Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 12.

Хорновские логические программы: синтаксис. Декларативная семантика логических программ.

ПАРАДИГМЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Императивное программирование : программа — это описание последовательности операторов (команд).
Языки: Assembler, Pascal, C, Java.

Функциональное программирование : программа — это система уравнений, описывающая вычисляемую функцию.
Языки: Lisp, ML, Haskel, Hope.

Логическое программирование : программа — это множество формул, описывающих условия решаемой задачи.
Языки: Prolog, Datalog, Godel.

Хорновские логические программы

Синтаксис логических программ

Пусть $\sigma = \langle Const, Func, Pred \rangle$ — некоторая сигнатура, в которой определяются термы и атомы.

«заголовок» ::= «атом»

«тело» ::= «атом» | «тело», «атом»

«правило» ::= «заголовок» $\leftarrow$ «тело»;

«факт» ::= «заголовок»;

«утверждение» ::= «правило» | «факт»

«программа» ::= «пусто» | «утверждение» «программа»

«запрос» ::= $\square$ | ? «тело»

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Примеры

Правило: $\underbrace{L(\textit{паша}, Y)}_{\text{заголовок}} \leftarrow \underbrace{L(Y, X),\ L(\textit{паша}, X)}_{\text{тело}};$

Факт: $L(\textit{даша}, \textit{саша});$

Запрос (целевое утверждение):

$$?\ \underbrace{\text{Умный}(X)}_{\text{подцель}},\ \underbrace{\text{Добрый}(X)}_{\text{подцель}},\ \underbrace{\text{Красивый}(X)}_{\text{подцель}},\ \underbrace{\text{Любит}(X, \textit{меня})}_{\text{подцель}}$$

Здесь X — целевая переменная .

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Терминология

Пусть $\mathcal{P}$ — логическая программа, D — программное утверждение, а θ — подстановка. Тогда

- $D\theta$ — пример программного утверждения D,
- если θ — переименование, то $D\theta$ — вариант программного утверждения D,
- если $Var_{D\theta} = \emptyset$, то $D\theta$ — основной пример программного утверждения D,
- $[D]$ — множество всех основных примеров программного утверждения D,
- $[\mathcal{P}]$ — множество всех основных примеров всех утверждений программы $\mathcal{P}$.

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Терминология

Пусть $G = ?C_1, C_2, \dots, C_m$ — запрос. Тогда

- атомы $C_1, C_2, \dots, C_m$ называются подцелями запроса G,
- переменные множества $\bigcup\limits_{i=1}^{m} Var_{C_i}$ называются целевыми переменными ,
- запрос $\Box$ называется пустым запросом ,
- запросы будем также называть целевыми утверждениями .

Для удобства обозначения условимся в дальнейшем факты A; рассматривать как правила $A \leftarrow$; с заголовком A и пустым телом.

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Примеры

Пусть $D = \ elem(X, Y \centerdot Z) \ \leftarrow \ elem(X, Z);$ — программное утверждение. Тогда

$D' = D\{X/Y, Z/\mathbf{nil}\} = \ elem(Y, Y \centerdot \mathbf{nil}) \ \leftarrow \ elem(Y, \mathbf{nil});$
пример программного утверждения D,

$D'' = \ elem(X', Y' \centerdot Z') \ \leftarrow \ elem(X', Z');$
вариант программного утверждения D,

$D''' = D\{X/1, Y/2, Z/\mathbf{nil}\} = \ elem(1, 2 \centerdot \mathbf{nil}) \ \leftarrow \ elem(1, \mathbf{nil});$
основной пример программного утверждения D,

