Теоретический минимум по «основам кибернетики», 3 курс, 6 семестр

Часть I
Минимизация дизъюнктивных нормальных форм и связанные с ней задачи

1. Представление функций алгебры логики (ФАЛ) дизъюнктивными нормальными формами (ДНФ) и его «геометрическая» интерпретация. Совершенная ДНФ и критерий единственности ДНФ.

См. §2 методички, он почти целиком состоит из определений. Список:
- единичный куб (гиперкуб) размерности n;
- i-й слой куба B^n;
- отношение лексикографического линейного порядка на множестве B^n;
- отрезок куба B^n;
- расстояние Хэмминга;
- противоположные, соседние (соседние по i-й переменной) наборы;
- сфера и шар радиуса t с центром α;
- отношение частичного порядка $\leqslant$ на B^n;
- сравнимые и несравнимые наборы;
- грань куба B^n, её размерность и ранг;
- обозначения $\mathcal{X}, P_2(\mathcal{X})$ или $P_2, X \subset \mathcal{X}, P_2(X), P_2^m(X), X(n), P_2(n), P_2^m(n)$;
- таблица значений и столбец значений ФАЛ;
- характеристическое множество ФАЛ f и характеристическая функция множества N_f;
- $P_2(1)$ и «основные» ФАЛ из $P_2(2)$, функция голосования;
- ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность (в т. ч. & относительно $\vee$ и $\oplus$);
- тождества приведения подобных (в т. ч. тождество поглощения);
- линейная функция;
- множество $Б_0$, буквы, ЭК и ЭД ранга r от БП $X(n)$;
- ДНФ, КНФ, совершенные ДНФ и КНФ;
- длина ДНФ или КНФ $\mathfrak{A}$ ($\lambda(\mathfrak{A})$);
- разложение Шеннона;
- геометрическая интерпретация ДНФ и КНФ, а также совершенных ДНФ и КНФ.

Лемма. *Совершенная ДНФ ФАЛ $f \in P_2(n)$ является единственной ДНФ от БП $X(n)$, которая реализует эту ФАЛ $\Leftrightarrow$ когда во множестве N_f нет соседних наборов.*

Следствие. *Совершенные ДНФ ФАЛ ℓ_n, $\overline{\ell}_n$ являются единственными ДНФ этих ФАЛ от БП $X(n)$.*

2. Сокращённая ДНФ и способы её построения

ФАЛ f' *имплицирует* ФАЛ f'' ($(f' \to f'') \equiv 1$), если $N_{f'} \subseteq N_{f''}$.

ФАЛ f'' *поглощает* ФАЛ f', если $N_{f'} \subseteq N_{f''}$.

ФАЛ f' имплицирует ФАЛ $f'' \Leftrightarrow f'' = f' \vee f''$ или $f' = f' \cdot f''$.

ЭК K' имплицирует ЭК $K'' \Leftrightarrow K' = K'' \cdot K$, где K не имеет общих букв с K''.

ЭК K является *импликантой* ФАЛ f, если K имплицирует f.

ДНФ $\mathfrak{A}$ называется *ДНФ без поглощений ЭК*, если ни одна из граней $N_{K_1}, \ldots, N_{K_s}$ не содержится ни в одной из других граней покрытия $N_f = N_{K_1} \cup \ldots \cup N_{K_s}$. Или, другими словами, ни одна ЭК не является импликантой другой ЭК.

Импликанта K ФАЛ f называется *простой импликантой* f, если она не поглощается никакой другой отличной от неё импликантой f (т. е. не имплицирует никакую другую импликанту f). С «геометрической» т. з. простые импликанты f соответствуют максимальным по включению граням множества N_f.

Дизъюнкция всех простых импликант ФАЛ f называется её *сокращённой ДНФ*.

Сокращённая ДНФ является ДНФ без поглощений.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ — сокращённые ДНФ ФАЛ f' и f'' соответственно, а ДНФ $\mathfrak{A}$ без поглощений получается из формулы $\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{A}''$ в результате раскрытия скобок и приведения подобных. Тогда $\mathfrak{A}$ — сокращённая ДНФ ФАЛ $f = f' \cdot f''$.*

Следствие. *Если ДНФ $\mathfrak{A}$ без поглощений получается из КНФ $\mathfrak{B}$ ФАЛ f в результате раскрытия скобок и приведения подобных, то $\mathfrak{A}$ — сокращённая ДНФ ФАЛ f.*

Метод Блейка позволяет получить сокращённую ДНФ ФАЛ f из произвольной ДНФ f.

ДНФ $\mathfrak{A}'$ называется *расширением* ДНФ $\mathfrak{A}$, если она получена путём выделения с помощью тождеств ассоциативности и коммутативности подформул вида $x_i K' \vee \overline{x}_i K''$, применением к ним *тождества обобщённого склеивания* ($x_i K' \vee \overline{x}_i K'' = x_i K' \vee \overline{x}_i K'' \vee K'K''$) и последующим приведением подобных.

ДНФ $\mathfrak{A}'$ называется *строгим расширением* ДНФ $\mathfrak{A}$, если она является расширением $\mathfrak{A}$ и содержит ЭК, не являющуюся импликантой ни одной ЭК из $\mathfrak{A}$.

