

# Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

## Лекция 13.

Операционная семантика  
логических программ:  
SLD–резольтивные вычисления.  
Корректность операционной  
семантики.

# ОПЕРАЦИОННАЯ СЕМАНТИКА ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

## Концепция операционной семантики

Под **операционной семантикой** понимают правила построения **вычислений программы**. Операционная семантика описывает, **КАК** достигается результат работы программы.

Результат работы логической программы — это **правильный ответ** на запрос к программе. Значит, операционная семантика должна описывать метод вычисления правильных ответов.

Запрос к логической программе порождает задачу о логическом следствии. Значит, вычисление ответа на запрос должно приводить к решению эту задачу.

Таким методом вычисления может быть разновидность **метода резолюций**, учитывающая особенности устройства программных утверждений.

# ОПЕРАЦИОННАЯ СЕМАНТИКА

## Логически предпосылки операционной семантики

Запрос  $G(Y_1, \dots, Y_m) = ? C_1, C_2, \dots, C_m$  к логической программе  $\mathcal{P} = \{D_1, \dots, D_N\}$  порождает задачу о логическом следствии:

$$\{D_1, \dots, D_N\} \models \exists Y_1 \dots \exists Y_m (C_1 \& C_2 \& \dots \& C_m),$$

которая равносильна задаче об общезначимости

$$\models D_1 \& \dots \& D_N \rightarrow \exists Y_1 \dots \exists Y_m (C_1 \& C_2 \& \dots \& C_m),$$

которая равносильна задаче о противоречивости формулы

$$\neg (D_1 \& \dots \& D_N \rightarrow \exists Y_1 \dots \exists Y_m (C_1 \& C_2 \& \dots \& C_m)),$$

равносильной формуле

$$D_1 \& \dots \& D_N \& \forall Y_1 \dots \forall Y_m (\neg C_1 \vee \neg C_2 \vee \dots \vee \neg C_m),$$

# ОПЕРАЦИОННАЯ СЕМАНТИКА

## Логически предпосылки операционной семантики

Полученную формулу

$$D_1 \& \dots \& D_N \& \forall Y_1 \dots \forall Y_m (\neg C_1 \vee \neg C_2 \vee \dots \vee \neg C_m),$$

можно рассматривать как систему дизъюнктов

$$S_{P,G} = \{D_1, \dots, D_N, \neg C_1 \vee \neg C_2 \vee \dots \vee \neg C_m\},$$

и доказывать ее противоречивость методом резолюций.

# ОПЕРАЦИОННАЯ СЕМАНТИКА

## Логические программы и хорновские дизъюнкты

Каждому утверждению логической программы сопоставим хорновский дизъюнкт:

Правило:  $D' = A_0 \leftarrow A_1, A_2, \dots, A_n$

$$D' = A_0 \vee \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \dots \vee \neg A_n$$

Факт:  $D'' = A$

$$D'' = A$$

Запрос:  $G = ? C_1, C_2, \dots, C_m$

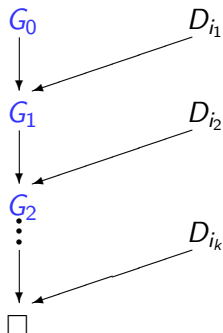
$$G = \neg C_1 \vee \neg C_2 \vee \dots \vee \neg C_m$$

Как это принято у дизъюнктов, предполагается, что все переменные связаны кванторами  $\forall$

# ОПЕРАЦИОННАЯ СЕМАНТИКА

## Логические программы и хорновские дизъюнкты

Мы будем применять специальную стратегию построения резольтивного вывода:



**S**election rule driven **L**inear resolution with **D**efinite clauses

**SLD-резолуция**

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Определение (SLD-резолюции)

Пусть

- ▶  $G = ? C_1, \dots, C_i, \dots, C_m$  — целевое утверждение, в котором выделена подцель  $C_i$ ,
- ▶  $D' = A'_0 \leftarrow A'_1, A'_2, \dots, A'_n$  — **вариант** некоторого программного утверждения, в котором  $Var_G \cap Var_{D'} = \emptyset$ ,
- ▶  $\theta \in HOY(C_i, A'_0)$  — наиб. общ. унификатор подцели  $C_i$  и заголовка программного утверждения  $A'_0$ .

