Примерное решение экзаменационных задач от 9.11.12 (готовимся к пересдаче)

Задача 1.

Заданы языки $L_1 = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$ и $L_2 = \{b^{2n} a^n \mid n \geq 0\}$. Для языка $L = (L_1 \bigcup L_2)^*$

1. Построить МП-автомат;
2. Построить однозначную КСГ.

Намётки к решению.

С учётом того, что имеется простой и быстрый алгоритм переход от КСГ к МПА (GN-теорема), а обратный переход в общем случае заметно сложнее и более трудоёмок, построим сначала однозначную КСГ.

Для этого:

2.1. Определим общие цепочки языков L_1 и L_2:

$L_1 \cap L_2 = \varepsilon$

2.2. Построим отдельные КСГ для L_1 и L_2, не порождающие общую цепочку (ε):

$L_1:\quad S_1 \to aS_1bb \mid abb$

$L_2:\quad S_2 \to bbS_2a \mid bba$

2.3. Строим КСГ для итерации $(L_1 \cup L_2)^*$:

$S \to \varepsilon \mid S_0$

$S_0 \to S_1 S_0 \mid S_2 S_0 \mid S_1 \mid S_2$

2.4. Обосновываем однозначность полученной КСГ (например, построением дерева вывода).

1. По GN-теореме переходим от грамматики к МПА. Итого, у нас должно получиться 12 функций перехода МПА (10 по числу правил КСГ и 2 по числу основных знаков алфавита).

Задача 3.

Язык L задан выражением (ab)*(a|b)(ba)*.

Построить минимальный ДКА, допускающий язык $\overline{L}$ (дополнение).

Эквивалентен ли этот ДКА автомату, допускающему язык, заданный грамматикой G=({A,B,C,D,E},{a,b},
{A→ε, A→aB, A→bC, B→bD, B→b, C→bE, C→b, D→aB, D→bC, E→aC}, A).

Намётки к решению.

Эта задача на знание и умение применять следующие алгоритмы:

А. Построение ДКА по РВ (прямое или через НКА)

Б. Построение полного ДКА

В. Построение ДКА для дополнения языка *L* по ДКА, соответствующему *L*.

Г. Минимизации полного ДКА.

Д. Проверки эквивалентности двух ДКА

А. Прямое построение ДКА по РВ быстрее, чем РВ –>НКА –>ДКА, и, в отличие от последнего, часто сразу приводит к минимальному ДКА (см. пример). Поэтому воспользуемся этим алгоритмом.

$(\underset{1}{a}\underset{2}{b})^*(\underset{3}{a} \mid \underset{4}{b})(\underset{5}{b}\underset{6}{a})^*\underset{7}{\#}$ firstpos (root) = {1, 3, 4}

i	$followpos\,(i)$		*a*	*b*
1	2	$A = \underset{a}{1}, \underset{a}{3}, \underset{b}{4}$	B	C

2	1, 3, 4	$B^* = \underset{b}{2}, \underset{b}{5}, \underset{\#}{7}$	–	D
3	5, 7	$C^* = \underset{b}{5}, \underset{\#}{7}$	–	E
4	5, 7	$D = \underset{a}{1}, \underset{a}{3}, \underset{b}{4}, \underset{a}{6}$	B	C
5	6	$E = \underset{a}{6}$	C	–
6	5, 7			

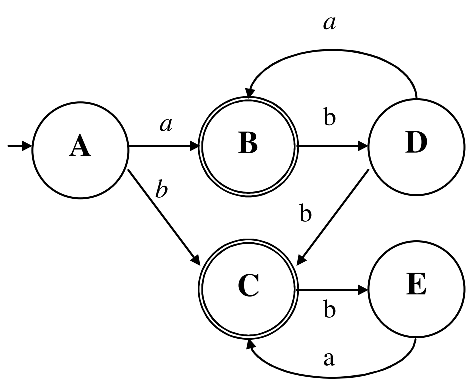
Диаграмма ДКА:

