

# Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

[zakh@cs.msu.su](mailto:zakh@cs.msu.su)

<http://mathcyb.cs.msu.su/courses/logprog.html>

## Лекция 4.

Подстановки.

Табличный вывод.

Корректность табличного вывода.

# ПОДСТАНОВКИ

**Подстановка** — это всякое отображение  $\theta : Var \rightarrow Term$ , сопоставляющее каждой переменной некоторый терм. Подстановки нужны для того, чтобы иметь возможность переходить от общих утверждений  $\forall x \forall y P(x, y)$  к их частным вариантам  $P(f(z), c)$ .

Множество  $Dom_\theta = \{x : \theta(x) \neq x\}$  называется **областью подстановки**. Если область подстановки — это конечное множество переменных, то такая подстановка называется конечной. Множество конечных подстановок обозначим **Subst**.

Если  $\theta \in Subst$  и  $Dom_\theta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , то подстановка  $\theta$  однозначно определяется множеством пар

$$\{x_1/\theta(x_1), x_2/\theta(x_2), \dots, x_n/\theta(x_n)\}.$$

Каждая пара  $x_i/\theta(x_i)$  называется **связкой**.

# ПОДСТАНОВКИ

Для заданного логического выражения  $E$  и подстановки  $\theta$  запись  $E\theta$  обозначает **результат применения подстановки  $\theta$  к  $E$** , который определится так:

Если  $E = x$ ,  $x \in Var$ , то  $E\theta = \theta(x)$ ;

Если  $E = c$ ,  $c \in Const$ , то  $E\theta = c$ ;

Если  $E = f(t_1, t_2, \dots, t_k)$ , то  $E\theta = f(t_1\theta, t_2\theta, \dots, t_k\theta)$ ;

Если  $E = P(t_1, t_2, \dots, t_k)$ , то  $E\theta = P(t_1\theta, t_2\theta, \dots, t_k\theta)$ ;

Если  $E = \varphi \& \psi$ , то  $E\theta = \varphi\theta \& \psi\theta$

(аналогично для формул  $\varphi \vee \psi$ ,  $\varphi \rightarrow \psi$ ,  $\neg \psi$ );

Если  $E = \forall x_0 \varphi$ , то  $E\theta = \forall x_0 (\varphi\theta')$ , где  $\theta'$  — новая подстановка, удовлетворяющая условию

$$\theta'(x) = \begin{cases} x_0, & \text{если } x = x_0, \\ \theta(x), & \text{если } x \neq x_0, \end{cases}$$

(аналогично для формул  $\exists x_0 \varphi$ ).

# ПОДСТАНОВКИ

## Пример

$$\varphi : \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(y)) \rightarrow R(f(x)) \vee \exists yP(y)$$

$$\theta = \{ x/g(x, c), y/x, z/f(z) \}$$

Выделяются все свободные вхождения переменных в  $\varphi$

$$\varphi : \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(y)) \rightarrow R(f(x)) \vee \exists yP(y)$$

К свободным вхождениям переменных применяется  $\theta$

$$\varphi\theta : \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(x)) \rightarrow R(f(g(x, c))) \vee \exists yP(y)$$

# ПОДСТАНОВКИ

В результате применения некоторых подстановок смысл утверждений (формул) может значительно исказиться.

«Если у каждого есть дед, то у субъекта  $x$  тоже есть дед»

$$\varphi(x) : \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(x, y)$$

Очевидно,  $\models \varphi(x)$

Применим к  $\varphi(x)$  подстановку  $\theta = \{ x/y \}$

$$\varphi(x)\theta : \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(y, y)$$

«Если у каждого есть дед, то есть и такие, которые приходятся дедом самим себе»

Очевидно,  $\not\models \varphi(x)\theta$

Как странно: общее утверждение  $\varphi(x)$  верно, а его частный случай  $\varphi(x)\theta$  — нет.

# ПОДСТАНОВКИ

Переменная  $x$  называется **свободной для терма**  $t$  в формуле  $\varphi(x)$ , если любое свободное вхождение переменной  $x$  в формуле  $\varphi(x)$  не лежит в области действия ни одного квантора, связывающего переменную из множества  $Var_t$ .

Подстановка  $\theta = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$  называется **правильной для формулы**  $\varphi$ , если для любой связки  $x_i/t_i$  переменная  $x_i$  свободна для терма  $t_i$  в формуле  $\varphi$ .

## Пример

Переменная  $y$  не является свободной для терма в формуле  $\varphi$   
 $\varphi : \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(y)) \rightarrow R(f(x)) \vee \exists yP(y)$

# ПОДСТАНОВКИ

Переменная  $x$  называется **свободной для терма**  $t$  в формуле  $\varphi(x)$ , если любое свободное вхождение переменной  $x$  в формуле  $\varphi(x)$  не лежит в области действия ни одного квантора, связывающего переменную из множества  $Var_t$ .

Подстановка  $\theta = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$  называется **правильной для формулы**  $\varphi$ , если для любой связки  $x_i/t_i$  переменная  $x_i$  свободна для терма  $t_i$  в формуле  $\varphi$ .

