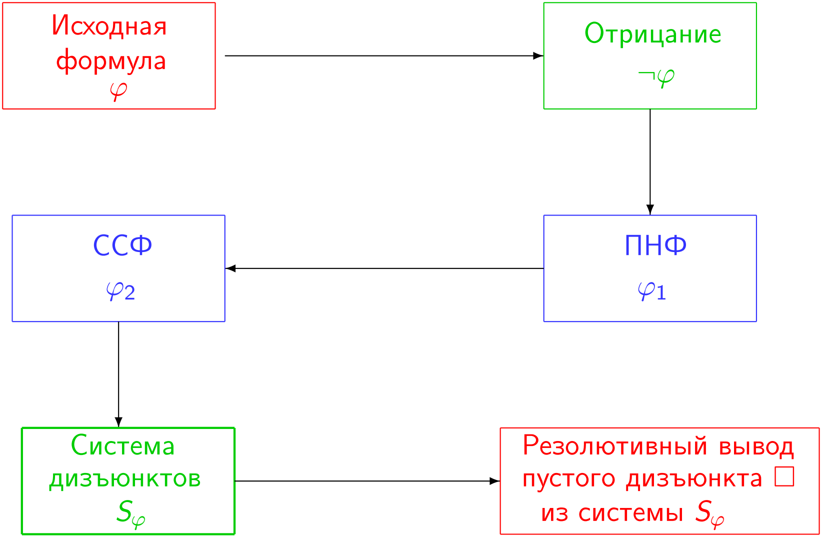
Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 7.

Эрбрановские интерпретации.
Теорема Эрбрана.
Задача унификации.

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ



ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Проверка общезначимости формулы φ сводится к проверке противоречивости системы дизъюнктов S_φ.

Этап 1. Сведение проблемы общезначимости к проблеме противоречивости: $\varphi \rightsquigarrow \varphi_0 = \neg\varphi$

Этап 2. Построение предваренной нормальной формы (ПНФ).

$$\varphi_0 \rightsquigarrow \varphi_1 = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \,(D_1 \& D_2 \& \dots \& D_N)$$

Этап 3. Построение сколемовской стандартной формы (ССФ).

$$\varphi_1 \rightsquigarrow \varphi_2 = \forall x_{i_1} \forall x_{i_2} \dots \forall x_{i_k} \,(D_1 \& D_2 \& \dots \& D_N)$$

Этап 4. Построение системы дизъюнктов.

$$\varphi_2 \rightsquigarrow S_\varphi = \{D_1,\ D_2,\ \dots, D_N\},$$

φ противоречива $\iff$ система дизъюнктов S_φ противоречива.

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Система дизъюнктов $S = \{D_1,\ D_2,\ \dots, D_N\}$ противоречива тогда и только тогда, когда

для каждой интерпретации I

в системе S **найдется** такой дизъюнкт

$$D_i = \forall x_1 \dots \forall x_n\ (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})$$

и в предметной области D_I **найдется** такой набор элементов

$$d_1, \dots, d_n,$$

для которых имеют место

$$I \not\models L_{1i}[d_1, \dots, d_n],\ I \not\models L_{2i}[d_1, \dots, d_n],\ \dots,\ I \not\models L_{k_i i}[d_1, \dots, d_n].$$

А можно ли сократить множество рассматриваемых интерпретаций?

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Эрбрановские интерпретаций (H-интерпретации, названные так по имени французского метематика Herbrand) — это специальная разновидность интерпретаций, в основе которых лежат **свободные алгебры**.

Предметная область эрбрановских интерпретаций называется **эрбрановским универсумом** (H-**универсумом**).

Определение H-универсума

Пусть задана некоторая сигнатура $\sigma = \langle Const, Func, Pred \rangle$. Тогда эрбрановским универсумом σ называется множество термов $H_\sigma = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} H_i$, где

$$i = 0 \quad H_0 = \begin{cases} Const, & \text{если } Const \neq \emptyset, \\ \{c\}, & \text{если } Const = \emptyset \text{ (эрбрановская константа);} \end{cases}$$

$$i \to i+1 \quad H_{i+1} = H_i \cup \{f^{(k)}(t_1, \dots, t_k) \; : \; f^{(k)} \in Func, \; t_1, \dots, t_k \in H_i\}.$$

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Эрбрановский универсум — это множество всех термов, которые можно построить из констант и функциональных символов заданной сигнатуры. Термы эрбрановского универсума не содержат переменных и называются основными термами .

