

Экзаменационные вопросы

по курсу ”Линейная алгебра”

I курс факультета ВМиК, II семестр

Лектор : **Панферов В.С.** (кафедра общей математики ВМиК).

Другие источники:

1. **Е.В. Шикин.** Линейные пространства и отображения. ВМиК МГУ, 1987.
2. **Х.Д. Икрамов.** Задачник по линейной алгебре. “Наука”, 1975.
3. **И.В. Проскураков.** Сборник задач по линейной алгебре. “Наука”, 1984.
4. Finite-dimensional vector spaces. by **Paul R. Halmos / П. Халмош.** Конечномерные векторные пространства. М, 1963.
5. **В.В. Воеводин.** Линейная алгебра. “Наука”, 1974.

Frequently asked questions

1. Линейное пространство. Определение, основные свойства и примеры. Ранг и база системы векторов.

- **Поле** будем называть произвольное множество P элементов произвольной природы (**скаляров**), с двумя алгебраическими операциями $+, * : P^2 \rightarrow P$. При этом должны быть выполнены следующие аксиомы ($\forall a, b, c \in P$) :
 - (A1) $a+b = b+c$; (A2) $a+(b+c) = (a+b)+c$;
 - (A3) $\exists! 0 \in P : \forall a : a+0=a$; (A4) $\exists! (-a) : a+(-a)=0$.
 - (свойства A означают, что P - абелева группа по сложению)
 - (B1) $ab = ba$; (B2) $a(bc) = (ab)c$;
 - (B3) $\exists! 1 \in P : \forall a : a1=a$; (B4) $\forall a \neq 0 : \exists! (a^{-1}) : a(a^{-1})=1$.
 - (C) $a(b+c) = ab + bc$.
- **Линейным векторным пространством** $V(P)$ над полем P будем называть множество V элементов произвольной природы (**векторов**), с двумя операциями :
 - сложение векторов $+: V^2 \rightarrow V$ и
 - умножение на скаляр $*: P \times V \rightarrow V$. При этом должны быть выполнены следующие аксиомы ($\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, c, d \in P$)
 - (A) V - абелева группа по сложению.
 - (B1) $c(d\mathbf{x}) = (cd)\mathbf{x}$; (B2) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$;
 - (C1) $c(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = c\mathbf{x}+c\mathbf{y}$; (C2) $(c+d)\mathbf{x} = c\mathbf{x}+d\mathbf{x}$.
 - Если $U \subseteq V(P)$ является векторным пространством над P с определенными V операциями, то U называется (линейным) *подпространством* V .
 - Пространства $V(\mathbf{R})$ и $U(\mathbf{C})$ над полями вещественных и комплексных чисел называются соответственно **вещественными** и **комплексными** векторными пространствами.
 - *Примеры линейных пространств* :
 - Множество $C[0;1]$ непрерывных вещественнозначных функций, определенных на сегменте $[0;1]$ (пространство над полем \mathbf{R}).
 - Любое поле P есть линейное пространство над самим собой.
 - Множество $P_{M \times N}$ прямоугольных $M \times N$ - матриц.
 - Поле C можно рассматривать как линейное пространство над полем \mathbf{R} .
 - *Линейной комбинацией* векторов $X = \{\mathbf{x}_i\}$ с коэффициентами a_i будем называть вектор $\mathbf{x} = \sum (a_i \mathbf{x}_i)$. Говорят, что \mathbf{x} линейно выражается через \mathbf{x}_i .
 - Систему векторов X будем называть *линейно независимой*, если

$$(\sum a_i \mathbf{x}_i = 0) \Leftrightarrow (a_i \equiv 0).$$
 - **Базой** системы векторов X будем называть такую ее линейно независимую подсистему $Y \subseteq X$, что все вектора X линейно выражаются через вектора Y .
 - **Рангом** системы X будем называть минимальное количество векторов в ее базе.

2. Изоморфизм линейных пространств.

- Линейные пространства V и U над одним полем P называются *изоморфными*, $V \cong U$, если существует *изоморфизм* - биективное отображение $\varphi : V \rightarrow U$, такое, что $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ и $\forall \alpha, \beta \in P : \varphi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\varphi(\mathbf{x}) + \beta\varphi(\mathbf{y})$.
- *Утверждение.* Отношение \cong на множестве линейных пространств есть отношение эквивалентности, т.е. (1) $U \cong U$; (2) $V \cong U \Leftrightarrow U \cong V$; (3) $U \cong V, V \cong W \Rightarrow U \cong W$.
- *Теорема.* Конечномерные $U(P)$ и $V(P)$ изоморфны $\Leftrightarrow \dim U = \dim V$.
- *Утверждение.* Любое n -мерное $V(P)$ изоморфно P^n .

3. Сумма и пересечение линейных подпространств.

- *Линейной оболочкой* системы $X = \{x_i\} \subseteq V(P)$ будем называть множество $L(X) = \{ \sum (a_i x_i) \mid a_i \in P \}$ всевозможных линейных комбинаций векторов X .
- *Лемма.* Любая линейная оболочка $L(X)$, $X \subseteq V(P)$ является линейным подпространством V . В самом деле, складывая два элемента $x, y \in L(X)$, получаем $z = x+y = \sum (a_i x_i) + \sum (b_i x_i) = \sum (a_i+b_i)x_i \in L(X)$. Аналогично $\alpha x \in L(X)$ для $\forall \alpha \in P$.
- Линейная оболочка $L(X)$ является наименьшим по включению линейным подпространством V , содержащим X .
- *Пример.* Рассмотрим систему функций $X = \{1, t, \dots, t^n, \dots\} \subset C[0;1]$. Тогда $L(X)$ есть пространство многочленов над R .
- Пусть U, U' - подпространства $V(P)$.
- Суммой U и U' называется $U+U' = \{ \alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \in P, x \in U, y \in U' \}$.
- Утверждение. Сумма и пересечение линейных подпространств V есть подпространства V .
- Теорема. Если W_1, W_2 - подпространства V , то $\dim(W_1+W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$.
- (1) Случай $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ тривиален.
- (2) Пусть e_1, \dots, e_n - базис $W_1 \cap W_2$. Дополним его векторами f_1, \dots, f_p до базиса W_1 и векторами g_1, \dots, g_q до базиса W_2 . Остается показать, что $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q$ - базис в W_1+W_2 . В самом деле, пусть $\sum \alpha_i e_i + \sum \beta_i f_i + \sum \gamma_i g_i = 0$; тогда $y = \sum \alpha_i e_i + \sum \beta_i f_i = -\sum \gamma_i g_i \in W_1 \cap W_2$. В силу единственности разложения вектора y из $W_1 \cap W_2$ по базису $\{e_i\}$ и линейной независимости $\{f_i\}$ получаем $\beta_i \equiv 0$. Так как система $\{e_i\} \cup \{g_i\}$ линейно независима, то $\alpha_i \equiv 0$ и $\gamma_i \equiv 0$. Таким образом, система $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q\}$ линейно независима.

4. Прямая сумма линейных подпространств.

- Если W_1, W_2 - подпространства V и для любого $x \in W_1+W_2$ разложение $x = x_1 + x_2$ единственно, то сумма W_1 и W_2 называется *прямой суммой*: $W_1+W_2 = W_1 \oplus W_2$.
- *Теорема.* Если $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ и $\dim(V) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$, то $V = W_1 \oplus W_2$.
- (1) Согласно п.4, $\dim(V) = \dim(W_1) + \dim(W_2) = \dim(W_1+W_2)$. Тогда $V = W_1+W_2$.
- (2) Докажем единственность разложения $x \in V$ на вектора из W_1 и W_2 . В самом деле, если бы $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, то $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \in W_1 \cap W_2$; т.е. $x_1 = y_1$ и $x_2 = y_2$.
- Пусть W - подпространство V . W^δ называется *дополнительным* к W , если $V = W \oplus W^\delta$. Дополнительное подпространство определено неоднозначно.
- *Лемма.* Дополнительное пространство всегда существует.
- Достаточно взять базис подпространства W и дополнить его векторами f_1, \dots, f_p до базиса V . Утверждается, что $L(f_1, \dots, f_p) = W^\delta$.

5. Пространства со скалярным произведением. Неравенство Коши - Буняковского.

