА

↳ описывает нелинейные волны в диссипативной диспергирующей среде

27 билет

45) [Опр.]

Канонический вид: $\boxed{u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0}$ КОРТЕВЕГА ДЕ ФРИЗА

28 билет

46) [Пояснение.]

Функция $y(x,t)$ описывает процесс распространения длинных волн на поверхности воды удовлетворяет ур-ю

$$y_t + y_x + \frac{3}{2}\varepsilon y y_x + \frac{\delta^2}{6}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$$

$\varepsilon = \frac{a}{h} \ll 1$, $a$ – амплитуда, $h$ – глубина жидкости

$\delta = \frac{h}{l} \ll 1$, $l$ – длина возмущения

С помощью замены переходим к $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$

47) [Опр.]

РЕШЕНИЕ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ называется $u(x,t) = u(\xi)$, где $\xi = x - vt$, $v$ – скорость распр. волны

48) [Опр.]

Принято выделять особые траектории – СЕПАРАТРИСЫ → это траектории, которые "ведут" в точку седло или „выходят" из этой точки

49) [Опр.]

Движение по сепаратрисе – уединённая волна СОЛИТОН

(50) [...]

Законы сохранения ($\int$-лы движения)

$P_t + Q_x = 0$ — ЗСЭ    P – сохраняющаяся плотность

Q – соответствующий поток

Для Кортевега де Фриза выпол. ЗСЭ

$$\begin{cases} u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \\ u(\pm\infty, t) = 0 \\ u_x(\pm\infty, t) = 0 \\ u_{xx}(\pm\infty, t) = 0 \end{cases}$$

u – регуляр. функция дост. быстро асимптотич. обращ. в 0 со всеми своими произв.

29 билет

(51) [Опр.]

$\boxed{u_{xx} - u_{tt} = F(u)}$ – ур-я Клейна Гордона

$F(u) = \alpha \sin u$ – ур-я sin Гордона

из всего семейства только имеет солитонное решение

30 билет