## Пример

Переменная  $y$  не является свободной для терма  $f(x, z)$  в формуле  $\varphi$

$$\varphi : \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(y)) \rightarrow R(f(x)) \vee \exists yP(y)$$

А вот для терма  $f(y, z)$  переменная  $y$  в формуле  $\varphi$  свободна.



# ПОДСТАНОВКИ

Переменная  $x$  называется **свободной для терма**  $t$  в формуле  $\varphi(x)$ , если любое свободное вхождение переменной  $x$  в формуле  $\varphi(x)$  не лежит в области действия ни одного квантора, связывающего переменную из множества  $Var_t$ .

Подстановка  $\theta = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$  называется **правильной для формулы**  $\varphi$ , если для любой связки  $x_i/t_i$  переменная  $x_i$  свободна для терма  $t_i$  в формуле  $\varphi$ .

## Пример

Переменная  $y$  не является свободной для терма  $f(x, z)$  в формуле  $\varphi$

$$\varphi : \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(y)) \rightarrow R(f(x)) \vee \exists y P(y)$$

А вот для терма  $f(y, z)$  переменная  $y$  в формуле  $\varphi$  свободна.

# ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Правила табличного вывода имеют вид

$$\frac{T_0}{T_1} \quad \text{или} \quad \frac{T_0}{T_1, T_2},$$

где  $T_0, T_1, T_2$  — семантические таблицы. Прочтение правила таково:

**Таблица  $T_0$  выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица  $T_1$  (или  $T_2$ ).**

В тех случаях, когда таблица  $T_0$  редуцируется в пару таблиц  $T_1, T_2$ , будем говорить, что правило имеет альтернативы.

# ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

## Правила табличного вывода

$$L\& \frac{\langle \Gamma, \varphi \& \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi, \psi \mid \Delta \rangle}$$

$$R\& \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \& \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\vee \frac{\langle \Gamma, \varphi \vee \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle}$$

$$R\vee \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \vee \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi, \psi \rangle}$$

$$L\rightarrow \frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \varphi, \Delta \rangle}$$

$$R\rightarrow \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rightarrow \psi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\neg \frac{\langle \Gamma, \neg \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$$

$$R\neg \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \neg \varphi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle}$$

# ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

## Правила табличного вывода

$$\text{L}\forall \frac{\langle \Gamma, \forall x \varphi(x) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(x)\{x/t\} | \Delta \rangle}$$

переменная  $x$  свободна для терма  $t$   
в формуле  $\varphi(x)$

# ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

## Правила табличного вывода

$$L\forall \frac{\langle \Gamma, \forall x\varphi(x) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x\varphi(x), \varphi(x)\{x/t\} | \Delta \rangle}$$

переменная  $x$  свободна для терма  $t$   
в формуле  $\varphi(x)$

$$R\forall \frac{\langle \Gamma | \Delta, \forall x\varphi(x) \rangle}{\langle \Gamma | \Delta, \varphi(x)\{x/c\} \rangle}$$

константа  $c$  не содержится в формулах  
из  $\Gamma$ ,  $\Delta$  и в формуле  $\varphi(x)$

# ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

## Правила табличного вывода

$$\mathcal{L}\exists \frac{\langle \Gamma, \exists x\varphi(x) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi(x)\{x/c\} | \Delta \rangle}$$

константа  $c$  не содержится в формулах из  $\Gamma$ ,  $\Delta$  и в формуле  $\varphi(x)$

# ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

## Правила табличного вывода

$$L\exists \frac{\langle \Gamma, \exists x\varphi(x) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi(x)\{x/c\} | \Delta \rangle}$$

константа  $c$  не содержится в формулах из  $\Gamma$ ,  $\Delta$  и в формуле  $\varphi(x)$

$$R\exists \frac{\langle \Gamma | \Delta, \exists x\varphi(x) \rangle}{\langle \Gamma | \Delta, \exists x\varphi(x), \varphi(x)\{x/t\} \rangle}$$

переменная  $x$  свободна для терма  $t$  в формуле  $\varphi(x)$

# ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Зачем нужны ограничения на подставляемые термы  
в правилах  $L\forall$ ,  $R\forall$ ,  $L\exists$ ,  $R\exists$ ?

Если в правиле табличного вывода  $L\forall$  не придерживаться  
правильных подстановок, то



# ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Зачем нужны ограничения на подставляемые термы  
в правилах  $L\forall$ ,  $R\forall$ ,  $L\exists$ ,  $R\exists$ ?

Если в правиле табличного вывода  $L\forall$  не придерживаться  
правильных подстановок, то  
выполнимая таблица

$$- L\forall : \frac{\langle \forall x \exists y R(x, y) \mid \exists y R(y, y) \rangle}{}$$

# ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Зачем нужны ограничения на подставляемые термы  
в правилах  $L\forall$ ,  $R\forall$ ,  $L\exists$ ,  $R\exists$ ?

Если в правиле табличного вывода  $L\forall$  не придерживаться  
правильных подстановок, то  
выполнимая таблица

$$- L\forall : \frac{\langle \forall x \exists y R(x, y) \mid \exists y R(y, y) \rangle}{\langle \forall x \exists y R(x, y), \exists y R(y, y) \mid \exists y R(y, y) \rangle}$$

преобразуется в закрытую, т.е. невыполнимую таблицу .

# ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Зачем нужны ограничения на подставляемые термы  
в правилах  $L\forall$ ,  $R\forall$ ,  $L\exists$ ,  $R\exists$ ?

Если в правиле табличного вывода  $L\forall$  не придерживаться  
правильных подстановок, то  
выполнимая таблица

$$- L\forall : \frac{\langle \forall x \exists y R(x, y) \mid \exists y R(y, y) \rangle}{\langle \forall x \exists y R(x, y), \exists y R(y, y) \mid \exists y R(y, y) \rangle}$$

преобразуется в **закрытую**, т.е. **невыполнимую таблицу** .

Причина в том, что переменная  $x$  несвободна для терма  $y$  в формуле  $\exists y R(x, y)$ .

# ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Зачем нужны ограничения на подставляемые термы  
в правилах  $L\forall$ ,  $R\forall$ ,  $L\exists$ ,  $R\exists$ ?

Если в правиле табличного вывода  $L\exists$  подставить «несвежую» константу, то

# ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Зачем нужны ограничения на подставляемые термы  
в правилах  $L\forall$ ,  $R\forall$ ,  $L\exists$ ,  $R\exists$ ?

Если в правиле табличного вывода  $L\exists$  подставить «несвежую» константу, то выполняемая таблица

$$- L\exists : \frac{\langle \exists x P(x) \mid P(c) \rangle}{}$$

# ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Зачем нужны ограничения на подставляемые термы  
в правилах  $L\forall$ ,  $R\forall$ ,  $L\exists$ ,  $R\exists$ ?

Если в правиле табличного вывода  $L\exists$  подставить «несвежую» константу, то выполняемая таблица

$$- L\exists : \frac{\langle \exists x P(x) \mid P(c) \rangle}{\langle P(c) \mid P(c) \rangle}$$

преобразуется в закрытую, т.е. невыполнимую таблицу .

# ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Зачем нужны ограничения на подставляемые термы  
в правилах  $L\forall$ ,  $R\forall$ ,  $L\exists$ ,  $R\exists$ ?

Если в правиле табличного вывода  $L\exists$  подставить «несвежую» константу, то выполняемая таблица

$$- L\exists : \frac{\langle \exists x P(x) \mid P(c) \rangle}{\langle P(c) \mid P(c) \rangle}$$

преобразуется в закрытую, т.е. невыполнимую таблицу .

Причина в том, что константа, подставляемая вместо переменной  $x$ , должна быть отлична от всех ранее использованных констант.

# ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Определение табличного вывода

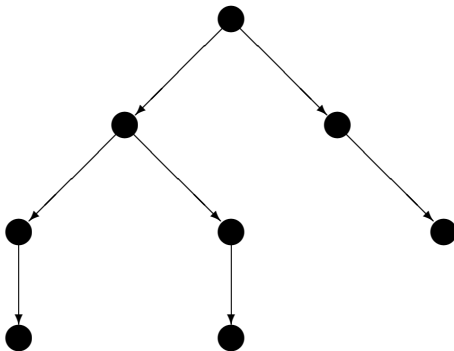
Табличный вывод для таблицы  $T_0$  — это



# ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

## Определение табличного вывода

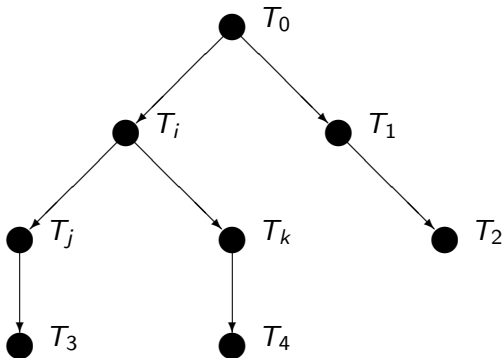
Табличный вывод для таблицы  $T_0$  — это корневое дерево,



# ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

## Определение табличного вывода

Табличный вывод для таблицы  $T_0$  — это корневое дерево, вершинами которого служат семантические таблицы и при этом

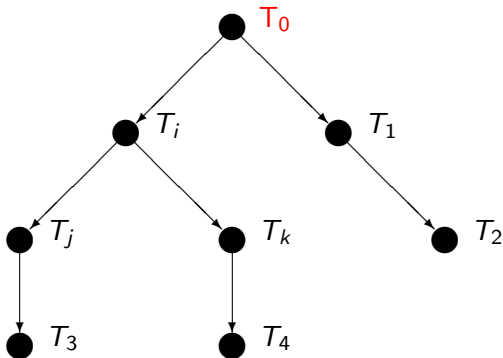


# ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

## Определение табличного вывода

Табличный вывод для таблицы  $T_0$  — это корневое дерево, вершинами которого служат семантические таблицы и при этом

- 1) корнем дерева является таблица  $T_0$ ;



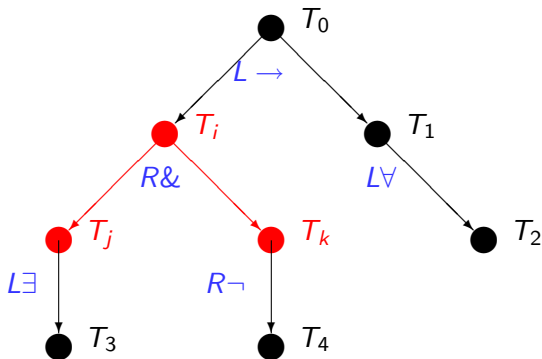
# ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

