

# Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР:  
Владимир Анатольевич Захаров

[zakh@cs.msu.su](mailto:zakh@cs.msu.su)

# Программа курса

<http://mathcyb.cs.msu.su/courses/logprog.html>

## Лекция 1.

Что изучает логика?  
Логика в информатике.  
Структура курса.  
Исторические сведения.  
Логические парадоксы.

# Что изучает логика?

**ЛОГИКА** — междисциплинарная отрасль наук, изучающая

- ▶ законы причинно-следственной связи в окружающем мире;
- ▶ проявление причинно-следственных законов в рациональном мышлении человека;
- ▶ отражение причинно-следственных законов в языках (естественных и искусственных).

# Что изучает логика?

## ФОРМАЛЬНАЯ ЛОГИКА

изучает **формы** , в которых проявляются законы причинно-следственных связей, вне зависимости от содержания (смысла) тех явлений (предметов), к которым эти законы относятся.

# Что изучает логика?

Поясняющий пример.

*P1*: Каждый металл — проводник.

*P2*: Ртуть — металл.

---

Значит, ртуть — проводник.

Закон физики (?)

# Что изучает логика?

Поясняющий пример.

*P1*: В каждом южном городе летом тепло.

*P2*: Сочи — южный город.

---

Значит, в Сочи летом тепло.

Закон географии (?)

# Что изучает логика?

Поясняющий пример.

*P1*: Каждый преступник должен быть наказан.

*P2*: У. б. Л. — преступник.

---

Значит, У. б. Л. должен быть наказан.

Закон юриспруденции (?)



# Что изучает логика?

Поясняющий пример.

Общая форма всех этих законов

*P1*: Каждый предмет, обладающий свойством  $R$ , обладает свойством  $Q$ .

*P2*: Предмет  $s$  обладает свойством  $R$ .

---

Значит, предмет  $s$  обладает свойством  $Q$ .

Закон формальной логики (!!!)

# Что изучает логика?

Поясняющий пример.

Общая форма всех этих законов

$$P1: \forall x (R(x) \rightarrow Q(x)).$$

$$P2: R(c).$$

---

$$Q(c).$$

Закон формальной логики (в символьном виде)

# Логика в информатике

Вернемся к примеру.

Это — исходные знания (база знаний).

*P*<sub>1</sub>: Каждый металл — проводник.

*P*<sub>2</sub>: Ртуть — металл.

---

А это — новые знания.

Ртуть — проводник.

**Откуда взялись новые знания???**

# Логика в информатике

Применение закона формальной логики.

Логический закон:

$P1: \forall x (R(x) \rightarrow Q(x)).$

$P2: R(c).$

---

$Q(c).$

Интерпретация:

$R(x)$  — «предмет  $x$  — металл»;

$Q(x)$  — «предмет  $x$  — проводник»;

$c$  — «ртуть».

## Логика в информатике

Еще одно применение закона формальной логики.

Логический закон:

$$P1: \forall x (R(x) \rightarrow Q(x)).$$

$$P2: R(c).$$

---

$$Q(c).$$

Другая интерпретация:

$R(x)$  — «предмет  $x$  — южный город»;

$Q(x)$  — «предмет  $x$  — теплый летом»;

$c$  — «Сочи».

# Логика в информатике

**Логика не позволяет получать новую информацию!!!**

Знания — это форма представления информации в виде формальных высказываний.

Законы формальной логики преобразуют одни высказывания в другие.

Таким образом, законы формальной логики позволяют преобразовывать информацию из одной формы представления в другую.

**Законы формальной логики — это инструмент преобразования информации.**

# Логика в информатике

Основная задача формальной логики.

База знаний:  $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ .

Предложение:  $\psi$ .

**Задача (неформальная):** выяснить, является ли предложение  $\psi$  следствием утверждений базы знаний  $\Gamma$ .

**Задача (формальная):** проверить, что  $\psi$  выводится из  $\Gamma$  по законам формальной логики.

# Логика в информатике

## Приложение 1.

### Экспертные системы.

**База знаний**  $\Gamma$  — база знаний экспертной системы.

**Предложение**  $\psi$  — запрос к базе знаний.

**Аппарат логического вывода** — ядро экспертной системы.

## Приложение 2.

### Автоматизация научных исследований.

**База знаний**  $\Gamma$  — система аксиом математической теории.

**Предложение**  $\psi$  — математическое утверждение.

**Аппарат логического вывода** — ядро автоматической системы доказательства теорем.



# Логика в информатике

## Приложения 1, 2.

Для этого нужно уметь:

- ▶ Разработать формальный язык для представления знаний.
- ▶ Создать систему необходимых законов формальной логики.
- ▶ Проверить корректность логических законов.
- ▶ Проверить полноту построенной системы логических законов.
- ▶ Разработать алгоритм проверки выводимости одних предложений из других по заданным законам.