- *Евклидовым* будем называть линейное пространство E , в котором определена операция *скалярного умножения*: $(\cdot): E^2 \rightarrow R$, удовлетворяющая следующим соотношениям:
 - $(x, y) = (y, x)$ (симметричность);
 - $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$; $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ (линейность);
 - $x^2 = (x, x) \geq 0$, причем $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (положительная определенность).
- Естественное скалярное произведение в R^n : для $x = (x^1, \dots, x^n)$ и $y = (y^1, \dots, y^n)$ полагаем $(x, y) = \sum (x_i y_i)$.
- В любом подпространстве евклидова пространства естественным образом задано скалярное произведение.
- *Унитарным* будем называть комплексное линейное пространство $U(C)$, в котором определена операция скалярного умножения: $(\cdot): U^2 \rightarrow C$, удовлетворяющая следующим соотношениям:
 - $(x, y) = (y, x)^*$;
 - $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$; $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ (линейность);
 - $x^2 = (x, x) \geq 0$, причем $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- Естественное скалярное произведение в C^n : для $x = (x^1, \dots, x^n)$ и $y = (y^1, \dots, y^n)$ полагаем $(x, y) = \sum (x_i y_i^*)$.
- *Матрицей Грама* системы векторов $X = (x_1, \dots, x_n)$ называется матрица, составленная из попарных скалярных произведений этих векторов:

$$\Gamma(X) = [(x_k, x_m)].$$

- *Неравенство Коши-Буняковского.* $(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$. ($\det \Gamma(x, y) \geq 0$)
- Пусть $x \neq 0$. Рассмотрим неравенство $(tx - y, tx - y) \geq 0$, выполняющееся при любых t ; запишем это в виде квадратного неравенства относительно t :

$$t^2(x, x) - 2t(x, y) + (y, y) \geq 0.$$

- Из неположительности дискриминанта вытекает неравенство Коши-Буняковского.
- *Утверждение.* Равенство имеет место лишь в случае коллинеарных x и y .
- В унитарном пространстве имеет место неравенство Коши-Буняковского в виде

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

6. Длина и угол. Неравенства треугольника в Евклидовом (и унитарном) пространстве.

Тождество параллелограмма и критерий евклидовости нормы

- *Длиной* вектора x называется число $|x| = (x, x)^{1/2}$.
- *Неравенство треугольника*: $|x+y| \leq |x| + |y|$.
- Достаточно записать: $|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq (x, x) + 2|(x, y)| + (y, y) \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$ (согласно определению длины и неравенству Коши-Буняковского) $= (|x| + |y|)^2$; извлекая квадратный корень, получаем неравенство треугольника.

- Тожество параллелограмма: $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$
- Углом между ненулевыми векторами называется число φ из $[0; 2\pi]$, определяемое равенством $\cos \varphi = (x, y) / (|x||y|)$.

7. Ортонормированный базис. Скалярное произведение в ортонормированном базисе.

Существование ортонормированного базиса.

- Система векторов $X = (x_1, \dots, x_n)$ в евклидовом (унитарном) пространстве называется *ортogonalной*, если $(x_k, x_m) = 0$ при $k \neq m$.
- Система векторов X называется *ортонормированной*, если $(x_k, x_m) = \delta_{km}$, или, что то же самое, их матрица Грама единична: $\Gamma(X) = E$.
- *Лемма*. Ортонормированная система векторов линейно независима.
- Достаточно рассмотреть равенство вида $\sum \alpha_i x_k = 0$, умножить его скалярно на x_m ($m = 1, \dots, n$) и получить, что $\alpha_i \equiv 0$.
- Скалярное произведение векторов $x = (x^1, \dots, x^n)$ и $y = (y^1, \dots, y^n)$ в евклидовом пространстве, записанных своими координатами в ортонормированном базисе e , равно $(x, y) = \sum (x_i y_i)$, согласно свойству линейности скалярного произведения по обоим аргументам и поскольку $(e_k, e_m) = \delta_{km}$.
- *Теорема*. В любом n -мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.
- (1) Доказывается по индукции. Для $n = 1$ - очевидно.
- (2) В n -мерном пространстве существует какой-то базис $(f_1, \dots, f_{n-1}, f_n)$. Рассмотрим ортонормированный базис (e_1, \dots, e_{n-1}) подпространства $L(f_1, \dots, f_{n-1})$. Построим вектор $g = (f_n - \alpha_1 e_1 - \dots - \alpha_{n-1} e_{n-1})$, где $\alpha_i = (f_n, e_i)$.
- (3) В качестве базиса возьмем $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$, где $e_n = g/|g|$.

8. Матрица Грама. Критерий линейной зависимости.

- *Матрицей Грама* системы $X = (x_1, \dots, x_n)$ называется $\Gamma(X) = [(x_k, x_m)]$.
- Символическая запись $\Gamma(X) = X^T X$, где элементы перемножаются скалярно.
- $\Gamma^T = \Gamma$ (матрица Грама есть симметрическая/эрмитова).
- *Теорема* (критерий линейной зависимости). Система векторов $X = (x_1, \dots, x_n)$ линейно зависима $\Leftrightarrow \det \Gamma(X) = 0$.
- (1) Пусть имеется нетривиальная линейная комбинация векторов X :

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$
- Умножая это равенство скалярно последовательно на x_1, \dots, x_n , получим

$$\Gamma(X)(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T = 0$$
- Таким образом матрица $\Gamma(X)$ вырождена, поскольку система имеет ненулевое решение $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$.
- (2) Обратное, пусть столбцы матрицы $\Gamma(X)$ линейно зависимы. Тогда один из них, для определенности n -й, линейно выражается через другие:

$$(x_i, x_n) = \alpha_1 (x_i, x_1) + \dots + \alpha_{n-1} (x_i, x_{n-1}) \quad (\text{где } i = 1, \dots, n)$$

$$\Rightarrow (x_i, g) = 0, \text{ где } g = x_n - \alpha_1 x_1 - \dots - \alpha_{n-1} x_{n-1}.$$

- Таким образом, g ортогонален подпространству $L(x_1, \dots, x_{n-1})$. Поскольку $g \in L(x_1, \dots, x_n)$, то $g = 0 \Rightarrow x_n = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}$, т.е. вектор x_n линейно выражается через x_1, \dots, x_{n-1} .

9. Ортогональное дополнение. Разложение вектора на ортогональную проекцию и ортогональную составляющую.

- *Ортогональным дополнением* множества $X \subseteq E$ называется множество векторов $X^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in X (y, x) = 0\}$.
- *Лемма 1*. X^\perp есть линейное подпространство E .
- *Лемма 2*. $X^\perp = (L(X))^\perp$.
- *Лемма 3*. Если W - подпространство E , то $E = W \oplus W^\perp$, т.е. любой вектор однозначно разлагается на ортогональную проекцию и ортогональную составляющую относительно подпространства.
- Достаточно показать, что объединяя базисы W и W^\perp получим базис E .
- *Лемма 4*. Если W - подпространство E , то $(W^\perp)^\perp = W$.

10. Ортонормированный базис и унитарные(ортogonalные) матрицы

- Матрица $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ унитарна, если $U U^H = U^H U = I$, матрица $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ортогональна, если $Q Q^T = Q^T Q = I$
- Теорема: матрица перехода от ортонормированного базиса e к базису e' евклидова (унитарного) пространства ортогональна (унитарна) ТТК e' - ортогональный базис

11. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. QR-разложение матрицы

- *Процесс ортогонализации* есть решение вопроса о построении ортонормированной системы векторов при заданной линейно независимой системе. Каждый шаг процесса аналогичен шагу (2) в доказательстве предыдущей теоремы.
- $AL = Q$ (L - верхняя треугольная матрица - как произведение верх. тр. матриц) $\Rightarrow A = QR$ (Q - ортогональная(унитарная) матрица, $R = L^{-1}$ - верхняя треугольная)

12. Линейные многообразия в евклидовом (и унитарном) пространстве. Гиперплоскость.

- *Теорема*. Любое линейное многообразие H определяется системой уравнений вида $(a_i, y) = \alpha_i$, т.е. $H = \{y \mid (a_i, y) = \alpha_i\}$, где a_1, \dots, a_m - линейно-независимая система векторов, а α_i - действительные числа.
- Достаточно для $H = b + W$ (W - подпространство) в качестве a_1, \dots, a_m взять базис подпространства W^\perp , а в качестве α_i числа (a_i, b) .

13. Линейные операторы. Определение и основные свойства. Матрица линейного оператора.