Пример

Пусть $Const = \emptyset$, $Func = \{f^{(1)}, g^{(2)}\}$. Тогда

$i = 0$ $H_0 = \{c\}$ (эрбрановская константа, т.к. $Const = \emptyset$);

$i = 1$ $H_1 = \{c,\ f(c),\ g(c,c)\}$;

$i = 2$ $H_2 = \{c, f(c), g(c,c),$
$f(f(c)), f(g(c,c)), g(f(c),c), g(c,f(c)),$
$g(f(c),f(c)), g(c,g(c,c)), g(g(c,c),c),$
$g(g(c,c),g(c,c)), g(f(c),g(c,c)), g(g(c,c),f(c))\}$;

$i = 3$ и. т. д.

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Определение H-интерпретации

Эрбрановская интерпретация $I_H = \langle H_\sigma, \overline{Const}_H, \overline{Func}_H, \overline{Pred}\rangle$ сигнатуры $\sigma = \langle Const, Func, Pred\rangle$ состоит из

- **стандартной** предметной области — эрбрановского универсума H_σ;
- **стандартной** оценки констант: $\overline{Const}_H(c) = c$, т. е. значением каждого константного символа c является его собственное изображение;
- **стандартной** оценки функциональных символов: $\overline{Func}_H(f^{(n)}) = \mathbf{f} : \ \mathbf{f}(t_1, t_2, \dots, t_n) = f^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$, т. е. каждый функциональный символ f играет роль конструктора термов эрбрановского универсума;
- **произвольной** оценки предикатных символов.

Таким образом, разные H-интерпретации отличаются только истолкованием предикатных символов.

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Преимущества эрбрановских интерпретаций.

- Не нужно заботиться о выборе области интерпретации — у всех H-интерпретаций одна и та же предметная область — H-универсум.
- Не нужно заботиться об оценке функциональных символов — у всех H-интерпретаций одна и та же стандартная оценка $Const$ и $Func$.
- И, как будет показано, для проверки противоречивости систем дизъюнктов достаточно ограничиться рассмотрением H-интерпретаций.

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Теорема о H-интерпретациях

Система дизъюнктов S выполнима тогда и только тогда, когда S имеет эрбрановскую модель, т.е. выполнима хотя бы в одной H-интерпретации.

Доказательство

($\Leftarrow$) Очевидно.

($\Rightarrow$) Пусть $S = \{D_1, \ \ldots, D_N\}$, и $I = \langle \mathcal{D}_I, \overline{Const}_I, \overline{Func}_I, \overline{Pred}_I \rangle$ — некоторая модель для S, т. е. для любого дизъюнкта $D_i = \forall x_1 \ldots \forall x_n \ (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \cdots \vee L_{k_i i})$ из S и для любого набора элементов $d_1, \ldots, d_n$ из $\mathcal{D}_I$ имеет место

$$I \models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \cdots \vee L_{k_i i})[d_1, \ldots, d_n].$$

Покажем, что существует H-интерпретация J_H, в которой выполняется каждый дизъюнкт D_i из S.

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Доказательство

Пусть σ — сигнатура системы дизъюнктов S. Рассмотрим эрбрановский универсум H_σ и отображение

$$\alpha \ : \ H_\sigma \ \rightarrow \ \mathcal{D}_I,$$

которое каждому основному терму $t \in H_\sigma$ сопоставляет элемент $\alpha(t) = d_t \in \mathcal{D}_I$, равный значению терма t в интерпретации I.

Оценку $\overline{Pred}_H$ предикатных символов в H-интерпретации J определим так:

для любого предикатного символа P и любого набора основных термов $t_1, \dots, t_m \in H_\sigma$ положим

$$\overline{P}_H(t_1, \dots, t_m) = \textbf{true} \iff \overline{P}_I(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_m)) = \textbf{true}.$$

Эта оценка однозначно определяет H-интерпретацию J_H

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Доказательство

Тогда для любого функционального символа f, предикатного символа P и любого набора основных термов $t_1, \dots, t_m \in H_\sigma$ верно

$$\alpha(f(t_1, \dots, t_m)) = \overline{f}_I(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_m)),$$

$$J_H \models P[t_1, \dots, t_m] \iff I \models P[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_m)]$$

Отображение α — это гомоморфизм интерпретации J_H в интерпретацию I.

