Глава 1

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Еще в курсе средней школы читателю приходилось сталкиваться с суммами, содержащими бесконечное число слагаемых (например, с суммой бесконечного числа членов геометрической прогрессии).

Исследование такого рода сумм, называемых рядами, может быть сведено к исследованию числовых последовательностей, тем не менее эти суммы требуют самостоятельного углубленного изучения, так как служат важным вспомогательным средством для представления различных встречающихся в анализе функций.

§ 1. ПОНЯТИЕ ЧИСЛОВОГО РЯДА

1. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Рассмотрим произвольную числовую последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots$ и формально образуем из ее элементов бесконечную сумму вида

$$u_1+u_2+\ldots+u_k+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty} u_k. \tag{1.1}$$

Формально составленную сумму (1.1) принято называть числовым рядом или просто рядом. При этом отдельные слагаемые u_k принято называть членами ряда (1.1). Сумму первых n членов ряда (1.1) принято называть n-й частичной суммой ряда и обозначать символом S_n.

Итак, по определению

$$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=\sum_{k=1}^{n} u_k. \tag{1.2}$$

Определение. *Ряд (1.1) называется* ***сходящимся****, если сходится последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм (1.2) этого ряда. При этом предел S указанной последовательности $\{S_n\}$ называется* ***суммой*** *ряда (1.1).*

Таким образом, для сходящегося ряда (1.1), имеющего сумму S, мы можем формально записать равенство

$$S=\sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

В случае, если для данного ряда (1.1) предела последовательности частичных сумм (1.2) не существует, этот ряд называется расходящимся.

Мы видим, что понятие суммы определено лишь для сходящегося ряда, причем (в отличие от понятия суммы конечного числа слагаемых) понятие суммы ряда вводится посредством операции предельного перехода.

В современной математике и в ее приложениях часто приходится сталкиваться с расходящимися рядами, для которых предела последовательности частичных сумм (1.2) не существует. Для таких рядов вводится понятие суммы в некоторых обобщенных смыслах. В § 7 настоящей главы будут рассмотрены наиболее употребительные методы обобщенного суммирования расходящихся рядов.

Одним из главных вопросов теории числовых рядов является установление признаков, позволяющих решить вопрос о сходимости или расходимости данного ряда. В § 2 такие признаки будут установлены для рядов, все члены которых являются неотрицательными числами, а в § 4 — для рядов с произвольными членами.

Примеры. 1°. Изучим вопрос о сходимости ряда, составленного из членов геометрической прогрессии

$$1+q+q^2+\ldots+q^k+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}. \tag{1.3}$$

Так как n-я частичная сумма S_n этого ряда при $q\neq1$ имеет вид

$$S_n=1+q+\ldots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}, \tag{1.4}$$

то очевидно, что при $|q|<1$ последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ имеет предел, равный $1/(1-q)$. Таким образом, при $|q|<1$ ряд (1.3) сходится и имеет сумму, равную $1/(1-q)$.

Если $|q|>1$, то из выражения (1.4) очевидно, что предела последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ не существует, т. е. при $|q|>1$ ряд (1.3) расходится.

Для полноты картины остается рассмотреть случай $|q|=1$, т. е. случай, когда q равно либо $+1$, либо -1. В случае, когда $q=+1$, все члены ряда (1.3) равны единице и n-я частичная сумма этого ряда S_n равна n. Отсюда следует, что и в случае $q=+1$ предела последовательности $\{S_n\}$ не существует, т. е. ряд (1.3) расходится.

Наконец, в случае $q=-1$ ряд (1.3) имеет вид $1-1+1-1+\ldots$, так что последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм совпадает с заведомо расходящейся последовательностью 1, 0, 1, 0, ... Стало быть, и при $q=-1$ ряд (1.3) расходится.

2°. Фиксировав любую точку x числовой прямой, рассмотрим вопрос о сходимости трех числовых рядов [1]:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}, \tag{1.5}$$

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \tag{1.6}$$

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-2}}{(2k-2)!}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-2}}{(2k-2)!}. \tag{1.7}$$

Обозначая n-е частичные суммы рядов (1.5), (1.6) и (1.7) соответственно через $S_n^{(1)}(x)$, $S_n^{(2)}(x)$ и $S_n^{(3)}(x)$, можем записать:

$$S_n^{(1)}(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{1.8}$$

$$S_n^{(2)}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \tag{1.9}$$

$$S_n^{(3)}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}. \tag{1.10}$$

Сопоставляя выражения (1.8), (1.9) и (1.10) с разложениями по формуле Маклорена функций e^x, $\sin x$ и $\cos x$ (см. п. 2 § 9 гл. 6 ч. 1 [2]), мы получим

$$\begin{aligned} e^x&=S_n^{(1)}(x)+R_n^{(1)}(x),\\ \sin x&=S_n^{(2)}(x)+R_n^{(2)}(x),\\ \cos x&=S_n^{(3)}(x)+R_n^{(3)}(x), \end{aligned} \tag{1.11}$$

где $R_n^{(1)}(x)$, $R_n^{(2)}(x)$, $R_n^{(3)}(x)$ обозначают n-е остаточные члены в разложении по формуле Маклорена функцией e^x, $\sin x$ и $\cos x$ соответственно.

В § 9 гл. 6 ч. 1 доказано, что в каждой точке x числовой прямой указанные остаточные члены имеют равный нулю предел при $n\to\infty$. Следовательно, в силу соотношений (1.11) в каждой точке x прямой частичные суммы $S_n^{(1)}(x)$, $S_n^{(2)}(x)$ и $S_n^{(3)}(x)$ сходятся к пределам, равным соответственно e^x, $\sin x$ и $\cos x$. Это означает,

[1] Символ 0! мы отождествляем с числом 1.

[2] Здесь и далее ч. 1 — это краткое обозначение книги: Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Начальный курс. — М.: Изд-во МГУ, 1985.

что ряды (1.5), (1.6) и (1.7) сходятся в каждой точке x числовой прямой и их суммы равны соответственно e^x, $\sin x$ и $\cos x$.

Замечание 1. С формальной точки зрения изучение числовых рядов представляет собой новую форму изучения числовых последовательностей, ибо 1) каждому ряду (1.1) однозначно соответствует последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм, 2) произвольной числовой последовательности $\{S_n\}$ однозначно соответствует числовой ряд (1.1) с членами $u_1=S_1$, $u_k=S_k-S_{k-1}$ при $k>1$, для которого эта последовательность служит последовательностью частичных сумм.

Замечание 2. Отметим два простых свойства произвольного ряда, непосредственно вытекающие из определения его сходимости:

I. *Отбрасывание конечного числа членов ряда (или добавление к ряду конечного числа членов) не влияет на сходимость или расходимость этого ряда.*

II. *Если c — отличная от нуля постоянная, $u_k'=cu_k$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.*

Для обоснования первого из этих свойств достаточно заметить, что в результате указанного отбрасывания (или добавления) конечного числа членов все частичные суммы ряда, начиная с некоторого номера, изменятся на одну и ту же постоянную величину.

Для доказательства второго из указанных свойств обозначим n-е частичные суммы рядов $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'$ и $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ соответственно через S_n' и S_n и учтем, что $S_n'=cS_n$, где $c\neq0$. Из последнего равенства вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n'$ существует тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

2. Критерий Коши сходимости ряда. Так как вопрос о сходимости ряда по определению эквивалентен вопросу о сходимости последовательности его частичных сумм, то мы получим необходимое и достаточное условие сходимости данного ряда, сформулировав критерий сходимости Коши для последовательности его частичных сумм. Для удобства приведем формулировку критерия Коши для последовательности (см. п. 3 § 3 гл. 3 ч. 1):

Для того чтобы последовательность $\{S_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε нашелся номер N такой, что для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n\geqslant N$, и для всех натуральных p ($p=1, 2, 3, \ldots$)

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon.$$

В качестве следствия из этого утверждения получим следующую основную теорему.

Теорема 1.1 (критерий Коши для ряда). *Для того чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε нашелся номер N такой, что для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n\geqslant N$, и для всех натуральных чисел p ($p=1, 2, \ldots$)*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right|<\varepsilon. \tag{1.12}$$

Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что величина, стоящая под знаком модуля в неравенстве (1.12), равна разности частичных сумм $S_{n+p}-S_n$.

Отметим, что критерий сходимости Коши представляет в основном теоретический интерес. Его использование для исследования сходимости или расходимости тех или иных конкретных рядов, как правило, сопряжено с трудностями. Поэтому наличие критерия Коши не снимает вопроса об установлении других практически эффективных признаков сходимости и расходимости рядов.

Из теоремы 1.1 легко получить два элементарных, но важных следствия.

Следствие 1. *Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится, то последовательность $r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ является бесконечно малой.*

Принято называть величину r_n n-м остатком ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.

Чтобы доказать следствие 1, достаточно показать, что для любого $\varepsilon>0$ найдется номер N такой, что $|r_n|\leqslant\varepsilon$ при $n\geqslant N$. Последнее неравенство непосредственно вытекает из неравенства (1.12), справедливого для любого $p=1, 2, 3, \ldots$, и из теоремы 3.13 ч. 1.

Следствие 2 (необходимое условие сходимости ряда). *Для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ необходимо, чтобы последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots$ членов этого ряда являлась бесконечно малой.*

Достаточно доказать, что для данного сходящегося ряда и любого $\varepsilon>0$ найдется номер N_0 такой, что при $n\geqslant N_0$ $|u_n|<\varepsilon$. Пусть дано любое $\varepsilon>0$. Согласно теореме 1.1 найдется номер N такой, что при $n\geqslant N$ и для любого натурального p выполняется неравенство (1.12). В частности, при $p=1$ это неравенство имеет вид

$$|u_{n+1}|<\varepsilon \quad (\text{при } n\geqslant N). \tag{1.12′}$$

Если теперь положить номер N_0 равным $N+1$, то при $n\geqslant N_0$ в силу неравенства (1.12′) получим $|u_n|<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Иначе следствие 2 можно сформулировать так: для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ необходимо, чтобы $\lim\limits_{k\to\infty} u_k=0$. Таким образом, при исследовании данного ряда на сходимость следует прежде всего посмотреть, стремится ли к нулю k-й член этого ряда при $k\to\infty$. Если это не так, то ряд заведомо расходится. Так, например, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{7k^2+8000k}$$

заведомо расходится, ибо

$$\lim_{k\to\infty} u_k=\lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{7k^2+8000k}=\frac{1}{7}\neq0.$$

Аналогично расходимость уже встречавшегося выше ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}$ вытекает из того, что $\lim\limits_{k\to\infty}(-1)^{k-1}$ не существует.

Отметим, что стремление к нулю k-го члена ряда при $k\to\infty$ является лишь необходимым, но не достаточным условием сходимости ряда. В качестве примера рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}+\ldots \tag{1.13}$$

Этот ряд обычно называют гармоническим рядом. Очевидно, что для гармонического ряда выполнено необходимое условие сходимости, но (как доказано в п. 3 § 3 гл. 3 ч. 1) последовательность частичных сумм этого ряда расходится.

§ 2. РЯДЫ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

1. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда с неотрицательными членами. Ряды с неотрицательными членами часто встречаются в приложениях. Кроме того, их предварительное изучение облегчит изучение рядов с членами любого знака. В дальнейшем, чтобы подчеркнуть, что речь идет о ряде с неотрицательными членами, мы часто будем обозначать члены такого ряда символом p_k вместо u_k.

Можно сразу же отметить основное характеристическое свойство ряда с неотрицательными членами: *последовательность частичных сумм такого ряда является неубывающей.* Это позволяет нам доказать следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Для того чтобы ряд с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограничена.*

Необходимость следует из того, что всякая сходящаяся последовательность является ограниченной (в силу теоремы 3.8 ч. 1).

Достаточность вытекает из того, что последовательность частичных сумм не убывает и, следовательно, для сходимости этой последовательности достаточно, чтобы она была ограничена (в силу теоремы 3.15 ч. 1).

2. Признаки сравнения. В этом пункте мы установим ряд признаков, позволяющих сделать заключение о сходимости (или расходимости) рассматриваемого ряда посредством сравнения его с другим рядом, сходимость (или расходимость) которого известна.

Теорема 1.3. *Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ — два ряда с неотрицательными членами. Пусть, далее, для всех номеров k справедливо неравенство*

$$p_k\leqslant p_k'. \tag{1.14}$$

Тогда сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ влечет за собой сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$; расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ влечет за собой расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$.

Доказательство. Обозначим n-е частичные суммы рядов $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ соответственно через S_n и S_n'. Из неравенства (1.14) заключаем, что $S_n\leqslant S_n'$. Последнее неравенство означает, что ограниченность последовательности частичных сумм $\{S_n'\}$ влечет за собой ограниченность последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ и, наоборот, неограниченность последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ влечет за собой неограниченность последовательности частичных сумм $\{S_n'\}$. В силу теоремы 1.2 теорема 1.3 доказана.

Замечания к теореме 1.3. 1) В условии теоремы 1.3 можно требовать, чтобы неравенство (1.14) было выполнено не для всех номеров k, а лишь начиная с некоторого номера k. В самом деле, в силу замечания 2 п. 1 § 1 отбрасывание конечного числа членов не влияет на сходимость ряда.

2) Теорема 1.3 останется справедливой, если в условии этой теоремы заменить неравенство (1.14) следующим неравенством:

$$p_k\leqslant cp_k'. \tag{1.15}$$

где c — любая положительная постоянная.

В самом деле, в силу замечания 2 из п. 1 § 1 вопрос о сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ эквивалентен вопросу о сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(cp_k')$. При этом, конечно, можно требовать, чтобы неравенство (1.15) было выполнено лишь начиная с некоторого достаточно большого номера k.