Тогда запрос

$$G' = ?(C_1, \dots, C_{i-1}, A'_1, A'_2, \dots, A'_n, C_{i+1}, \dots, C_m)\theta$$

называется **SLD-резольвентой** программного утверждения  $D'$  и запроса  $G$  с выделенной подцелью  $C_i$  и унификатором  $\theta$ .



# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Определение (SLD-резолюции)

$$G = ? C_1, \dots, C_i, \dots, C_m$$

КОММЕНТАРИИ.

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Определение (SLD-резолюции)

$$G = ? C_1, \dots, C_i, \dots, C_m$$

КОММЕНТАРИИ.

Выделяем подцель в запросе.

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Определение (SLD-резолюции)

$$G = ? C_1, \dots, C_i, \dots, C_m$$

$$D = A_0 \leftarrow A_1, A_2, \dots, A_n;$$

**КОММЕНТАРИИ.**

Выбираем программное утверждение.

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Определение (SLD-резолюции)

$$G = ? C_1, \dots, C_i, \dots, C_m$$

$$D' = A'_0 \leftarrow A'_1, A'_2, \dots, A'_n;$$

### КОММЕНТАРИИ.

Переименовываем переменные в выбранном утверждении, так чтобы  $Var_{D'} \cap Var_G = \emptyset$ .

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Определение (SLD-резолюции)

$$G = ? C_1, \dots, C_i, \dots, C_m$$

$$D' = A'_0 \leftarrow A'_1, A'_2, \dots, A'_n;$$

$$\theta = \text{НОУ}(C_i, A'_0)$$

КОММЕНТАРИИ.

Вычисляем Наиболее Общий Унификатор.

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Определение (SLD-резолюции)

$$G = ? C_1, \dots, C_i, \dots, C_m$$



$$D' = A'_0 \leftarrow A'_1, A'_2, \dots, A'_n;$$

$$\theta = \text{НОУ}(C_i, A'_0)$$

$$G' = ? (C_1, \dots, C_{i-1}, A'_1, A'_2, \dots, A'_n, C_{i+1}, \dots, C_m)\theta$$

**КОММЕНТАРИИ.**

Строим SLD-резольвенту

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Определение (SLD-резолюции)

$$G = \neg C_1 \vee \dots \vee \neg C_i \vee \dots \vee \neg C_m$$

$$D' = A'_0 \vee \neg A'_1 \vee \neg A'_2 \vee \dots \vee A'_n;$$

$$\theta = \text{НОУ}(C_i, A'_0)$$

$$G' = (\neg C_1 \vee \dots \vee \neg C_{i-1} \vee \neg A'_1 \vee \neg A'_2 \vee \dots \vee \neg A'_n \vee \neg C_{i+1} \vee \dots \vee \neg C_m)\theta$$

**КОММЕНТАРИИ.**

Действительно, это резольвента двух дизъюнктов

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 1.

$$G = ? P(X), R(X, f(Y)), R(Y, c)$$

КОММЕНТАРИИ.



# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 1.

$$G = ? P(X), R(X, f(Y)), R(Y, c)$$

## КОММЕНТАРИИ.

Выделяем подцель в запросе.

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 1.

$$G = ? P(X), R(X, f(Y)), R(Y, c)$$

$$D = R(Y, X) \leftarrow P(X), R(c, Y);$$

## КОММЕНТАРИИ.

Выбираем программное утверждение.

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 1.

$$G = ? P(X), R(X, f(Y)), R(Y, c)$$

$$D' = R(Y_1, X_1) \leftarrow P(X_1), R(c, Y_1);$$

## КОММЕНТАРИИ.

Переименовываем переменные в выбранном утверждении, так чтобы  $Var_{D'} \cap Var_G = \emptyset$ .

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 1.

$$G = ? P(X), R(X, f(Y)), R(Y, c)$$

$$D' = R(Y_1, X_1) \leftarrow P(X_1), R(c, Y_1);$$

$$\theta = \text{НОУ}(R(X, f(Y)), R(Y_1, X_1)) = \{Y_1/X, X_1/f(Y)\}$$

## КОММЕНТАРИИ.

Вычисляем Наиболее Общий Унификатор.