Теорема. *ДНФ без поглощений ЭК является сокращённой ДНФ $\Leftrightarrow$ когда она не имеет строгих расширений.*

Следствие. *Из любой ДНФ $\mathfrak{A}$ ФАЛ f можно получить сокращённую ДНФ этой ФАЛ в результате построения последовательных строгих расширений и приведения подобных до получения ДНФ без поглощений ЭК, не имеющей строгих расширений.*

3. Тупиковая ДНФ, ядро и ДНФ пересечение тупиковых. ДНФ Квайна, критерий вхождения простых импликант в тупиковые ДНФ и его локальность.

ДНФ $\mathfrak{A}$, реализующая ФАЛ f, называется *тупиковой ДНФ*, если $f \neq \mathfrak{A}'$ для любой ДНФ $\mathfrak{A}'$, полученной из $\mathfrak{A}$ в результате удаления некоторых букв или целых ЭК.

В тупиковую ДНФ ФАЛ f могут входить только простые импликанты f. Она является ДНФ без поглощений ЭК. С «геометрической» т. з. тупиковая ДНФ ФАЛ f задаёт тупиковое покрытие множества N_f максимальными гранями f и обратно.

Минимальная ДНФ — ДНФ, имеющая минимальный ранг среди ДНФ реализующих f.

Кратчайшая ДНФ — ДНФ, имеющая минимальную длину среди ДНФ реализующих f.

Минимальная ДНФ всегда является тупиковой, среди кратчайших обязательно найдётся тупиковая.

Набор α называется *ядровой точкой* ФАЛ f, если $\alpha \in N_f$ и α входит только в одну максимальную грань ФАЛ f. При этом грань N_K, являющаяся максимальной гранью ФАЛ f и содержащая точку α, называется *ядровой гранью* ФАЛ f. Совокупность всех различных ядровых граней ФАЛ f называется *ядром* ФАЛ f.

Лемма. *ДНФ $\cap T$ ФАЛ f состоит из тех простых импликант ФАЛ f, которые соответствуют ядровым граням этой ФАЛ f.*

ДНФ $\cap T$ в общем случае не реализует саму ФАЛ f и может быть пустой. ДНФ ΣT всегда реализует ФАЛ f.

ФАЛ называется *ядровой*, если все её максимальные грани являются ядровыми.

Следствие. *Сокращённая ДНФ ядровой ФАЛ является её единственной тупиковой ДНФ.*

ДНФ, получающаяся из сокращённой ДНФ ФАЛ f удалением тех ЭК K, для которых грань N_K покрывается ядром ФАЛ f, но не входит в него, называется *ДНФ Квайна* этой ФАЛ.

ДНФ $\cap T \subseteq$ ДНФ $\Sigma T \subseteq$ ДНФ Квайна $\subseteq$ сокращённая ДНФ.

Для $\alpha \in N_f$ обозначим через $\Pi_\alpha(f)$ множество всех проходящих через α максимальных граней ФАЛ f, будем называть его *пучком ФАЛ f через точку α*.

Точку α будем называть *регулярной точкой* ФАЛ f, если найдётся точка $\beta \in N_f$, для которой имеет место строгое включение $\Pi_\beta(f) \subset \Pi_\alpha(f)$.

Грань N_K ФАЛ f называется *регулярной гранью* этой ФАЛ, если все точки N_K регулярны.

Любая неядровая точка ядровой грани регулярна. Грань, которая не входит в ядро, но покрывается им, регулярна.

Теорема. *Простая импликанта K ФАЛ f входит в ДНФ $\Sigma T \Leftrightarrow$ когда грань N_K <u>не</u> является регулярной гранью этой ФАЛ.*

Для каждой максимальной грани $\mathcal{N}$ ФАЛ f положим $S_0(\mathcal{N}, f) = \{\mathcal{N}\}$, затем индукцией по r определим *окрестность порядка r грани $\mathcal{N}$ функции f* $S_r(\mathcal{N}, f)$ как множество всех тех максимальных граней ФАЛ f, которые имеют непустое пересечение хотя бы с одной гранью из $S_{r-1}(\mathcal{N}, f)$.

Вопрос о вхождении простой импликанты K в ДНФ $\cap T$ (ДНФ ΣT) этой ФАЛ можно решить, рассматривая окрестность $S_1(N_K, f)$ (соответственно $S_2(N_K, f)$).

4. Особенности ДНФ линейных и монотонных ФАЛ. Функция покрытия, таблица Квайна и построение всех тупиковых ДНФ.

ФАЛ f *линейно зависит от БП x_i* (x_i является *линейной БП f*), если $f(\alpha) \neq f(\beta)$ для любых соседних по x_i наборов α и β.

Равенство $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i \oplus f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ равносильно линейности по БП x_i ФАЛ f.

ФАЛ f является линейной $\Leftrightarrow$ когда она линейно зависит от всех своих существенных БП.

Если ФАЛ f линейно зависит от БП x_i, то в любую импликанту этой ФАЛ входит одна из букв x_i, $\overline{x}_i$.