## Определение табличного вывода

2) из вершины  $T_i$  исходят дуги в вершины  $T_j$  ( $T_k$ )

$\Leftrightarrow$

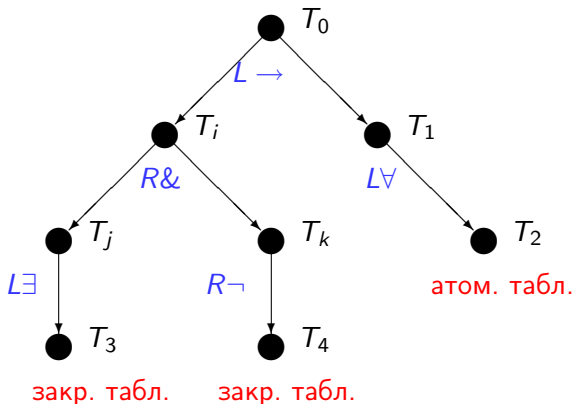
$\frac{T_i}{T_j, (T_k)}$  — правило табличного вывода;



# ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

## Определение табличного вывода

- 3) листьями дерева могут быть только закрытые и атомарные таблицы.



# ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

## Определение табличного вывода

Табличный вывод будем называть **успешным** (или **табличным опровержением**), если дерево вывода — конечное, и все листья дерева — закрытые таблицы.

Существование успешного вывода означает, что корневая семантическая таблица  $T_0$  невыполнима.

Если  $T_0 = \langle \emptyset \mid \varphi \rangle$ , то это означает, что  $\models \varphi$ .

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x)) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x)) \rangle$$

$\downarrow$  (R  $\rightarrow$ )

$$T_1 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \mid \forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x) \rangle$$



$$\begin{array}{c}
 T_0 = \langle \emptyset \mid \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x)) \rangle \\
 \downarrow (R \rightarrow) \\
 T_1 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \mid \forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x) \rangle \\
 \downarrow (R \rightarrow) \\
 T_2 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid \forall xB(x) \rangle
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 T_0 = \langle \emptyset \mid \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x)) \rangle \\
 \downarrow (R \rightarrow) \\
 T_1 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \mid \forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x) \rangle \\
 \downarrow (R \rightarrow) \\
 T_2 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid \forall xB(x) \rangle \\
 \downarrow (R\forall) \\
 T_3 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid B(c) \rangle
 \end{array}$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x)) \rangle$$

↓ (R →)

$$T_1 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \mid \forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x) \rangle$$

↓ (R →)

$$T_2 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid \forall xB(x) \rangle$$

↓ (R∀)

$$T_3 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid B(c) \rangle$$

↓ (L∀)

$$T_4 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x), P(c) \mid B(c) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x)) \rangle$$

↓ (R →)

$$T_1 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \mid \forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x) \rangle$$

↓ (R →)

$$T_2 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid \forall xB(x) \rangle$$

↓ (R∀)

$$T_3 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid B(c) \rangle$$

↓ (L∀)

$$T_4 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x), P(c) \mid B(c) \rangle$$

↓ (L∀)

$$T_5 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), P(c) \rightarrow B(c), \forall xP(x), P(c) \mid B(c) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x)) \rangle$$

↓ (R →)

$$T_1 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \mid \forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x) \rangle$$

↓ (R →)

$$T_2 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid \forall xB(x) \rangle$$

↓ (R∀)

$$T_3 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid B(c) \rangle$$

↓ (L∀)

$$T_4 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x), P(c) \mid B(c) \rangle$$

↓ (L∀)

$$T_5 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), P(c) \rightarrow B(c), \forall xP(x), P(c) \mid B(c) \rangle$$

(L →)

$$T_6 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \mid B(c) \rangle \quad T_7 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \mid B(c), P(c) \rangle$$

$$\forall xP(x), B(c), P(c) \qquad \qquad \qquad \forall xP(x), P(c)$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x)) \rangle$$

↓ (R →)

$$T_1 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \mid \forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x) \rangle$$

↓ (R →)

$$T_2 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid \forall xB(x) \rangle$$

↓ (R∀)

$$T_3 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid B(c) \rangle$$

↓ (L∀)

$$T_4 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x), P(c) \mid B(c) \rangle$$

↓ (L∀)

$$T_5 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), P(c) \rightarrow B(c), \forall xP(x), P(c) \mid B(c) \rangle$$

↓ (L →)

$$T_6 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \mid B(c) \rangle \quad T_7 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \mid B(c), P(c) \rangle$$

$$\forall xP(x), B(c), P(c) \qquad \qquad \qquad \forall xP(x), P(c)$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x)) \rangle$$

↓ (R →)

$$T_1 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \mid \forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x) \rangle$$

↓ (R →)

$$T_2 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid \forall xB(x) \rangle$$

↓ (R∀)

$$T_3 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid B(c) \rangle$$

↓ (L∀)

$$T_4 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x), P(c) \mid B(c) \rangle$$