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Пример логической программы

$$
\begin{array}{lcl}
si\_ro(X_s, X_s, V, A, \mathbf{nil}) & \leftarrow & in(X_s, V, V_1); \\
si\_ro(X_s, X_d, V, A, Z) & \leftarrow & in(X_s, V, V_1), in(X_d, V_1, V_2), \\
 & & R(X_s, X_d, V_2, A, Z);
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
R(X_s, X_d, V, A, (X_s \centerdot X_d \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot \mathbf{nil}) & \leftarrow & in(X_s \centerdot X_d \centerdot \mathbf{nil}, A, A_1); \\
R(X_s, X_d, V, A, (X_s \centerdot Y \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot Z) & \leftarrow & in(Y, V, V_1), \\
 & & in(X_s \centerdot Y \centerdot \mathbf{nil}, A, A_1), \\
 & & R(Y, X_d, V_1, A_1, Z);
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
in(X, X \centerdot Y, Y); & & \\
in(X, Z \centerdot Y, Z \centerdot V) & \leftarrow & in(X, Y, V);
\end{array}
$$

и запроса к ней

$? \; si\_ro(4, 2, 1 \centerdot 2 \centerdot 3 \centerdot 4 \centerdot \mathbf{nil}, (1 \centerdot 2 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot (2 \centerdot 3 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot (2 \centerdot 4 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot (3 \centerdot 1 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot \mathbf{nil}, Z)$

Что же вычислит программа в ответ на этот запрос?

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Как нужно понимать логические программы?

Главная особенность логического программирования — полисемантичность : одна и та же логическая программа имеет две равноправные семантики, и поэтому человек–программист и компьютер–вычислитель имеют две разные точки зрения на программу.

Программисту важно понимать, **ЧТО** вычисляет программа. Такое понимание программы называется декларативной семантикой программы.

Компьютеру важно «знать», **КАК** проводить вычисление программы. Такое понимание программы называется операционной семантикой программы.

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Как нужно понимать логические программы?

Декларативная семантика	Операционная семантика
Правило $A_0 \leftarrow A_1, A_2, \dots, A_n$;	
Если выполнены условия $A_1, A_2, \dots, A_n$, то справедливо и утверждение A_0.	Чтобы решить задачу A_0, достаточно решить задачи $A_1, A_2, \dots, A_n$.
Факт A_0;	
Утверждение A_0 считается верным.	Задача A_0 объявляется решенной.
Запрос $?C_1, C_2, \dots, C_m$	
При каких значениях целевых переменных будут верны все отношения $C_1, C_2, \dots, C_m$?	Решить список задач $C_1, C_2, \dots, C_m$.

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Пример истолкования логической программы

$$\mathcal{P}: \quad elem(X, X \centerdot L);$$
$$elem(X, Y \centerdot L) \quad \leftarrow \quad elem(X, L);$$

Декларативная семантика	Операционная семантика
1. Всякий предмет X входит в состав того списка, заголовком которого он является	1. Считается решенной задача поиска предмета X в любом списке, содержащем X в качестве заголовка.
2. Если предмет X содержится в хвосте списка, то X содержится и в самом списке.	2. Чтобы обнаружить предмет X в списке, достаточно найти его в хвосте этого списка.

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

Более строгое описание семантик требует привлечения аппарата математической логики.

Логические программы и логические формулы

Каждому утверждению логической программы сопоставим логическую формулу:

Правило: $D' = \ A_0 \leftarrow A_1, A_2, \ldots, A_n;$

$$D' = \forall x_1 \ldots \forall x_k (A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_n \rightarrow A_0), \text{ где } \{x_1, \ldots, x_k\} = \bigcup_{i=0}^{n} Var_{A_i}$$

Факт: $D'' = \ A;$

$$D'' = \forall x_1 \ldots \forall x_k A, \text{ где } \{x_1, \ldots, x_k\} = Var_A$$

Запрос: $G = \ ?\ C_1, C_2, \ldots, C_m$

Декларативная семантика

С точки зрения декларативной семантики, программные утверждения D и запросы G — это логические формулы, программа $\mathcal{P}$ — это множество формул (база знаний), а правильный ответ на запрос — это такие значения переменных (подстановка), при которой запрос оказывается логическим следствием базы знаний.