Следствие из теоремы 1.3. *Если $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ — ряд с неотрицательными членами, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ — ряд со строго положительными членами и если существует конечный предел*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{p_k}{p_k'}=L,$$

то сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ влечет за собой сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ влечет за собой расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{p_k}{p_k'}=L$, то по определению предела для некоторого $\varepsilon>0$ найдется номер N такой, что при $k\geqslant N$

$$L-\varepsilon<\frac{p_k}{p_k'}<L+\varepsilon.$$

Следовательно, при $k\geqslant N$ справедливо неравенство $p_k<(L+\varepsilon)p_k'$. Последнее неравенство совпадает с неравенством (1.15) при $c=L+\varepsilon$. В силу замечания 2 к теореме 1.3 следствие доказано.

Теорема 1.4. *Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ — два ряда со строго положительными членами. Пусть далее для всех номеров k справедливо неравенство*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}\leqslant\frac{p_{k+1}'}{p_k'}. \tag{1.16}$$

Тогда сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ влечет за собой сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ влечет за собой расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$.

Доказательство. Запишем неравенство (1.16) для $k=1, 2, \ldots, n-1$, где n — любой номер:

$$\frac{p_2}{p_1}\leqslant\frac{p_2'}{p_1'},$$

$$\frac{p_3}{p_2}\leqslant\frac{p_3'}{p_2'},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{p_n}{p_{n-1}}\leqslant\frac{p_n'}{p_{n-1}'}.$$

Перемножая почленно все написанные неравенства, получим

$$\frac{p_n}{p_1}\leqslant\frac{p_n'}{p_1'}, \quad \text{или} \quad p_n\leqslant\frac{p_1}{p_1'}\,p_n'.$$

Поскольку в последнем, неравенстве величина $c=p_1/p_1'$ представляет собой положительную постоянную, не зависящую от номера n, то в силу замечания 2 к теореме 1.3 теорема 1.4 доказана.

Замечание к теореме 1.4. В условии теоремы 1.4 можно требовать, чтобы неравенство (1.16) было выполнено не для всех номеров k, а лишь начиная с некоторого номера k (см. замечание 2 п. 1 § 1).

Обе доказанные в настоящем пункте теоремы называют теоремами сравнения или признаками сравнения.

Примеры. 1°. Исследуем вопрос о сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2+b^k}, \quad \text{где } b>0.$$

Если $b\leqslant1$, то k-й член рассматриваемого ряда не стремится к нулю при $k\to\infty$. Следовательно, нарушено необходимое условие сходимости ряда, и ряд расходится. Если же $b>1$, то, поскольку для любого номера k справедливо неравенство

$$\frac{1}{2+b^k}<\frac{1}{b^k}$$

и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{b^k}$ сходится, теорема сравнения 1.3 позволяет утверждать сходимость рассматриваемого ряда.

2°. Исследуем вопрос о сходимости для любого $\alpha\leqslant 1$ следующего ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{k^{\alpha}}+\ldots \tag{1.17}$$

Этот ряд часто называют обобщенным гармоническим рядом. Поскольку при $\alpha\leqslant 1$ для любого номера k справедливо неравенство

$$\frac{1}{k^{\alpha}}\geqslant\frac{1}{k}$$

и гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ расходится[3], то теорема сравнения 1.3 позволяет утверждать расходимость ряда (1.17) для любого $\alpha\leqslant 1$.

3. Признаки Даламбера и Коши. К признакам сравнения непосредственно примыкают два весьма употребительных признака сходимости рядов с положительными членами — признаки Даламбера и Коши, которые основаны на сравнении рассматриваемого ряда с рядом, составленным из элементов геометрической прогрессии, а именно со сходящимся рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}q^k=q+q^2+\ldots+q^k+\ldots,\quad |q|<1, \tag{1.18}$$

или с расходящимся рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}1=1+1+\ldots+1\ldots \tag{1.19}$$

Теорема 1.5 (признак Даламбера)[4]. I. *Если для всех номеров k, по крайней мере начиная с некоторого номера, справедливо неравенство*

[3] Расходимость гармонического ряда обоснована в конце п. 2 § 1.

[4] Жак Лерон Даламбер — французский математик и философ (1717—1783).

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}\leqslant q<1\quad\left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\geqslant 1\right)^{5)}, \tag{1.20}$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k$ сходится (расходится).

II. *Если существует предел*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{p_{k+1}}{p_k}=L, \tag{1.21}$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k$ сходится при $L<1$ и расходится при $L>1$.

Теорему II обычно называют признаком Даламбера в предельной форме. В этой форме он наиболее часто используется.

Доказательство. Докажем отдельно теоремы I и II.

1) Для доказательства теоремы I положим $p_k'=q^k$ $(p_k'=1)$. Тогда $\frac{p'_{k+1}}{p'_k}=q$, где $q<1$ $\left(\frac{p'_{k+1}}{p'_k}=1\right)$, и мы можем переписать равенство (1.20) в виде

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}\leqslant\frac{p'_{k+1}}{p'_k}\quad\left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\geqslant\frac{p'_{k+1}}{p'_k}\right). \tag{1.22}$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p'_k$, совпадающий с рядом (1.18) ((1.19)), сходится (расходится), то неравенство (1.22) на основании теоремы сравнения 1.4 гарантирует сходимость (расходимость) ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k$. Теорема I доказана.

2) Докажем теперь теорему II. Если $L<1$, то найдется положительное число ε такое, что $L=1-2\varepsilon$, т. е. $L+\varepsilon=1-\varepsilon$. По определению предела последовательности для указанного ε найдется номер N такой, что при $k\geqslant N$

$$L-\varepsilon<\frac{p_{k+1}}{p_k}<L+\varepsilon=1-\varepsilon. \tag{1.23}$$

Число $L+\varepsilon=1-\varepsilon$ играет роль q в теореме I. Ряд сходится.

Если же $L>1$, то найдется *положительное* число ε такое, что $L=1+\varepsilon$ и $L-\varepsilon=1$. В этом случае на основании левого из неравенств (1.23) получим

[5] При этом, конечно, предполагается, что все члены ряда (по крайней мере начиная с некоторого номера) строго положительны.

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}>L-\varepsilon=1\quad(\text{при } k\geqslant N).$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k$ расходится на основании теоремы I. Теорема 1.5 полностью доказана.

Замечание к теореме 1.5. 1) Обратим внимание на то, что в теореме 1.5 (I) неравенство $\frac{p_{k+1}}{p_k}\leqslant q<1$ (для всех k, начиная с некоторого) нельзя заменить на $\frac{p_{k+1}}{p_k}<1$.

В самом деле, как доказано выше, гармонический ряд (1.13) расходится, но для этого ряда $\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{k}{k+1}<1$ (для всех номеров k).

2) Если в условиях теоремы 1.5 (II) $L=1$, то нельзя сказать ничего определенного о сходимости ряда (т. е. при $L=1$ признак Даламбера «не действует»). В самом деле, для гармонического ряда (1.13) $L=1$, причем этот ряд, как мы знаем, расходится. Вместе с тем для ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \tag{1.24}$$

также $L=1$, но этот ряд, как будет показано в следующем пункте, сходится.

Теорема 1.6 (признак Коши). I. *Если для всех номеров k, по крайней мере начиная с некоторого номера, справедливо неравенство*

$$\sqrt[k]{p_k}\leqslant q<1\quad(\sqrt[k]{p_k}\geqslant 1), \tag{1.25}$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k$ сходится (расходится).

II. *Если существует предел*

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{p_k}=L, \tag{1.26}$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k$ сходится при $L<1$ и расходится при $L>1$.

Теорему II обычно называют признаком Коши в предельной форме.

Доказательство. Докажем отдельно теоремы I и II.

1) Для доказательства теоремы I положим $p_k'=q^k$ $(p_k'=1)$. Тогда из неравенства (1.25) получим

$$p_k\leqslant p_k'\quad(p_k\geqslant p_k'). \tag{1.27}$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p'_k$, совпадающий с рядом (1.18) ((1.19)), сходится (расходится), то неравенство (1.27) на основании теоремы сравнения 1.3 гарантирует сходимость (расходимость) ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k$. Теорема 1.6 (I) доказана.

2) Для доказательства теоремы (II) следует дословно повторить схему доказательства теоремы 1.5 (II), заменив во всех рассуждениях $\frac{p_{k+1}}{p_k}$ на $\sqrt[k]{p_k}$. Теорема 1.6 полностью доказана.

Замечания к теореме 1.6. 1) Как и в теореме 1.5 (I), в теореме 1.6 (I) неравенство $\sqrt[k]{p_k}\leqslant q<1$ нельзя заменить на $\sqrt[k]{p_k}<1$.

2) При $L=1$ признак Коши в предельной форме «не действует». Можно сослаться на два примера, указанные в соответствующем замечании к признаку Даламбера.

Примеры. 1°. Исследуем вопрос о сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{k})^k}{k!}. \tag{1.28}$$

Применим признак Даламбера в предельной форме. Имеем

$$p_k=\frac{(\sqrt{k})^k}{k!},\quad\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{(\sqrt{k+1})^{k+1}\,k!}{(k+1)!\,(\sqrt{k})^k}=\frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{2}}. \tag{1.29}$$

На основании (1.29)

$$\lim_{k\to\infty}\frac{p_{k+1}}{p_k}=\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{2}}\right\}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{k+1}}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{2}}=0\cdot\sqrt{e}=0<1,$$

т. е. ряд (1.28) сходится.

2°. Изучим вопрос о сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot 2^{-k}. \tag{1.30}$$

Применим признак Коши в предельной форме. Имеем

$$\sqrt[k]{p_k}=\frac{1}{2}\sqrt[k]{k}. \tag{1.31}$$

На основании[6] (1.31) $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{p_k}=\frac{1}{2}\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}=\frac{1}{2}<1$. Таким образом, признак Коши устанавливает сходимость ряда (1.30).

Возникает вопрос о том, какой из двух признаков, Даламбера или Коши, является более сильным. Проанализируем этот вопрос в отношении признаков Даламбера и Коши, взятых в предельной форме. Ниже будет доказано, что из существования предела (1.21) вытекают существование предела (1.26) и факт равенства этих пределов. Обратное неверно. В самом деле, легко убедиться в том, что для ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k+3}{2^{k+1}} \tag{1.32}$$

предел (1.26) существует и равен 1/2, в то время как предел (1.21) вообще не существует. Таким образом, признак Коши является более сильным, чем признак Даламбера, ибо всякий раз, когда действует признак Даламбера, действует и признак Коши и вместе с тем существуют ряды (например, ряд (1.32)), для которых действует признак Коши и не действует признак Даламбера. Несмотря на это, признак Даламбера на практике употребляется чаще, чем признак Коши.

Итак, докажем

Утверждение. *Из существования равного L предела (1.21) вытекает существование равного тому же L предела (1.26).*

Доказательству утверждения предпошлем две леммы.

Лемма 1. *Если последовательность $\{a_n\}$ сходится к пределу l, то к тому же пределу сходится и последовательность $\sigma_n=(a_1+a_2+\ldots+a_n)/n$ средних арифметических чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$.*

Доказательство. Так как последовательность $\{a_n\}$ сходится к пределу l, то для любого $\varepsilon>0$ можно фиксировать номер N такой, что $|a_n-l|<\varepsilon/2$ для всех $n\geqslant N$. Используя этот факт и учитывая, что при всех $n>N$

$$\sigma_n-l=\frac{(a_1-l)+\ldots+(a_n-l)}{n}=$$

[6] Для вычисления $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/x}$ следует прологарифмировать выражение $x^{1/x}$ и применить правило Лопиталя.

$$=\left[\frac{(a_1-l)+\ldots+(a_N-l)}{n}\right]+\left\{\frac{(a_{N+1}-l)+\ldots+(a_n-l)}{n}\right\},$$

мы получим, что $|\sigma_n-l|<\varepsilon$ при всех $n\geqslant N_1$.

В самом деле, модуль дроби, заключенной в фигурные скобки, не превосходит числа $\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{(n-N)}{n}$, меньшего $\varepsilon/2$. Далее, поскольку номер N фиксирован, модуль дроби, заключенной в квадратные скобки, не превосходит $\varepsilon/2$ при всех $n\geqslant N_1$, где N_1 — достаточно большое число. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ сходится к пределу L, то к тому же пределу сходится и последовательность $b_n=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$ средних геометрических чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу непрерывности логарифмической функции для $L>0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=\ln L$. Но тогда по лемме 1 о пределе среднего арифметического существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\ldots+\ln a_n}{n}=\ln L.$$

Из последнего равенства в силу непрерывности показательной функции получим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}=e^{\ln L}=L.$$

(Эти рассуждения справедливы и при $L=0$, если считать $\ln L=-\infty$.) Лемма 2 доказана.

Доказательство утверждения. Применяя лемму 2 к числам $a_1=p_1$, $a_2=p_2/p_1$, $\ldots$, $a_n=p_n/p_{n-1}$, мы, опираясь на существование равного L предела (1.21), установим существование равного тому же L предела (1.26).

4. Интегральный признак Коши—Маклорена. Признаки Даламбера и Коши оказываются непригодными для выяснения вопроса о сходимости некоторых часто встречающихся рядов с положительными членами. Так, например, с помощью этих признаков нельзя выяснить вопрос о сходимости обобщенного гармонического ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}} \tag{1.33}$$

(α — любое вещественное число).