↓ (L∀)

$$T_5 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), P(c) \rightarrow B(c), \forall xP(x), P(c) \mid B(c) \rangle$$

↓ (L →)

$$T_6 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), B(c) \mid \forall xP(x), B(c), P(c) \rangle \quad T_7 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), B(c), P(c) \mid \forall xP(x), P(c) \rangle$$

закрытая таблица

закрытая таблица

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \exists x(P(x) \rightarrow \forall xP(x)) \rangle$$



$$T_0 = \langle \emptyset \mid \exists x(P(x) \rightarrow \forall xP(x)) \rangle$$

$\downarrow$   $(R \rightarrow)$

$$T_1 = \langle \exists xP(x) \mid \forall xP(x) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \exists x(P(x) \rightarrow \forall xP(x)) \rangle$$

↓ (R →)

$$T_1 = \langle \exists xP(x) \mid \forall xP(x) \rangle$$

↓ (L∃)

$$T_2 = \langle P(c_1) \mid \forall xP(x) \rangle$$

$$\begin{array}{c}
 T_0 = \langle \emptyset \mid \exists x(P(x) \rightarrow \forall xP(x)) \rangle \\
 \downarrow (R \rightarrow) \\
 T_1 = \langle \exists xP(x) \mid \forall xP(x) \rangle \\
 \downarrow (L\exists) \\
 T_2 = \langle P(c_1) \mid \forall xP(x) \rangle \\
 \downarrow (R\forall) \\
 T_3 = \langle P(c_1) \mid P(c_2) \rangle
 \end{array}$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \exists x(P(x) \rightarrow \forall xP(x)) \rangle$$

↓ (R →)

$$T_1 = \langle \exists xP(x) \mid \forall xP(x) \rangle$$

↓ (L∃)

$$T_2 = \langle P(c_1) \mid \forall xP(x) \rangle$$

↓ (R∀)

$$T_3 = \langle P(c_1) \mid P(c_2) \rangle$$

атомарная таблица

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

↓ (R →)

$$T_1 = \langle \forall y \exists x P(x, y) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

↓ (R →)

$$T_1 = \langle \forall y \exists x P(x, y) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

↓ (L∀)

$$T_2 = \langle \forall y \exists x P(x, y), \exists x P(x, c_1) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$(R \rightarrow)$

$$T_1 = \langle \forall y \exists x P(x, y) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$(L\forall)$

$$T_2 = \langle \forall y \exists x P(x, y), \exists x P(x, c_1) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$(R\exists)$

$$T_3 = \langle \forall y \exists x P(x, y), \exists x P(x, c_1) \mid \forall y P(c_2, y), \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$



$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$(R \rightarrow)$

$$T_1 = \langle \forall y \exists x P(x, y) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$(L\forall)$

$$T_2 = \langle \forall y \exists x P(x, y), \exists x P(x, c_1) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$(R\exists)$

$$T_3 = \langle \forall y \exists x P(x, y), \exists x P(x, c_1) \mid \forall y P(c_2, y), \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$(L\exists)$

$$T_4 = \langle \forall y \exists x P(x, y), P(c_3, c_1) \mid \forall y P(c_2, y), \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$(R \rightarrow)$

$$T_1 = \langle \forall y \exists x P(x, y) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$(L\forall)$

$$T_2 = \langle \forall y \exists x P(x, y), \exists x P(x, c_1) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$(R\exists)$

$$T_3 = \langle \forall y \exists x P(x, y), \exists x P(x, c_1) \mid \forall y P(c_2, y), \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$(L\exists)$

$$T_4 = \langle \forall y \exists x P(x, y), P(c_3, c_1) \mid \forall y P(c_2, y), \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$(R\forall)$

$$T_5 = \langle \forall y \exists x P(x, y), P(c_3, c_1) \mid P(c_2, c_4), \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$(R \rightarrow)$

$$T_1 = \langle \forall y \exists x P(x, y) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$(L\forall)$

$$T_2 = \langle \forall y \exists x P(x, y), \exists x P(x, c_1) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$(R\exists)$

$$T_3 = \langle \forall y \exists x P(x, y), \exists x P(x, c_1) \mid \forall y P(c_2, y), \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$(L\exists)$

$$T_4 = \langle \forall y \exists x P(x, y), P(c_3, c_1) \mid \forall y P(c_2, y), \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$(R\forall)$

$$T_5 = \langle \forall y \exists x P(x, y), P(c_3, c_1) \mid P(c_2, c_4), \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$



$\infty$

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Лемма о корректности правил вывода

Каково бы ни было правило табличного вывода

$L\&, R\&, LV, RV, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg, L\forall, R\forall, L\exists, R\exists$

$$\frac{T_0}{T_1, (T_2)},$$

таблица  $T_0$  выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица  $T_1$  (или выполнима таблица  $T_2$ ).

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Рассмотрим правило  $L \rightarrow: \frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi | \Delta \rangle, \langle \Gamma | \varphi, \Delta \rangle}$ .

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Рассмотрим правило  $L \rightarrow: \frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi | \Delta \rangle, \langle \Gamma | \varphi, \Delta \rangle}$ .