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 1.

$$G = ? P(X), R(X, f(Y)), R(Y, c)$$

$$D' = R(Y_1, X_1) \leftarrow P(X_1), R(c, Y_1);$$

$$\theta = \text{НОУ}(R(X, f(Y)), R(Y_1, X_1)) = \{Y_1/X, X_1/f(Y)\}$$

$$G' = ? (P(X), P(X_1), R(c, Y_1), R(Y, c))\theta$$

КОММЕНТАРИИ.

Строим SLD-резольвенту

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 1.

$$G = ? P(X), R(X, f(Y)), R(Y, c)$$

$$D' = R(Y_1, X_1) \leftarrow P(X_1), R(c, Y_1);$$

$$\theta = \text{НОУ}(R(X, f(Y)), R(Y_1, X_1)) = \{Y_1/X, X_1/f(Y)\}$$

$$G' = ? P(X), P(f(Y)), R(c, X), R(Y, c)$$

КОММЕНТАРИИ.

Вот она.

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 2.

$$G = ? R(X, X \bullet \text{nil})$$

КОММЕНТАРИИ.

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 2.

$$G = ? R(X, X \cdot nil)$$

КОММЕНТАРИИ.

Выделяем подцель в запросе.



# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 2.

$$G = ? R(X, X \bullet \text{nil})$$

$$D = R(X \bullet \text{nil}, Y) \leftarrow;$$

КОММЕНТАРИИ.

Выбираем программное утверждение.

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 2.

$$G = ? R(X, X \bullet \text{nil})$$

$$D' = R(X_1 \bullet \text{nil}, Y_1) \leftarrow;$$

### КОММЕНТАРИИ.

Переименовываем переменные в выбранном утверждении, так чтобы  $Var_{D'} \cap Var_G = \emptyset$ .

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 2.

$$G = ? R(X, X \bullet \text{nil})$$

$$D' = R(X_1 \bullet \text{nil}, Y_1) \leftarrow;$$

$$\theta = \text{НОУ}(R(X, X \bullet \text{nil}), R(X_1 \bullet \text{nil}, Y_1)) = \\ \{X/X_1 \bullet \text{nil}, Y_1/(X_1 \bullet \text{nil}) \bullet \text{nil}\}$$

## КОММЕНТАРИИ.

Вычисляем Наиболее Общий Унификатор.

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 2.

$$G = ? R(X, X \cdot \text{nil})$$

$$D' = R(X_1 \cdot \text{nil}, Y_1) \leftarrow;$$

$$\theta = \text{НОУ}(R(X, X \cdot \text{nil}), R(X_1 \cdot \text{nil}, Y_1)) = \\ \{X/X_1 \cdot \text{nil}, Y_1/(X_1 \cdot \text{nil}) \cdot \text{nil}\}$$

$$G' = ? ( ) \theta$$

КОММЕНТАРИИ.

Строим SLD-резольвенту

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 2.

$$G = ? R(X, X \cdot \text{nil})$$

$$D' = R(X_1 \cdot \text{nil}, Y_1) \leftarrow;$$

$$\theta = \text{НОУ}(R(X, X \cdot \text{nil}), R(X_1 \cdot \text{nil}, Y_1)) = \\ \{X/X_1 \cdot \text{nil}, Y_1/(X_1 \cdot \text{nil}) \cdot \text{nil}\}$$

$$G' = \square$$

КОММЕНТАРИИ.

Вот она.

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 3.

$$G = ? R(X, X \bullet \text{nil}), P(c, Y)$$

КОММЕНТАРИИ.

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 3.

$$G = ? R(X, X \cdot \mathbf{nil}), P(c, Y)$$

КОММЕНТАРИИ.

Выделяем подцель в запросе.

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 3.

$$G = ? R(X, X \bullet \text{nil}), P(c, Y)$$

$$D = R(X \bullet \text{nil}, X) \leftarrow;$$

КОММЕНТАРИИ.

Выбираем программное утверждение.



# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 3.

$$G = ? R(X, X \bullet \text{nil}), P(c, Y)$$

$$D' = R(X_1 \bullet \text{nil}, X_1) \leftarrow;$$

## КОММЕНТАРИИ.

Переименовываем переменные в выбранном утверждении,

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 3.

$$G = ? R(X, X \cdot \mathbf{nil}), P(c, Y)$$

$$D' = R(X_1 \cdot \mathbf{nil}, Y_1) \leftarrow;$$

$$\text{НОУ}(R(X, X \cdot \mathbf{nil}), R(X_1 \cdot \mathbf{nil}, X_1)) = \emptyset$$

КОММЕНТАРИИ.

Атомы не унифицируемы!

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 3.

$$G = ? R(X, X \bullet \text{nil}), P(c, Y)$$

$$D' = R(X_1 \bullet \text{nil}, Y_1) \leftarrow;$$

$$\text{НОУ}(R(X, X \bullet \text{nil}), R(X_1 \bullet \text{nil}, X_1)) = \emptyset$$

## КОММЕНТАРИИ.

Значит, SLD-резольвенту нельзя построить.

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 3.

$$G = ? R(X, X \cdot \text{nil}), P(c, Y)$$

$$D' = R(X_1 \cdot \text{nil}, Y_1) \leftarrow;$$

$$\text{НОУ}(R(X, X \cdot \text{nil}), R(X_1 \cdot \text{nil}, X_1)) = \emptyset$$

## КОММЕНТАРИИ.

Нужно выделить другую подцель или  
выбрать другое программное утверждение.

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Определение (SLD-резолютивного вычисления)

Пусть

- ▶  $G_0 = ? C_1, C_2, \dots, C_m$  — целевое утверждение,
- ▶  $\mathcal{P} = \{D_1, D_2, \dots, D_N\}$  — хорновская логическая программа.

Тогда (частичным) **SLD-резолютивным вычислением**, порожденным запросом  $G_0$  к логической программе  $\mathcal{P}$  называется последовательность троек (конечная или бесконечная)

$$(D_{j_1}, \theta_1, G_1), (D_{j_2}, \theta_2, G_2), \dots, (D_{j_n}, \theta_n, G_n), \dots,$$

в которой для любого  $i$ ,  $i \geq 1$ ,

- ▶  $D_{j_i} \in \mathcal{P}$ ,  $\theta_i \in \text{Subst}$ ,  $G_i$  — целевое утверждение (запрос);
- ▶ запрос  $G_i$  является SLD-резольвентой программного утверждения  $D_{j_i}$  и запроса  $G_{i-1}$  с унификатором  $\theta_i$ .

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Определение (SLD-резолютивного вычисления)

Частичное SLD-резолютивное вычисление

$$comp = (D_{j_1}, \theta_1, G_1), (D_{j_2}, \theta_2, G_2), \dots, (D_{j_k}, \theta_n, G_n)$$

называется

- ▶ **успешным вычислением** (SLD-резолютивным опровержением), если  $G_n = \square$ ;
- ▶ **бесконечным вычислением**, если  $comp$  — это бесконечная последовательность;
- ▶ **тупиковым вычислением**, если  $comp$  — это конечная последовательность, и при этом для запроса  $G_n$  невозможно построить ни одной SLD-резольвенты.

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Определение (SLD-резолютивного вычисления)

Пусть

- ▶  $G_0 = ? C_1, C_2, \dots, C_m$  — целевое утверждение с целевыми переменными  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ ,
- ▶  $\mathcal{P} = \{D_1, D_2, \dots, D_N\}$  — хорновская логическая программа,
- ▶  $comp = (D_{j_1}, \theta_1, G_1), (D_{j_2}, \theta_2, G_2), \dots, (D_{j_n}, \theta_n, \square)$  — успешное SLD-резолютивное вычисление, порожденное запросом  $G$  к программе  $\mathcal{P}$ .

Тогда подстановка  $\theta = (\theta_1\theta_2 \dots \theta_n)|_{Y_1, Y_2, \dots, Y_k}$ ,

представляющая собой композицию всех вычисленных унификаторов  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ , ограниченную целевыми переменными  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ ,

называется **ВЫЧИСЛЕННЫМ ОТВЕТОМ** на запрос  $G_0$  к программе  $\mathcal{P}$ .