Определение (правильного ответа)

Пусть $\mathcal{P}$ — логическая программа, G — запрос к $\mathcal{P}$ с множеством целевых переменных $Y_1, \dots, Y_k$.
Тогда всякая подстановка $\theta = \{Y_1/t_1, \dots, Y_k/t_k\}$ называется ответом на запрос G к программе $\mathcal{P}$.
Ответ $\theta = \{Y_1/t_1, \dots, Y_k/t_k\}$ называется правильным ответом на запрос G к программе $\mathcal{P}$, если

$$\mathcal{P} \models \forall Z_1 \dots \forall Z_N G\theta, \qquad \text{где } \{Z_1, \dots, Z_N\} = \bigcup_{i=1}^{k} Var_{t_i}.$$

Теперь вопрос: как искать правильные ответы?

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

Пусть $\sigma = \langle Const, Func, Pred \rangle$ — некоторая сигнатура. Рассмотрим

- H_σ — эрбрановский универсум сигнатуры σ (множество основных термов);
- B_σ — эрбрановский базис сигнатуры σ (множество основных атомов);
- эрбрановские интерпретации сигнатуры σ:

$$I \subseteq B_\sigma, \qquad I = \{A \;:\; A \in B_\sigma,\; I \models A\}$$

Определение (модели для логической программы)

Пусть $\mathcal{P}$ — логическая программа, I — H-интерпретация. Тогда I называется эрбрановской моделью для программы $\mathcal{P}$, если для любого программного утверждения D, $D \in \mathcal{P}$, верно

$$I \models D$$

(сокращенная запись $I \models \mathcal{P}$).

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

Лемма (о модели для логической программы)

Эрбрановская интерпретация I является моделью для логической программы $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда для любого основного примера программного утверждения $D' = A'_0 \leftarrow A'_1, \dots, A'_n,\ D' \in [\mathcal{P}]$ верно

$$\{A'_1, \dots, A'_n\} \subseteq I \ \Rightarrow\ A'_0 \in I$$

Доказательство.

(**Необходимость**) Пусть $D \in \mathcal{P}$ и $D' = D\theta$ — основной пример. Тогда I — модель для $\mathcal{P}$ $\Rightarrow$ $I \models D$ $\Rightarrow$ $I \models D'$ $\Rightarrow$ $I \models A'_1 \& \dots \& A'_n \rightarrow A'_0$ $\Rightarrow$ если $I \models A'_1 \& \dots \& A'_n$, то $I \models A'_0$ $\Rightarrow$ если $I \models A'_1,\ \dots\ I \models A'_n$, то $I \models A'_0$ $\Rightarrow$ если $\{A'_1, \dots, A'_n\} \subseteq I$, то $A'_0 \in I$.

(**Достаточность**) Сами. $\square$

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

Следствие

Каждая хорновская логическая программа $\mathcal{P}$ имеет хотя бы одну эрбрановскую модель.

Доказательство.

Самостоятельно. (Покажите, что в качестве одной из моделей всегда можно взять максимальную интерпретацию $I = B_{\mathcal{P}}$).

Пример.

Программа

$$\begin{array}{rcl} P(X, f(X)) & \leftarrow & R(X); \\ R(f(Y)) & \leftarrow & P(Y); \end{array}$$

имеет H-модель $I = \emptyset$.

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

Лемма (о пересечении моделей)

Если H-интерпретации I_1 и I_2 являются моделями для логической программы $\mathcal{P}$, то H-интерпретация $I_0 = I_1 \cap I_2$ также является моделью для $\mathcal{P}$.

Доказательство.