Таблица  $\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi | \Delta \rangle$  выполнима  $\iff$

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Рассмотрим правило  $L \rightarrow: \frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi | \Delta \rangle, \langle \Gamma | \varphi, \Delta \rangle}$ .

Таблица  $\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi | \Delta \rangle$  выполнима  $\iff$   
существует интерпретация  $I$  и набор  $\bar{\mathbf{d}} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle$  значений свободных переменных, для которых

$$\left\{ \begin{array}{l} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \models (\varphi \rightarrow \psi)[\bar{\mathbf{d}}] \end{array} \right.$$

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Рассмотрим правило  $L \rightarrow: \frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi | \Delta \rangle, \langle \Gamma | \varphi, \Delta \rangle}$ .

Таблица  $\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi | \Delta \rangle$  выполнима  $\iff$   
существует интерпретация  $I$  и набор  $\bar{\mathbf{d}} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle$  значений свободных переменных, для которых

$$\left\{ \begin{array}{l} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \models (\varphi \rightarrow \psi)[\bar{\mathbf{d}}] \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \models \psi[\bar{\mathbf{d}}] \text{ или } I \not\models \varphi[\bar{\mathbf{d}}] \end{array} \right.$$



# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Рассмотрим правило  $L \rightarrow: \frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi | \Delta \rangle, \langle \Gamma | \varphi, \Delta \rangle}$ .

Таблица  $\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi | \Delta \rangle$  выполнима  $\iff$   
существует интерпретация  $I$  и набор  $\bar{\mathbf{d}} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle$  значений свободных переменных, для которых

$$\left\{ \begin{array}{l} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \models (\varphi \rightarrow \psi)[\bar{\mathbf{d}}] \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \models \psi[\bar{\mathbf{d}}] \text{ или } I \not\models \varphi[\bar{\mathbf{d}}] \end{array} \right. \iff$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \models \psi[\bar{\mathbf{d}}] \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \varphi[\bar{\mathbf{d}}] \end{array} \right.$$

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Рассмотрим правило  $L \rightarrow: \frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi | \Delta \rangle, \langle \Gamma | \varphi, \Delta \rangle}$ .

Таблица  $\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi | \Delta \rangle$  выполнима  $\iff$   
существует интерпретация  $I$  и набор  $\bar{\mathbf{d}} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle$  значений свободных переменных, для которых

$$\left\{ \begin{array}{l} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \models (\varphi \rightarrow \psi)[\bar{\mathbf{d}}] \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \models \psi[\bar{\mathbf{d}}] \text{ или } I \not\models \varphi[\bar{\mathbf{d}}] \end{array} \right. \iff$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \models \psi[\bar{\mathbf{d}}] \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \varphi[\bar{\mathbf{d}}] \end{array} \right. \iff$$

одна из таблиц  $T_1 = \langle \Gamma, \psi | \Delta \rangle$  или  $T_2 = \langle \Gamma | \varphi, \Delta \rangle$  выполнима.

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Аналогично доказывается корректность остальных 7 правил для логических связок

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Рассмотрим правило  $L\forall$ : 
$$\frac{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0), \varphi(x_0) \{x_0/t\} \mid \Delta \rangle}.$$

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Рассмотрим правило  $L\forall: \frac{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0), \varphi(x_0) \{x_0/t\} | \Delta \rangle}.$

Таблица  $\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) | \Delta \rangle$  выполнима  $\iff$

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Рассмотрим правило  $L\forall: \frac{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0), \varphi(x_0) \{x_0/t\} | \Delta \rangle}$ .

Таблица  $\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) | \Delta \rangle$  выполнима  $\iff$  существует интерпретация  $I$  и набор  $d_1, \dots, d_n$  значений свободных переменных, для которых

$$\begin{cases} I \models \Gamma[d_1, \dots, d_n], \\ I \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n], \\ I \models (\forall x_0 \varphi)[d_1, \dots, d_n] \end{cases}$$

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Рассмотрим правило  $L\forall: \frac{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0), \varphi(x_0) \{x_0/t\} | \Delta \rangle}$ .

Таблица  $\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) | \Delta \rangle$  выполнима  $\iff$  существует интерпретация  $I$  и набор  $d_1, \dots, d_n$  значений свободных переменных, для которых

$$\begin{cases} I \models \Gamma[d_1, \dots, d_n], \\ I \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n], \\ I \models (\forall x_0 \varphi)[d_1, \dots, d_n] \end{cases}$$

Пусть  $d_0 = t[d_1, \dots, d_n]$ . Тогда

$$I \models (\forall x_0 \varphi)[d_1, \dots, d_n]$$

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Рассмотрим правило  $L\forall: \frac{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0), \varphi(x_0) \{x_0/t\} | \Delta \rangle}$ .

Таблица  $\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) | \Delta \rangle$  выполнима  $\iff$  существует интерпретация  $I$  и набор  $d_1, \dots, d_n$  значений свободных переменных, для которых

$$\begin{cases} I \models \Gamma[d_1, \dots, d_n], \\ I \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n], \\ I \models (\forall x_0 \varphi)[d_1, \dots, d_n] \end{cases} \quad \text{Пусть } d_0 = t[d_1, \dots, d_n]. \text{ Тогда}$$

$$I \models (\forall x_0 \varphi)[d_1, \dots, d_n] \Rightarrow I \models \varphi[d_0, d_1, \dots, d_n]$$



# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Рассмотрим правило  $L\forall: \frac{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0), \varphi(x_0) \{x_0/t\} | \Delta \rangle}$ .