2, 3

2, 3

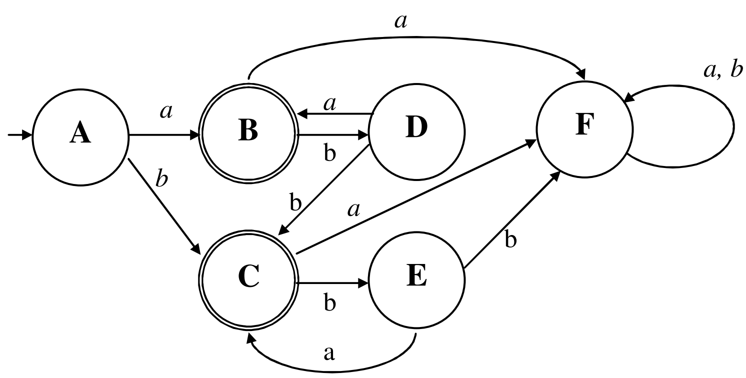
1, 4, 5

1, 4, 5



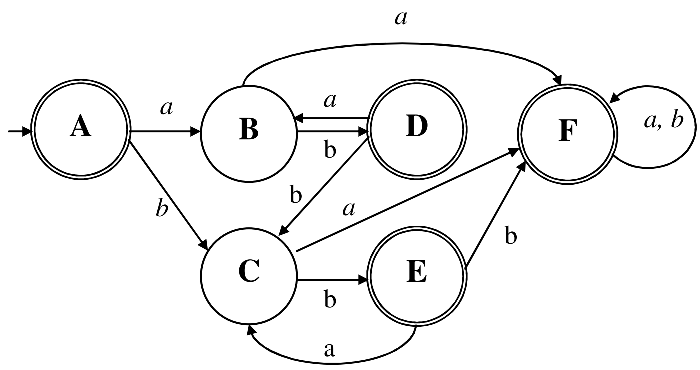
Поскольку полученный ДКА не является полным (к примеру, из вершин B и C нет переходов по *a*, а из вершины E – по *b*), а алгоритм получения дополнения для ДКА требует на входе полный ДКА, то пополним автомат, добавив недопускающее состояние F и переходы в него из неполных в указанном выше смысле вершин (включая и само F):

Полный ДКА:



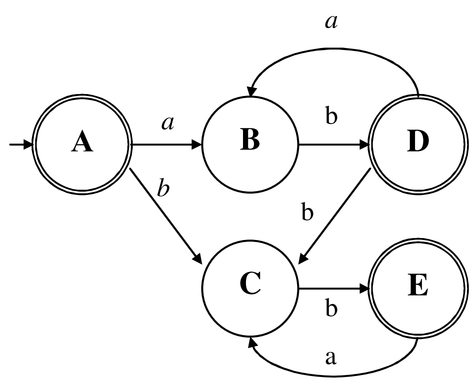
Дополнение, как известно, может быть получено из полного ДКА заменой его допускающих состояний на недопускающие, а недопускающих на допускающие:

Дополнение ДКА:



Остаётся минимизировать полученный ДКА и сравнить задаваемый им язык с языком грамматики G. Пример минимизации [можно посмотреть здесь](#).

По данной в условии грамматике G непосредственно строится ДКА:



Из диаграммы видно, что автоматы различаются на одно допускающее состояние, что позволяет легко построить контрпример цепочки, которая явно не принимается ДКА по G,

например, *aaa* или *bbb*, но столь же явно входит в дополнение L.

Ответ: дополнение заданного РВ языка и грамматика G задают разные языки (не эквивалентны).

Задача 4.

$L_1 = (a|b)^* aab(a|b)^*$. Язык $L = \{w \mid w \in \overline{L_1}, |w|_a \geq |w|_b\}$.

1. Является ли дополнение языка *L* КС-языком?
2. Является ли дополнение *L* регулярным языком?

Наброски решения

Данная задача на знание свойств регулярных языков, а также свойств объединения регулярного языка и КС-языка.

1. Заметим, что определение языка L в условии нашей задачи естественно переписывается как пересечение двух языков – дополнения L_1 и L_2 :

$$L_1 = (a \mid b)^* aab(a \mid b)^*$$

$$L_2 = \{w \in (a,b)^* \ : |w|_a \geq |w|_b\}$$

То есть $L = \overline{L_1} \cap L_2$.

2. Тогда дополнение языка L есть

$\overline{L} = \overline{\overline{L_1} \cap L_2} = L_1 \cup \overline{L_2}$ (по правилу Моргана)

3. Вид дополнения для L_2 понятен:

$$\overline{L_2} = \{w \in (a,b)^* \ : |w|_a < |w|_b\}$$

Этот и подобные языки хорошо нам знакомы по заданию. Он является КС-языком, подтверждением чему может служить, например, КСГ, который легко напишет каждый, кто сделал задание по ТРЯП.

<КСГ для языка $\overline{L_2}$ >

4. В тоже время данный язык не является регулярным, что доказывается применением леммы о разростании для регулярных языков:

< доказательство нерегулярности языка $\overline{L_2}$ >

5. Поскольку из лекционного курса известно, что пересечение КС-языка и регулярного языка есть КС-язык, то дополнение языка L является КС-языком.