В конце п. 2 мы установили, что при $\alpha\leqslant 1$ ряд (1.33) расходится, однако остается открытым вопрос о сходимости этого ряда

при $\alpha>1$. В этом пункте мы установим еще один общий признак сходимости ряда с неотрицательными членами, из которого, в частности, будет вытекать сходимость ряда (1.33) при $\alpha>1$.

Теорема 1.7. (признак Коши — Маклорена). *Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и не возрастает всюду на полупрямой $x\geqslant m$, где m — любой фиксированный номер. Тогда числовой ряд*

$$\sum_{k=m}^{\infty}f(k)=f(m)+f(m+1)+f(m+2)+\ldots \tag{1.34}$$

сходится в том и только в том случае, когда существует предел при $n\to\infty$ последовательности

$$a_n=\int_m^n f(x)\,dx. \tag{1.35}$$

Доказательство. Пусть k — любой номер, удовлетворяющий условию $k\geqslant m+1$, а x — любое значение аргумента из сегмента $k-1\leqslant x\leqslant k$. Так как по условию функция $f(x)$ не возрастает на указанном сегменте, то для всех x из указанного сегмента справедливы неравенства

$$f(k)\leqslant f(x)\leqslant f(k-1). \tag{1.36}$$

Функция $f(x)$, будучи ограниченной и монотонной, интегрируема на сегменте $[k-1,\,k]$ (см. п. 2 § 3 гл. 9 ч. 1). Более того, из неравенства (1.36) и из свойства б) (см. п. 2 § 4 гл. 9 ч. 1) вытекает, что

$$\int_{k-1}^{k}f(k)\,dx\leqslant\int_{k-1}^{k}f(x)\,dx\leqslant\int_{k-1}^{k}f(k-1)\,dx,$$

или

$$f(k)\leqslant\int_{k-1}^{k}f(x)\,dx\leqslant f(k-1). \tag{1.37}$$

Эти неравенства установлены нами для любого $k\geqslant m+1$. Запишем их для значений k, равных $m+1$, $m+2$, $\ldots$, n, где n — любой номер, превосходящий m:

$$f(m+1)\leqslant\int_m^{m+1}f(x)\,dx\leqslant f(m),$$

$$f(m+2)\leqslant\int_{m+1}^{m+2}f(x)\,dx\leqslant f(m+1),$$

. . . .

$$f(n)\leqslant\int_{n-1}^{n}f(x)\,dx\leqslant f(n-1).$$

Складывая почленно записанные неравенства, получим

$$\sum_{k=m+1}^{n}f(k)\leqslant\int_m^n f(x)\,dx\leqslant\sum_{k=m}^{n-1}f(k). \tag{1.38}$$

Договоримся обозначать символом S_n n-ю частичную сумму ряда (1.34), равную

$$S_n=\sum_{k=m}^{n}f(k).$$

Приняв это обозначение и учитывая обозначение (1.35), мы можем следующим образом переписать неравенства (1.38):

$$S_n-f(m)\leqslant a_n\leqslant S_{n-1}. \tag{1.39}$$

Эти неравенства позволяют без труда доказать теорему. В самом деле, из формулы (1.35) очевидно, что последовательность $\{a_n\}$ является неубывающей. Следовательно для сходимости этой последовательности необходима и достаточна ее ограниченность. Для сходимости ряда (1.34) в силу теоремы 1.2 необходима и достаточна ограниченность последовательности $\{S_n\}$. Из неравенств (1.39) вытекает, что последовательность $\{S_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда ограничена последовательность $\{a_n\}$, т. е. тогда и только тогда, когда последовательность $\{a_n\}$ сходится. Теорема доказана.

Примеры. 1°. Прежде всего применим интегральный признак Коши—Маклорена для выяснения сходимости обобщенного гармонического ряда (1.33). Поскольку ряд (1.33) можно рассматривать как ряд вида (1.34) при $m=1$, $f(x)=1/x^{\alpha}$ и функция $f(x)$ убывает и положительна на полупрямой $x\geqslant 1$, вопрос о сходимости ряда (1.33) эквивалентен вопросу о сходимости последовательности $\{a_n\}$, где

$$a_n=\int_1^n\frac{1}{x^{\alpha}}\,dx=\begin{cases}\left.\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{x=1}^{x=n}=\dfrac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{при } \alpha\neq 1,\\ \ln x\Big|_{x=1}^{x=n}=\ln n & \text{при } \alpha=1.\end{cases}$$

Из вида элементов a_n вытекает, что последовательность $\{a_n\}$ расходится при $\alpha\leqslant 1$ и сходится при $\alpha>1$, причем в последнем случае $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{\alpha-1}$. Таким образом, ряд (1.33) расходится при $\alpha\leqslant 1$ (это мы уже установили выше другим способом) и сходится

при $\alpha>1$. В частности, при $\alpha=2$ ряд (1.33) переходит в ряд (1.24), сходимость которого мы теперь можем утверждать.

2°. Исследуем вопрос о сходимости ряда

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln^{\beta}k}, \tag{1.40}$$

где β — фиксированное положительное вещественное число. Ряд (1.40) можно рассматривать как ряд вида (1.34) при $m=2$ и $f(x)=\frac{1}{x\ln^{\beta}x}$. Поскольку функция $f(x)$ неотрицательна и невозрастает на полупрямой $x\geqslant 2$, вопрос о сходимости ряда (1.40) эквивалентен вопросу о сходимости последовательности $\{a_n\}$, где

$$a_n=\int_2^n\frac{1}{x\ln^{\beta}x}\,dx=\begin{cases}\left.\dfrac{\ln^{1-\beta}x}{1-\beta}\right|_{x=2}^{x=n}=\dfrac{\ln^{1-\beta}n-\ln^{1-\beta}2}{1-\beta} & \text{при } \beta\neq 1,\\ \ln\ln x\Big|_{x=2}^{x=n}=\ln\ln n-\ln\ln 2 & \text{при } \beta=1.\end{cases}$$

Из вида элементов a_n вытекает, что последовательность $\{a_n\}$ сходится при $\beta>1$ и расходится при $\beta\leqslant 1$. Таким образом, ряд (1.40) сходится при $\beta>1$ и расходится при $\beta\leqslant 1$.

5. Признак Раабе. Признаки Даламбера и Коши были основаны на сравнении рассматриваемого ряда с рядом, представляющим собой сумму членов геометрической прогрессии. Естественно, возникает идея о получении более тонких признаков, основанных на сравнении рассматриваемого ряда с другими стандартными рядами, сходящимися или расходящимися «медленнее», чем ряд, составленный из всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

В этом пункте мы установим признак, основанный на сравнении рассматриваемого ряда с изученным в предыдущем пункте стандартным рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\ldots \tag{1.41}$$

Теорема 1.8 (признак Раабе[7]). I. *Если для всех номеров k, по крайней мере начиная с некоторого номера, справедливо неравенство*

$$k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)\geqslant q>1\quad\left(k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)\leqslant 1\right)^{8)}, \tag{1.42}$$

[7] Иозеф Людвиг Раабе — швейцарский математик (1801—1859).

[8] Конечно, при этом предполагается, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k$, по крайней мере начиная с некоторого номера, имеет строго положительные члены.

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ *сходится (расходится).*

II. *Если существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)=L, \tag{1.43}$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ *сходится при* $L>1$ *и расходится при* $L<1$. Теорему II обычно называют признаком Раабе в предельной форме.

Доказательство. Докажем отдельно теоремы I и II. 1) Для доказательства теоремы I перепишем неравенство (1.42) в виде

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}\leqslant 1-\frac{q}{k}\left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\geqslant 1-\frac{1}{k}\right). \tag{1.44}$$

Так как $q>1$, то найдется некоторое число α, удовлетворяющее неравенствам $q>\alpha>1$. Разложив функцию $(1+x)^\alpha$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано (см. п. 2 § 9 гл. 6 ч. 1), будем иметь

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+o(x).$$

Полагая в последней формуле $x=-\frac{1}{k}$, получим

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)^\alpha=1-\frac{\alpha}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right). \tag{1.45}$$

Поскольку последовательность $\frac{o(1/k)}{1/k}$ является бесконечно малой, то, начиная с некоторого номера k_0, справедливо неравенство

$$\frac{o\left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}}\leqslant q-\alpha. \tag{1.46}$$

Сопоставляя (1.45) и (1.46), получим неравенство

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)^\alpha\geqslant 1-\frac{q}{k}\ (\text{при } k\geqslant k_0). \tag{1.47}$$

Сравнение неравенств (1.44) и (1.47) дает

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}\leqslant\left(1-\frac{1}{k}\right)^\alpha\ \left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\geqslant 1-\frac{1}{k}\right)\ (\text{при } k\geqslant k_0).$$

Последние неравенства можно переписать в виде

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}<\frac{\frac{1}{k^\alpha}}{\frac{1}{(k-1)^\alpha}}\left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\geqslant\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k-1}}\right)\ (\text{при } k\geqslant k_0). \tag{1.48}$$

Поскольку ряд (1.41) сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha=1$, то неравенства (1.48) и теорема сравнения 1.4 позволяют утверждать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится). Теорема I доказана.

2) Точно так же, как и в признаках Даламбера и Коши, мы сведем теорему II к теореме I. Пусть сначала $L>1$. Положим $\varepsilon=(L-1)/2$, $q=1+\varepsilon=L-\varepsilon$. По определению предела (1.43) для этого ε можно указать номер k_0, начиная с которого $\left|k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)-L\right|<\varepsilon$ и, следовательно, справедливо левое неравенство (1.42). Если же $L<1$, то мы положим $\varepsilon=1-L$ и, используя определение предела (1.43), получим, что, начиная с некоторого номера k_0, справедливо правое неравенство (1.42). Теорема 1.8 полностью доказана.

Замечание. В теореме 1.8 (I) в левом неравенстве (1.42) нельзя взять $q=1$ (при этом сходимость ряда может не иметь места). При $L=1$ теорема 1.8 (II) «не действует» (возможны и сходимость и расходимость ряда).

В качестве примера исследуем вопрос о сходимости ряда

$$\sum_{k=2}^{\infty} p_k,\ \text{где}\ p_k=a^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k-1}\right)},\quad a=\text{const}>0.$$

Признаки Даламбера и Коши в применении к этому ряду «не действуют». Применим признак Раабе. Легко проверить, что

$$k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)=\frac{a^{-\frac{1}{k}}-1}{\left(-\frac{1}{k}\right)}.$$

Последняя дробь при $k\to\infty$ стремится к производной функции a^x в точке $x=0$, т. е. стремится к $\ln a$. В силу признака Раабе рассматриваемый ряд сходится при $\ln a>1$, т. е. при $a>e$, и расходится при $\ln a<1$, т. е. при $a<e$. При $a=e$ вопрос о сходимости ряда требует дополнительного исследования, так как признак Раабе «не действует». Другим примером ряда, в примене-

нии к которому «не действует» признак Раабе, может служить ряд (1.40).

6. Отсутствие универсального ряда сравнения. Мы уже отмечали, что признаки Даламбера и Коши основаны на сравнении рассматриваемого ряда с рядом, составленным из всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а признак Раабе — на сравнении с более медленно сходящимся (или расходящимся) рядом (1.41).

Естественно, возникает вопрос о том, не существует ли такой универсальный (предельно медленно!) сходящийся (или расходящийся) ряд, сравнение с которым позволило бы сделать заключение о сходимости (или расходимости) любого наперед взятого ряда с неотрицательными членами. Докажем, что такого универсального ряда не существует.

Пусть даны два сходящихся ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$; обозначим символами r_n и r_n' соответственно их n-е остатки. Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$ сходится медленнее, чем ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r_n}{r_n'}=0$.

Утверждение. *Для каждого сходящегося ряда существует ряд, сходящийся медленнее этого ряда.*

В самом деле, пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ — любой сходящийся ряд, r_n $(n\geqslant 0)$ — его n-й остаток[9]. Докажем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$, где $p_k'=\sqrt{r_{k-1}}-\sqrt{r_k}$ сходится медленнее, чем ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$. В самом деле, если r_n' — n-й остаток ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{r_n'}=\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{\sqrt{r_n}}=0.$$

Теперь докажем отсутствие универсального сходящегося ряда, сравнение с которым позволило бы сделать заключение о сходимости любого наперед взятого сходящегося ряда. В самом

[9] За r_0 принимаем всю сумму $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$.

деле, если бы такой универсальный сходящийся ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ существовал, то взяв для него построенный выше ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$, мы получили бы, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{p_k}{p_k'}=\lim_{k\to\infty}\frac{r_{k-1}-r_k}{\sqrt{r_{k-1}}-\sqrt{r_k}}=\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt{r_{k-1}}+\sqrt{r_k}\right)=0.$$

Таким образом, из сравнения с рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ нельзя сделать заключения о сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$. Аналогично доказывается отсутствие универсального расходящегося ряда, сравнение с которым позволило бы сделать заключение о расходимости любого наперед взятого расходящегося ряда.

§ 3. АБСОЛЮТНО И УСЛОВНО СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ

1. Понятия абсолютно и условно сходящихся рядов. Теперь мы перейдем к изучению рядов, члены которых являются вещественными числами *любого* знака.

Определение 1. *Будем называть ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1.49}$$

абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|. \tag{1.50}$$

Заметим, что в этом определении ничего не сказано о том, предполагается ли при этом сходимость самого ряда (1.49). Оказывается, такое предположение оказалось бы излишним, ибо справедлива следующая теорема.

Теорема 1.9. *Из сходимости ряда* (1.50) *вытекает сходимость ряда* (1.49).