- Пусть V и W - произвольные линейные пространства над полем P . Отображение $A : V \rightarrow W$, такое, что $\forall x, y \in V$ и $\forall \alpha, \beta \in P : A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ называется *линейным отображением* (оператором) действующим из V в W .
- Если $W = P$, то отображение называется *линейной формой*.
- *Примеры* : (0) Тожественный оператор $E(x)=x$; (1) оператор дифференцирования в пространстве многочленов; (2) проекторы на подпространство; (3) операторы поворота и симметрии.
- *Лемма 1.* Линейное отображение переводит линейно зависящие системы векторов в линейно зависимые.
- Пусть вектора $\{x_i\}$ линейно зависимы. Рассмотрим нетривиальную линейную комбинацию $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$. Действуя на это равенство линейного отображением A , получим, что образы векторов также линейно зависимы : $\alpha_1 A x_1 + \dots + \alpha_n A x_n = 0$.
- *Лемма 2.* Образ линейного отображения $A : V \rightarrow W$ является линейным подпространством W .
- *Рангом* линейного отображения называется размерность его образа : $\text{rang}(A) = \dim(\text{im } A)$.
- *Утверждение.* Согласно лемме 1, $\text{Rang}(A) \leq \dim(V)$.
- *Теорема.* Линейное отображение $A : V \rightarrow W$ однозначно определяется образами базиса V .
- Пусть e_1, \dots, e_n - базис V отображением A переводится в систему векторов f_1, \dots, f_n . Применим к вектору $x = \sum x_i e_i$ линейное отображение : $Ax = A(\sum x_i e_i) = \sum x_i A(e_i) = \sum x_i f_i$.
- Матрица, столбцами которой являются образы базисных векторов f_1, \dots, f_n (записанные в базисе g_1, \dots, g_m пространства $W : f_k = \sum f_k^i g_i$) называется матрицей $A(e, g)$ оператора A в паре базисов $e, g : A(e, g) = [f_k^i]$.
- *Утверждение.* Линейное отображение $A : V \rightarrow W$ однозначно определяется своей матрицей в некоторой паре базисов.
- *Утверждение.* Ранг матрицы $A(e, g)$ линейного отображения не зависит от выбора базисов e, g и равен рангу линейного отображения A .
- Пусть $A : V \rightarrow V$ - линейный оператор и e_1, \dots, e_n - базис V . Матрицей $A(e) = A_e$ оператора A в базисе e называется квадратная матрица, столбцами которой являются образы векторов e_1, \dots, e_n , записанные в том же базисе.
- Линейный оператор однозначно определен матрицей в произвольном базисе.
- *Лемма.* Матрица суммы операторов есть сумма матриц этих операторов в одном и том же базисе : $(A+B)_e = A_e + B_e$.

14. Матрицы линейного оператора в различных базисах. Эквивалентные матрицы. Критерий эквивалентности.

- *Теорема 1.* Пусть e и $g = eS$ - базисы V , $A : V \rightarrow V$ - линейный оператор. Тогда матрицы A в этих базисах связаны следующими соотношениями :

$$A(e) = SA(g)S^{-1}, \quad A(g) = S^{-1}A(e)S.$$

- Воспользуемся формулами преобразования координат $x(e) = S[x(g)]$ и $x(g) = S^{-1}[x(e)]$.
- Пусть $y = Ax$. Тогда $y(e) = A(e)x(e) = A(e)Sx(g)$; $y(g) = S^{-1}y(e) = [S^{-1}A(e)S]x(g)$. Следовательно, матрица A в базисе g есть $A(g) = S^{-1}A(e)S$.
- *Лемма.* Определитель матрицы оператора не зависит от базиса (инвариантен).
- *Доказательство.* $\det[A(g)] = \det[S^{-1}A(e)S] = \det[A(e)]$.
- *Определителем оператора* называется определитель его матрицы в произвольном базисе : $\det A = \det[A(e)]$.
- Матрицы $A, B \in P_{n \times n}$ эквивалентны, если существуют две квадратные невырожденные матрицы $S \in P_{n \times n}, T \in P_{n \times n}$, что $B = SAT$.
- *Утверждение.* Две матрицы одного и того же линейного отображения $A : V \rightarrow W$ в разных парах базисов V и W эквивалентны. Обратно, две эквивалентные матрицы являются матрицами некоторого линейного отображения $A : V \rightarrow W$ в некоторых парах базисов f, e и f', e' .
- *Теорема 2.* $A, B \in P_{n \times n}$ эквивалентны $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(B)$.
- В частности, две квадратные матрицы $A, B \in P_{n \times n}$ подобны, если существует невырожденная (преобразующая) матрица T , такая, что $B = T^{-1}AT$.
- *Утверждение.* Две подобные матрицы имеют один и тот же ранг, один и тот же след и один и тот же определитель.

15. Линейное пространство линейных операторов и его связь с пространством матриц. 22.

Произведение линейных операторов и его матрица.

- *Лемма.* Матрица произведения (композиции) операторов есть произведение матриц этих операторов в произвольном базисе e .
- Пусть $A, B \in GL(V)$. $C = BA$ - произведение операторов. Пусть x - произвольный вектор из V , $y = A(x)$, $z = B(y) = C(x)$. Запишем x , y и z в базисе $e : y(e) = A(e)x(e)$, $z(e) = B(e)y(e) = [B(e)A(e)]x(e)$. В силу произвольности x матрица произведения BA в базисе e есть $C(e) = B(e)A(e)$.
- *Теорема.* Пространство линейных операторов $GL(V)$, действующих в n -мерном линейном пространстве $V(P)$, изоморфно пространству квадратных $(n \times n)$ -матриц с элементами из P .
- Достаточно фиксировать в V произвольный базис, построить отображение Ψ , ставящее произвольному оператору в соответствие его матрицу в этом базисе; показать, что Ψ линейно, инъективно и сюръективно.
- *Следствие.* $\dim GL(V) = n^2$.

16. Образ и ядро линейного оператора.

- *Утверждение.* Образ линейного оператора $A : V \rightarrow V$ является линейным подпространством V .
- *Рангом* линейного отображения называется размерность его образа : $\text{rang}(A) = \dim(\text{im } A)$.
- *Ядром* (kernel) A называется множество векторов, переводимых в ноль действием $A : \text{Ker } A = \{y \in V | Ay = 0\}$.

- Утверждение. $Ax=Ay \Leftrightarrow (x-y) \in \text{Ker } A$.
- *Дефектом* A называется размерность его ядра : $\text{defect}(A)=\dim(\text{Ker } A)$.
- *Утверждение*. Ядро линейного оператора $A : V \rightarrow V$ является линейным подпространством V .
- *Теорема*. $\text{defect}(A)+\text{rang}(A)=\dim(V)$.
- Обозначим $U=\text{ker } A$ и рассмотрим фактор-пространство V/U . Покажем, что $V/U \cong (\text{im } A)$, построив следующий изоморфизм $\varphi : \varphi(x+U)=Ax$. Таким образом, $\dim(V)=\dim(U)+\dim(V/U)=\text{defect}(A)+\text{rang}(A)$.
- Будем обозначать $N_i=\text{Ker}(A^i)$, $T_i=\text{Im}(A^i)$.
- *Утверждение*. Для ядер N_i и образов T_i справедливы следующие строгие вложения :

$$N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_q = N_{q+1} = \dots;$$

$$T_1 \supset T_2 \supset \dots \supset T_q = T_{q+1} = \dots,$$

- где $q \leq n$.

17. Линейные формы (функционалы). Сопряженное пространство. Специальное представление линейной формы в Евклидовом (и унитарном) пространстве.

- *Линейной формой* на $V(P)$ называется линейное отображение $A:V \rightarrow P$.
- *Лемма 1*. Любая линейная форма однозначно определена набором чисел из P - ее значений на базисных векторах V .
- Все линейные формы на $V(P)$ образуют линейное пространство V^* , которое называется сопряженным к V пространством.
- *Теорема 1*. Конечномерное пространство $V(P)$ изоморфно сопряженному пространству V^* .
- Пусть $\dim(V)=n$. Тогда, согласно лемме 1, линейная форма однозначно определена набором из n чисел $\Rightarrow \dim(V^*)=n$.
- *Теорема 2*. Пусть V - конечномерное евклидово пространство. Любая линейная форма в V представима в виде скалярного произведения $A(x)=(x,y)$, где $y \in V$.
- Рассмотрим e_1, \dots, e_n - ортонормированный базис V . Возьмем вектор y с компонентами $y^i=A(e_i)$. Для $\forall x \in V : A(x) = A(\sum x^i e_i) = \sum x^i A(e_i) = \sum x^i y^i = (x,y)$.
- Обратно, любое отображение вида $A(x)=(x,y)$ есть линейная форма.