**Этим мы займемся в первой части курса.**

- ▶ Оптимизировать построенный алгоритм (сделать его практически пригодным).

**Этим мы займемся во второй части курса.**

# Логика в информатике

## Приложение 3.

### Программирование.

Вычисление программы — последовательное преобразование интерпретатором одних состояний данных в другие согласно заданному алгоритму .

Логический вывод (доказательство) — последовательное построение по законам формальной логики одних утверждений из других, исходя из заданной базы знаний .

**База знаний**  $\Gamma$  — программа.

**Предложение**  $\psi$  — вызов программы.

**Аппарат логического вывода** — интерпретатор программ.

Но вычисление программы завершается результатом, однако, не всякое доказательство является «результативным» (конструктивным).

# Логика в информатике

## Приложение 3.

### Пример.

**Задача.** Существуют ли такие два иррациональных числа  $\alpha$  и  $\beta$ , что  $\alpha^\beta$  — рациональное число?

**Решение.**

1. Если  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  — рациональное число, то  $\alpha = \beta = \sqrt{2}$ .
2. Если  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  — иррациональное число, то  $\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ,  $\beta = \sqrt{2}$ .



Мы доказали, что  $\alpha$  и  $\beta$  существуют, но не смогли их вычислить. Это **неконструктивное** доказательство.

Чтобы логическое доказательство могло играть роль вычисления, оно должно быть конструктивным.

# Логика в информатике

## Приложение 3.

Для этого нужно уметь:

- ▶ Разработать формальный язык для представления программ в виде логических утверждений.
- ▶ Сделать логическое доказательство конструктивным, чтобы оно могло играть роль вычисления.
- ▶ Проверить вычислительную корректность этого способа доказательства.
- ▶ Проверить алгоритмическую полноту этого способа доказательства.
- ▶ Сделать этот способ программирования удобным для пользования.

**Этим мы займемся в третьей части курса.**

# Логика в информатике

## Приложение 4.

Программы могут быть правильными и неправильными.

**Правильная программа** — это такая программа, поведение которой удовлетворяет заданным требованиям (спецификации) корректности.

Проверить правильность программы — значит доказать, что программа удовлетворяет требованиям корректности.

Для доказательства правильности программ могут быть использованы методы логики.

# Логика в информатике

## Приложение 4.

Для этого нужно уметь:

- ▶ Разработать формальный язык для описания требований правильности программ.
- ▶ Разработать правила логического доказательства правильности программ.
- ▶ Разработать алгоритм (метод) применения этих правил для доказательства правильности программ относительно заданных спецификаций.

**Этим мы займемся в четвертой части курса.**

# Исторические сведения



384 д.н.э.

322 д.н.э.