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 4.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(X, a \cdot b \cdot c \cdot \mathbf{nil})$



# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 4.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(X, a \cdot b \cdot c \cdot nil)$

$G_0 = ?elem(X, a \cdot b \cdot c \cdot nil)$

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 4.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(X, a \cdot b \cdot c \cdot nil)$

$G_0 = ?elem(X, a \cdot b \cdot c \cdot nil)$

$elem(X_1, Y_1 \cdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$ ;

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 4.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(X, a \cdot b \cdot c \cdot nil)$

$G_0 = ?elem(X, a \cdot b \cdot c \cdot nil)$

$elem(X_1, Y_1 \cdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$ ;  
 $\theta_1 = \{X/X_1, Y_1/a, L_1/b \cdot c \cdot nil\}$

$G_1 = ?elem(X_1, b \cdot c \cdot nil)$

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 4.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(X, a \cdot b \cdot c \cdot nil)$

$G_0 = ?elem(X, a \cdot b \cdot c \cdot nil)$

$elem(X_1, Y_1 \cdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$ ;  
 $\theta_1 = \{X/X_1, Y_1/a, L_1/b \cdot c \cdot nil\}$

$G_1 = ?elem(X_1, b \cdot c \cdot nil)$

$elem(X_2, Y_2 \cdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2)$ ;

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 4.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(X, a \cdot b \cdot c \cdot nil)$

$G_0 = ?elem(X, a \cdot b \cdot c \cdot nil)$

$elem(X_1, Y_1 \cdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$ ;

$\theta_1 = \{X/X_1, Y_1/a, L_1/b \cdot c \cdot nil\}$

$G_1 = ?elem(X_1, b \cdot c \cdot nil)$

$elem(X_2, Y_2 \cdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2)$ ;

$\theta_2 = \{X_1/X_2, Y_2/b, L_2/c \cdot nil\}$

$G_2 = ?elem(X_2, c \cdot nil)$

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 4.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(X, a \cdot b \cdot c \cdot nil)$

$G_0 = ?elem(X, a \cdot b \cdot c \cdot nil)$

$elem(X_1, Y_1 \cdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$ ;

$\theta_1 = \{X/X_1, Y_1/a, L_1/b \cdot c \cdot nil\}$

$G_1 = ?elem(X_1, b \cdot c \cdot nil)$

$elem(X_2, Y_2 \cdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2)$ ;

$\theta_2 = \{X_1/X_2, Y_2/b, L_2/c \cdot nil\}$

$G_2 = ?elem(X_2, c \cdot nil)$

$elem(X_3, X_3 \cdot nil)$ ;

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 4.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(X, a \cdot b \cdot c \cdot nil)$

$G_0 = ?elem(X, a \cdot b \cdot c \cdot nil)$

$elem(X_1, Y_1 \cdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$ ;

$\theta_1 = \{X/X_1, Y_1/a, L_1/b \cdot c \cdot nil\}$

$G_1 = ?elem(X_1, b \cdot c \cdot nil)$

$elem(X_2, Y_2 \cdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2)$ ;

$\theta_2 = \{X_1/X_2, Y_2/b, L_2/c \cdot nil\}$

$G_2 = ?elem(X_2, c \cdot nil)$

$elem(X_3, X_3 \cdot nil)$ ;

$\theta_3 = \{X_2/c, X_3/c\}$

$G_3 = \square$

УСПЕХ!

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 4.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L);$

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L);$

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(X, a \cdot b \cdot c \cdot nil)$

$G_0 = ?elem(X, a \cdot b \cdot c \cdot nil)$

$elem(X_1, Y_1 \cdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1);$

$\theta_1 = \{X/X_1, Y_1/a, L_1/b \cdot c \cdot nil\}$

$G_1 = ?elem(X_1, b \cdot c \cdot nil)$

$elem(X_2, Y_2 \cdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2);$

$\theta_2 = \{X_1/X_2, Y_2/b, L_2/c \cdot nil\}$

$G_2 = ?elem(X_2, c \cdot nil)$

$elem(X_3, X_3 \cdot nil);$

$\theta_3 = \{X_2/c, X_3/c\}$

$G_3 = \square$

УСПЕХ!