ФАЛ f называется *монотонной*, если $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$ для любых наборов α и β таких, что $\alpha \leqslant \beta$.

ФАЛ f *монотонно зависит от БП x_i* (x_i является *монотонной БП* ФАЛ f), если $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$ для любых соседних по x_i наборов α и β таких, что $\alpha \leqslant \beta$.

ФАЛ является монотонной $\Leftrightarrow$ когда она монотонно зависит от всех своих БП.

Если ФАЛ f монотонно зависит от БП x_i, то ни одна из её простых импликант не содержит букву $\overline{x}_i$.

Частные случаи монотонной зависимости f от x_i: конъюнктивная ($f = x_i \cdot g$) и дизъюнктивная ($f = x_i \vee g$), где ФАЛ g получается подстановкой вместо x_i константы 1 или 0 соответственно.

При конъюнктивной зависимости буква x_i входит в любую простую импликанту ФАЛ f, в случае дизъюнктивной зависимости буква x_i не входит ни в одну простую импликанту f, отличную от x_i.

ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ зависит от БП x_i *инмонотонно* (*инконъюнктивно*, *индизъюнктивно*), если ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \overline{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ зависит от x_i монотонно (соответственно конъюнктивно, дизъюнктивно).

Сопоставим каждому набору $\beta \in B^n$ монотонную ЭК K^+_β, состоящую только из тех букв x_j, для которых $\beta\langle j\rangle = 1$. Любая монотонная ЭК может быть представлена в таком виде.

Набор α называется *нижней единицей* монотонной ФАЛ f, если $\alpha \in N_f$ и $\forall\beta \neq \alpha, \beta \leqslant \alpha$ выполняется $f(\beta) = 0$. Множество всех нижних единиц монотонной ФАЛ f обозначается N^+_f.

Лемма. *Сокращённая ДНФ $\mathfrak{A}$ монотонной ФАЛ f является единственной тупиковой ДНФ этой ФАЛ и имеет вид*

$$\mathfrak{A} = \bigvee_{\beta \in N^+_f} K^+_\beta.$$

При этом все наборы из N^+_f являются ядровыми точками ФАЛ f.

Замечание. *Можно сказать, что сокращённая ДНФ монотонной ФАЛ состоит из её простых импликант, не содержащих отрицаний и соответствующих нижним единицам.*

Следствие. *Монотонная ФАЛ является ядровой ФАЛ.*

Пусть $\mathcal{N} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ — конечное множество, а $\mathfrak{N} = \{\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_p\}$ — система его подмножеств, образующих покрытие $\mathcal{N}$. Сопоставим паре $(\mathcal{N}, \mathfrak{N})$ матрицу $M \in M^{p,s}$, для которой $M\langle i, j\rangle = 1 \Leftrightarrow \alpha_j \in \mathcal{N}_i$.

Считаем, что i-я строка соответствует подмножеству $\mathcal{N}_i$ системы $\mathfrak{N}$, а j-й столбец — элементу α_i множества $\mathcal{N}$.

i-я строка M *покрывает* её j-й столбец, если $M\langle i, j\rangle = 1$.

Система строк с номерами из I образует *покрытие матрицы* M, если каждый её столбец покрывается хотя бы одной строкой с номером из I. Аналогично понимается покрытие одного множества строк M другим множеством строк.

Покрытие матрицы M, в котором ни одна строка не покрывается другой строкой называется *неприводимым.* Покрытие, не имеющее собственных подпокрытий, называется *тупиковым.*

ФАЛ $F(y)$ называется *функцией покрытия* матрицы M без нулевых столбцов, если $F(\beta) = 1 \Leftrightarrow$ когда система строк матрицы M с номерами из $I(\beta) = \{i | \beta\langle i\rangle = 1\}$ образует её покрытие.

Лемма. *Функция покрытия $F(y_1, \ldots, y_p)$ матрицы $M \in B^{p,s}$ без нулевых столбцов задаётся КНФ вида*

$$F(y_1, \ldots, y_p) = \bigwedge_{j=1}^{s} \Big(\bigvee_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ M\langle i,j\rangle = 1}} y_i \Big).$$

Следствие. *В результате раскрытия скобок и приведения пободных из КНФ для F (см. лемму) можно получить сокращённую ДНФ ФАЛ $F(y)$, простые импликанты которой взаимно однозначно соответствуют тупиковым покрытиям матрицы M.*

Задача построения всех тупиковых ДНФ ФАЛ f на основе её сокращённой ДНФ сводится к рассмотренной выше задаче о покрытии, если $\mathcal{N} = N_f$, а $\mathfrak{N}$ — система всех максимальных граней f.

5. Градиентный алгоритм и оценка длины градиентного покрытия, лемма о «протыкающих» наборах. Использование градиентного алгоритма для построения ДНФ.

Градиентный алгоритм ориентирован на выделение из заданного покрытия достаточно «коротких» подпокрытий или, иначе, на построение достаточно «коротких» покрытий для заданной матрицы.

Шаг: в матрице выбирается и включается в покрытие такая строка, которая покрывает наибольшее число ещё не покрытых столбцов (если таких строк несколько, из них выбирается строка с наименьшим номером).