Значит, для **любого** дизъюнкта $D' = \forall x_1 \dots \forall x_m \; (L_1 \vee \dots \vee L_k)$ и любого набора основных термов $t_1, \dots, t_m \in H_\sigma$ верно

$$\begin{array}{l} J_H \models (L_1 \vee \dots \vee L_k)[t_1, \dots, t_m] \\ \\ I \models (L_1 \vee \dots \vee L_k)[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_m)] \end{array} \iff$$

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Доказательство

Итак, для любого дизъюнкта
$D_i = \forall x_1 \dots \forall x_n \ (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})$ из S и любого набора основных термов $t_1, \dots, t_n \in H_\sigma$ имеем

$$J_H \models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})[t_1, \dots, t_n] \qquad \Longleftrightarrow$$

$$I \models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)].$$

Поскольку

$$I \models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)],$$

все дизъюнкты из S выполнимы в построенной эрбрановской интерпретации J_H. $\square$

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Следствие

Система дизъюнктов S противоречива тогда и только тогда, когда S невыполнима ни в одной эрбрановской интерпретации.

Значит, для проверки противоречивости систем дизъюнктов достаточно исследовать только эрбрановские интерпретации.

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Как задавать H-интерпретации?

Эрбрановские интерпретации полностью определяются оценкой предикатных символов. Значит, достаточно указать оценку всех предикатных символов.

Пусть $P^{(m)} \in Pred$, и $t_1, \dots, t_m \in H_\sigma$ — набор основных термов. Тогда формула $P^{(m)}(t_1, \dots, t_m)$ называется основным атомом . Множество всех основных атомов называется эрбрановским базисом и обозначается B_H.

Всякая H-интерпретация I задается подмножеством B^I истинных основных атомов:

$$B^I = \{P^{(m)}(t_1, \dots, t_m) \;:\; I \models P^{(m)}(t_1, \dots, t_m), \{t_1, \dots, t_m\} \subseteq H\}.$$

Эрбрановские интерпретации

Примеры

- $B^I = \emptyset$ соответствует интерпретации I, в которой все $\overline{P}$ тождественно ложны.

$$I \models P^{(m)}[t_1, \dots, t_m] \iff P^{(m)}(t_1, \dots, t_m) \in \emptyset.$$

- $B^I = B_H$ соответствует интерпретации I, в которой все $\overline{P}$ тождественно истинны.
- Пересечение $B^{I_1} \cap B^{I_2}$ задает интерпретацию, в которой истинны те и только те отношения, которые истинны в обоих интерпретациях I_1 и I_2.

  Значит, это очень удобный способ задания интерпретаций, позволяющий проводить над ними теоретико-множественные операции.

В дальнейшем все H-интерпретации мы будем ассоциировать с подмножествами эрбрановского базиса B_H.

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Вернемся к системам дизъюнктов

Пусть имеется дизъюнкт $D = \forall x_1 \dots \forall x_m \; (L_1 \vee \dots \vee L_k)$ и набор основных термов $t_1, \dots, t_m$ из эрбрановского универсума H_σ.

Тогда дизъюнкт $D' = (L_1 \vee \dots \vee L_k)\{x_1/t_1, \dots, x_m/t_m\}$, полученный из D подстановкой основных термов $t_1, \dots, t_m$ вместо всех переменных дизъюнкта D называется основным примером дизъюнкта D.

Пример

$D = \forall x_1 \forall x_2 \; (\neg R(x_1, x_2) \vee P(h(x_1)))$ — дизъюнкт,

$D' = \neg R(g(c'), c'') \vee P(h(g(c'))) = D\{x_1/g(c'), x_2/c''\}$ — основной пример.

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Система дизъюнктов $S = \{D_1,\ D_2,\ \dots, D_N\}$ противоречива

$$\iff$$

для каждой H-интерпретации I в S найдется такой дизъюнкт $D_i = (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})$ и такой набор основных термов $t_1, \dots, t_m$, для которых имеют место

$$I \not\models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots L_{k_i i})[t_1, \dots, t_m]$$

$$\iff$$

для каждой H-интерпретации I существует основной пример $D' = D_i\{x_1/t_1, \dots, x_m/t_m\}$ дизъюнкта из системы S, для которого

$$I \not\models D'.$$

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Рассмотрим множество основных примеров дизъюнктов

$$\mathcal{G}_S = \{D' : \ D' \text{ — основной пример дизъюнкта из } S, \text{ существует эрбрановская интерпретация } I \subseteq B_H : I \not\models D'\}.$$

Тогда система дизъюнктов S противоречива

$$\Longleftrightarrow$$

система основных примеров $\mathcal{G}_S$ противоречива.

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Вспомним теорему компактности Мальцева

Множество замкнутых формул T имеет модель тогда и только тогда, когда каждое **конечное** подмножество T', $T' \subseteq T$, имеет модель.