Вычисленный ответ:  $\theta = (\theta_1\theta_2\theta_3)|_X = \{X/c\}$



# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 5.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(c, a \cdot b \cdot nil)$

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 5.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(c, a \cdot b \cdot nil)$

$G_0 = ?elem(c, a \cdot b \cdot nil)$

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 5.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(c, a \cdot b \cdot nil)$

$G_0 = ?elem(c, a \cdot b \cdot nil)$

$elem(X_1, Y_1 \cdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$ ;

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 5.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(c, a \cdot b \cdot nil)$

$G_0 = ?elem(c, a \cdot b \cdot nil)$

$elem(X_1, Y_1 \cdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$ ;

$\theta_1 = \{X_1/c, Y_1/a, L_1/b \cdot nil\}$

$G_1 = ?elem(c, b \cdot nil)$

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 5.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(c, a \cdot b \cdot nil)$

$G_0 = ?elem(c, a \cdot b \cdot nil)$

$elem(X_1, Y_1 \cdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$ ;  
 $\theta_1 = \{X_1/c, Y_1/a, L_1/b \cdot nil\}$

$G_1 = ?elem(c, b \cdot nil)$

$elem(X_2, Y_2 \cdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2)$ ;

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 5.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(c, a \cdot b \cdot nil)$

$G_0 = ?elem(c, a \cdot b \cdot nil)$

$elem(X_1, Y_1 \cdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$ ;

$\theta_1 = \{X_1/c, Y_1/a, L_1/b \cdot nil\}$

$G_1 = ?elem(c, b \cdot nil)$

$elem(X_2, Y_2 \cdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2)$ ;

$\theta_2 = \{X_1/X_2, Y_2/b, L_2/c \cdot nil\}$

$G_2 = ?elem(c, nil)$

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 5.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(c, a \cdot b \cdot nil)$

$G_0 = ?elem(c, a \cdot b \cdot nil)$

$elem(X_1, Y_1 \cdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$ ;

$\theta_1 = \{X_1/c, Y_1/a, L_1/b \cdot nil\}$

$G_1 = ?elem(c, b \cdot nil)$

$elem(X_2, Y_2 \cdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2)$ ;

$\theta_2 = \{X_1/X_2, Y_2/b, L_2/c \cdot nil\}$

$G_2 = ?elem(c, nil)$

$elem(X_3, X_3 \cdot nil)$ ;

Нет унификатора

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 5.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(c, a \cdot b \cdot nil)$

$G_0 = ?elem(c, a \cdot b \cdot nil)$

$elem(X_1, Y_1 \cdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$ ;

$\theta_1 = \{X_1/c, Y_1/a, L_1/b \cdot nil\}$

$G_1 = ?elem(c, b \cdot nil)$

$elem(X_2, Y_2 \cdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2)$ ;

$\theta_2 = \{X_1/X_2, Y_2/b, L_2/c \cdot nil\}$

$G_2 = ?elem(c, nil)$

$elem(X_3, Y_3 \cdot L_3) \leftarrow elem(X_3, L_3)$ ;

Нет унификатора



# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 5.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(c, a \cdot b \cdot nil)$

$G_0 = ?elem(c, a \cdot b \cdot nil)$

$elem(X_1, Y_1 \cdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$ ;

$\theta_1 = \{X_1/c, Y_1/a, L_1/b \cdot nil\}$

$G_1 = ?elem(c, b \cdot nil)$

$elem(X_2, Y_2 \cdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2)$ ;

$\theta_2 = \{X_1/X_2, Y_2/b, L_2/c \cdot nil\}$

$G_2 = ?elem(c, nil)$

failure

Нет SLD-резольвенты

ТУПИК!