Останов: после того шага, на котором получилось покрытие.

Теорема. *Пусть для действительного γ, $0 < \gamma \leqslant 1$, в каждом столбце матрицы $M \in M^{p,s}$ имеется не меньше чем $\gamma \cdot p$ единиц. Тогда покрытие матрицы M, получаемое с помощью градиентного алгоритма, имеет длину не больше чем $\lceil \frac{1}{\gamma} ln^+(\gamma s) \rceil + \frac{1}{\gamma}$, где $ln^+(x) = 0$ при $0 < x < 1$ и $ln^+(x) = ln(x)$ при $x \geqslant 1$.*

Задача о «протыкании» системы $\mathfrak{N}$, состоящей из подмножеств $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_p$ множества $\mathcal{N} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$, заключается в нахождении такого подмножества множества $\mathcal{N}$, в котором $\forall i \in [1, p]$ имеется хотя бы один элемент из $\mathcal{N}_i$.

Лемма. *$\forall m, n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$ в кубе B^n всегда найдётся подмножество мощности не более чем $n \cdot 2^m$, протыкающее все грани ранга m.*

6. Задача минимизации ДНФ. Поведение функции Шеннона и оценки типичных значений для ранга и длины ДНФ.

На множестве ДНФ задаётся неотрицательный *функционал сложности* ψ, обладающий свойством *монотонности*, т. е. $\forall$ДНФ $\mathfrak{A}$ $\exists \psi(\mathfrak{A}) \geqslant 0 : \psi(\mathfrak{A}') \geqslant \psi(\mathfrak{A}'')$, если ДНФ $\mathfrak{A}''$ получается из ДНФ $\mathfrak{A}'$ удалением букв или ЭК.

Примеры: длина $\lambda(\mathfrak{A})$, ранг $R(\mathfrak{A})$, «формульная» сложность $L(\mathfrak{A})$.

Задача минимизации ДНФ относительно функционала сложности ψ состоит в нахождении для заданной ФАЛ f ДНФ $\mathfrak{A}$, такую что $\psi(\mathfrak{A}) = \min \psi(\mathfrak{A}')$, где минимум берётся по всем ДНФ $\mathfrak{A}'$ ФАЛ f.

При этом ДНФ $\mathfrak{A}$ называется *минимальной относительно функционала* ψ или ψ*-минимальной* ДНФ. Значение $\psi(\mathfrak{A})$ называется *сложностью ФАЛ* f *относительно функционала* ψ или ψ*-сложностью ФАЛ* f в классе ДНФ.

λ-минимальную (по длине) ДНФ будем называть *кратчайшей*, а R-минимальную (по рангу) — просто *минимальной*.

Функция Шеннона для класса ДНФ относительно функционала ψ:

$$\psi(n) = \max_{f \in P_2(n)} \psi(f).$$

Лемма. $\forall n \in \mathbb{N}$ *имеют место соотношения* $\lambda(n) = 2^{n-1}$, $R(n) = n \cdot 2^{n-1}$.

Рассмотрим отрезок $[\psi'(n),\, \psi''(n)]$, в который попадают значения $\psi(n)$ для почти всех ФАЛ $f \in P_2(n)$. Если границы $\psi'(n)$ и $\psi''(n)$ асимптотически равны $\psi(n)$, то говорят, что для параметра ψ имеет место *эффект Шеннона*.

Для параметров λ и R эффект Шеннона отсутствует.

> **Попытка интерпретации стр. 50—51. Вообще, вряд ли это будет в теормине на «3».**
>
> Введём дискретную векторную случайную величину ξ состоящую из 2^n случайных величин, принимающих с равной вероятностью значение 0 или 1. Введём дискретную случайную величину $\widetilde{\xi}$, равную сумме элементов ξ.
>
> Каждая реализация ξ соответствует какой-либо ФАЛ f от n переменных (равна её вектору значений). Если зафиксировать реализацию ξ и соответствующую ФАЛ f, то соответствующая реализация $\widetilde{\xi}$ будет равна мощности множества N_f для ФАЛ f.
>
> $\mathbb{E}\widetilde{\xi} = 2^{n-1}$, отступим влево и вправо на $t = \lceil n \cdot 2^{n/2} \rceil$, получим интервал $I = (2^{n-1} - t, 2^{n-1} + t)$.
>
> Применяем к случайной величине $\widetilde{\xi}$ неравенство Чебышева и устанавливаем, что доля тех ФАЛ $f \in P_2(n)$, для которых $|N_f| \notin I$ стремится к 0 при $n \to \infty$.
>
> Это означает, что для почти всех ФАЛ $f \in P_2(n)$ выполнено (для проверки раскрыть скобки)
>
> $$|N_f| = 2^{n-1}\bigl(1 \pm O\bigl(n \cdot 2^{-n/2}\bigr)\bigr).$$
>
> То есть длина совершенной ДНФ у почти всех ФАЛ из $P_2(n)$ асимптотически равна 2^{n-1}.