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши для ряда (т. е. теоремой 1.1). Требуется доказать, что для любого $\varepsilon>0$ найдется номер N такой, что для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n\geqslant N$, и для любого натурального p справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right|<\varepsilon. \tag{1.51}$$

Фиксируем любое $\varepsilon>0$. Так как ряд (1.50) сходится, то в силу теоремы 1.1 найдется номер N такой, что для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n\geqslant N$, и для любого натурального p справедливо неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|<\varepsilon. \tag{1.52}$$

Так как модуль суммы нескольких слагаемых не превосходит суммы их модулей, то

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|. \tag{1.53}$$

Сопоставляя неравенства (1.52) и (1.53), получим неравенство (1.51). Теорема доказана.

Определение 2. *Ряд* (1.49) *называется условно сходящимся, если этот ряд сходится, в то время как соответствующий ряд из модулей* (1.50) *расходится.*

Примером абсолютно сходящегося ряда может служить ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}=1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\ldots,\ \text{где}\ \alpha>1.$$

Этот ряд сходится абсолютно, ибо при $\alpha>1$ сходится ряд (1.33).

Приведем пример условно сходящегося ряда. Докажем условную сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots \tag{1.54}$$

Так как соответствующий ряд из модулей (гармонический ряд), как мы уже знаем, расходится, то для доказательства условной сходимости ряда (1.54) достаточно доказать, что этот ряд сходится. Докажем, что ряд (1.54) сходится к числу $\ln 2$. В п. 2 § 9 гл. 6 ч. 1 мы получили разложение по формуле Маклорена функции

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_{n+1}(x).$$

Там же для всех x из сегмента $0\leqslant x\leqslant 1$ получена следующая оценка остаточного члена:

$$|R_{n+1}(x)|<1/(n+1).$$

Полагая в двух последних соотношениях $x=1$, будем иметь

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+R_{n+1}(1),$$

где

$$|R_{n+1}(1)|<1/(n+1),$$

или

$$\left|\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]-\ln 2\right|<\frac{1}{n+1}. \tag{1.55}$$

Обозначая через S_n n-ю частичную сумму ряда (1.54), мы можем переписать последнее неравенство (1.55) в виде

$$|S_n-\ln 2|<1/(n+1). \tag{1.56}$$

Из (1.56) следует, что разность $S_n-\ln 2$ представляет собой бесконечно малую последовательность. Это и доказывает сходимость ряда (1.54) к числу $\ln 2$.

2. О перестановке членов условно сходящегося ряда. Одним из важнейших свойств суммы конечного числа вещественных слагаемых является переместительное свойство. Естественно, возникает вопрос, остается ли справедливым это свойство для суммы сходящегося ряда, т. е. может ли измениться сумма сходящегося ряда от перестановки членов этого ряда. В этом пункте мы выясним этот вопрос в отношении условно сходящегося ряда. Начнем рассмотрение с изучения некоторой конкретной перестановки членов ряда (1.54). Для удобства запишем ряд (1.54) в виде

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\ldots$$

В конце предыдущего пункта мы доказали, что ряд (1.54) сходится условно и имеет сумму $\ln 2$. Переставим теперь члены ряда (1.54) так, чтобы после одного положительного члена стояли два отрицательных члена. В результате такой перестановки членов получим ряд

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)+\ldots. \tag{1.57}$$

Докажем, что ряд (1.57), полученный в результате указанной перестановки членов ряда (1.54), сходится и имеет сумму, вдвое меньшую, чем ряд (1.54). Будем обозначать m-е частичные суммы рядов (1.54) и (1.57) символами S_m и S_m' соответственно. Можем записать:

$$S_{3m}'=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}S_{2m}.$$

Итак,

$$S_{3m}'=\frac{1}{2}S_{2m}. \tag{1.58}$$

Далее, очевидно, что

$$S_{3m-1}'=\frac{1}{2}S_{2m}+\frac{1}{4m}, \tag{1.59}$$

$$S_{3m-2}'=S_{3m-1}'+\frac{1}{4m-2}. \tag{1.60}$$

Поскольку $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m}=S$, в пределе при $m\to\infty$ из формул (1.58), (1.59) и (1.60) получим

$$\lim_{m\to\infty} S_{3m}'=\frac{1}{2}S,\quad \lim_{m\to\infty} S_{3m-1}'=\frac{1}{2}S,\quad \lim_{m\to\infty} S_{3m-2}'=\frac{1}{2}S.$$

Таким образом, ряд (1.57) сходится и имеет сумму, равную $\frac{1}{2}S$. Так как $S=\ln 2\neq 0$, то $\frac{1}{2}S\neq S$. Следовательно, в результате указанной выше перестановки членов сумма условно сходящегося ряда (1.54) изменилась. Рассмотренный нами пример показывает, что условно сходящийся ряд *не обладает переместительным свойством.* Полную ясность в вопрос о влиянии перестановок членов на сумму условно сходящегося ряда вносит следующее замечательное утверждение, принадлежащее Риману.

Теорема 1.10 (теорема Римана). *Если ряд сходится условно, то, каково бы ни было наперед взятое число* L, *можно так переставить члены этого ряда, чтобы преобразованный ряд сходился к числу* L.

Доказательство. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1.61}$$

произвольный условно сходящийся ряд. Обозначим через $p_1, p_2, p_3, \ldots$ положительные члены ряда (1.61), выписанные в таком порядке, в каком они стоят в этом ряде, а через $q_1, q_2, q_3, \ldots$ модули отрицательных членов ряда (1.61), выписанные в таком же порядке, в каком они стоят в этом ряде. Ряд (1.61) содержит бес-

конечное число как положительных, так и отрицательных членов, ибо если бы членов одного знака было конечное число, то, отбросив не влияющее на сходимость конечное число первых членов, мы бы получили бы ряд, состоящий из членов одного знака, для которого сходимость означала бы абсолютную сходимость.

Итак, с рядом (1.61) связаны два бесконечных ряда с положительными членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k$. Будем обозначать первый из этих рядов символом P, а второй — символом Q. Докажем, что оба ряда P и Q являются расходящимися. Обозначим символом S_n n-ю частичную сумму ряда (1.61), символом P_n сумму всех положительных членов, входящих в S_n, символом Q_n сумму модулей всех отрицательных членов, входящих в S_n. Тогда, очевидно, $S_n=P_n-Q_n$, и так как по условию ряд (1.61) сходится к некоторому числу S, то

$$\lim_{n\to\infty}(P_n-Q_n)=S. \tag{1.62}$$

С другой стороны, так как ряд (1.61) не сходится абсолютно, то

$$\lim_{n\to\infty}(P_n+Q_n)=+\infty. \tag{1.63}$$

Сопоставляя (1.62) и (1.63), получим $\lim\limits_{n\to\infty} P_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n=+\infty$, т. е. доказано, что оба ряда P и Q расходятся. Из расходимости рядов P и Q вытекает, что даже после удаления любого конечного числа первых членов этих рядов, мы можем взять из оставшихся членов как ряда P, так и ряда Q столь большое число членов, что их сумма превзойдет любое наперед взятое число.

Опираясь на этот факт, докажем, что можно так переставить члены исходного ряда (1.61), что в результате получится ряд, сходящийся к наперед взятому числу L. В самом деле, выберем из исходного ряда (1.61) ровно столько положительных членов $p_1, p_2, \ldots, p_{k_1}$, чтобы их сумма $p_1+p_2+\ldots+p_{k_1}$ превзошла L. Добавим к выбранным членам ровно столько отрицательных членов $-q_1, -q_2, \ldots, -q_{k_2}$, чтобы общая сумма $p_1+p_2+\ldots+p_{k_1}-q_1-q_2-\ldots-q_{k_2}$ оказалась меньше L. Затем снова добавим ровно столько положительных членов $p_{k_1+1}, p_{k_1+2}, \ldots, p_{k_3}$, чтобы общая сумма $p_1+p_2+\ldots+p_{k_1}-q_1-q_2-\ldots-q_{k_2}+p_{k_1+1}+\ldots+p_{k_3}$ оказалась больше L. Продолжая аналогичные рассуждения далее, мы получим бесконечный ряд, в состав которого войдут все члены исходного ряда (1.61), так как каждый раз нам придется добавлять хотя бы один положительный или отрицательный член исходного ряда.

Остается доказать, что полученный ряд сходится к L. Заметим, что в полученном ряде последовательно чередуются группы по-

ложительных и группы отрицательных членов. Если частичная сумма полученного ряда заканчивается полностью завершенной группой, то отклонение этой частичной суммы от числа L не превосходит модуля последнего его члена[10]. Если же частичная сумма заканчивается не полностью завершенной группой, то отклонение этой частичной суммы от числа L не превосходит модуля последнего члена предпоследней из групп. Для установления сходимости ряда к L достаточно убедиться в том, что модули последних членов групп образуют бесконечно малую последовательность, а это непосредственно вытекает из необходимого условия сходимости исходного ряда (1.61). Теорема Римана доказана.

Замечание. Аналогично можно было бы доказать, что если ряд сходится условно, то его члены можно переставить так, что последовательность частичных сумм преобразованного ряда будет бесконечно большой последовательностью, все элементы которой, начиная с некоторого номера, положительны (соответственно отрицательны).

3. О перестановке членов абсолютно сходящегося ряда. В предыдущем пункте мы доказали, что условно сходящийся ряд не обладает переместительным свойством. Докажем, что для всякого абсолютно сходящегося ряда справедливо переместительное свойство.

Теорема 1.11 (теорема Коши). *Если данный ряд сходится абсолютно, то любой ряд, полученный из данного посредством некоторой перестановки членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму, что и данный ряд.*

Доказательство. Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1.64}$$

сходится абсолютно и сумма ряда равна S. Пусть, далее,

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k' \tag{1.65}$$

ряд, полученный из ряда (1.64) посредством некоторой перестановки членов. Требуется доказать, что: 1) ряд (1.65) сходится и имеет сумму, равную S; 2) ряд (1.65) сходится абсолютно. Докажем сначала 1). Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon>0$ найдется номер N такой, что при $n\geqslant N$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k'-S\right|<\varepsilon. \tag{1.66}$$

[10] Так как мы добавляем в данную группу члены ровно до тех пор, пока общая сумма «не перейдет» через число L.

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Так как ряд (1.64) сходится абсолютно и имеет сумму, равную S, то для выбранного $\varepsilon>0$ можно указать номер N_0 такой, что будут справедливы неравенства

$$\sum_{k=N_0+1}^{N_0+p}|u_k|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (p \text{ — любое натуральное число}) \tag{1.67}$$

и

$$\left|\sum_{k=1}^{N_0}u_k-S\right|<\frac{\varepsilon}{2}\text{[11]}. \tag{1.68}$$

Выберем теперь номер N столь большим, чтобы любая частичная сумма S_n' ряда (1.65) с номером n, превосходящим N, содержала все первые N_0 членов ряда (1.64) [12].

Оценим разность, стоящую в левой части (1.66), и докажем, что при $n\geqslant N$ для этой разности справедливо неравенство (1.66). В самом деле, указанную разность можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{n}u_k'-S=\Big(\sum_{k=1}^{n}u_k'-\sum_{k=1}^{N_0}u_k\Big)+\Big(\sum_{k=1}^{N_0}u_k-S\Big). \tag{1.69}$$

Так как модуль суммы двух величин не превосходит суммы их модулей, то из (1.69) получим

$$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k'-S\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n}u_k'-\sum_{k=1}^{N_0}u_k\right|+\left|\sum_{k=1}^{N_0}u_k-S\right|. \tag{1.70}$$

Из неравенств (1.68) и (1.70) очевидно, что для доказательства неравенства (1.66) достаточно доказать, что при $n\geqslant N$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k'-\sum_{k=1}^{N_0}u_k\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.71}$$

Для доказательства неравенства (1.71) заметим, что при $n\geqslant N$ первая из сумм, стоящих в его левой части, содержит все N_0 первых членов ряда (1.64). Вследствие этого разность

$$\sum_{k=1}^{n}u_k'-\sum_{k=1}^{N_0}u_k \tag{1.72}$$

[11] Номер N_0 в неравенствах (1.67) и (1.68) можно взять один и тот же. В самом деле, предварительно записав указанные два неравенства с разными номерами N_0, мы затем можем взять наибольший из двух номеров N_0.

[12] Такой номер N выбрать можно, ибо ряд (1.65) получается из ряда (1.64) посредством некоторой перестановки членов.

представляет собой сумму $n-N_0$ членов ряда (1.64) с номерами, *каждый из которых превосходит N_0.*

Если выбрать натуральное p столь большим, чтобы номер N_0+ $+p$ превосходил номера всех $n-N_0$ членов только что указанной суммы, то для разности (1.72) во всяком случае справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k'-\sum_{k=1}^{N_0}u_k\right|\leqslant\sum_{k=N_0+1}^{N_0+p}|u_k|. \tag{1.73}$$

Из неравенств (1.73) и (1.67) вытекает неравенство (1.71). Тем самым доказано неравенство (1.66), т. е. доказано, что ряд (1.65) сходится и имеет сумму, равную S. Остается доказать утверждение 2) о том, что ряд (1.65) сходится абсолютно. Доказательство этого утверждения следует из утверждения 1), если его применить к рядам

$$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k| \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty}|u_k'|. \tag{1.74}$$

При этом мы докажем сходимость второго из рядов (1.74), т. е. докажем абсолютную сходимость ряда (1.65). Теорема 1.11 полностью доказана.