18. Обратный оператор. Критерий обратимости.

- *Обратным* к линейному оператору A называется оператор A^{-1} , такой, что $A^{-1}A=AA^{-1}=E$.

- Если обратный A^{-1} существует, то A называется *обратимым*.
- *Теорема* (критерий обратимости). A обратим $\Leftrightarrow \text{Ker } A = \{0\} \Leftrightarrow A$ взаимно-однозначен.

19. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Основные свойства.

- Пусть V - линейное пространство над P и $A \in GL(V)$. Ненулевой вектор $x \in V$ называется *собственным вектором* V , соответствующим *собственному значению* $\lambda \in P$, если $Ax=\lambda x$.
- A вырожден $\Leftrightarrow A$ имеет собственное значение 0 .
- *Теорема*. Система $X = (x_1, \dots, x_n)$ собственных векторов A , отвечающих различным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, линейно независима.
- Доказывается индукцией по числу векторов. Для $n=1$ утверждение очевидно.
- Предположим, что система из $(n-1)$ векторов (x_1, \dots, x_{n-1}) линейно независима. Будем доказывать, что и система из n векторов линейно независима. От противного : пусть $\sum (a_i x_i) = 0 \Rightarrow \sum (a_i \lambda_i x_i) = 0$.
- Умножая первое равенство на λ_n и вычитая из второго, получим
$$a_1(\lambda_1 - \lambda_n)x_1 + \dots + a_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x_{n-1} = 0,$$
- что противоречит линейной независимости системы (x_1, \dots, x_{n-1}) , поскольку $\lambda_i \neq \lambda_n$.
- *Утверждение*. Число различных собственных значений A не превосходит размерности пространства.
- *Утверждение*. A и $(A - \lambda_0 E)$ имеют одни и те же собственные вектора.
- *Лемма*. Если λ - собственное значение A , то λ^2 - собственное значение A^2 (с тем же собственным вектором). Если λ и μ - собственные значения A и B с собственным вектором x , то $(\lambda + \mu)$ - собственное значение $A+B$ (с тем же собственным вектором x).
- *Утверждение*. Если λ - собственное значение A и $Q(t) \in P[t]$ - многочлен, то $Q(\lambda)$ - собственное значение $Q(A)$ (с тем же собственным вектором).
- *Лемма*. Если A невырожден, то A^{-1} и A имеют одни и те же собственные векторы. При это собственные значения A^{-1} имеют вид $\mu_i = 1/\lambda_i$, где λ_i - собственные значения A .
- $A:V \rightarrow V$ называется оператором *простой структуры*, если он имеет $n=\dim(V)$ линейно независимых собственных векторов. Такие и только такие операторы имеют *диагональную форму*, т.е. матрицу оператора, в которой по диагонали стоят собственные значения, а все остальные элементы нулевые
- *Собственным подпространством*, соответствующим собственному значению $\lambda \in P$ оператора $A:V \rightarrow V$, называется множество векторов $W(\lambda) = \{x \in V | Ax = \lambda x\}$. $W(\lambda)$ есть инвариантное относительно A .
- Геометрической кратностью собственного значения λ называется $\dim W(\lambda)$.
- Алгебраической кратностью λ называется кратность корня λ в характеристическом уравнении $\det(A - \lambda E)$.
- *Теорема*. Геометрическая кратность не превосходит алгебраической.
- Достаточно показать, что если λ - собственное значение, то
$$\chi(t) = \det(A - tE) = (t - \lambda)^k \varphi(t) = (t - \lambda)^k \psi(t),$$

- где l и k - соответственно геометрическая и алгебраическая кратности λ , и $\psi(t)$ не имеет корня λ в силу определения алгебраической кратности. Отсюда $l \leq k$.

20. Характеристический многочлен линейного оператора. Условие существования собственных векторов линейного оператора.

- Пусть V - линейное пространство над P и $A \in GL(V)$. *Характеристическим многочленом A называется многочлен $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E)$.*
- *Теорема.* $\lambda \in P$ есть собственное значение $A \Leftrightarrow \chi(\lambda) = 0$, т.е. λ есть корень характеристического многочлена.
- Доказательство. $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda E)x = 0 \Leftrightarrow \ker(A - \lambda E) \neq \{0\} \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$.
- *Теорема 1.* Любой оператор $A: U(C) \rightarrow U$, действующий в комплексном линейном пространстве, имеет по крайней мере одно собственное значение.
- *Утверждение.* A нильпотентен \Leftrightarrow все собственные значения A равны 0.

21. Инвариантные подпространства. Индуцированный оператор. Сужение оператора

- Подпространство $W \subseteq V$ называется *инвариантным* относительно линейного оператора A , если $AW \subseteq W$, т.е. образы векторов W лежат в W .
- Примеры: $V, \{0\}, \ker A, \operatorname{im} A$.
- Лемма. Если W_1 и W_2 - инвариантные подпространства, то $(W_1 \cap W_2)$ и $(W_1 + W_2)$ - также инвариантные подпространства.
- Если W - инвариантное относительно A подпространство, то на нем возможно определение *индуцированного* оператора $B = A|_W: W \rightarrow W$ следующим простым образом: $B(x) = A(x)$.
- *Утверждение.* Если V разлагается в прямую сумму N инвариантных относительно A подпространств W_i , а базис e построен объединением базисов W_i , то матрица $A(e)$ имеет блочно-диагональный вид с N клетками вида $B_i(e)$, где B_i есть оператор A , индуцированный на пространстве W_i .

22. Инвариантные подпространства минимальной размерности.

- Любой оператор $A: V \rightarrow V$, действующий в комплексном пространстве $U(C)$, имеет по крайней мере одно собственное значение λ , а значит и одномерное инвариантное относительно A собственное подпространство $L(\lambda)$.
- *Теорема.* Любой оператор $A: V \rightarrow V$, действующий в вещественном пространстве $U(R)$, имеет по крайней мере одно инвариантное подпространство, размерность которого не превышает 2.
- (1) Если A имеет собственное значение λ , то, аналогично комплексному случаю, имеется собственное подпространство $L(\lambda)$.
- (2) Пусть $\lambda = a + ib$ - комплексный корень характеристического многочлена $\chi(t)$. Построим двумерное инвариантное пространство. Для этого найдем ненулевое решение комплексной однородной системы уравнений:

$$(A - (a + ib)E)(\xi + i\eta) = 0$$
- (здесь A - матрица оператора в фиксированном базисе e и E - единичная матрица). Ненулевое решение $(\xi + i\eta) \in C^n$ существует, так как определитель системы $\chi(a + ib) = 0$. Разделяя действительную и мнимую части, получим:

$$A\xi = a\xi - b\eta; A\eta = b\xi + a\eta.$$
- (3) По столбцам координат ξ и η в базисе e восстановим ненулевые векторы x и y . Можем записать аналогичные соотношения для x и y :

$$Ax = ax - by; Ay = bx + ay.$$
- (4) Очевидно, что пространство $L(x, y)$ инвариантно относительно A .

23. Треугольная форма матрицы линейного оператора в комплексном пространстве. Теорема Шура

- *Теорема 1.* Любой оператор A , действующий в n -мерном комплексном линейном пространстве V , имеет по крайней мере одно инвариантное подпространство размерности $(n-1)$.
- Достаточно рассмотреть любое $(n-1)$ -мерное подпространство, включающее $T(\lambda) = \operatorname{im}(A - \lambda E)$, где λ - собственное значение A .
- *Теорема 2.* Любой оператор $A: V \rightarrow V$, где V - n -мерное комплексное пространство, имеет семейство вложенных инвариантных пространств L_p размерностей $p = 0, 1, \dots, n-1, n: L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_n$.
- Существование L_0 и L_n очевидно. L_{n-1} существует по теореме 1. Рассмотрим на нем индуцированный оператор A , получим $L_{n-2} \subset L_{n-1}$, и т.д.
- С помощью инвариантных подпространств, полученных в теореме 2, базис, в котором матрица A имеет *треугольную форму*. Возьмем в качестве базисных вектора $e_p \in L_p \setminus L_{p-1}$, $p = 0, 1, \dots, n-1, n$.
- Таким образом, всякая комплексная матрица подобна некоторой треугольной матрице.