Лемма. *Для почти всех ФАЛ* $f \in P_2(n)$ *выполняются неравенства*

$$\lambda(f) \leqslant \frac{3}{4} \cdot 2^{n-1}\bigl(1 + O\bigl(n \cdot 2^{-n/2}\bigr)\bigr),$$

$$R(f) \leqslant \frac{3}{4} n \cdot 2^{n-1}\bigl(1 + O\bigl(n \cdot 2^{-n/2}\bigr)\bigr).$$

7. Алгоритмические трудности минимизации ДНФ и оценки максимальных значений некоторых связанных с ней параметров. Теорема Ю. И. Журавлёва о ДНФ сумма минимальных.

Функция Шеннона для параметра ψ в классе ДНФ: $\psi(n) = \max\limits_{f \in P_2(n)} \psi(f)$.

Обозначим значение функции Шеннона для следующих параметров: число тупиковых ДНФ — $\tau(n)$, число минимальных ДНФ — $\mu(n)$ и длина сокращённой ДНФ у ФАЛ из $P_2(n)$ — $\lambda_{\text{сокр.}}(n)$ (ДНФ рассматриваются с точностью до перестановки ЭК и букв в них).

Лемма. *Для ФАЛ f из $P_2(n)$, $n \geqslant 4$, вида $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, x_3) \cdot (x_4 \oplus \cdots \oplus x_n)$, где $\overline{N}_g = \{(000), (111)\}$, число тупиковых (минимальных) ДНФ равно $5^{2^{n-4}}$ (соответственно $2^{2^{n-4}}$).*

Следствие. $\tau(n) \geqslant 5^{2^{n-4}}$, $\mu(n) \geqslant 2^{2^{n-4}}$.

Выберем множество номеров $I \subseteq [0, n]$, зафиксируем объединение всех слоёв куба B^n с номерами из I, обозначим характеристичесую функцию этого объединения как $\mathfrak{s}_n^I$. Числа из I назовём *рабочими числами* ФАЛ $\mathfrak{s}_n^I$.

ФАЛ $\mathfrak{s}_n^I$ является *симметрической*, т. е. не изменяет своё значение при любой перестановке аргументов. Наоборот тоже верно: любая симметрическая ФАЛ совпадает с одной из ФАЛ вида $\mathfrak{s}_n^I$.

Симметрическая ФАЛ, отличная от константы, является существенной. Рабочими числами симметрических ФАЛ ℓ_n и $\overline{\ell}_n$ являются все нечётные и все чётные числа отрезка $[0, n]$ соответственно.

Симметрическая ФАЛ является *поясковой*, если её рабочие числа образуют отрезок. Вид её сокращённой ДНФ:

$$\mathfrak{s}_n^{[r,p]}(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{n+r-p} \leqslant n \\ \sigma_1 + \cdots + \sigma_{n+r-p} = r}} x_{i_1}^{\sigma_1} \cdots x_{i_{n+r-p}}^{\sigma_{n+r-p}}.$$

Лемма. *$\lambda_{\text{сокр.}}(n) \geqslant e_1 \frac{3^n}{n}$, где e_1 — некоторая константа.*

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *цепной* (*циклической*) *функцией длины* t, если её сокращённая ДНФ с «геометрической» т. з. представляет собой цепь (соответственно цикл) из t последовательно соединённых рёбер $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_t$ куба B^n.

Теорема. *$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$, в $P_2(n)$ существуют ФАЛ f' и f'', имеющие общую простую импликанту K, которая входит в ДНФ ΣM одной, но не входит в ДНФ ΣM другой из этих ФАЛ и для которой $S_{n-3}(N_K, f') = S_{n-3}(N_K, f'')$.*

Недостающее

- Часть II (вопросы 8—16) в данном файле отсутствует.

- Вопрос 16 не должен быть в билетах (только как дополнительный вопрос).

Часть III
Синтез и сложность управляющих систем

17. Задача синтеза. Методы синтеза схем на основе ДНФ и связанные с ними верхние оценки сложности функций.

Введём обозначения: $\mathcal{U}$ — некоторый полный класс схем (из рассмотренных во II части), $\Psi \geqslant 0$ — функционал сложности схем класса $\mathcal{U}$ со свойством монотонности.

Сложность системы ФАЛ F относительно функционала Ψ в классе $\mathcal{U}$: $\Psi(F) = \min\limits_{\Sigma \in \mathcal{U} \text{ реализ. } F} \Psi(\Sigma)$. При этом схема Σ, реализующая F, для которой $\Psi(\Sigma) = \Psi(F)$, называется *минимальной схемой* в классе $\mathcal{U}$ относительно Ψ.

Если функционал Ψ совпадает с L, D, R (введены во II части), будем называть его *сложностью*, *глубиной*, *рангом* системы ФАЛ F соответсвенно.

Функция Шеннона для класса $\mathcal{U}$ относительно функционала сложности Ψ: $\Psi(n) = \max\limits_{f \in P_2(n)} \Psi(f)$.

Будем обозначать сложность и функцию Шеннона для некоторого класса A как $\Psi_{\text{Б}}^{A}(F)$ и $\Psi_{\text{Б}}^{A}(n)$ соответственно, будем опускать нижний индекс Б, если $\text{Б} = \text{Б}_0$.