Таким образом, множество основных примеров дизъюнктов $\mathcal{G}_S$ противоречиво

$$\Longleftrightarrow$$

существует **конечное** противоречивое подмножество $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}_S$.

И в результате проведенных рассуждений мы приходим к

Теореме Эрбрана .

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Теорема Эрбрана

Система дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_N\}$ **противоречива**

$$\Longleftrightarrow$$

существует конечное противоречивое множество $\mathcal{G}'$ **основных примеров дизъюнктов системы** S**.**

В чем состоит главная особенность теоремы Эрбрана?

Основной пример дизъюнкта не содержит **предметных переменных**, и поэтому является простой **булевой формулой**

Таким образом проблема общезначимости формул логики предикатов (сложная проблема!!!) сводится к проблеме выполнимости булевой формулы (простой проблеме??!!).

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Маленькое лукавство.

Увы, теорема Эрбрана не сообщает нам ничего о том, КАКИЕ основные примеры дизъюнктов образуют это противоречивое множество $\mathcal{G}'$.

Нам нужно придумать механизм поиска этого противоречивого множества $\mathcal{G}'$.

Дэвис и Патнем предложили использовать компьютер для перебора всех эрбрановских интерпретаций в поиске противоречивой системы основных примеров дизъюнктов. Но Дж. Робинсон поступил хитрее...

Из дизъюнктов системы S нужно устранять потенциальные противоречия, пока не будут устранены все источники противоречия или не будет получено неустранимое (явное) противоречие.

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Если в системе S содержатся дизъюнкты $D_1 = L$ и $D_2 = \neg L$, то, очевидно, S противоречива (явное противоречие).

А если в S есть дизъюнкты $D_1 = D_1' \vee L$ и $D_2 = D_2' \vee \neg L$, то $I \models D_1$ и $I \models D_2$ влечет $I \models D_1' \vee D_2'$. Значит, добавление дизъюнкта $D_0 = D_1' \vee D_2'$ к S не нарушает ее выполнимости. Зато устраняется потенциальное противоречие L и $\neg L$.

Правило вывода, разрешающее противоречия,

$$\frac{D_1' \vee L,\ D_2' \vee \neg L}{D_1' \vee D_2'}$$

называется правилом резолюции . Это правило можно применять до тех пор, пока не возникнет неустранимое противоречие $D_1 = L$ и $D_2 = \neg L$. Это и будет служить признаком противоречивости системы S.

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Ну, а если $D_1 = P(x)$ и $D_2 = \neg P(f(y))$, то как быть тогда? Ведь здесь нет явного противоречия.

Противоречие здесь скрытое. Дизъюнкты D_1 и D_2 имеют основные примеры

$$P(f(c)) = D_1\{x/f(c)\} \text{ и } \neg P(f(c)) = D_2\{y/c\},$$

которые образуют противоречие. Значит, D_1 и D_2 тоже противоречивы. Но как отыскать это скрытое противоречие?

Нужно постараться привести литеры $P(f(x))$ и $P(y)$ к общему виду. Приведение выражений к общему виду называется унификацией .

Нам нужен алгоритм унификации!

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Приведение двух атомов A' и A'' к общему виду достигается применением такой подстановки θ, для которой $A'\theta = A''\theta$. Значит, для решения задачи унификации придется изучить алгебраические свойства подстановок.

Воспоминания

Подстановка — это отображение $\theta \ : \ Var \ \to \ Term$.

Конечная подстановка $\theta = \{x_1/t_1, x_2/t_2, \ldots, x_n/t_n\}$.

$E\theta$ — применение подстановки θ к выражению E.

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Композиция подстановок

Пусть $\theta, \eta \in Subst$. Композиция подстановок $\theta\eta$ — это подстановка μ, которая определяется следующим соотношением:

$$\mu(x) = (x\theta)\eta \text{ для любой } x \in Var.$$

Утверждение

Пусть $\theta = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$, $\eta = \{y_1/s_1, \dots, y_m/s_m\}$. Тогда подстановка

$$\begin{array}{rcl} \mu & = & \{x_1/t_1\eta, \dots, x_n/t_n\eta\} \cup \\ & & \{y_i/s_i \ : \ y_i \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n\}\} - \\ & & \{x_j/t_j\eta \ : \ x_j = t_j\eta\}. \end{array}$$

является композицией $\theta\eta$.

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Доказательство

$$\begin{aligned}\mu \;=\; & \{x_1/t_1\eta, \dots, x_n/t_n\eta\} \cup \\ & \{y_i/s_i \;:\; y_i \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n\}\} - \\ & \{x_j/t_j\eta \;:\; x_j = t_j\eta\}.\end{aligned}$$

Рассмотрим произвольную $z \in Var$. Возможны 3 варианта.