Теорема 3 (Теорема Шура). Для любого оператора в унитарном пространстве существует ортонормированный базис, в котором его матрица имеет треугольную форму

24. Теорема о прямой сумме нильпотентного и обратимого операторов. Корневые подпространства

- Пусть $V = L \oplus M$, т.е. для любого x существует единственное разложение $x = y + z$, где $y \in L$, $z \in M$; пусть на L и M заданы линейные операторы B и C . Прямой суммой этих операторов называется оператор $A = B \oplus C: V \rightarrow V$, определяемый следующим образом: $Ax = By + Cz$.
- *Утверждение.* $\chi_A(t) = \chi_B(t)\chi_C(t)$

- *Теорема.* Для любого оператора $A:V \rightarrow V$, где V - n -мерное линейное пространство, существует разложение $V=N \oplus T$, где $N=\text{Ker}(A^q)$ и $T=\text{Im}(A^q)$, где $q \leq n$; A разлагается в прямую сумму нильпотентного $A|_N$ и невырожденного $A|_T$ операторов. При этом $\dim(N)$ есть геометрическая кратность собственного значения 0.
- По свойству ядер и образов (*See also*: 23) найдется $q \leq n : N=N_q=N_{q+1}=\dots$; и $T=T_q=T_{q+1}=\dots$. При этом на T оператор A невырожден, поскольку $AT=T$. На N оператор A невырожден, поскольку $\text{Ker}(A|_N)=N$. Очевидно, $T \cap N = \{0\}$, $\dim(T)+\dim(N)=\dim(V) \Rightarrow V=N \oplus T$.
- *Утверждение.* Такое разложение единственно.
- Достаточно показать, что если на T' оператор невырожден, то $T' \subseteq T$; а если на N' оператор нильпотентен, то $N' \subseteq N$.
- Пусть A имеет r различных собственных значений λ_i и характеристический многочлен A представлен в виде $\chi(t)=\prod \chi_i(t)$, где $\chi_i(t)$ имеет единственный корень λ_i . Получаемые с помощью теоремы о расщеплении подпространства V_i называют *корневыми подпространствами* A , соответствующими собственным значениям λ_i .
- Рассмотрим корневое подпространство $R=R(\lambda)$, соответствующее корню λ кратности k . По определению, $R = \text{Ker}((A-\lambda E)^k)$. Но поскольку размерности $N_p=\text{Ker}((A-\lambda E)^p)$ монотонно возрастают до стабилизации на R , а $\dim R=k$, то $R=\text{Ker}((A-\lambda E)^k)$.
- Вектора корневого подпространства $R(\lambda)$ называют *корневыми векторами*, соответствующими собственному значению λ . *Высотой* корневого вектора x называют $\min m : (A-\lambda E)^m x=0$. Очевидно, высота x не превосходит k - кратности λ . Множество $H_t(\lambda)$ корневых векторов из $R(\lambda)$, высота которых не превосходит t , образует подпространство $R(\lambda)$.

25. Расщепление линейного оператора.

- *Лемма.* Если собственное значение λ оператора A является корнем многочлена $\varphi(t)$, то все собственные вектора A , соответствующие λ , лежат в $\text{Ker} \varphi(A)$. Если собственное значение λ оператора A не является корнем многочлена $\varphi(t)$, то все собственные вектора A , соответствующие λ , лежат в $\text{Im} \varphi(A)$.
- (1) Пусть собственный вектор x соответствует корню λ . Тогда x есть собственный и для $\varphi(A)$, но соответствует собственному значению $\varphi(\lambda) \Rightarrow \varphi(A)x=\varphi(\lambda)x=0 \Rightarrow x \in \text{Ker} \varphi(A)$.
- (2) Пусть теперь $\varphi(\lambda) \neq 0 \Rightarrow \varphi(A)x=\varphi(\lambda)x \Rightarrow x = \varphi(A)((1/\varphi(\lambda))x) \Rightarrow x \in \text{Im} \varphi(A)$.
- *Теорема 1.* Пусть характеристический многочлен оператора $A:V \rightarrow V$ представлен в виде $\chi(t)=\varphi(t)\psi(t)$, где $\text{НОД}(\varphi,\psi)=1$, т.е. $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ не имеют общих корней. Тогда оператор A единственным образом разлагается в прямую сумму операторов B и C , имеющих соответственно характеристические многочлены $\varphi(t)$ и $\psi(t)$.
- (1) Будем раскладывать A в прямую сумму с помощью многочлена $\varphi(t)$. Рассмотрим $\Phi_i=\text{Ker}(\varphi(A))^i$ и $\Psi_i=\text{Im}(\varphi(A))^i$. Согласно свойствам операторного многочлена, эти пространства инвариантны относительно A . Найдется $q : N=\Phi_q=\Phi_{q+1}$, $T=\Psi_q=\Psi_{q+1}$. Очевидно, что $T \cap N = \{0\}$, $\dim(T)+\dim(N)=\dim(V) \Rightarrow V=N \oplus T$. Обозначим $B=A|_N$, $C=A|_T$.
- (2) Согласно лемме, все собственные вектора A , т.е. корни $\chi(t)$ лежат либо в N либо в T ; причем в N лежат только собственные вектора, соответствующие корням $\varphi(t)$, а в T лежат все остальные, т.е. соответствующие корням $\psi(t)$. Поэтому $\chi_B(t)=\varphi(t)$ и $\chi_C(t)=\psi(t)$.
- *Теорема 2.* Пусть характеристический многочлен оператора $A:V \rightarrow V$ представлен в виде $\chi(t)=\prod \chi_i(t)$, где $\chi_i(t)$ не имеют общих корней. Тогда $V=\bigoplus V_i$ и оператор A единственным образом разлагается в прямую сумму индуцированных операторов $A_i=A|_{V_i}$, имеющих характеристические многочлены $\chi_i(t)$.
- Доказывается по индукции с помощью теоремы 1.
- Доказательство см.: Шикин Е.В., стр. 87 или: Воеводин В.В., стр. 253.

26. Жорданов базис и Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора в комплексном пространстве.

- *Жордановой клеткой* $J_k(\lambda)$ называется двухдиагональная матрица $k \times k$, в которой по диагонали стоят λ , а над диагональю - 1.
- *Теорема.* В любом корневом подпространстве $R(\lambda)$ существует *канонический базис*, в котором матрица индуцированного оператора имеет канонический вид, т.е. состоит из нескольких жордановых клеток $J_k(\lambda)$, расположенных по диагонали.

27. Подобные матрицы. Критерий подобия.

- See also : 19.

28. Теорема Гамильтона - Кэли.

- *Теорема.* Любой оператор аннулируется своим характеристическим многочленом.
- Пусть $A:V \rightarrow V$ и $\chi(t)$ - его характеристический многочлен. Покажем, что $\chi(A)=0$. Возьмем вектор x из корневого подпространства $R=\text{Ker}((A-\lambda E)^k)$, где k - кратность корня λ . Поскольку $\chi(A)$ содержит множитель $(A-\lambda E)^k$ и множители коммутируют, то $\chi(A)x=0$ на любом корневом подпространстве. Поскольку V разлагается в прямую сумму корневых подпространств, то $\chi(A)x=0$ на всем пространстве V .

29. Вещественный аналог жордановой формы

30. Сопряженный оператор. Существование и единственность сопряженного оператора.

- Пусть заданы унитарные пространства V и W и $A:V \rightarrow W$ - линейное отображение. Отображение $A^*:W \rightarrow V$ называется сопряженным к A , если для $\forall x \in V, \forall y \in W$ выполняется равенство:

$$(Ax, y) = (x, A^* y).$$

- *Утверждение.* Сопряженное отображение всегда существует и единственно.
- (1) Выберем в W ортонормированный базис e . Любой вектор из W представим в виде $x = \sum (x, e_i) e_i$.
- (2) Если сопряженное отображение существует, то

$$A^* y = \sum (A^* y, e_i) e_i = \sum (y, A e_i) e_i.$$
- Определяя A^* указанным образом, получим сопряженное отображение.
- Свойства операции сопряжения :
 - $(A^*)^* = A$; $(A+B)^* = A^* + B^*$; $(\alpha A)^* = \alpha^* A^*$ для $\alpha \in \mathbb{C}$; $(AB)^* = B^* A^*$; $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.
- *Утверждение.* Матрицы взаимно сопряженных отображений относительно любой пары ортонормированных базисов являются взаимно сопряженными.
- *Утверждение.* $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*)$.
- *Утверждение.* $V = \text{Ker}(A) \oplus \text{im}(A^*)$; $W = \text{Ker}(A^*) \oplus \text{im}(A)$.
- Пусть $x \in \text{Ker}(A), y \in W \Rightarrow (x, A^* y) = (Ax, y) = (0, y) = 0 \Rightarrow \text{Ker}(A) \perp \text{im}(A^*) \Rightarrow V = \text{Ker}(A) \oplus \text{im}(A^*)$; т.к. $\dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{im}(A^*)) = \dim(\text{Ker}(A^*)) + \dim(\text{im}(A)) = V$.