Если $\mathcal{U}' \supseteq \mathcal{U}''$, то $\Psi'(F) \leqslant \Psi''(F)$. В частности $\Psi_{\text{Б}}^{\text{С}}(F) \leqslant \Psi_{\text{Б}}^{\Phi}(F)$ и $\Psi_{\text{Б}}^{\text{К}}(F) \leqslant \Psi_{\text{Б}}^{\pi}(F)$.

Для сложности системы ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ в любом из рассматриваемых классов схем выполняется $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} L(f_i) \leqslant L(F) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} L(f_i)$.

Лемма (моделирование совершенной ДНФ)**.** *$\forall$ ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv 0$ $\exists$ формула $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^{\Phi}$ и π-схема $\Sigma_f \in \mathcal{U}^{\pi}$, реализующие ФАЛ f, для которых выполняется*

$$L(\mathcal{F}_f) \leqslant 2n \cdot |N_f| - 1,$$

$$L(\Sigma_f) \leqslant n \cdot |N_f|.$$

Следствие. *Если учесть, что ФАЛ 0 можно реализовать π-схемой и формулой из $\mathcal{U}^{\Phi}$, имеющими сложность 2, то выполняется*

$$L^{C}(n) \leqslant L^{\Phi}(n) \leqslant n \cdot 2^{n+1} - 1,$$

$$L^{K}(n) \leqslant L^{\pi}(n) \leqslant n \cdot 2^{n}.$$

Следствие. $D(n) \leqslant n + \lceil \log_2(n) \rceil + 2$.

Получается из доказанного в части II соотношения для подобных формул с поднятыми отрицаниями $D(\breve{\mathcal{F}}) \leqslant \lceil \log_2(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + Alt(\mathcal{F})$.

Лемма (моделирование совершенной ДНФ с использованием КД)**.** $\forall$ *ФАЛ* $f(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv 0$ $\exists$ *формула* $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^{\Phi}$ *и* π*-схема* $\Sigma_f \in \mathcal{U}^{\pi}$*, реализующие ФАЛ* f*, для которых выполняется*

$$L(\mathcal{F}_f) \leqslant 2^{n+1} + |N_f| - 4,$$

$$L(\Sigma_f) \leqslant 2^n + |N_f| - 2.$$

Следствие.

$$L^{\Phi}(n) \leqslant 3 \cdot 2^n - 4.$$

$$L^{\pi}(n) \leqslant 2^{n+1} - 2,$$

Результатом применения *операции присоединения вершины* v *к вершине* w называется СФЭ Σ', получаемая из СФЭ Σ в результате удаления вершины v, переноса начала исходивших из v дуг в w и переноса всех выходных БП v в w.

Две вершины СФЭ называются *эквивалентными*, если в них реализуются равные ФАЛ.

Приведённая (т. е. без висячих вершин) схема называется *строго приведённой*, если в ней нет эквивалентных вершин. Из любой СФЭ можно получить эквивалентную ей строго приведённую СФЭ с помощью операции присоединения эквивалентных вершин и операции удаления висячих вершин.

Аналогичным образом определяется операция присоединения вершин в КС, с той лишь разницей, что на неё не накладываются какие-либо ограничения, связанные с достижимостью вершин.

Для множества ФАЛ $G \subseteq P_2(n)$ через $\overrightarrow{G}$ будем обозначать систему, состоящую из различных ФАЛ множества G, упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений.

Обозначения дял некоторых функций порядка n:

- ℓ_n и $\overline{\ell}_n$ — линейные ФАЛ;
- μ_n — мультиплексорная ФАЛ;
- $\overrightarrow{Q}_n$ и $\overrightarrow{J}_n$ — дешифратор и дизъюнктивный дешифратор;
- $\overrightarrow{P}_2(n)$ — универсальная система.

Лемма. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ *СФЭ* $U_n \in \mathcal{U}^C_B$*, которая реализует систему ФАЛ* $\overrightarrow{P}_2(n)$*, сложности* $2^{2^n} - n$*.*

Следствие. $L^C_B\big(\overrightarrow{P}_2(n)\big) \leqslant 2^{2^n} - n$.

18. Нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем.

Лемма. *Если ФАЛ* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *существенно зависит от всех своих БП, то*

$$L^C(f) \geqslant n - 1,$$

$$L^K(f) \geqslant n.$$

Если при этом ФАЛ f не является монотонной ФАЛ, то

$$L^C(f) \geqslant n,$$

Если есть существенная зависимость от всех своих БП и каждая БП x_i, $i \in [1, k]$, не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ f, то

$$L^K(f) \geqslant n + k.$$

Следствие.

$$L^C(\ell_n) \geqslant n, \qquad L^C(\mu_n) \geqslant 2^n + n,$$

$$L^K(\ell_n) \geqslant 2n, \qquad L^K(\mu_n) \geqslant 2^n + 2n.$$

Замечание. *Формула $f = \overline{(x_1 \cdots x_n)}$ и π-схема, моделирующая ЭД $f = \overline{x}_1 \vee \cdots \vee \overline{x}_n$, являются минимальными в классах СФЭ и КС соответственно, при этом $L^C(f) = n$, $L^K(f) = n$.*