§ 4. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ РЯДОВ

В § 2 мы установили ряд признаков сходимости для рядов с неотрицательными членами. Здесь мы изучим вопрос о признаках сходимости для рядов с членами любого знака. Итак, пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k \tag{1.75}$$

ряд, члены которого имеют какие угодно знаки. Прежде всего заметим, что для установления абсолютной сходимости этого ряда, т. е. для установления сходимости ряда с положительными членами

$$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|, \tag{1.76}$$

можно применить любой из признаков § 2 (признак Даламбера, Коши, Раабе или интегральный признак). Однако ни один из указанных признаков не дает возможности выяснить более тонкий вопрос об условной сходимости ряда (1.75) [13].

[13] Заметим, что признаки Даламбера и Коши можно применять для установления р а с х о д и м о с т и ряда с членами л ю б о г о з н а к а (1.75). В са-

Ниже мы и займемся отысканием более тонких признаков, позволяющих устанавливать сходимость ряда (1.75) и в тех случаях, когда этот ряд не является абсолютно сходящимся.

Начнем рассмотрение с вывода одного важного тождества, представляющего собой основной инструмент для установления формулируемых ниже признаков.

У т в е р ж д е н и е. *Пусть $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$ — две произвольные последовательности, $S_k=u_1+u_2+\ldots+u_k$, n и p — два произвольных номера* ($n\geqslant0$, $S_0=0$). *Тогда справедливо тождество*

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}u_kv_k=\sum_{k=n+1}^{n+p-1}S_k(v_k-v_{k+1})+S_{n+p}v_{n+p}-S_nv_{n+1}, \tag{1.77}$$

называемое п р е о б р а з о в а н и е м А б е л я.

Так как для любого $k\geqslant1$ справедливо равенство $u_k=S_k-S_{k-1}$, то левой части (1.77) можно придать вид

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}u_kv_k=\sum_{k=n+1}^{n+p}S_kv_k-\sum_{k=n+1}^{n+p}S_{k-1}v_k. \tag{1.78}$$

В последней сумме правой части (1.78) заменим индекс суммирования k на $k+1$. В результате получим

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}u_kv_k=\sum_{k=n+1}^{n+p}S_kv_k-\sum_{k=n}^{n+p-1}S_kv_{k+1}=\sum_{k=n+1}^{n+p-1}S_k(v_k-v_{k+1})+$$
$$+S_{n+p}v_{n+p}-S_nv_{n+1}.$$

Таким образом, тождество Абеля (1.77) доказано.

мом деле, всякий раз, когда признак Даламбера или Коши констатирует расходимость ряда из модулей $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|u_k|$, k-й член ряда (1.76) $|u_k|$ не стремится к нулю при $k\to\infty$, т. е. ряд (1.75) расходится. В качестве примера установим, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k!\left(\dfrac{x}{k}\right)^k$ расходится для любого фиксированного значения x, удовлетворяющего неравенству $|x|>e$. Отметим, что непосредственная проверка того, что k-й член рассматриваемого ряда не стремится к нулю при $k\to\infty$, является затруднительной. Применим к рассматриваемому ряду признак Даламбера. Обозначая k-й член этого ряда через a_k, будем иметь $\dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=$ $=\dfrac{|x|}{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k}$, откуда $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=\dfrac{|x|}{e}>1$. Расходимость ряда доказана.

О п р е д е л е н и е 1. *Последовательность $\{v_k\}$ назовем п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю с о г р а н и ч е н н ы м и з м е н е н и е м, если сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|v_{k+1}-v_k|. \tag{1.79}$$

Очевидно следующее

У т в е р ж д е н и е 2. *Всякая последовательность с ограниченным изменением является сходящейся.*

В самом деле, из сходимости ряда из модулей (1.79) вытекает сходимость ряда без модулей

$$\sum_{k=1}^{\infty}[v_{k+1}-v_k]. \tag{1.80}$$

Обозначив сумму ряда (1.80) через S, а n-ю частичную сумму этого ряда через S_n и учитывая, что $S_n=v_{n+1}-v_1$, получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\lim\limits_{n\to\infty}v_{n+1}$ существует и равен $S+v_1$. Это означает, что последовательность $\{v_k\}$ сходится к пределу $S+v_1$.

Т е о р е м а 1.12 (первый признак Абеля). *Если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k \tag{1.81}$$

обладает ограниченной последовательностью частичных сумм, а $\{v_k\}$ представляет собой последовательность с ограниченным изменением, сходящуюся к нулю, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_kv_k \tag{1.82}$$

сходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию существует число $M>0$ такое, что последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда (1.81) удовлетворяет условию $|S_n|\leqslant M$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и по нему номер N такой, что при $n\geqslant N$ и для любого натурального p справедливы неравенства

$$|v_n|<\frac{\varepsilon}{3M}, \tag{1.83}$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|v_{k+1}-v_k|<\frac{\varepsilon}{3M} \tag{1.84}$$

(здесь мы воспользовались сходимостью к нулю последовательности $\{v_k\}$ и сходимостью ряда (1.79)).

В силу тождества Абеля (1.77) и в силу того, что модуль суммы трех величин не превосходит сумму их модулей, получаем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_kv_k\right|\leqslant\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}S_k(v_k-v_{k+1})\right|+|S_{n+p}|\cdot|v_{n+p}|+|S_n|\cdot|v_{n+1}|.$$

Так как для всех номеров n справедливо неравенство $|S_n|\leqslant$ $\leqslant M$, то

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_kv_k\right|\leqslant M\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|v_{k+1}-v_k|+M|v_{n+p}|+M|v_{n+1}|.$$

Сопоставляя последнее неравенство с (1.83) и (1.84), получаем, что при всех $n\geqslant N$ и для любого натурального p

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_kv_k\right|<\varepsilon, \tag{1.85}$$

а это и означает, что ряд (1.82) сходится (в силу критерия Коши). Теорема 1.12 доказана.

Т е о р е м а 1.13 (второй признак Абеля). *Если ряд* (1.81) *сходится, а $\{v_k\}$ представляет собой совершенно произвольную последовательность с ограниченным изменением, то ряд* (1.82) *сходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как сходящийся ряд (1.81) заведомо обладает ограниченной последовательностью частичных сумм $\{S_n\}$, то существует постоянная $M>0$ такая, что $|S_n|\leqslant M$ для всех номеров n.

Обозначим сумму ряда (1.81) через S, а предел последовательности $\{v_k\}$ через v. Тогда можно утверждать, что каждое из произведений $\{S_nv_n\}$ и $\{S_nv_{n+1}\}$ сходится при $n\to\infty$ к пределу $S\cdot v$, а потому каждая из последовательностей

$$\{S_nv_n-Sv\} \quad \text{и} \quad \{S_nv_{n+1}-Sv\} \tag{1.86}$$

является бесконечно малой.

Учитывая это и сходимость ряда (1.79) и фиксируя произвольное $\varepsilon>0$, мы найдем номер N такой, что при всех $n\geqslant N$ и для любого натурального p

$$|S_nv_n-Sv|<\frac{\varepsilon}{3},\quad |S_nv_{n+1}-Sv|<\frac{\varepsilon}{3},\quad \sum_{k=n+1}^{n+p-1}|v_{k+1}-v_k|<\frac{\varepsilon}{3M}. \tag{1.87}$$

Неравенства (1.87), оценка $|S_n|\leqslant M$ и тождество Абеля (1.77), переписанное в виде

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}u_kv_k=\sum_{k=n+1}^{n+p-1}S_k(v_k-v_{k+1})+[S_{n+p}v_{n+p}-Sv]+[Sv-S_nv_{n+1}],$$

позволяют нам утверждать справедливость неравенства (1.85) (при всех $n\geqslant N$ и для любого натурального p). В силу критерия Коши теорема 1.13 доказана.

С л е д с т в и е 1 и з т е о р е м ы 1.12 (признак Дирихле — Абеля). *Если ряд* (1.81) *обладает ограниченной последовательностью частичных сумм, а $\{v_k\}$ представляет собой невозрастающую последовательность, сходящуюся к нулю, то ряд* (1.82) *сходится.*

Достаточно заметить, что невозрастающая сходящаяся к нулю последовательность является последовательностью с ограниченным изменением, ибо для нее n-я частичная сумма S_n ряда (1.79) равна v_1-v_{n+1} и имеет предел, равный v_1.

Чтобы сформулировать еще одно следствие из теоремы 1.12 введем понятие р я д а Л е й б н и ц а.

О п р е д е л е н и е 2. *Назовем ряд з н а к о ч е р е д у ю щ и м с я, если все его члены с нечетными номерами положительны, а все члены с четными номерами отрицательны.*

О п р е д е л е н и е 3. *Знакочередующийся ряд, модули членов которого образуют невозрастающую сходящуюся к нулю последовательность, назовем р я д о м Л е й б н и ц а.*

С л е д с т в и е 2 и з т е о р е м ы 1.12 (признаки Лейбница). *Всякий ряд Лейбница сходится.*

В самом деле, всякий ряд Лейбница можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}v_k=v_1-v_2+v_3-v_4+\ldots, \tag{1.88}$$

где $\{v_k\}$ — невозрастающая сходящаяся к нулю последовательность (все $v_k>0$). Такой ряд представляет собой частный случай ряда (1.82) при $u_k=(-1)^{k-1}$ с рядом (1.81), обладающим ограниченной последовательностью частичных сумм [14]. В таком случае справедливость признака Лейбница вытекает из уже доказанного признака Дирихле — Абеля (следствия 1 из теоремы 1.12).

З а м е ч а н и е. Легко убедиться в том, что для произвольного ряда Лейбница (1.88) последовательность $\{S_{2n}\}$ частичных сумм с четными номерами является неубывающей, а последовательность $\{S_{2n-1}\}$ частичных сумм с нечетными номерами является невозрастающей. Отсюда и из замечания 3 к теореме 3.15 ч. 1 вытекает, что сумма S ряда Лейбница (1.88) для любого номера n удовлетворяет неравенствам

$$S_{2n}\leqslant S\leqslant S_{2n-1}.$$

[14] Последовательность S_n частичных сумм ряда (1.81) с членами $u_k=$ $=(-1)^{k-1}$ имеет вид 1, 0, 1, 0, … .

Так как $S_{2n-1}-S_{2n}=v_{2n}$, то каждая из сумм S_{2n} и S_{2n-1} отклоняется от S не более чем на v_{2n}. Отсюда и из того, что $v_{2n-1}\geqslant$ $\geqslant v_{2n}$, вытекает, что для любого номера n справедлива оценка $|S_n-S|\leqslant v_n$. Эта оценка играет важную роль для приближенного вычисления суммы ряда Лейбница с помощью его частичной суммы.

П р и м е р ы. 1°. Выше с помощью формулы Маклорена для функции $\ln(1+x)$ мы уже доказали сходимость ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\ldots$$

Заметим, что сходимость этого ряда сразу вытекает из признака Лейбница.

2°. Изучим вопрос о сходимости ряда

$$1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\ldots+\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}-\frac{2}{3k}+\ldots$$

Этот ряд является рядом вида (1.82) при $v_k=\dfrac{1}{k}$, $u_1=1$, $u_2=$ $=1$, $u_3=-2$, $u_4=1$, $u_5=1$, $u_6=-2, \ldots$

Легко видеть, что последовательность частичных сумм ряда (1.81) с такими u_k имеет вид 1, 2, 0, 1, 2, 0, …, т. е. является ограниченной.

Так как последовательность $\{1/k\}$ не возрастает и сходится к нулю, то исследуемый ряд сходится по признаку Дирихле — Абеля.

3°. Выясним вопрос о сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos kx}{k}$, где x — некоторое фиксированное вещественное число. Пользуясь обозначениями теоремы 1.13, положим $u_k=\cos kx$, $v_k=\dfrac{1}{k}$. Оценим последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$. Поскольку для любого номера k

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x=2\sin\frac{x}{2}\cos kx,$$

то, суммируя это соотношение по k от 1 до n, получим

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx=2S_n\sin\frac{x}{2}.$$

Отсюда

$$S_n=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Таким образом, для любого x, н е к р а т н о г о 2π, последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ограничена:

$$|S_n|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

По теореме 1.13 *рассматриваемый ряд сходится для любого значения x, не кратного 2π.* Если же x кратно 2π, то рассматриваемый ряд превращается в гармонический и, как доказано выше, расходится.

§ 5. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД СХОДЯЩИМИСЯ РЯДАМИ

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о возможности почленного сложения и перемножения сходящихся рядов.

Т е о р е м а 1.14. *Если два ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k$ сходятся и имеют суммы, соответственно равные U и V, то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_k\pm v_k)$ сходится и имеет сумму, равную $U\pm V$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим n-е частичные суммы рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_k\pm v_k)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k$ соответственно через S_n, U_n и V_n. Тогда, очевидно, $S_n=U_n\pm V_n$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=U$, $\lim\limits_{n\to\infty}V_n=V$, то согласно теоремам 3.9 и 3.10 ч. 1 существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$ $=U\pm V$. Теорема доказана.

Таким образом, любые сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать. Переходя к вопросу о возможности почленного перемножения рядов, докажем следующее утверждение.

Т е о р е м а 1.15. *Если два ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k$ сходятся абсолютно и имеют суммы, соответственно равные U* и *V, то ряд, составленный из всех произведений вида u_kv_l* ($k=1, 2, \ldots$; $l=$ $=1, 2, \ldots$), *занумерованных в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна UV.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через w_1, w_2, w_3, … произведения вида u_kv_l ($k=1, 2, \ldots$; $l=1, 2, \ldots$), занумерованные в каком угодно порядке. Докажем, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|w_i|$ сходится. Пусть S_n — n-я частичная сумма этого ряда. Сумма S_n состоит из членов вида $|u_kv_l|$. Среди индексов k и l таких членов, входящих в сумму S_n, найдем н а и б о л ь ш и й индекс, который мы обозначим через m. Тогда

$$S_n\leqslant(|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_m|)(|v_1|+|v_2|+\ldots+|v_m|). \tag{1.89}$$

В правой части неравенства (1.89) стоит произведение m-х частичных сумм рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|u_k|$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|v_k|$. В силу сходимости указанных рядов с неотрицательными членами все их частичные суммы (а следовательно, и их произведение) ограничены. Поэтому ограничена и последовательность частичных сумм $\{S_n\}$, а это доказывает сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|w_i|$, т. е. абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}w_i$.