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 6.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(a, X)$

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 6.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(a, X)$

$G_0 = ?elem(a, X)$

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 6.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(a, X)$

$G_0 = ?elem(a, X)$

$elem(X_1, Y_1 \cdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$ ;

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 6.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(a, X)$

$G_0 = ?elem(a, X)$

$elem(X_1, Y_1 \cdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$ ;  
 $\theta_1 = \{X_1/a, X/Y_1 \cdot L_1\}$

$G_1 = ?elem(a, L_1)$

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 6.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(a, X)$

$G_0 = ?elem(a, X)$

$elem(X_1, Y_1 \cdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$ ;  
 $\theta_1 = \{X_1/a, X/Y_1 \cdot L_1\}$

$G_1 = ?elem(a, L_1)$

$elem(X_2, Y_2 \cdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2)$ ;

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 6.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(a, X)$

$G_0 = ?elem(a, X)$

$elem(X_1, Y_1 \cdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$ ;

$\theta_1 = \{X_1/a, X/Y_1 \cdot L_1\}$

$G_1 = ?elem(a, L_1)$

$elem(X_2, Y_2 \cdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2)$ ;

$\theta_2 = \{X_2/a, L_1/Y_2 \cdot L_2\}$

$G_2 = ?elem(a, L_2)$

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 6.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(a, X)$

$G_0 = ?elem(a, X)$

$elem(X_1, Y_1 \cdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$ ;

$\theta_1 = \{X_1/a, X/Y_1 \cdot L_1\}$

$G_1 = ?elem(a, L_1)$

$elem(X_2, Y_2 \cdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2)$ ;

$\theta_2 = \{X_2/a, L_1/Y_2 \cdot L_2\}$

$G_2 = ?elem(a, L_2)$

$elem(X_3, Y_3 \cdot L_3) \leftarrow elem(X_3, L_3)$ ;



# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 6.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(a, X)$

$G_0 = ?elem(a, X)$

$elem(X_1, Y_1 \cdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$ ;

$\theta_1 = \{X_1/a, X/Y_1 \cdot L_1\}$

$G_1 = ?elem(a, L_1)$

$elem(X_2, Y_2 \cdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2)$ ;

$\theta_2 = \{X_2/a, L_1/Y_2 \cdot L_2\}$

$G_2 = ?elem(a, L_2)$

$elem(X_3, Y_3 \cdot L_3) \leftarrow elem(X_3, L_3)$ ;

$\theta_3 = \{X_3/a, L_2/Y_3 \cdot L_3\}$

$G_3 = ?elem(a, L_3)$

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

## Пример 6.

Логическая программа  $\mathcal{P}$ :

$elem(X, X \cdot L)$ ;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$ ;

Запрос  $G_0$ :

?  $elem(a, X)$

$G_0 = ?elem(a, X)$

$elem(X_1, Y_1 \cdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$ ;

$\theta_1 = \{X_1/a, X/Y_1 \cdot L_1\}$

$G_1 = ?elem(a, L_1)$

$elem(X_2, Y_2 \cdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2)$ ;

$\theta_2 = \{X_2/a, L_1/Y_2 \cdot L_2\}$

$G_2 = ?elem(a, L_2)$

$elem(X_3, Y_3 \cdot L_3) \leftarrow elem(X_3, L_3)$ ;

$\theta_3 = \{X_3/a, L_2/Y_3 \cdot L_3\}$

$G_3 = ?elem(a, L_3)$

и. т. д. до  $\infty$

Бесконечное вычисление.

# SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Теперь у нас есть два типа ответов на запросы к логическим программам:

- ▶ **правильные ответы**, которые логически следуют из программы;
- ▶ **вычисленные ответы**, которые конструируются по ходу SLD-резольютивных вычислений.

**Правильные ответы** — это то, что мы хотим получить, обращаясь с вопросами к программе.

**Вычисленные ответы** — это то, что нам в действительности выдает компьютер (интерпретатор программы).

Какова связь между правильными и вычисленными ответами?

# КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Теорема (корректности операционной семантики относительно декларативной семантики)

Пусть

- ▶  $G_0 = ? C_1, C_2, \dots, C_m$  — целевое утверждение,
- ▶  $\mathcal{P} = \{D_1, D_2, \dots, D_N\}$  — хорновская логическая программа,
- ▶  $\theta$  — вычисленный ответ на запрос  $G_0$  к программе  $\mathcal{P}$ .