Лемма. *Для системы $F = (f_1, \ldots, f_m)$, состоящей их попарно различных ФАЛ от переменных (от констант), справедливо*

$$L^C(F) \geqslant m \qquad (\textit{соответственно } L^K(F) \geqslant m).$$

Следствие.

$$L^C(\overrightarrow{Q}_n) \geqslant 2^n, \qquad L^C(\overrightarrow{J}_n) \geqslant 2^n, \qquad L^C(\overrightarrow{P}_2(n)) \geqslant 2^{2^n} - n,$$

$$L^K(\overrightarrow{Q}_n) \geqslant 2^n, \qquad L^K(\overrightarrow{J}_n) \geqslant 2^n, \qquad L^K(\overrightarrow{P}_2(n)) \geqslant 2^{2^n} - 2.$$

Лемма. $\forall n \in \mathbb{N}$ *выполняются неравенства [тут было много верхних оценок для $\overrightarrow{Q}_n$, $\overrightarrow{J}_n$, μ_n, ℓ_n и $\overline{\ell}_n$ в разых классах, но формулировка билета не предусматривает верхних оценок.]*

Следствие. $L^C(\overrightarrow{Q}_n) \sim L^C(\overrightarrow{J}_n) \sim 2^n$.

Лемма. *Если система ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ состоит из попарно различных ФАЛ от БП $X(n)$, отличных от 0 и 1, то $L^K(F) \geqslant 2^{1-n} \sum\limits_{j=1}^{m} |N_{f_j}|$.*

Следствие. $L^K(J_n) \geqslant 2^{n+1} - 2$.

Замечание. $(1,4)$-*КС с входом a из двух непересекающихся $(a$—$a)$-цепей (т. е. циклов) с ЭК проводимости $\overline{x}_1 x_2 x_1$ и $\overline{x}_1 \overline{x}_2 x_1$ является минимальным дизъюнктивным контактным дешифратором порядка 2.*

Лемма. *Если для ФАЛ $f \in P_2(n)$ и $\forall \sigma \in \{0, 1\}$ ФАЛ $f_\sigma(x_1, \ldots, x_{n-1}, \sigma) \not\equiv const$, то $L^C_{\&,\vee}(f) = \min\{L^C_{\&,\vee}(f_0), L^C_{\&,\vee}(f_1)\} + 2$.*

Следствие. $L^C(\mu_n) \geqslant 2^{n+1} + n - 1$.

Замечание. *Формула $\overline{x}_1 y_0 \vee x_1 y_1$ является минимальной СФЭ, реализующей ФАЛ μ_1 и $L^C(\mu_1) = 4$.*

Следствие. $D(\mu_n) \geqslant n + 1$.

19. Метод каскадов для КС и СФЭ, примеры его применения. Метод Шеннона.

Метод каскадов позволяет строить КС и СФЭ, многократно использующие «промежуточные результаты».

Лемма. *$\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall \sigma \in \{0,1\}$ выполняются неравенства*

$$L^K(\ell_n^\sigma) \leqslant 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor,$$

$$L^K(\overrightarrow{P}_2(n)) \leqslant 2 \cdot 2^{2^n},$$

$$L^K(\overrightarrow{J}_n) \leqslant 2^{n+2} - 6.$$

Метод Шеннона позволяет строить КС и СФЭ и установить порядок роста функций Шеннона $L^{\mathrm{C}}(n)$ и $L^{\mathrm{K}}(n)$.

Метод Шеннона основан на разложении Шеннона по q переменным. При этом мы раскладываем функцию на подфункции от q переменных, которые в разложении домножаются на функции вида $x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n}$ от $(n-q)$ переменных. Все указанные подфункции от q переменных мы реализуем с помощью универсального многополюсника порядка q (т. е. схемы, которая реализует все функции от q переменных). Потом присоединяем к выходам универсального многополюсника, к q информационным входам мультиплексора порядка $(n-q)$, т. е. у него $(n-q)$ адресных переменных, с помощью которых «адресуются» конкретные функции, реализуемые универсальным многополюсником.

Полагаем $q = \lfloor \log_2(n - 2\log_2 n) \rfloor$.

Теорема. *Для функций Шеннона в классах СФЭ и КС выполяется:*

$$L^C(n) \lesssim 8\frac{2^n}{n},$$

$$L^K(n) \lesssim 4\frac{2^n}{n}.$$

20. Нижние мощностные оценки функций Шеннона

Мощностной метод Шеннона основан на том, что число ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$ не меньше числа попарно неэквивалентных схем, сложность которых не превосходит соответствующего значения функции Шеннона от n.

Обозначим через $\mathcal{U}(\Psi, n)$ множество тех схем $\Sigma \in \mathcal{U}$, которые реализуют одну ФАЛ f из $P_2(n)$ и для которых $\Psi(\Sigma) \leqslant \Psi(f)$.

Имеет место «мощностное» равенство $||\mathcal{U}(\Psi(n), n)|| = 2^{2^n}$.