Остается доказать, что последний ряд имеет сумму S, равную UV. Так как этот ряд сходится абсолютно, то в силу теоремы 1.11 его сумма S не зависит от порядка, в котором мы его суммируем. Какую бы мы ни взяли последовательность (или подпоследовательность [15]) частичных сумм этого ряда, она сходится к числу S. Но в таком случае сумма S ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}w_i$ заведомо равна UV, так как именно к этому числу сходится подпоследовательность W_m частичных сумм этого ряда вида

$$W_m=(u_1+u_2+\ldots+u_m)(v_1+v_2+\ldots+v_m).$$

Теорема доказана.

Произведение рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k$ для многих целей удобно записывать в специальном виде:

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty}u_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{\infty}v_k\Big)=u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+\ldots+(u_1v_k+u_2v_{k-1}+\ldots$$
$$\ldots+u_kv_1)+\ldots.$$

[15] См. утверждение 1° п. 1 § 3 гл. 3 ч. 1.

Теорема 1.16 (теорема Мертенса[16]). *Ряд, полученный перемножением двух рядов указанным специальным способом, сходится к произведению сумм перемножаемых рядов в случае, когда один из перемножаемых рядов сходится абсолютно, а другой — сходится хотя бы условно.*

Пусть, например, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится абсолютно, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится хотя бы условно. Обозначим n-е частичные суммы указанных рядов соответственно через U_n и V_n, а их суммы соответственно через U и V. Положим

$$w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1,$$
$$W_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n.$$

Достаточно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = UV$. Элементарно проверяется, что $W_n = u_1 V_n + u_2 V_{n-1} + \ldots + u_n V_1$.

В силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ его остаток $\alpha_n = V - V_n$ является бесконечно малой, а следовательно, и ограниченной последовательностью, т. е. существует постоянная M такая, что $|\alpha_n| \leqslant M$ для всех номеров n. Заметим, что

$$W_n = u_1(V-\alpha_n) + u_2(V-\alpha_{n-1}) + \ldots + u_n(V-\alpha_1) = U_n V - \beta_n,$$

где $\beta_n = u_1\alpha_n + u_2\alpha_{n-1} + \ldots + u_n\alpha_1$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = U$, то достаточно доказать, что последовательность $\{\beta_n\}$ является бесконечно малой. Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится абсолютно, то, фиксировав произвольное $\varepsilon > 0$, найдем для него такой номер m, что $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} |u_k| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$. Кроме того, можно утверждать существование постоянной M_1 такой, что $\sum\limits_{k=1}^{n} |u_k| \leqslant M_1$ для любого номера n.

Представив теперь β_n в виде суммы двух сумм

$$\beta_n = [u_1\alpha_n + \ldots + u_m\alpha_{n+1-m}] + [u_{m+1}\alpha_{n-m} + \ldots + u_n\alpha_1]$$

и выбрав по найденному номеру m номер n_1 настолько боль-

[16] Мертенс Франц Карл Йозеф — немецкий математик (1840—1927).

шим, что $|\alpha_k| < \dfrac{\varepsilon}{2M_1}$ при $k > n_1 - m$ (это можно сделать в силу бесконечной малости $\{\alpha_n\}$), с помощью четырех неравенств

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \sum_{k=1}^{n} |u_k| \leqslant M_1, \quad |\alpha_n| \leqslant M \text{ и } |\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{2M_1}$$
$$(\text{при } k > n_1 - m)$$

убедимся в том, что при $n \geqslant n_1$ каждая квадратная скобка в выражении для β_n по модулю меньше числа $\varepsilon/2$. Отсюда следует, что $|\beta_n| < \varepsilon$ при $n \geqslant n_1$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ сформулированное утверждение доказано.

Замечание. В случае, если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ оба сходятся только условно, почленное перемножение этих рядов даже указанным специальным способом приводит, вообще говоря, к расходящемуся ряду.

Достаточно в качестве каждого из рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ взять условно сходящийся (по признаку Лейбница) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ и убедиться в том, что для таких рядов определенные выше величины w_n имеют вид

$$w_n = (-1)^{n-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{1}}\right\}.$$

Так как в фигурных скобках стоит n положительных слагаемых, каждое из которых не меньше числа $1/n$, то $|w_n| \geqslant 1$, а это означает, что нарушено необходимое условие сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ — стремление к нулю его n-го члена.

§ 6. БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. Основные понятия. К понятию числового ряда близко примыкает понятие бесконечного числового произведения. Пусть дана бесконечная числовая последовательность $v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots$. Записанное формально выражение вида

$$v_1 v_2 v_3 \ldots v_k \ldots = \prod_{k=1}^{\infty} v_k \tag{1.90}$$

принято называть бесконечным произведением. Отдельные элементы v_k принято называть членами данного бесконечного произведения. Произведение первых n членов данного бесконечного произведения принято называть n-м частичным произведением и обозначать символом

$$P_n = v_1 v_2 \ldots v_n = \prod_{k=1}^{n} v_k.$$

Бесконечное произведение (1.90) называют сходящимся, если последовательность частичных произведений P_n имеет конечный предел P, отличный[17] от нуля. В случае сходимости бесконечного произведения (1.90) указанный предел P называют значением этого бесконечного произведения и пишут:

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} v_k.$$

Отметим, что последнее равенство имеет смысл лишь для сходящегося бесконечного произведения. Ясно, что рассмотрение бесконечных произведений по существу представляет собой новую форму изучения числовых последовательностей, ибо каждому данному бесконечному произведению однозначно соответствует последовательность его частичных произведений и каждой числовой последовательности $\{P_k\}$, все элементы которой отличны от нуля, однозначно соответствует бесконечное произведение, для которого эта последовательность является последовательностью частичных произведений (достаточно положить члены бесконечного произведения равными $v_k = P_k/P_{k-1}$ при $k > 1$ и $v_1 = P_1$).

Теорема 1.17. *Необходимым условием сходимости бесконечного произведения* (1.90) *является стремление к единице его k-го члена при $k\to\infty$.*

Доказательство. Пусть бесконечное произведение (1.90) сходится и имеет значение P, отличное от нуля. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} P_{k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} P_k = P \neq 0$. Поскольку $v_k = P_k/P_{k-1}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} v_k$ существует и равен единице.

Заметим, что на сходимость бесконечного произведения не влияет удаление любого конечного числа членов этого произведения (если среди этих членов нет равных нулю). Поскольку бесконечное произведение, у которого хотя бы один член равен нулю согласно принятому выше определению считается расходящимся, то

[17] Тот факт, что при $P=0$ бесконечное произведение принято считать расходящимся, хотя и носит условный характер, но позволяет провести четкую аналогию между сходимостью рядов и бесконечных произведений.

мы в дальнейшем вообще исключим из рассмотрения бесконечные произведения, у которых хотя бы один член равен нулю.

Примеры.

$$1°.\ \prod_{k=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^k} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^k}\ldots \tag{1.91}$$

(x — любое фиксированное число).

Докажем, что бесконечное произведение (1.91) при любом $x \neq \pi n$ сходится и имеет значение $\dfrac{\sin x}{x}$. Подсчитаем n-е частичное произведение

$$P_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}. \tag{1.92}$$

Умножая обе части (1.92) на $\sin\dfrac{x}{2^n}$ и последовательно используя формулу для синуса двойного угла $\sin 2y = 2\sin y\cos y$, получим

$$P_n \sin\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sin x.$$

Из последней формулы[18] имеем

$$P_n = \frac{\sin x}{x}\left\{\frac{\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{\sin\dfrac{x}{2^n}}\right\}.$$

Поскольку выражение в фигурных скобках стремится к единице при $n\to\infty$ (в силу первого замечательного предела), то $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ существует и равен $\dfrac{\sin x}{x}$. Тем самым доказано, что бесконечное произведение (1.91) сходится и имеет значение $\dfrac{\sin x}{x}$ при любом $x \neq \pi n$.

$$2°.\ \prod_{k=2}^{\infty}\left[1 - \frac{2}{k(k+1)}\right] = \prod_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\ldots$$
$$\ldots\frac{(k-1)}{k}\cdot\frac{(k+2)}{(k+1)}\ldots \tag{1.93}$$

[18] Мы считаем, что $x \neq 0$. Если $x=0$, то все члены (1.91) и его значение равны единице.

Докажем, что бесконечное произведение (1.93) сходится и имеет значение 1/3. Подсчитаем частичное произведение P_n:

$$P_n = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\ldots\frac{(n-1)}{n}\right]\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\ldots\frac{(n+2)}{(n+1)}\right] =$$
$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{n+2}{3}.$$

Таким образом $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{3n}$ существует и равен 1/3.

2. Связь между сходимостью бесконечных произведений и рядов. Если бесконечное произведение (1.90) сходится, то в силу теоремы 1.17 все его члены v_k, начиная с некоторого номера, положительны[19]. Поскольку конечное число первых членов вообще не влияет на сходимость бесконечного произведения, то при изучении вопроса о сходимости бесконечных произведений можно, не ограничивая общности, рассматривать лишь такие бесконечные произведения, у которых все члены положительны.

Теорема 1.18. *Для того чтобы бесконечное произведение* (1.90) *с положительными членами сходилось, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln v_k. \tag{1.94}$$

В случае сходимости сумма S ряда (1.94) *и значение P произведения* (1.90) *связаны формулой*

$$P = e^S. \tag{1.95}$$

Доказательство. Обозначив через P_n n-е частичное произведение бесконечного произведения (1.90), а через S_n n-ю частичную сумму ряда (1.94), можем записать:

$$S_n = \ln P_n, \quad P_n = e^{S_n}.$$

В силу непрерывности показательной функции для всех значений аргумента и непрерывности логарифмической функции для всех положительных значений аргумента последовательность P_n сходится тогда и только тогда, когда сходится S_n, причем если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = e^S$. Теорема доказана.

При исследовании на сходимость бесконечного произведения оказывается очень удобным представить его в виде

[19] Так как $\lim\limits_{k\to\infty} v_k = 1$.

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k) = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_k)\ldots \tag{1.96}$$

При этом, конечно, в соответствии с принятым выше предположением будем считать, что все $u_k > -1$.

Теорема 1.18 утверждает, что вопрос о сходимости произведения (1.96) эквивалентен вопросу о сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+u_k). \tag{1.97}$$

Теперь мы можем доказать еще одно утверждение.

Теорема 1.19. *Если все u_k (по крайней мере начиная с некоторого номера) сохраняют один и тот же знак, то для сходимости бесконечного произведения* (1.96) *необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k. \tag{1.98}$$

Доказательство. Поскольку условие $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$ является необходимым и для сходимости ряда (1.98), и для сходимости произведения (1.96), можно считать это условие выполненным как при доказательстве необходимости, так и при доказательстве достаточности. Но из указанного условия и из асимптотической формулы[20]

$$\ln(1+y) = y + o(y)$$

вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(1+u_k)}{u_k} = 1 \tag{1.99}$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_k}{\ln(1+u_k)} = 1. \tag{1.100}$$

Поскольку по условию теоремы все члены рядов (1.97) и (1.98), начиная с некоторого номера, сохраняют один и тот же знак, условия (1.99) и (1.100) в силу следствия из теоремы сравнения 1.3 позволяют утверждать, что ряд (1.98) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд (1.97). Теорема доказана.

Так же, как и для рядов, для бесконечных произведений вводятся понятия абсолютной и условной сходимостей. Бесконечное произведение (1.96) называется абсолютно сходящимся в том и только в том случае, когда сходится абсолютно

[20] См. п. 6 § 10 гл. 6 ч. 1.

ряд (1.97). Теоремы Коши 1.11 и Римана 1.10 позволяют заключить, что абсолютно сходящееся произведение обладает переместительным свойством, в то время как условно сходящееся произведение заведомо им не обладает.

Теорема 1.20. *Бесконечное произведение* (1.96) *сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходится абсолютно ряд* (1.98).

Для доказательства этой теоремы достаточно доказать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|u_k|$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\ln(1+u_k)|$. Это последнее легко вытекает из существования пределов (1.99) и (1.100). Детали рассуждений предоставляем читателю.

Примеры. 1°. Из расходимости гармонического ряда и из теоремы 1.19 вытекает расходимость следующих бесконечных произведений:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k}\right)\ldots,$$
$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\ldots$$

Легко понять, что первое из указанных произведений расходится к $+\infty$, а второе — к нулю.

2°. Из той же теоремы 1.19 и из сходимости ряда (1.33) при $\alpha > 1$ вытекает сходимость при $\alpha > 1$ следующих бесконечных произведений:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k^\alpha}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{3^\alpha}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k^\alpha}\right)\ldots,$$
$$\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(k+1)^\alpha}\right] = \left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{3^\alpha}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k^\alpha}\right)\ldots$$

3°. Рассмотрим бесконечное произведение

$$x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\ldots \tag{1.101}$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$ сходится, то в силу теорем 1.19 и 1.20 бесконечное произведение (1.101) сходится абсолютно для любого фиксированного значения x, отличного от $l\pi$ (где $l = 0, \pm 1, \ldots$). В п. 3 мы докажем, что это произведение сходится к значению $\sin x$. Тем самым будет обосновано разложение функции $\sin x$ в бесконечное произведение

$$\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right). \tag{1.102}$$

4°. Из разложения (1.102) с помощью соотношения $\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$ элементарно получается следующее разложение:

$$\cos x = \prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right]. \tag{1.103}$$

Абсолютная сходимость произведения, стоящего в правой части (1.103), для любого x, отличного от $\dfrac{\pi}{2}(2l-1)$ $(l = 0, \pm 1, \ldots)$, вытекает из теорем 1.19 и 1.20 и из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2}$.