Воспользуемся леммой о модели для логической программы. Пусть $D' = A'_0 \leftarrow A'_1, \ldots, A'_n,\ D' \in [\mathcal{P}]$. Тогда

$$\{A'_1, \ldots, A'_n\} \subseteq I_0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{A'_1, \ldots, A'_n\} \subseteq I_1 \\ \{A'_1, \ldots, A'_n\} \subseteq I_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A'_0 \in I_1 \\ A'_0 \in I_2 \end{array} \right. \Rightarrow A'_0 \in I_0$$

$\square$

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

Теорема (о наименьшей модели)

Всякая хорновская логическая программа $\mathcal{P}$ имеет наименьшую эрбрановскую модель.

Доказательство.

1. Каждая хорновская логическая программа $\mathcal{P}$ имеет хотя бы одну эрбрановскую модель.
2. Рассмотрим множество $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ всех H-моделей логической программы $\mathcal{P}$. Как было показано, $\mathcal{I} \neq \emptyset$. Поэтому, согласно лемме о пересечении H-моделей, интерпретация $M_{\mathcal{P}} = \bigcap\limits_{I \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}} I$ также является H-моделью программы $\mathcal{P}$.
   При этом для любой H-модели I верно $M_{\mathcal{P}} \subseteq I$. Таким образом, $M_{\mathcal{P}}$ — это наименьшая эрбрановская модель для программы $\mathcal{P}$.

$\square$

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

Теорема (характеристическое свойство наименьшей модели)

Пусть $G = ?A$ — запрос к хорновской логической программе $\mathcal{P}$. Пусть $A_0 = A\theta$ — основной пример атома A. Тогда

$$\mathcal{P} \models A_0 \iff A_0 \in M_{\mathcal{P}}.$$

Доказательство.

Допустим $\mathcal{P} = \{D_1, \dots, D_N\}$. Тогда

$\mathcal{P} \models A_0 \iff \models (D_1 \& \dots \& D_N) \to A_0 \iff$

$S = \{D_1, \dots, D_N, \neg A_0\}$ — противоречивая система $\iff$

S не имеет H-моделей (теорема о H-интерпретациях) $\iff$

для любой H-интерпретации I: $I \models \mathcal{P}$ влечет $A_0 \in I \iff$

$A_0 \in \bigcap_{I \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}} I = M_{\mathcal{P}}$ (теорема о наименьшей модели) $\square$

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

Теорема (об основном правильном ответе)

Пусть $G = ?C_1, C_2, \ldots, C_m$ — запрос к хорновской логической программе $\mathcal{P}$. Пусть $Y_1, \ldots, Y_k$ — целевые переменные, $t_1, \ldots, t_k$ — основные термы.
Тогда подстановка $\theta = \{Y_1/t_1, \ldots, Y_k/t_k\}$ является правильным ответом на запрос G к программе $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда $\{C_1\theta, \ldots, C_m\theta\} \subseteq M_{\mathcal{P}}$.

Доказательство.

Самостоятельно. (На основании характеристического свойства наименьшей модели).

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

ИТОГИ

- Логическая программа $\mathcal{P}$ — это база знаний, состоящая из законов (фактов и правил), описывающих устройство некоторого математического мира (задачи).
- В этом математическом мире истинным считается то и только то, что удовлетворяет законам базы знаний — ничего лишнего.
- Этот математический мир — наименьшая эрбрановская модель $M_{\mathcal{P}}$.
- Правильным ответом на запрос к базе знаний считается такой ответ, который логически следует из базы знаний (программы).
- Все правильные ответы на любые запросы к логической программе $\mathcal{P}$ нужно искать в наименьшей модели $M_{\mathcal{P}}$.

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

Теперь ясно, каков смысл логических программ, какие ответы на запросы к программ считаются правильными, и где находятся правильный ответы. Математику этого достаточно, для того чтобы создавать программы.

Но этого совершенно недостаточно вычислительному устройству, для того чтобы вычислять ответы на запросы к программам.

Теперь нам нужно выяснить,

КАК ВЫЧИСЛЯТЬ ОТВЕТЫ НА ЗАПРОСЫ?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 12.