31. Нормальный оператор.

- *Лемма.* Если операторы $A, B: V \rightarrow V$ в комплексном пространстве V коммутируют, то у них есть общий собственный вектор.
- Пусть $W = W(\lambda)$ - собственное подпространство A и $x \in W$. Тогда $A(Bx) = B(Ax) = B(\lambda x) = \lambda Bx \Rightarrow Bx \in W \Rightarrow BW \subseteq W$, т.е. W инвариантно относительно B ; тогда у индуцированного на W оператора B найдется собственный вектор, являющимся в силу определения W собственным и для A .
- Оператор $A: V \rightarrow V$ называется *нормальным*, если $AA^* = A^*A$, т.е. коммутирует со своим сопряженным.
- *Теорема.* $A: V \rightarrow V$ нормален \Leftrightarrow существует ортонормированный базис из его собственных векторов.
- (1) Пусть A - нормальный оператор. Согласно лемме, у A и A^* найдется общий собственный вектор e_1 . Будем считать, что он нормирован. Рассмотрим V^{n-1} - ортогональное дополнение к $L(e_1)$. Это подпространство инвариантно относительно A и A^* . Для A и A^* индуцированных на V^{n-1} , найдется общий нормированный собственный вектор e_2 . Продолжая процесс аналогичным образом, получим ортонормированную систему из n векторов (e_1, e_2, \dots, e_n) , собственных для A и A^* .
- (2) Пусть $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ - ортонормированный базис V и $A e_i = \lambda_i e_i$. Определим оператор B следующим образом : $B e_i = (\lambda_i)^* e_i$. Очевидно, что B сопряжен A , $A^* = B$. Остается убедиться, что $AA^* x = A^* A x$ для $\forall x \in V$.

32. Блочно-диагональная форма вещественной нормальной матрицы

33. Эрмитовы операторы и матрицы. Эрмитово разложение

- Линейный оператор $H: V \rightarrow V$ называется *самосопряженным*, если $H = H^*$, т.е. H равен собственному сопряженному. Самосопряженный оператор в унитарном пространстве называется *эрмитовым*; в евклидовом пространстве - *симметричным*.
- *Теорема 1.* $H: V \rightarrow V$ в унитарном V является эрмитовым $\Leftrightarrow (Hx, x)$ вещественно для любого x .
- *Утверждение.* Эрмитов оператор является нормальным.
- *Теорема 2.* Нормальный H является эрмитовым \Leftrightarrow все его собственные значения есть вещественные числа.
- (1) Пусть H - эрмитов. Возьмем собственное значение λ и соответствующий ему нормированный собственный вектор x . $\lambda = (Hx, x) = (Hx, x) = (x, Hx) = \overline{(x, Hx)} = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda$ есть вещественное число.
- (2) Обратно, пусть нормальный H имеет вещественные собственные значения \Rightarrow матрицы H и H^* в ортонормированном базисе из собственных векторов (где по диагонали стоят собственные значения) виде будут совпадать.
- *Эрмитовым* разложением оператора A называется представление оператора в виде суммы эрмитова и косоэрмитова оператора; т.е. пара эрмитовых операторов B, C такая что $A = B + iC$.
- *Теорема 1.* Для любого $A: V \rightarrow V$ в унитарном пространстве эрмитово разложение существует и единственно.
- Легко убедиться в том, что $B = (A + A^*)/2$ и $C = (A - A^*)/2i$ обладают заданными свойствами. Единственность пары B, C вытекает из того, что допуская представление $A = B + iC$, где B и C - эрмитовы, с учетом равенства $A^* = B - iC$, приходим к выписанным определениям.
- *Утверждение.* Оператор A является нормальным \Leftrightarrow операторы B и C в его эрмитовом разложении коммутируют.
- *Эрмитовым* разложением оператора A называется представление оператора в виде $A = BU$, где B - неотрицательный и U - унитарный.

34. Симметрические операторы и матрицы

35. Унитарный (ортогональный) оператор.

- Оператор $A: V \rightarrow V$ в унитарном V называется *унитарным*, если $A^* A = E$.
- Унитарный оператор в евклидовом пространстве называется *ортогональным*.
- *Теорема.* A есть унитарный $\Leftrightarrow \forall x, y \in V (Ax, Ay) = (x, y)$ (A сохраняет скалярное произведение) $\Leftrightarrow A$ сохраняет ортонормированность $\Leftrightarrow A$ изометричен $\Leftrightarrow A$ нормален и его собственные значения по модулю равны 1.
- Пусть A есть унитарный оператор $\Rightarrow (Ax, Ay) = (x, A^* Ay) = (x, y)$ (A сохраняет скалярное произведение) \Rightarrow сохраняет ортонормированность $\Rightarrow A$ обратим; умножая $A^* A = E$ справа на A^{-1} , получаем $A^* = A^{-1} \Rightarrow AA^* = A^* A = E$. A нормален,

покажем, что его собственные значения по модулю равны 1. Пусть λ - собственное значение A и $|x|=1 \Rightarrow 1=(x,x)=(Ax,Ax)=\lambda(\lambda^*)=\lambda^2 \Rightarrow |\lambda|=1$.

- Обратное, пусть A нормален и его собственные значения по модулю равны 1. Перемножая диагональные матрицы A и A^* в любом порядке, получим $AA^*=A^*A=E$.
- Пусть A сохраняет ортонормированность $\Rightarrow (Ax,Ay)=(x,y)$ (A сохраняет скалярное произведение). $(x,A^*Ay)=(x,y) \Rightarrow (x,(A^*A-E)y)=0 \Rightarrow A^*A=E$.
- Пусть A сохраняет скалярное произведение $\Rightarrow A$ изометричен, т.к. метрика и норма определены скалярным произведением.
- Обратное, пусть A изометричен. Воспользуемся соотношением :

$$(x,y)=(|x+y|^2-|x-y|^2+i|x+iy|^2-i|x-iy|^2)/4$$
- и покажем, что A сохраняет скалярное произведение.

36. Каноническая форма ортогонального оператора.

- Унитарный оператор в евклидовом пространстве называется *ортогональным*.
- Матрица $P(e)$ ортогонального оператора P ортогональна; $\det P(e)=\pm 1$.
- Ортогональное преобразование называется *собственным (сохраняющим ориентацию)*, если $\det P(e)=+1$. Ортогональное преобразование называется *несобственным*, если $\det P(e)=-1$.
- *Теорема.* Любой ортогональный оператор $P:V \rightarrow V$ представим в виде прямой суммы ортогональных отражений и поворотов; т.е. в V найдется базис e , в котором матрица P имеет квазидиагональный вид, где по диагонали стоят 1, -1 и матрицы поворота в двумерных подпространствах на какие-то углы φ_k .

37. Знакоопределенные операторы. Корень из оператора.

- Эрмитов оператор H называется *неотрицательным* : $H \geq 0$, если для любого x : $(Hx,x) \geq 0$. H называется *положительно определенным* : $H > 0$, если для любого ненулевого x : $(Hx,x) > 0$.
- H называется *неположительно*, если $(-H)$ неотрицателен. H называется *отрицательно определенным*, если $(-H)$ положительно определен.
- *Теорема 1.* Эрмитов H является положительно определенным \Leftrightarrow все его собственные значения положительны.
- *Лемма.* Если H и S положительно определены, а a и b неотрицательны и не равны нулю одновременно, то $aH+bS$ положительно определен. Если H положительно определен, то H^{-1} также положительно определен.
- Неотрицательный оператор S называется *корнем квадратным* из неотрицательного H , если $S^2=H$.
- *Теорема 2.* Корень квадратный из $H \geq 0$ существует и единственен.