5°. Полагая в разложении (1.102) $x = \dfrac{\pi}{2}$, получим

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2-1}{4k^2} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}. \tag{1.104}$$

Из (1.104) получается так называемая формула Валлиса[21]

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\ldots\frac{2k}{(2k-1)}\cdot\frac{2k}{(2k+1)}\ldots. \tag{1.105}$$

Путем несложных преобразований формулу Валлиса можно привести к виду

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+1}\left[\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k)!}\right]^2. \tag{1.106}$$

[21] Джон Валлис — английский математик (1616—1703).

Первоначально формулу Валлиса использовали для приближенного вычисления числа π. В настоящее время для вычисления числа π существуют более эффективные методы. Формула Валлиса как в виде (1.105), так и в виде (1.106) представляет интерес для ряда теоретических исследований[22].

3. Разложение функции $\sin x$ в бесконечное произведение. Для удобства разобьем вывод формулы (1.102) на отдельные этапы.

1) Пусть m — любое положительное нечетное число: $m = 2n+1$. Прежде всего докажем, что для любого отличного от $k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$ значения θ[23] справедлива формула

$$\frac{\sin m\theta}{m\sin\theta} = \left(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\dfrac{\pi}{m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\dfrac{2\pi}{m}}\right)\ldots\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\dfrac{n\pi}{m}}\right),$$
$$n = \frac{m-1}{2}. \tag{1.107}$$

Для вывода формулы (1.107) будем исходить из формулы Муавра[24]

$$\cos m\theta + i\sin m\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^m.$$

Расписывая правую часть этой формулы с помощью бинома Ньютона и сравнивая мнимые части, получим

$$\sin m\theta = m\cos^{m-1}\theta\sin\theta - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\cos^{m-3}\theta\sin^2\theta + \ldots$$

Учитывая, что $m = 2n+1$, будем иметь

$$\frac{\sin m\theta}{m\sin\theta} = \cos^{2n}\theta - \frac{(m-1)(m-2)}{3!}\cos^{2n-2}\theta\sin^2\theta + \ldots \tag{1.108}$$

В правой части (1.108) все показатели при косинусах и синусах четные, так что если заменить $\cos^2\theta$ на $1-\sin^2\theta$, то в правой части (1.108) получится *многочлен степени n относительно* $\sin^2\theta$. Положив $z = \sin^2\theta$, обозначим этот многочлен символом $F(z)$, а его корни символами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Так как

[22] В частности, она может быть использована для вывода так называемой формулы Стирлинга (см. § 6 гл. 7). Джемс Стирлинг — английский математик (1692—1770).

[23] В дальнейшем нас будут интересовать значения θ лишь из интервалов $0 < |\theta| < \pi$.

[24] Эта формула получается из определения произведения двух комплексных чисел $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)$ (см. п. 1 § 3 гл. 8 ч. 1). В самом деле, с помощью этого определения по индукции легко установить, что $(\cos\theta, \sin\theta)^n = (\cos n\theta, \sin n\theta)$.

при $\theta\to 0$ $z=\sin^2\theta\to 0$ и левая часть (1.108) стремится к единице, то многочлен $F(z)$ можно представить в виде

$$\frac{\sin m\theta}{m\sin\theta}=F(z)=\left(1-\frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{z}{\alpha_2}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right).$$

Остается определить корни α_1, α_2, α_n. Замечая, что эти корни соответствуют нулям функции $\sin m\theta$, получим

$$\alpha_1=\sin^2\frac{\pi}{m},\quad \alpha_2=\sin^2\frac{2\pi}{m},\quad \ldots,\quad \alpha_n=\sin^2\frac{n\pi}{m}.$$

Таким образом, формула (1.107) установлена.

2) Положив в формуле (1.107) $\theta=\frac{x}{m}$ и считая, что $0<|x|<\pi m$, придадим этой формуле вид

$$\frac{\sin x}{m\sin\frac{x}{m}}=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right). \tag{1.109}$$

Фиксируем любое (отличное от нуля) значение и возьмем два произвольных натуральных числа p и n, удовлетворяющих неравенствам $2\frac{|x|}{\pi}<p<n=\frac{m-1}{2}$. Тогда формулу (1.109) можно записать в виде

$$\frac{\sin x}{m\sin\frac{x}{m}}=\prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right)R_p(x), \tag{1.110}$$

где

$$R_p(x)=\prod_{k=p+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right). \tag{1.111}$$

Прежде всего оценим $R_p(x)$. Поскольку $2\frac{|x|}{\pi}<p<n=\frac{m-1}{2}$, то аргументы всех синусов, стоящих в формуле (1.111), принадлежат интервалу $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Кроме того, ясно, что для всех k, участвующих в этой формуле, $|x|<\frac{k\pi}{2}$ и, следовательно,

$$0<\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}<\frac{\sin^2\frac{k\pi}{2m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}=\frac{1}{4\cos^2\frac{k\pi}{2m}}<\frac{1}{2}$$

$\left(\text{так как } \frac{k\pi}{m}<\frac{\pi}{2},\ \text{т. е. } \frac{k\pi}{2m}<\frac{\pi}{4},\ \text{и поэтому } \cos^2\frac{k\pi}{2m}>\frac{1}{2}\right)$.
Для любого β из интервала $0<\beta<1/2$ справедливы неравенства $1>1-\beta>e^{-2\beta}$ [25], поэтому для всех номеров k, превосходящих p,

$$1>1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}>e^{-\frac{2\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}}. \tag{1.112}$$

Почленно перемножая неравенства (1.112), записанные для $k=p+1,\ p+2,\ \ldots,\ n$, получим следующую оценку для $R_p(x)$:

$$1>R_p(x)>e^{-2\sin^2\frac{x}{m}\sum\limits_{k=p+1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}}. \tag{1.113}$$

Так как аргумент $\frac{k\pi}{m}$ лежит в первой четверти и для любого β из первой четверти $1\geqslant\frac{\sin\beta}{\beta}\geqslant\frac{2}{\pi}$ [26], то

$$\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}<\frac{1}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\left(\frac{k\pi}{m}\right)^2}=\frac{m^2}{4k^2}<\frac{m^2}{4}\left[\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right].$$

Таким образом,

$$e^{-2\sin^2\frac{x}{m}\sum\limits_{k=p+1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}}>e^{-\frac{m^2}{2}\sin^2\frac{x}{m}\sum\limits_{k=p+1}^{n}\left[\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right]}=e^{-\frac{m^2}{2p}\sin^2\frac{x}{m}}.$$

[25] Правое из этих неравенств элементарно вытекает из формулы Маклорена: $e^{-2\beta}=1-2\beta+\frac{(2\beta)^2}{2}-\ldots<1-2\beta+2\beta^2<1-\beta$, так как $2\beta^2<\beta$.

[26] Эти неравенства вытекают из того, что отношение $\frac{\sin\beta}{\beta}$ при изменении β от 0 до $\pi/2$ убывает от 1 до $2/\pi$. Факт убывания функции $\frac{\sin\beta}{\beta}$ в свою очередь вытекает из того, что $\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)'=\frac{\cos\beta}{\beta^2}(\beta-\operatorname{tg}\beta)<0$ всюду на интервале $0<\beta<\pi/2$.

Последнее неравенство позволяет следующим образом усилить оценку (1.113):

$$1>R_p(x)>e^{-\frac{m^2}{2p}\sin^2\frac{x}{m}}. \tag{1.114}$$

3) Теперь в формуле (1.110) устремим число m к бесконечности, оставляя фиксированными значение x и номер p. Поскольку $\lim\limits_{m\to\infty} m\sin\frac{x}{m}=x$, $\lim\limits_{m\to\infty} m^2\sin^2\frac{k\pi}{m}=(k\pi)^2$, то существует предел левой части (1.110), равный $\frac{\sin x}{x}$, и предел конечного произведения $\prod\limits_{k=1}^{p}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right)$, равный $\prod\limits_{k=1}^{p}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.
Далее будем считать, что последний предел отличен от нуля, так как, когда он равен нулю, $\sin x=0$ и разложение (1.102) установлено. Но тогда существует предел $\lim\limits_{m\to\infty}R_p(x)$. Обозначим этот предел через $\widehat{R}_p(x)$. Из неравенств (1.114), справедливых для любого номера m, и из теоремы 3.13 ч. 1 вытекает, что

$$1\geqslant\widehat{R}_p(x)\geqslant e^{-\frac{x^2}{2p}}. \tag{1.115}$$

Формула (1.110) в пределе при $m\to\infty$ дает

$$\frac{\sin x}{x}=\prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\widehat{R}_p(x). \tag{1.116}$$

4) Остается, сохраняя фиксированным x, устремить в формуле (1.116) номер p к бесконечности. Поскольку левая часть (1.116) не зависит от p, а предел $\lim\limits_{p\to\infty}\widehat{R}_p(x)$ в силу неравенств (1.115) и теоремы 3.14 ч. 1 существует и равен единице, то существует и предел

$$\lim_{p\to\infty}\prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)=\frac{\sin x}{x}.$$

Таким образом, разложение (1.102) для $\sin x$ установлено.

Замечание. В полной аналогии с разложениями (1.102) для $\sin x$ и (1.103) для $\cos x$ можно получить разложения в бесконечные произведения гиперболических функций

$$\operatorname{sh}x=x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right),\quad \operatorname{ch}x=\prod_{k=1}^{\infty}\left[1+\frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right].$$

Заметим, что из разложений для $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh}x$, $\operatorname{ch}x$ немедленно получаются разложения в бесконечные произведения функций $\operatorname{tg}x$, $\operatorname{ctg}x$, $\operatorname{th}x$ и $\operatorname{cth}x$.

§ 7. ОБОБЩЕННЫЕ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

Во всей гл. 1 мы называли суммой ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k=u_1+u_2+\ldots+u_k+\ldots \tag{1.117}$$

предел S последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм этого ряда (при условии, что этот предел существует).

В ряде задач математического анализа, представляющих как теоретический, так и практический интерес, приходится оперировать с рядами, у которых последовательность частичных сумм не сходится и сумма в указанном выше обычном смысле не существует. Естественно, возникает вопрос об обобщении понятия суммы ряда и о суммировании расходящегося в обычном смысле ряда (1.117) с помощью каких-либо обобщенных методов. В настоящем параграфе мы и остановимся на некоторых обобщенных методах суммирования расходящихся рядов.

Прежде всего дадим общую характеристику тем методам суммирования, которые будут рассматриваться. Разумно требовать, чтобы обобщенное понятие суммы включало в себя обычное понятие суммы. Точнее, ряд, сходящийся в обычном смысле и имеющий обычную сумму S, должен иметь обобщенную сумму, и притом также равную S. Метод суммирования, обладающий указанным свойством, называется *регулярным*.

Далее естественно подчинить понятие обобщенной суммы следующему условию: если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ имеет обобщенную сумму U, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k$ имеет обобщенную сумму V, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(Au_k+Bv_k)$, где A и B — любые постоянные, имеет обобщенную сумму $(AU+BV)$. Метод суммирования, удовлетворяющий указанному условию, называется *линейным*. В анализе и в его приложениях, как правило, имеют дело лишь с регулярными линейными методами суммирования. Остановимся на двух

методах обобщенного суммирования, представляющих особый интерес для приложений.

1. Метод Чезаро[27] (метод средних арифметических). Говорят, что ряд (1.117) *суммируем методом Чезаро*, если существует предел средних арифметических сумм этого ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n}. \tag{1.118}$$

При этом предел (1.118) называется *обобщенной в смысле Чезаро суммой* ряда (1.117).

Линейность метода суммирования Чезаро очевидна. Его регулярность вытекает из леммы 1, доказанной в п. 3 § 2. В самом деле, из указанной леммы вытекает, что если последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда (1.117) сходится к числу S, то предел (1.118) существует и также равен S.

Приведем примеры рядов, не сходящихся в обычном смысле, но суммируемых методом Чезаро.

Примеры. 1°. Рассмотрим заведомо расходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}=1-1+1-1+\ldots$$

Поскольку все *четные* частичные суммы S_{2n} этого ряда равны нулю, а все нечетные частичные суммы S_{2n-1} равны единице, то предел (1.118) существует и равен 1/2. Таким образом, рассматриваемый ряд суммируем методом Чезаро, и его сумма в смысле Чезаро равна 1/2.

2°. Считая, что x — любое фиксированное вещественное число из интервала $0<x<2\pi$, рассмотрим заведомо расходящийся[28] ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\cos kx=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots \tag{1.119}$$

Частичная сумма этого ряда S_n уже подсчитана нами в примере 2° § 4:

$$S_n=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

[27] Эрнесто Чезаро — итальянский математик (1859—1906).

[28] Расходимость ряда (1.119) без труда усматривается из приведенного ниже выражения для его частичной суммы.