**АРИСТОТЕЛЬ**

# Исторические сведения



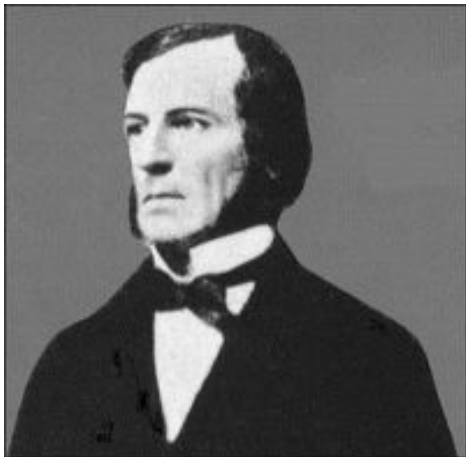
1646

1716

**ГОТФРИД ВИЛЬГЕЛЬМ ФОН ЛЕЙБНИЦ**



## Исторические сведения

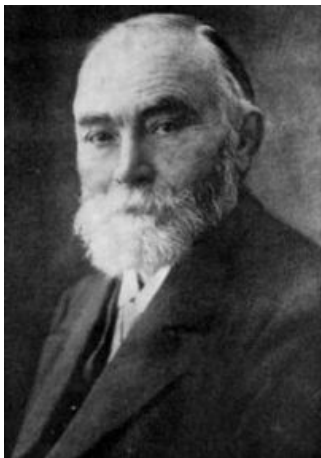


1815

1864

**ДЖОРДЖ БУЛЬ**

# Исторические сведения



1848

1925

**ГОТТЛОБ ФРЕГЕ**

# Исторические сведения

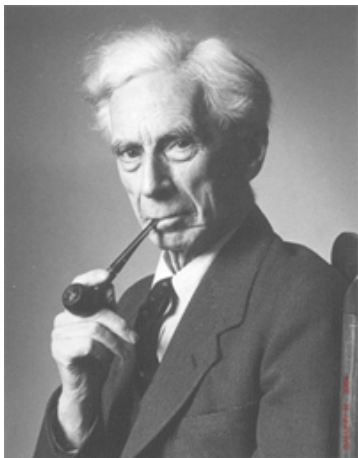


1862

1943

**ДАВИД ГИЛЬБЕРТ**

# Исторические сведения

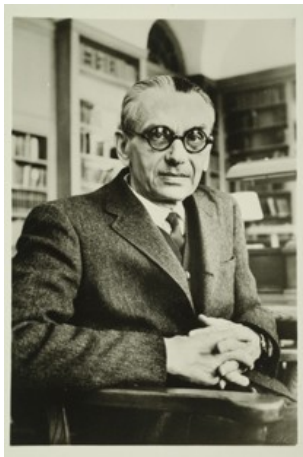


1872

1970

**БЕРТРАН РАССЕЛ**

# Исторические сведения



1906

1978

**КУРТ ГЕДЕЛЬ**

## Исторические сведения



1902

1983

**АЛЬФРЕД ТАРСКИЙ**

# Исторические сведения



1908

1931

**ЖАК ЭРБРАН**

# Исторические сведения



1909

1945

**ГЕРХАРД ГЕНЦЕН**



# Исторические сведения



1941

**АЛАН КОЛМЕРОЭ**

# Исторические сведения



1956

**МИХАИЛ ЗАХАРЬЯЦЕВ**

# Логические парадоксы.

Парадоксы - движущая сила логики.

Противоречивые парадоксы (**антиномии**) заставляют задумываться над такими вопросами, как

- ▶ Что такое истинное утверждение?
- ▶ Что такое доказуемое утверждение?
- ▶ В какой мере можно формализовать наши знания?

## Логические парадоксы.

### Парадокс о крокодиле

Крокодил схватил ребенка.

Мать ребенка просит крокодила:

«Верни мне ребенка!»

Крокодил отвечает:

«Я верну тебе ребенка, если ты угадаешь, исполню ли я твою просьбу.»

«Не исполнишь», — говорит женщина.

Вернет ли крокодил ребенка матери?

# Логические парадоксы.

## Парадокс лжеца

УТВЕРЖДЕНИЕ,  
КОТОРОЕ НАПИСАНО НА  
ЭТОМ  
СЛАЙДЕ, — ЛОЖНОЕ.

# Логические парадоксы.

## Парадокс лжеца

Истинно или ложно предъявленное вам утверждение?

# Логические парадоксы.

## Парадокс утренней звезды

Венера видна ранним вечером, и поэтому ее называют вечерней звездой.

Венера видна ранним утром, и поэтому ее называют утренней звездой.

Означает ли это, что вечерняя звезда видна ранним утром?



# Логические парадоксы.

## Парадокс морской битвы

Некий флотоводец обратился к прорицателю с вопросом, состоится ли завтра морская битва. Прорицатель ответил: «Битва завтра состоится».

На следующий день случился шторм, и флот не смог выйти в море. Разгневанный флотоводец потребовал от прорицателя вернуть деньги, поскольку его прогноз оказался ложным. Прорицатель ответил: «Твои моряки вчера купили на рынке свежее молоко. Сегодня это молоко уже не свежее, но они не просят вернуть им деньги обратно. Мой прогноз тоже был верным вчера, и ты не вправе жаловаться на то, что он неверен сегодня».

## Прав ли прорицатель?

Парадоксы неизбежны.

Но их влияние можно ограничить.

Для этого нужны математические модели  
логических законов.

Так появилась

# Математическая логика

## РЕЙМОНД С. СМАЛЛИАН. "Как же называется эта книга?"

У Порции (героини комедии "Венецианский купец") было три шкатулки: из золота, серебра и свинца. В одной из шкатулок хранился портрет Порции. Поклоннику предлагалось выбрать шкатулку, и если он был достаточно умен, чтобы выбрать шкатулку с портретом, то получал право назвать Порцию невестой. На крышках шкатулок были надписи:

На золотой	На серебряной	На свинцовой
Портрет в этой шкатулке	Портрет не в этой шкатулке	Портрет не в золотой шкатулке

Своему поклоннику Порция пояснила, что из трех высказываний на крышках шкатулок, по крайней мере два ложны.

Какую шкатулку следует выбрать поклоннику Порции?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 1.