Таблица  $\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) | \Delta \rangle$  выполнима  $\iff$  существует интерпретация  $I$  и набор  $d_1, \dots, d_n$  значений свободных переменных, для которых

$$\begin{cases} I \models \Gamma[d_1, \dots, d_n], \\ I \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n], \\ I \models (\forall x_0 \varphi)[d_1, \dots, d_n] \end{cases} \quad \text{Пусть } d_0 = t[d_1, \dots, d_n]. \text{ Тогда}$$

$$I \models (\forall x_0 \varphi)[d_1, \dots, d_n] \Rightarrow I \models \varphi[d_0, d_1, \dots, d_n] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I \models \varphi[t[d_1, \dots, d_n], d_1, \dots, d_n]$$

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Рассмотрим правило  $L\forall: \frac{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0), \varphi(x_0) \{x_0/t\} | \Delta \rangle}$ .

Таблица  $\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) | \Delta \rangle$  выполнима  $\iff$  существует интерпретация  $I$  и набор  $d_1, \dots, d_n$  значений свободных переменных, для которых

$$\begin{cases} I \models \Gamma[d_1, \dots, d_n], \\ I \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n], \\ I \models (\forall x_0 \varphi)[d_1, \dots, d_n] \end{cases} \quad \text{Пусть } d_0 = t[d_1, \dots, d_n]. \text{ Тогда}$$

$$\begin{aligned} I \models (\forall x_0 \varphi)[d_1, \dots, d_n] &\Rightarrow I \models \varphi[d_0, d_1, \dots, d_n] \Rightarrow \\ \Rightarrow I \models \varphi[t[d_1, \dots, d_n], d_1, \dots, d_n] &\Rightarrow I \models \varphi\{x_0/t\}[d_1, \dots, d_n]. \end{aligned}$$

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Рассмотрим правило  $L\forall: \frac{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0), \varphi(x_0) \{x_0/t\} \mid \Delta \rangle}$ .

Таблица  $\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) \mid \Delta \rangle$  выполнима  $\iff$  существует интерпретация  $I$  и набор  $d_1, \dots, d_n$  значений свободных переменных, для которых

$$\begin{cases} I \models \Gamma[d_1, \dots, d_n], \\ I \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n], \\ I \models (\forall x_0 \varphi)[d_1, \dots, d_n] \end{cases} \quad \text{Пусть } d_0 = t[d_1, \dots, d_n]. \text{ Тогда}$$

$$\begin{aligned} I \models (\forall x_0 \varphi)[d_1, \dots, d_n] &\Rightarrow I \models \varphi[d_0, d_1, \dots, d_n] \Rightarrow \\ &\Rightarrow I \models \varphi[t[d_1, \dots, d_n], d_1, \dots, d_n] \Rightarrow I \models \varphi\{x_0/t\}[d_1, \dots, d_n]. \end{aligned}$$

Следовательно, таблица  $\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0), \varphi(x_0) \{x_0/t\} \mid \Delta \rangle$  выполнима в интерпретации  $I$

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Рассмотрим правило  $L\forall: \frac{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0), \varphi(x_0) \{x_0/t\} \mid \Delta \rangle}$ .

Таблица  $\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) \mid \Delta \rangle$  выполнима  $\iff$  существует интерпретация  $I$  и набор  $d_1, \dots, d_n$  значений свободных переменных, для которых

$$\begin{cases} I \models \Gamma[d_1, \dots, d_n], \\ I \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n], \\ I \models (\forall x_0 \varphi)[d_1, \dots, d_n] \end{cases} \quad \text{Пусть } d_0 = t[d_1, \dots, d_n]. \text{ Тогда}$$

$$\begin{aligned} I \models (\forall x_0 \varphi)[d_1, \dots, d_n] &\Rightarrow I \models \varphi[d_0, d_1, \dots, d_n] \Rightarrow \\ &\Rightarrow I \models \varphi[t[d_1, \dots, d_n], d_1, \dots, d_n] \Rightarrow I \models \varphi\{x_0/t\}[d_1, \dots, d_n]. \end{aligned}$$

Следовательно, таблица  $\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0), \varphi(x_0) \{x_0/t\} \mid \Delta \rangle$  выполнима в интерпретации  $I$

На каком этапе доказательства существенно используется тот факт, что переменная  $x_0$  свободна для терма  $t$  в формуле  $\varphi$  ?

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Рассмотрим правило  $L\exists: \frac{\langle \Gamma, \exists x \varphi(x) \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi(x) \{x/c\} \mid \Delta \rangle}$ .

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Рассмотрим правило  $L\exists: \frac{\langle \Gamma, \exists x\varphi(x) \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi(x)\{x/c\} \mid \Delta \rangle}$ .

