

30 апреля 2009 г.

Теория функций комплексного переменного.

Вариант 2.

Фамилия: Сидухабровская Анна 213

1. Доказать, что если $e^z = e^{z+w}$, то $w = i2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}, \quad |a| < r < |b|, n \in \mathbb{N}.$$

3. Найти порядки всех нулей функции $(1 - e^z)(z^2 - 4)^3$.

4. Разложить функцию $\cos \frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = 2$.

5. Определить тип особых точек функции $\frac{e^z}{z(1-e^{-z})}$, включая точку $z = \infty$.

6. Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех изолированных особых точек (включая точку $z = \infty$)

$$f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z-2}.$$

7. Вычислить интеграл

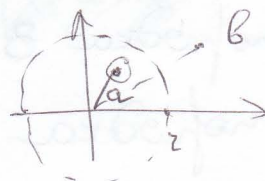
$$\int_0^\infty \frac{x \sin ax \, dx}{x^2 + b^2}, \quad a > 0, \, b > 0.$$

8. Вычислить интеграл

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x \, dx}{x^2 - 5x + 6}.$$

$$\textcircled{2} \int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)} \quad |a| < 2 < |b| \quad n \in \mathbb{N}$$

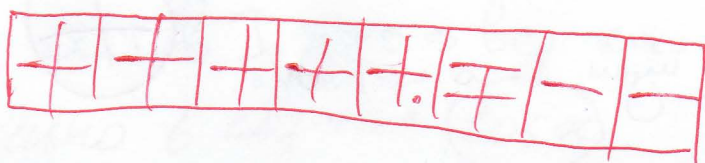
a — уз. нод. $0 < |a| < 2$.



$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)} = 2\pi i \left(\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \right) =$$

Упр. ф-на Коши.

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{z-b} \right)^{(n-1)} \cdot \frac{1}{(n-1)!} = 2\pi i \left((-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \frac{1}{(z-b)^n} \Big|_{z=a} \right) \cdot \frac{1}{(n-1)!} = \frac{2\pi i \cdot (-1)^{n-1}}{(a-b)^n}$$



Ответ +

$$\textcircled{1} e^z = e^{z+w} = e^z \cdot e^w \Rightarrow |e^z \neq 0| \Rightarrow z = e^w$$

$$\arg w = \varphi \Rightarrow z = |w|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow \text{т.к. } z \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$z = |w| \cos \varphi \text{ если } \varphi = \pi + 2\pi n_0; n_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow z = -|w| \text{ zero быть не может} \Rightarrow$$

$$\varphi = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \cos \varphi = 1 \Rightarrow z = |w| \Rightarrow w = 2\pi i k i$$



$$\textcircled{5} \frac{e^z}{z(z-e^z)} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

Особые точки: $z_0 = 0$; $z - e^{-z} = 1 \Rightarrow z_1 = 2\pi i k i$ и $z = \infty$.

Заметим, что $\varphi(z)$ в $z_0, z_1, \dots, z_n, \dots \neq 0$.

а $\psi(z) = 0 \Rightarrow$ будем диф-ть $\psi(z)$

$$\psi'(z) = 1 - (z - z^2 e^{-z} + e^{-z}) \text{ если } z=0 \Rightarrow \psi'(z) = 0$$

$$\text{если } z = 2\pi i k i \Rightarrow \psi'(z) \neq 0 \text{ т.к. } z_n - \text{ноль } \psi \text{ порядка } k \in \mathbb{Z}$$

$$-ze^{-z} + e^{-z} + e^{-z} \Rightarrow \text{при } z=0 \psi''(z) \neq 0 \Rightarrow z_0 - \text{ноль } \psi \text{ 2 порядка}$$

$$\psi''(z) = 1 - 2ze^{-z} + 2ze^{-z} - z^2 e^{-z} = -z^2 e^{-z}$$



$$z = \infty \quad z = \frac{1}{w}$$

$$\frac{e^{\frac{1}{w}} \cdot w}{(z - e^{-\frac{1}{w}})}$$

$$(z - e^{-\frac{1}{w}}) \Rightarrow z \text{ при } w \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{w} \rightarrow \infty \text{ просим в ряд Тейлора и получим упрощенную}$$

или!

Упрощенно.

$$③ (1 - e^z)(z^2 - 4)^3$$

$z = 2$ - порядка 3

$z = -2$ - порядка 3

Есть также нули функции $z = 2\pi k i$ $k \in \mathbb{Z}$

Из предыдущей задачи мы знаем, что это нули 1-го порядка.

$$(1 - e^z)' = -e^z \Rightarrow z = 2\pi k i - \text{нули 1-го порядка.}$$



$$④ \cos \frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2} = \cos \left(1 - \frac{4}{(z-2)^2} \right) = \cos 1 \cdot \cos \frac{4}{(z-2)^2} + \sin 1 \cdot \sin \frac{4}{(z-2)^2} =$$

т.к. $\cos$ - четная функция, то в разложении только четные степени
т.е. $\sin \frac{4}{t^2}$ можно не писать

$$\cos 1 \cos \frac{4}{t^2} + \sin 1 \sin \frac{4}{t^2} = \cos 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4 \cdot t^{-2})^{2n}}{(2n)!} + \sin 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4 t^{-2})^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow$$

$$= \text{в разложении } C_{-2n} = \frac{\cos 1 \cdot 2^{2n}}{(2n)!}; \quad C_{-2n-1} = \frac{\sin 1 \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{при } n \in \mathbb{Z}_+$$

т.е.
 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.