Верхние оценки, установленные ранее (в части II):

$$\left\|\mathcal{U}^{\mathrm{C}}(L, n)\right\| \leqslant (8\,(L+n))^{L+1},$$

$$\left\| \mathcal{U}^{\Phi}(L,n) \right\| \leqslant (8n)^{L+1}\,,$$

$$\left\| \mathcal{U}^{\mathrm{K}}(L,n) \right\| \leqslant (8nL)^{L}\,,$$

$$\left\| \mathcal{U}^{\pi}(L,n) \right\| \leqslant (12n)^{L}\,,$$

$$\left\| \mathcal{U}^{\Phi}[D,n] \right\| \leqslant (8n)^{2^{D}}\,.$$

Лемма. $\forall a, y, q \in \mathbb{R}^{+}(\geqslant 0) : a \log q > 1, (ay)^{y} \geqslant q \Rightarrow$

$$y \geqslant \frac{\log q}{\log(a \log q)} \left(1 + \frac{\log\log(a\log q)}{\log(ae\log q)}\right),$$

где e — основание натурального логарифма.

$\forall a, y, q \in \mathbb{R}^{+}(\geqslant 0) : a > 1, a^{y} \geqslant q \Rightarrow$

$$y \geqslant \frac{\log q}{\log a}.$$

Теорема. *Для некоторых последовательностей $\varepsilon_i = \varepsilon_i(n)$, где $i = \overline{1,5}$ и $n \in \mathbb{N} : (\varepsilon_i(n) \geqslant 0$ при $n \geqslant n_0), (\varepsilon_i(n) \to 0$ при $n \to \infty)$ для почти всех ФАЛ $f \in P_2(n)$ выполняются неравенства*

$$L^{C}(f) \geqslant (1 + \varepsilon_1(n))\frac{2^n}{n},$$

$$L^{\Phi}(f) \geqslant (1 - \varepsilon_2(n))\frac{2^n}{\log n},$$

$$L^{K}(f) \geqslant (1 - \varepsilon_3(n))\frac{2^n}{n},$$

$$L^{\pi}(f) \geqslant (1 - \varepsilon_4(n))\frac{2^n}{\log n},$$

$$D(f) \geqslant n - \log\log n - \varepsilon_5(n).$$

Следствие.

$$L^{C}(n) \gtrsim \frac{2^n}{n},$$

$$L^{\Phi}(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n},$$

$$L^{K}(n) \gtrsim \frac{2^n}{n},$$

$$L^{\pi}(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n}.$$

21. Дизъюнктивно-универсальные множества ФАЛ. Асимптотически наилучший метод О. Б. Лупанова для синтеза СФЭ в базисе $Б_0$.

Метод О. Б. Лупанова позволяет строить СФЭ и установать асимптотику функции Шеннона $L^{\mathrm{C}}(n)$.

Множество ФАЛ $G \in P_2(m)$ называется *дизъюнктивно-универсальным множеством* (*ДУМ*) порядка m и ранга p, если любая ФАЛ $g \in P_2(m)$ м. б. представлена в виде $g = g_1 \vee \dots \vee g_p$, где $g_i \in G$.

Метод О. Б. Лупанова также основан на разложении Шеннона по q переменным и также использует мультиплексор порядка $(n-q)$. Но подфункции от q переменных из разложения реализуются не универсальным многополюсником, а как дизъюнкция функций из ДУМ порядка q.

TODO: построение ДУМ, связанные определения, методичка III часть, стр. 35.

Лемма. *$\forall m, s \in \mathbb{N}$ и $p = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil$ существует стандартное ДУМ порядка m и высоты s, которое является ДУМ ранга p и для которого:*

1) *$\lambda = |G| \leqslant p \cdot 2^s$;*
2) *система из p характеристических ФАЛ $\psi_1, \dots, \psi_p$ ДУМ G обладает тем свойством, что $\forall$ ФАЛ $g \in P_2(m)$ и соответствующих ФАЛ $g_1, \dots, g_p$ из G справедливо не только представление $g = g_1 \vee \dots \vee g_p$, но и $g = \psi_1 g_1 \vee \dots \vee \psi_p g_p$.*

Теорема. *$\forall$ ФАЛ $f \in P_2(n)$ $\quad \exists$ СФЭ $\Sigma_f \in \mathfrak{U}^C$, реализующая f и такая, что*

$$L(\Sigma_f) \leqslant \frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{5\log n + O(1)}{n}\right).$$

Следствие. $L^C \sim \frac{2^n}{n}$.

В классе СФЭ, в отличии от класса ДНФ, имеет место эффект Шеннона, т. к. сложность $L^{\mathrm{C}}(f) \in P_2(n)$ для почти всех ФАЛ $f \in P_2(n)$ асимптотически равна функции Шеннона $L^{\mathrm{C}}(n)$, то есть сложности самой сложной ФАЛ из $P_2(n)$.

Недостающее

- Вопросы 22—26 в данном файле отсутствуют.
- Вопросы 25—26 не должны быть в билетах (только как дополнительные вопросы).
- Частей IV и V (вопросы 27—30) в данном файле нет.
- Часть V (вопросы 29—30) не должна быть в билетах (только как дополнительные вопросы).