Очевидно, что выполнимость таблицы  $\langle \Gamma, \varphi(x)\{x/c\} \mid \Delta \rangle$  влечет выполнимость таблицы  $\langle \Gamma, \exists x\varphi(x) \mid \Delta \rangle$

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Рассмотрим правило  $\mathcal{L}\exists: \frac{\langle \Gamma, \exists x\varphi(x) \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi(x)\{x/c\} \mid \Delta \rangle}$ .

Очевидно, что выполнимость таблицы  $\langle \Gamma, \varphi(x)\{x/c\} \mid \Delta \rangle$  влечет выполнимость таблицы  $\langle \Gamma, \exists x\varphi(x) \mid \Delta \rangle$

Допустим, что выполнима таблица  $\langle \Gamma, \exists x\varphi(x) \mid \Delta \rangle$ . Тогда существует интерпретация  $I$  и набор  $d_1, \dots, d_n$  значений свободных переменных, для которых

$$\begin{cases} I \models \Gamma[d_1, \dots, d_n], \\ I \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n], \\ I \models (\exists x\varphi)[d_1, \dots, d_n] \end{cases}$$

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Рассмотрим правило  $L\exists: \frac{\langle \Gamma, \exists x\varphi(x) \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi(x)\{x/c\} \mid \Delta \rangle}$ .

Очевидно, что выполнимость таблицы  $\langle \Gamma, \varphi(x)\{x/c\} \mid \Delta \rangle$  влечет выполнимость таблицы  $\langle \Gamma, \exists x\varphi(x) \mid \Delta \rangle$

Допустим, что выполнима таблица  $\langle \Gamma, \exists x\varphi(x) \mid \Delta \rangle$ . Тогда существует интерпретация  $I$  и набор  $d_1, \dots, d_n$  значений свободных переменных, для которых

$$\begin{cases} I \models \Gamma[d_1, \dots, d_n], \\ I \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n], \\ I \models (\exists x\varphi)[d_1, \dots, d_n] \end{cases}$$

Выполнимость  $\exists x\varphi[d_1, \dots, d_n]$  означает, что существует такой элемент  $d_0 \in D_I$ , что  $I \models \varphi[d_0, d_1, \dots, d_n]$ .



# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Рассмотрим интерпретацию  $J$ , которая отличается от  $I$ , только тем, что в  $J$  константа  $c$  имеет другое значение, а именно  $\bar{c} = d_0$ .

Тогда  $J \models (\varphi\{x/c\})[d_1, \dots, d_n]$ .

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Рассмотрим интерпретацию  $J$ , которая отличается от  $I$ , только тем, что в  $J$  константа  $c$  имеет другое значение, а именно  $\bar{c} = d_0$ .

Тогда  $J \models (\varphi\{x/c\})[d_1, \dots, d_n]$ .

Кроме того,  $J \models \Gamma[d_1, \dots, d_n]$  и  $J \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n]$ . Почему?

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Рассмотрим интерпретацию  $J$ , которая отличается от  $I$ , только тем, что в  $J$  константа  $c$  имеет другое значение, а именно  $\bar{c} = d_0$ .

Тогда  $J \models (\varphi\{x/c\})[d_1, \dots, d_n]$ .

Кроме того,  $J \models \Gamma[d_1, \dots, d_n]$  и  $J \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n]$ . Почему?

Следовательно, таблица  $\langle \Gamma, \varphi(x)\{x/c\} \mid \Delta \rangle$  выполнима в интерпретации  $J$ .

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Доказательство леммы

Рассмотрим интерпретацию  $J$ , которая отличается от  $I$ , только тем, что в  $J$  константа  $c$  имеет другое значение, а именно  $\bar{c} = d_0$ .

Тогда  $J \models (\varphi\{x/c\})[d_1, \dots, d_n]$ .

Кроме того,  $J \models \Gamma[d_1, \dots, d_n]$  и  $J \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n]$ . Почему?

Следовательно, таблица  $\langle \Gamma, \varphi(x)\{x/c\} | \Delta \rangle$  выполнима в интерпретации  $J$ .

На каком этапе доказательства существенно используется тот факт, что константа  $c$  не входит в состав формул из  $\Gamma$ ,  $\Delta$  и формулы  $\varphi$  ?

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Теорема корректности табличного вывода

Если для семантической таблицы  $T_0$  существует успешный табличный вывод, то таблица  $T_0$  невыполнима.

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Теорема корректности табличного вывода

Если для семантической таблицы  $T_0$  существует успешный табличный вывод, то таблица  $T_0$  невыполнима.

## Доказательство

Следует из

- ▶ определения табличного вывода,
- ▶ леммы о корректности правил табличного вывода,
- ▶ и утверждения о невыполнимости закрытых таблиц.

# КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

## Теорема корректности табличного вывода

Если для семантической таблицы  $T_0$  существует успешный табличный вывод, то таблица  $T_0$  невыполнима.

## Доказательство

Следует из

- ▶ определения табличного вывода,
- ▶ леммы о корректности правил табличного вывода,
- ▶ и утверждения о невыполнимости закрытых таблиц.

## Следствие

Если для таблицы  $T_\varphi = \langle \emptyset \mid \varphi \rangle$  можно построить успешный табличный вывод, то  $\models \varphi$ .

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 4.