8) $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 5x + 6} = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{(x-3)(x-2)} \stackrel{?}{=} \text{Res } f(z)$

~~Решение~~
Продолжим в $\text{Im } z > 0$ $\oint_{-\infty}^{\infty} f(z) = \frac{z \cos z dz}{(z-3)(z-2)} \Rightarrow$

вет. ос.т. в $\text{Im } z > 0 \Rightarrow$ все точки только на Ре осн.

не равно в случае cos x.

~~$\neq$~~ $2\pi i \left(\frac{1}{z-2} \text{Res } f(z) + \frac{1}{z-3} \text{Res } f(z) \right) = \pi i \cdot (3 \cos 3 - 2 \cos 2)$

$\text{Res } f(z)$
 $z \rightarrow z_0$ $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z) = \begin{cases} z=3 & \frac{3 \cos 3}{1} \\ z=2 & -\frac{2 \cos 2}{1} \end{cases}$

$z_0=3$ порядок

(при более высокой
порядке $\frac{d^m}{dz^m} \frac{(z-z_0)^{m-1}}{f(z)}$

Ответ: $(3 \cos 3 - 2 \cos 2) \pi i$

Вам не
кажется
странным
что это
мнимая величина?
Исходная.

И еще нужно проверить «величину, похожую на величину Коши»
Она выполнена!



6)

Изолированные точки - это $z = 2, \infty$.
особые точки.

Т.к. $\operatorname{res}(f(z)) + \operatorname{res} f(z) = 0$ $\Rightarrow$ Нам необходимо найти всего лишь один из этих вычетов, второй будет просто с другим знаком.

$$w = \frac{1}{z}$$

$$f(z) = \frac{\cos \frac{1}{\frac{1}{w} + 2}}{w^3} = \frac{\cos \frac{w}{1+2w}}{w^3} = \frac{\cos\left(1 - \frac{1}{2+2w}\right)}{w^3} =$$

очень сложно.

$$= \cos \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{1}{2+4w} + \sin \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2+4w}$$

В $\sin \frac{1}{2+4w}$ только нечётные и при делении на w^3 они станут чётными а нас интересует коэф-нт в разложении при w^1 (вообще $-C_1$, но мы делаем замену $w = \frac{1}{z}$) значит,
 $\operatorname{res}(f(z))_{z=\infty} = -\text{коэф-нт при } w^4 \text{ в разложении } \cos \frac{1}{2+4w}$

а $\operatorname{res} f(z)_{z=2} = \text{коэф-нт при } w^4 \text{ в разложении } \cos \frac{1}{2+4w}$.

$$\text{т.е. } \operatorname{res} f(z)_{z=\infty} = -\frac{w^4}{4!} = -\operatorname{res} f(z)_{z=2}.$$

вообще-то, нет.



7

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} \quad a > 0; b > 0$$

$x = \pm ib$, но нас интересует только $\text{Im } z > 0$.

$$z_{1,2} = \pm ib$$

$$f(z) = \frac{z \sin az}{z^2 + b^2}$$

(см. рис. 1)

На семинаре мы проходили теорему 3.

нужна 11

Все условия её выполняются (нет особых точек на $\text{Re } z$ ос,

$b \text{ Im } z > 0$ - конечное число). Единственная проблема

в том, что $|f(z)|$ не суживается сверху $\leq \frac{M}{|z|^{1/2}}$ ($\sigma > 0$)

но $f(z) \sim \frac{\sin az}{z} \Rightarrow$ но это $\sim$ сходится (в отлнии от $\frac{1}{z}$)

а значит мы можем применить теорему

и ~~используем~~ интеграл просто равен $\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) =$

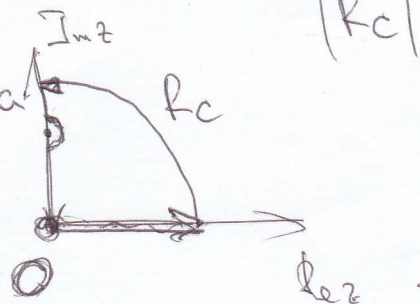
$$\lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z \cdot \sin az}{2(z - z_2)} = \frac{ib \cdot \sin iab}{2 \cdot 2ib} = \frac{\sin iab}{4} \quad \text{ответ.}$$

или.

Вот этот коэф-нт $1/2$, т.к. в нашей схеме

ib лежит на $\text{Im } z$ и надо брать $\frac{1}{2}$ от $\frac{1}{z}$

т.е. на границе.
в соответствующей точке.



$|R_c| \rightarrow +\infty$

рис. 1

$$\operatorname{res} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}((z-z_0)^m f(z))}{dz^{m-1}}$$

z_0 - m order

(in box)

11

(2) $\frac{1}{z}$

(3) $\frac{1}{z^2}$

(4) $\frac{1}{z^3}$



box