1. $z = x_j \in Dom_\theta$. Тогда $z(\theta\eta) = (x_j\theta)\eta = t_j\eta$.
Если $t_j\eta \neq x_j$, то $x_j \in Dom_\mu$, и $x_j\mu = t_j\eta$.
Если $t_j\eta = x_j$, то $x_j \notin Dom_\mu$, и $x_j\mu = x_j$.
В любом случае $x_i(\theta\eta) = x_i\mu$.

2. $z = y_i \in Dom_\eta \setminus Dom_\theta$. Тогда $z(\theta\eta) = (y_i\theta)\eta = y_i\eta = s_i$,
и $z\mu = s_i$.

3. $z = y_i \notin Dom_\eta \cup Dom_\theta$. Тогда $z(\theta\eta) = z$ и $z\mu = z$. $\square$

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Пример

$\theta = \{x/f(x,c),\ y/g(u),\ z/y\}$,
$\eta = \{x/g(y),\ y/z,\ u/c\}$.

$$\theta\eta \quad =$$

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Пример

$\theta = \{x/f(x,c),\ y/g(u),\ z/y\}$,
$\eta = \{x/g(y),\ y/z,\ u/c\}$.

$$\theta\eta \quad =$$

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Пример

$\theta = \{x/f(x,c),\ y/g(u),\ z/y\}$,
$\eta = \{x/g(y),\ y/z,\ u/c\}$.

$$\theta\eta \quad = \quad \{x/f(x,c)\eta,\ y/g(u)\eta,\ z/y\eta\} \cup \{u/c\}$$

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Пример

$\theta = \{x/f(x,c),\ y/g(u),\ z/y\}$,
$\eta = \{x/g(y),\ y/z,\ u/c\}$.

$$
\begin{array}{rcl}
\theta\eta & = & \{x/f(x,c)\eta,\ y/g(u)\eta,\ z/y\eta\} \cup \{u/c\} \\
 & & \{x/f(g(y),c),\ y/g(c),\ z/z,\ u/c\}
\end{array}
$$

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Пример

$\theta = \{x/f(x,c),\ y/g(u),\ z/y\}$,
$\eta = \{x/g(y),\ y/z,\ u/c\}$.

$$\begin{array}{rcl} \theta\eta & = & \{x/f(x,c)\eta,\ y/g(u)\eta,\ z/y\eta\} \cup \{u/c\} \\ & & \{x/f(g(y),c),\ y/g(c),\ z/z,\ u/c\} \\ & & \{x/f(g(y),c),\ y/g(c),\ u/c\} \end{array}$$

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Определение

Пусть E_1 и E_2 — два логических выражения (термы, атомы, формулы и др.)

Подстановка θ называется унификатором выражений E_1 и E_2, если $E_1\theta = E_2\theta$.

Подстановка θ называется наиболее общим унификатором (НОУ) выражений E_1 и E_2, если

1. θ — унификатор выражений E_1 и E_2;
2. для любого унификатора η выражений E_1 и E_2 существует такая подстановка ρ, для которой верно равенство

$$\eta = \theta\rho$$

$НОУ(E_1, E_2)$ — множество наиболее общих унификаторов выражений E_1 и E_2.

Задача унификации

Пример

$E_1 = P(f(x_1), x_2)$
$E_2 = P(y_1, c)$

$\eta = \{x_1/f(c),\ x_2/c,\ y_1/f(f(c))\}$ — унификатор E_1 и E_2, т.к.

$$E_1\eta = P(f(f(c)), c) = E_2\eta.$$

$\theta = \{x_2/c,\ y_1/f(x_1)\}$ — наиболее общий унификатор E_1 и E_2, т.к.

$$E_1\theta = P(f(x_1), c) = E_2\theta,$$
$$\eta = \theta\{x_1/f(c)\}.$$

Выражения E_1 и E_2 унифицируемы , и $\theta \in НОУ(E_1, E_2)$.

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Пример

$E_1 = R(f(x_1), x_1)$
$E_2 = R(y_1, f(y_1))$

Выражения E_1 и E_2 не имеют унификаторов, и $НОУ(E_1, E_2) = \emptyset$.

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Задача унификации
состоит в том, чтобы для двух выражений E_1 и E_2 выяснить,
являются ли эти выражения унифицируемыми,
и, в случае их унифицируемости, вычислить
наиболее общий унификатор.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 7.