Классификация линейных операторов в конечномерном унитарном пространстве по характеру собственных значений

Оператор	Собственные значения
Эрмитов	вещественны
Неотрицательный	неотрицательны
Положительно определенный	положительны
Унитарный	по модулю равны 1
Обратимый	не равны 0
Идемпотентный	равны 0 или 1
Нильпотентный	равны 0

38. Разложения линейного оператора (полярное). Сингулярные числа и векторы

- *Теорема 2.* Для любого $A:V \rightarrow V$ в унитарном пространстве эрмитово разложение существует. Если A невырожден, то эрмитово разложение единственно, причем $V > 0$.
- Если A невырожден, то $V=(AA^*)^{1/2}$; $U=V^{-1}A$.

39. Теорема и альтернатива Фредгольма

- *Теорема 1 (альтернатива Фредгольма).* Либо основное уравнение $Az=u$ имеет решение при любой правой части, либо сопряженное однородное уравнение имеет ненулевое решение.
- *Теорема 2 (теорема Фредгольма).* Операторное уравнение $Az=u$ разрешимо \Leftrightarrow вектор u ортогонален $\text{Ker}(A^*)$.
- Доказательство этих теорем основано на факте $V=\text{im}(A) \oplus \text{Ker}(A^*)$.

40. Билинейные формы в линейном пространстве. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Метод Лагранжа. Формулы Якоби.

- *Билинейной формой*, заданной на $V(P)$ называется отображение $B:V^2 \rightarrow P$, удовлетворяющее следующим соотношениям :

$$B(x+y,z)=B(x,z)+B(y,z); B(ax,y)=aB(x,y);$$

$$B(x,y+z)=B(x,y)+B(x,z); B(x,ay)=aB(x,y);$$
 (линейное по обоим аргументам).
Утверждение. Произведение двух линейных форм $k(x)l(y)$ является билинейной формой.
 Билинейная форма B называется *симметричной*, если $B(x,y)=B(y,x)$; B называется *кососимметричной*, если $B(x,y)=-B(y,x)$.
- *Матрицей* B в базисе e называется квадратная матрица $B(e)=[\beta_{kj}]=[B(e_k,e_j)]$.

- *Утверждение.* Для любых векторов x, y и фиксированного базиса e :

$$B(x, y) = x^T(e)B(e)y(e),$$

- где $x(e), y(e)$ - координатные столбцы векторов x, y в базисе e .
- *Общий вид* билинейной формы :

$$B(x, y) = \sum \beta_{kj} x^k y^j.$$

- *Утверждение* (преобразование матрицы билинейной формы). Пусть e и $e' = eS$ - базисы V . Тогда $B(e') = S^T B(e)S$.
- *Рангом* билинейной формы B называется ранг ее матрицы : $\text{rang } B = \text{rang } B(e)$.
- Билинейная форма называется *вырожденной*, если для некоторого ненулевого x и любого y выполняется $B(x, y) = 0$.
- *Теорема.* Билинейная форма $B(x, y)$ вырождена $\Leftrightarrow \text{rang } B < \dim V$.
- Фиксируем базис e . Вырожденность $B(x, y)$ равносильна существованию ненулевого решения системы уравнений $\{B(x, e_1), \dots, B(x, e_n)\}$, матрица коэффициентов которой есть матрица $B(e)$ билинейной формы в выбранном базисе.
- Отображение $A: V \rightarrow P$ называется *квадратичной формой* на V если $A(x) = B(x, x)$, где B - некоторая симметричная билинейная форма. Билинейная $B(x, y)$ называется *полярной* к квадратичной форме $A(x)$.
- *Утверждение.* Квадратичная форма однозначно определяет полярную к ней симметричную билинейную форму.
- Это очевидно из соотношения $B(x, y) = [A(x+y) - A(x) - A(y)]/2$.
- *Матрицей* квадратичной формы называется матрица полярной к ней билинейной формы. *Рангом* квадратичной формы называется ранг полярной к ней билинейной формы.
- *Каноническим видом* квадратичной формы называется ее матрица в некотором базисе, имеющая диагональный вид. Канонический вид, очевидно, определен неоднозначно.
- *Теорема.* Для любой квадратичной формы $A: V \rightarrow P$ в пространстве V существует базис h , такой, что $A(h)$ есть диагональная матрица.
- Доказательство основано на *методе Лагранжа* последовательного выделения полных квадратов. См.: Шикин Е.В., стр 98.
- Обозначение : Δ_k - главные миноры матрицы квадратичной формы. $\Delta_0 = 1$.
- *Теорема* (метод Якоби). Пусть $\Delta_k \neq 0$. Тогда $A(x, x)$ можно привести к виду $A(x) = \text{diag}\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$, где $\delta_k = \Delta_{k-1}/\Delta_k$.

41. Закон инерции квадратичных форм. Сигнатурное правило Якоби.

- *Теорема* (закон инерции). Число положительных p и число отрицательных m коэффициентов в любом каноническом виде данной квадратичной формы постоянны.
- Число $(p-m)$ называется *сигнатурой* квадратичной формы.
- *Индексом* квадратичной формы $A(x, x)$ называется максимальная размерность подпространства W , на котором A отрицательно определена: $\dim(W) = \text{index } A(x, x)$.
- *Утверждение.* Индекс квадратичной формы равен числу m отрицательных слагаемых в ее каноническом виде.

42. Квадратичные формы в евклидовом (и унитарном) пространстве. Приведение к главным осям.

- *Теорема.* Пусть $B(x, y)$ - билинейная форма, заданная на евклидовом пространстве V . Тогда существует единственный оператор A , такой, что для любых векторов x, y выполняется $B(x, y) = (Ax, y)$. При этом матрица оператора A совпадает с матрицей формы B .
- *Утверждение.* Оператор A симметричен \Leftrightarrow форма B симметрична.
- *Утверждение.* Аналогичная теорема справедлива и для полуторалинейной формы в унитарном пространстве.
- *Теорема.* Пусть $B(x, y)$ - квадратичная форма, заданная на евклидовом пространстве V . Существует ортонормированный базис e , такой, что

$$B(x, x) = \sum \lambda_i (x^i)^2.$$

- Представим квадратичную форму в виде $B(x, y) = (Ax, y)$, где A -симметричный оператор. Достаточно найти для симметричного A ортонормированный базис e из собственных векторов. Тогда матрица $B(e) = A(e)$ будет иметь диагональный вид.
- Операция построения такого ортонормированного базиса называется *приведением квадратичной формы к главным осям*.

43. Одновременное приведение к главным осям пары квадратичных форм.

- *Теорема.* Пусть в n -мерном вещественном пространстве V заданы две квадратичные формы $B(x, x)$ и $C(x, x)$, причем $C > 0$. Возможно одним преобразованием привести эти две квадратичные формы к главным осям; т.е. существует базис e :

$$B(x, x) = \sum \lambda_i (x^i)^2; C(x, x) = \sum (x^i)^2.$$

- Поскольку C положительно определена, то с ее помощью можно задать скалярное произведение - положим $(x, y) = C(x, y)$. Таким образом V превращено в евклидово пространство; в нем существует ортонормированный базис e , для которого $B(x, x) = \sum \lambda_i (x^i)^2$. Так как e ортонормирован, то $C(x, x) = \sum (x^i)^2$.

Утверждение. Аналогичная теорема справедлива и для эрмитовых квадратичных форм в комплексном пространстве

44. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

- Квадратичная форма $A(x,x)$ называется *положительно определенной*, если $A(x,x) > 0$ для любого ненулевого вектора x . Квадратичная форма $A(x,x)$ называется *отрицательно определенной*, если $A(x,x) < 0$ для любого ненулевого вектора x .
- Обозначение: Δ_k - минор матрицы квадратичной формы, расположенный в строках $1, 2, \dots, k$ и столбцах $1, 2, \dots, k$. $\Delta_0 = 1$.
- *Теорема* (критерий Сильвестра положительной определенности). Квадратичная форма $A(x,x)$ положительно определена \Leftrightarrow все $\Delta_k > 0$. Квадратичная форма $A(x,x)$ отрицательно определена \Leftrightarrow все $\Delta_k \Delta_{k-1} < 0$.

45.

46. Уравнения гиперповерхности второго порядка в евклидовом пространстве.