Тогда  $\theta$  — правильный ответ на запрос  $G_0$  к программе  $\mathcal{P}$ .

**Доказательство.**

Рассмотрим успешное вычисление, порожденное запросом  $G_0$  к логической программе  $\mathcal{P}$ :

$$\text{comp} = (D_{j_1}, \theta_1, G_1), (D_{j_2}, \theta_2, G_2), \dots, (D_{j_n}, \theta_n, \square)$$

Покажем индукцией по длине вычисления  $n$ , что

$\theta = (\theta_1\theta_2 \dots \theta_n) \mid \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$  — это правильный ответ.

# КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

## Доказательство.

Базис индукции ( $n = 1$ ). Тогда

$$G_0 =? C_1 \quad D_{j_1} = A_0; \quad \theta_1 \in \text{НОУ}(C_1, A_0).$$

Значит,  $C_1\theta_1 = A_0\theta_1$ . Поскольку  $D_{j_1} \in \mathcal{P}$ , и мы приходим к следующему выводу:

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{X} A_0, \quad \text{почему?}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z} A_0\theta_1, \quad \text{почему?}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z} C_1\theta_1, \quad \text{почему?}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z} C_1\theta, \quad \text{почему?}$$

и, следовательно,  $\theta$  — это правильный ответ.

# КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

## Доказательство.

Индуктивный переход ( $n - 1 \rightarrow n$ ). Пусть

$$\begin{aligned}G_0 &= ? C_1, C_2, \dots, C_i, \dots, C_m \\D_{j_1} &= A_0 \leftarrow A_1, \dots, A_r; \\ \theta_1 &\in \text{НОУ}(C_i, A_0), \\G_1 &= ? (C_1, C_2, \dots, A_1, \dots, A_r, \dots, C_m)\theta_1.\end{aligned}$$

Тогда

$$\text{comp}' = (D_{j_2}, \theta_2, G_2), \dots, (D_{j_n}, \theta_n, \square)$$

— это успешное вычисление длины  $n - 1$ , порожденное запросом  $G_1$ . Значит, по предположению индукции,  $\theta' = \theta_2 \dots \theta_n |_{\text{Var}_{G_1}}$  — правильный ответ на запрос  $G_1$ .

Значит,

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z} (C_1 \& C_2 \& \dots \& A_1 \& \dots \& A_r \& \dots \& C_m) \theta_1 \theta'.$$

# КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Из  $\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}(C_1 \& C_2 \& \dots \& A_1 \& \dots \& A_r \& \dots \& C_m)\theta_1\theta'$

следует

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}(A_1 \& \dots \& A_r)\theta_1\theta'.$$

Поскольку  $D_{j_1} \in \mathcal{P}$ , верно

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{X}(A_1 \& \dots \& A_r \rightarrow A_0).$$

Значит, верно также

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}\left((A_1 \& \dots \& A_r)\theta_1\theta' \rightarrow A_0\theta_1\theta'\right).$$

Таким образом,

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}A_0\theta_1\theta'.$$

И, наконец, вспомнив, что  $A_0\theta_1 = C_i\theta_1$  (почему?), заключаем

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}C_i\theta_1\theta'.$$

# КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

**Доказательство.**

Из  $\mathcal{P} \models \forall \bar{Z} (C_1 \& C_2 \& \dots \& A_1 \& \dots \& A_r \& \dots \& C_m) \theta_1 \theta'$

следует

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z} (C_1 \& \dots \& C_{i-1} \& C_{i+1} \& \dots \& C_m) \theta_1 \theta'.$$

Мы показали, что

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z} C_i \theta_1 \theta'.$$

Значит,

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z} \underbrace{(C_1 \& \dots \& C_{i-1} \& C_i \& C_{i+1} \& \dots \& C_m)}_{G_0} \underbrace{\theta_1 \theta'}_{\theta}.$$

Значит,  $\theta_1 \theta' |_{\text{Var}_{G_0}} = \theta$  — правильный ответ на запрос  $G_0$ . □



# КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Итак, всякий вычисленный ответ — правильный.

А можно ли вычислить любой правильный ответ?

Полна ли наша операционная семантика?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 13.