- **47-48. Норма вектора. Эквивалентность форм в конечномерном пространстве.**
- Линейное пространство $V(P)$ называется *нормированным*, если на нем задана *норма* - отображение $|\cdot| : V \rightarrow \mathbb{R}$ со следующими свойствами:
 - (1) $|x| \geq 0$, причем $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
 - (2) $|\alpha x| = |\alpha| |x|$;
 - (3) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (неравенство треугольника).
- Евклидова норма: $|x| = (x,x)^{1/2}$.
- *Энергетической нормой* x называется величина $|x|_A = |A^{1/2}x|$, определяемая положительным оператором A .
- p -нормой ($p \in \mathbb{N}$) вектора $x \in \mathbb{R}^n$ называется величина $|x|_p = (\sum_i |x_i|^p)^{1/p}$.
- Будем говорить, что последовательность векторов x_n *сходится* к вектору a по выбранной норме, если $|x_n - a| \rightarrow 0$.
- Будем говорить, что две нормы (1 и 2) в пространстве V *эквивалентны*, если найдутся положительные константы C_1 и C_2 такие, что для любого вектора x выполняются неравенства:

$$|x|_2 \leq C_1 |x|_1 ; |x|_1 \leq C_2 |x|_2.$$

- *Теорема*. Любые две нормы в конечномерном комплексном пространстве эквивалентны.
- Фиксируем базис e . Покажем, что любая норма $|x|$ эквивалентна евклидовой норме $|x|_E = (\sum |x_i|^2)^{1/2}$.
- (1) Пусть $M = \max\{|e_1|, \dots, |e_n|\}$. Тогда

$$|x| \leq \sum_i x_i^i e_i \leq \sum_i |x_i| |e_i| \leq M \sum_i |x_i| \leq M(n^{1/2}) (\sum |x_i|^2)^{1/2}.$$
- Таким образом, полагая $C_1 = M(n^{1/2})$, получаем, что $|x| \leq C_1 |x|_E$.
- (2) Рассмотрим единичную сферу относительно нормы $|x|$ с центром в 0 - множество

$$S = \{x : |x| = 1\}.$$
- Покажем, что все евклидовы нормы векторов из этой сферы ограничены. Предположим противное, т.е. что для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется на этой сфере вектор $x_m : |x_m|_E > m$. Рассмотрим последовательность векторов

$$y_m = x_m / |x_m|_E \in S_E$$
- (принадлежащих евклидовой единичной сфере). Согласно теореме Больцано-Вейерштрасса из $\{y_m\}$ можно выделить сходящуюся по евклидовой норме подпоследовательность; без ограничения общности будем считать, что $\{y_m\} \rightarrow b$. $b \neq 0$ поскольку $b \in S_E$. Согласно доказанному в первой части, $|y_m - b| \leq C_1 |y_m - b|_E$; таким образом, $\{y_m\} \rightarrow b$ по норме $|\cdot|$. Однако, согласно определению векторов y_m , $|y_m| = |x_m| / |x_m|_E < 1/m \rightarrow 0$ (противоречие).
- (3) Таким образом, евклидовы нормы векторов на сфере S ограничены каким-то числом C_2 . Проецируя на сферу произвольный x , получим $|x| / |x|_E \leq C_2 \Rightarrow |x|_E \leq C_2 |x|$.

50. Норма линейного оператора.

- *Утверждение*. В конечномерных нормированных пространствах V, W любой оператор $A: V \rightarrow W$ непрерывен.
- Оператор $A: V \rightarrow W$ называется *ограниченным*, если существует константа $M: |Ax|_W \leq M|x|_V$ для любого вектора $x \in V$.
- *Теорема*. В конечномерных нормированных пространствах V, W любой оператор $A: V \rightarrow W$ ограничен.
- Наименьшая из констант $M: |Ax|_W \leq M|x|_V$ называется *нормой* оператора A , *подчиненной векторным нормам* в пространствах V, W и обозначается $\|A\|$. Иначе, $\|A\| = \sup |Ax|_W$ по единичной сфере в пространстве V . Подчиненная норма является не единственным способом нормирования пространства линейных операторов.
- Норма $|A|$ называется *согласованной с векторными нормами* в пространствах V, W если $|Ax|_W \leq |A| |x|_V$. Подчиненная норма является наименьшей из всех согласованных норм.
- *Утверждение*. Пусть операторная норма согласована с векторной нормой в пространстве V , $A: V \rightarrow V$ и λ - его собственное значение. Тогда $|\lambda| \leq |A|$.
- Пусть собственный вектор x соответствует $\lambda \Rightarrow |Ax| = |\lambda x| \leq |A| |x| \Rightarrow |\lambda| \leq |A|$.
- Пусть V и W - унитарные пространства. В качестве нормы в них берется просто длина вектора $(x,x)^{1/2}$. Соответствующая подчиненная операторная норма называется *спектральной нормой*:

$$\|A\| = \{\sup |Ax|_E : |x| = 1\} = \sup \{(Ax, Ax)^{1/2} : |x| = 1\}$$
 (sup по единичной сфере).
- *Теорема*. Спектральная норма оператора равна его максимальному сингулярному числу, т.е. $\|A\| = \max \{v_k\}$, где v_k^2 - собственные вектора оператора A^*A .
- *Утверждение*. Спектральная норма унитарного оператора равна 1. Спектральная норма неотрицательного оператора равна его наибольшему собственному значению.
- *Утверждение*. Спектральная норма не меняется при унитарных (ортогональных) преобразованиях пространств.

51. Матричные нормы линейного оператора.

- *Евклидова норма* матрицы. Пусть $A = (\alpha_{kn}) \in C(K \times N)$ - произвольная комплексная матрица. Величина $|A|_E = (\sum_k \sum_n |\alpha_{kn}|^2)^{1/2}$ является нормой в пространстве матриц, согласованной с нормами типа $|x|_2$ в C^K и C^N .

52.

53. Экстремальные свойства собственных значений самосопряженного оператора.

- Пусть V - n -мерное евклидово пространство, $A:V \rightarrow V$ - симметричный оператор. Существует ортонормированный базис из его собственных векторов $e=(e_1, \dots, e_n)$; пусть $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ - соответствующие собственные значения. S - единичная сфера.
- *Лемма.* Если x - вектор из $S \cap (L=L(e_1, \dots, e_s))$, то $\lambda_1 \leq (Ax, x) \leq \lambda_s$.
- *Утверждение.* Пусть B и A - два симметричных оператора и $B-A \geq 0$; а $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ и $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$ - наборы их собственных значений. Утверждается, что эти наборы между собой связаны неравенствами $\lambda_i \leq \mu_i$.

54.

55.

61. Операторные уравнения. Условия разрешимости.

- Уравнение вида $Az=u$, где $A:V \rightarrow W$, V и W - унитарные, $u=\text{const.}$, будем называть (основным) *операторным уравнением*.
- Однородное уравнение $A^*z=0$ называется *сопряженным* к основному уравнению.

62. Нормальное решение. Псевдорешение.

- Пусть операторное уравнение $Az=u$ разрешимо; имеется некоторая совокупность его решений H . *Нормальным решением* назовем решение наименьшей длины, т.е. такое решение z_0 : $|z_0| = \inf\{|z| : Az=u\}$.
- *Теорема 1.* Если уравнение разрешимо, то нормальное его решение существует и единственно.
- Совокупность решений H является линейным аффинным многообразием: $H=z+\text{Ker}(A)$, где z - какое-нибудь решение. Разложим z в сумму ортогональной проекции на $\text{Ker}(A)$ и ортогональной составляющей z_0 . z_0 есть нормальное решение.
- Пусть операторное уравнение $Az=u$ неразрешимо; определим *функционал невязки* $\Phi(z)=|Az-u|$. Вектор z_0 будем называть *псевдорешением* если z_0 минимизирует $\Phi(z)$, т.е. $\Phi(z_0)=\inf\{\Phi(z)=|Az-u|, z \in V\}$. $x=Az_0$ есть ортогональная проекция вектора u на $\text{im}(A)$.
- *Нормальным псевдорешением* будем называть псевдорешение наименьшей длины; или, что то же самое, нормальное решение уравнения $Az=x$.
- *Утверждение.* Нормальное псевдорешение существует и единственно.
- Уравнение $A^*Az=A^*u$ называется *нормальным* к основному уравнению $Az=u$.
- *Теорема 2.* Вектор z_0 является псевдорешением $Az=u \Leftrightarrow z_0$ является решением нормального уравнения.
- Поскольку $u-x \in \text{Ker}(A^*)$, то $A^*x = A^*u$ и достаточно показать, что уравнение $Az=x$ равносильно уравнению $A^*Az=A^*x$. В самом деле,

$$A^*Az=A^*x \Rightarrow A^*(Az-x)=0 \Rightarrow Az-x \in \text{Ker}(A^*).$$
- Но поскольку $Az-x \in \text{im}(A) = (\text{Ker}(A^*))^\perp$, то $Az-x=0$. Обратное очевидно.