Подсчитаем среднее арифметическое частичных сумм:

$$\frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n}=\frac{1}{2n\sin\frac{x}{2}}\left[\sum_{m=1}^{n}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x\right]-\frac{1}{2}=$$
$$=\frac{1}{4n\cdot\sin^2\frac{x}{2}}\left[\sum_{m=1}^{n}(\cos mx-\cos(m+1)x)\right]-\frac{1}{2}=$$
$$=\frac{\cos x-\cos(n+1)x}{4n\sin^2\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}.$$

Отсюда очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n}=-\frac{1}{2}.$$

Таким образом, ряд (1.119) суммируем методом Чезаро, и его сумма в смысле Чезаро равна $(-1/2)$.

2. Метод суммирования Пуассона[29] — Абеля. По данному ряду (1.117) составим степенной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_kx^{k-1}=u_1+u_2x+u_3x^2+\ldots+u_k\cdot x^{k-1}+\ldots \tag{1.120}$$

Если этот ряд сходится для всех x из интервала $0<x<1$ и если его сумма $S(x)$ имеет левое предельное значение $\lim\limits_{x\to 1-0}S(x)$ в точке $x=1$, то говорят, что ряд (1.117) *суммируем методом Пуассона—Абеля*. При этом указанное предельное значение называется *суммой ряда* (1.117) *в смысле Пуассона—Абеля*.

Линейность метода Пуассона—Абеля не вызывает сомнений. Докажем регулярность этого метода. Пусть ряд (1.117) сходится в обычном смысле и имеет сумму, равную S. Требуется доказать что: 1) ряд (1.120) сходится для любого x из интервала $0<x<1$, 2) сумма $S(x)$ ряда (1.120) имеет в точке $x=1$ левое предельное значение, равное S.

Докажем сначала утверждение 1). Так как ряд (1.117) сходится, то последовательность его членов является бесконечно малой и, следовательно, ограниченной, т. е. найдется такое число M, что для всех номеров k

$$|u_k|\leqslant M. \tag{1.121}$$

[29] Симон Дени Пуассон — французский математик (1781—1840).

Используя это неравенство, оценим модуль k-го члена ряда (1.120), считая, что x — любое число из интервала $0<x<1$. Получим

$$|u_kx^{k-1}|\leqslant M|x|^{k-1}.$$

Так как $|x|<1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x|^{k-1}$ сходится. Поэтому в силу замечания 2 к теореме сравнения 1.3 сходится и ряд (1.120).

Докажем теперь утверждение 2). Пусть S_n — n-я частичная сумма ряда (1.117), а S — его обычная сумма. С помощью преобразования Абеля[30] легко убедиться в том, что для любого x из интервала $0<x<1$ справедливо тождество

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_kx^{k-1}=(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}S_kx^{k-1}. \tag{1.122}$$

Вычтем тождество (1.122) из следующего очевидного тождества:

$$S=(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}S\,x^{k-1}.$$

При этом, обозначая через r_k k-й остаток ряда (1.117), будем иметь

$$S-\sum_{k=1}^{\infty}u_kx^{k-1}=(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}r_kx^{k-1},$$

или

$$S-S(x)=(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}r_kx^{k-1}. \tag{1.123}$$

Наша цель — доказать, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что левая часть (1.123) меньше ε для всех x, удовлетворяющих неравенствам $1-\delta<x<1$. Так как остаток r_k ряда (1.117) стремится к нулю при $k\to\infty$, то для положительного числа $\varepsilon/2$ найдется номер k_0 такой, что $|r_k|<\varepsilon/2$ при $k\geqslant k_0$. Таким образом,

$$\left|(1-x)\sum_{k=k_0}^{\infty}r_kx^{k-1}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\left|(1-x)\sum_{k=k_0}^{\infty}x^{k-1}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

[30] Преобразование Абеля (1.77) установлено нами в § 4. В рассматриваемом случае следует положить в (1.77) $n=0$, $S_n=0$ и затем устремить p к бесконечности.

Остается доказать, что для x, достаточно близких к единице,

$$\left|(1-x)\sum_{k=1}^{k_0-1}r_kx^{k-1}\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

но это очевидно, так как сумма, стоящая в последнем неравенстве, ограничена. Регулярность метода Пуассона—Абеля доказана.

В качестве примера снова рассмотрим расходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}=1-1+1-1+\ldots \tag{1.124}$$

Для этого ряда составим степенной ряд вида (1.120)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}x^{k-1}=1-x+x^2-x^3+\ldots$$

Очевидно, что последний ряд сходится для всех x из интервала $0<x<1$ и имеет сумму, равную $S(x)=1/(1+x)$. Так как

$$\lim_{x\to 1-0}S(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2},$$

то ряд (1.124) суммируем методом Пуассона — Абеля и его сумма в смысле Пуассона—Абеля равна 1/2.

Обратим внимание на то, что сумма ряда (1.124) в смысле Пуассона — Абеля совпадает с его суммой в смысле Чезаро. Этот факт не является случайным: можно доказать, что если ряд суммируем методом Чезаро, то он суммируем и методом Пуассона — Абеля, причем сумма этого ряда в смысле Чезаро совпадает с его суммой в смысле Пуассона—Абеля. Более того, существуют ряды, суммируемые методом Пуассона—Абеля, но не суммируемые методом Чезаро[31]. Детальное изучение всевозможных методов обобщенного суммирования расходящихся рядов проводится в монографии Г. Харди «Расходящиеся ряды» (М.: ИЛ, 1951).

§ 8. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ДВОЙНЫХ И ПОВТОРНЫХ РЯДОВ

Рассмотрим счетное множество бесконечных числовых последовательностей

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ \ldots,\ a_{1n},\ \ldots;$$

[31] Таким образом, можно сказать, что метод Пуассона—Абеля является более «сильным» методом суммирования, чем метод Чезаро.

$$\begin{matrix} a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \ldots, & a_{2n}, & \ldots; \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \ldots, & a_{3n}, & \ldots; \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}, & a_{m2}, & a_{m3}, & \ldots, & a_{mn}, & \ldots; \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \tag{1.125}$$

(Первый индекс у чисел a_{kl} обозначает номер рассматриваемой последовательности, а второй — номер ее элемента.)

По другому можно сказать, что мы рассматриваем матрицу (1.125), содержащую бесконечное число строк и бесконечное число столбцов. Производя формальное суммирование элементов этой матрицы, можно составить из нее различные ряды.

Если сначала просуммировать каждую строку матрицы (1.125) отдельно, то получится бесконечная последовательность рядов вида

$$\sum_{l=1}^{\infty}a_{kl}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{1.126}$$

Просуммировав эту последовательность, получим формальную сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty}a_{kl}\right). \tag{1.127}$$

Эту сумму принято называть *повторным рядом*.

Другой повторный ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{kl}\right) \tag{1.128}$$

получится, если сначала просуммировать отдельно каждый столбец матрицы (1.125), а затем взять сумму элементов полученной при этом последовательности.

Определение 1. *Повторный ряд* (1.127) *называется сходящимся, если сходится каждый из рядов* (1.126) *и если сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k,$$

в котором A_k обозначает сумму k-го ряда (1.126).

Определение 2. *Повторный ряд* (1.128) *называется сходящимся, если сходится каждый из рядов*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} \quad (l=1,\ 2,\ \ldots) \tag{1.129}$$

и если сходится ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \widehat{A}_l,$$

в котором $\widehat{A}_l$ обозначает сумму l-го ряда (1.129).

С матрицей (1.125) кроме повторных рядов (1.127) и (1.128) связывают еще так называемый **двойной ряд**

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}. \tag{1.130}$$

Определение 3. *Двойной ряд* (1.130) *называется **сходящимся**, если **при независимом стремлении** двух индексов m и n к бесконечности существует конечный предел*

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} S_{mn} \tag{1.131}$$

так называемых прямоугольных частичных сумм

$$S_{mn}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}. \tag{1.132}$$

При этом указанный предел (1.131) называют **суммой двойного ряда** (1.130).

Из этого определения сразу следует, что если двойной ряд (1.130) получен посредством перемножения членов двух сходящихся «одинарных» рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ и } \sum_{l=1}^{\infty} c_l, \tag{1.133}$$

т. е. если члены двойного ряда (1.130) равны $a_{kl}=b_k c_l$, то этот двойной ряд сходится, а его сумма равна произведению сумм рядов (1.133).

Далее заметим, что из (1.132) следует, что для любых $m\geqslant 2$, $n\geqslant 2$

$$a_{mn}=S_{mn}-S_{m(n-1)}-[S_{(m-1)n}-S_{(m-1)(n-1)}].$$

Последнее равенство означает

Утверждение. *Необходимым условием сходимости двойного ряда* (1.130) *является стремление к нулю его общего члена, т. е. существование равного нулю предела*

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} a_{mn}$$

при независимом стремлении m и n к бесконечности.

Докажем следующее утверждение о связи между сходимостью двойного и повторного рядов.

Теорема 1.21. *Если сходится двойной ряд* (1.130) *и если сходятся все ряды по строкам* (1.126), *то сходится и повторный ряд* (1.127), *причем к этой же сумме, к которой сходится двойной ряд* (1.130).

Доказательство. Переходя при фиксированном m к пределу при $n\to\infty$ в равенстве (1.132) и учитывая сходимость ряда (1.126) к сумме A_k, получим

$$\lim_{n\to\infty} S_{mn}=\sum_{k=1}^{n} A_k. \tag{1.134}$$

Из соотношения (1.134) ясно, что сумма повторного ряда (1.127), которая определяется как предел при $m\to\infty$ правой части (1.134), есть не что иное, как повторный предел

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} S_{mn}\right).$$

Остается доказать существование указанного повторного предела в предположении существующего предела (1.131) и существования для любого m предела (1.134), а также доказать, что указанный повторный предел равен пределу (1.131).

Из существования равного S предела (1.131) вытекает, что для любого $\varepsilon>0$ найдутся номера m_0 и n_0 такие, что при $m\geqslant m_0$, $n\geqslant n_0$ справедливо неравенство

$$|S_{mn}-S|<\varepsilon.$$

Используя факт существования для любого номера m предела (1.134), из последнего неравенства получаем, что для любого $m\geqslant m_0$ справедливо неравенство

$$\left|\lim_{n\to\infty} S_{mn}-S\right|\leqslant \varepsilon,$$

а это и означает, что повторный предел $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty} S_{mn}\right)$ существует и равен S. Теорема доказана.

Как и для обычного ряда с неотрицательными членами справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.22. *Если все элементы матрицы* (1.125) *неотрицательны, то для сходимости составленного из этой матрицы двойного ряда* (1.130) *необходимо и достаточно, чтобы его частичные суммы* (1.132) *были ограничены.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности заметим, что из ограниченности множества частичных сумм $\{S_{mn}\}$ вытекает существование точной верхней грани этого множества, которую мы обозначим через S:

$$S=\sup_{\substack{1\leqslant m<\infty \\ 1\leqslant n<\infty}} S_{mn}.$$

По определению точной верхней грани для любого $\varepsilon>0$ найдется частичная сумма $S_{m_0 n_0}$ такая, что

$$S-\varepsilon<S_{m_0 n_0}\leqslant S. \tag{1.135}$$

Для всех номеров m и n, удовлетворяющих условиям $m\geqslant m_0$, $n\geqslant n_0$, в силу неотрицательности элементов справедливо неравенство $S_{mn}\geqslant S_{m_0 n_0}$.

Из этого неравенства и из (1.135) вытекает, что

$$S-\varepsilon\leqslant S_{mn}\leqslant S$$

для всех m и n при $m\geqslant m_0$, $n\geqslant n_0$. Это и означает существование равного S предела (1.131), т. е. сходимость двойного ряда (1.130).

Определение 4. *Двойной ряд* (1.130) *называется **абсолютно сходящимся**, если сходится двойной ряд*

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}|, \tag{1.130'}$$

составленный из модулей элементов матрицы (1.125).

Теорема 1.23. *Если сходится двойной ряд из модулей* (1.130′), *то сходится и двойной ряд* (1.130).

Доказательство. Положим $p_{kl}=\dfrac{|a_{kl}|+a_{kl}}{2}$, $q_{kl}=\dfrac{|a_{kl}|-a_{kl}}{2}$. Тогда

$$a_{kl}=p_{kl}-q_{kl}. \tag{1.136}$$

Здесь p_{kl} и q_{kl} неотрицательны и оба не превосходят $|a_{kl}|$. Кроме того, в силу теоремы 1.22 из сходимости двойного ряда (1.130′) вытекает ограниченность его частичных сумм, поэтому и частичные суммы каждого из двойных рядов

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} p_{kl} \text{ и } \sum_{k,l=1}^{\infty} q_{kl}$$

ограничены. Но тогда в силу теоремы 1.22 эти ряды сходятся. Обозначим их суммы соответственно через P и Q. В силу (1.136) двойной ряд (1.130) сходится к $P-Q$.

Рассмотрим теперь обычный ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r, \tag{1.137}$$

членами которого являются занумерованные в каком угодно порядке элементы матрицы (1.125).

Теорема 1.24. *Рассмотрим четыре ряда: два повторных ряда* (1.127) *и* (1.128), *двойной ряд* (1.130) *и ряд вида* (1.137). *Если хотя бы один из указанных четырех рядов сходится при замене его членов их абсолютными величинами, то все четыре указанных ряда сходятся и имеют одну и ту же сумму.*

Доказательство. Сначала докажем, что если один из указанных четырех рядов сходится при замене его членов их модулями, то и остальные три ряда сходятся при замене членов их модулями.

Так как для повторных рядов (1.127) и (1.128) рассуждения совершенно аналогичны (нужно только поменять ролями первый и второй индексы у членов), то в дальнейшем мы будем рассматривать только повторный ряд (1.127). Достаточно доказать три утверждения:

I) сходимость повторного ряда (1.127), у которого все члены заменены их модулями, влечет абсолютную сходимость ряда (1.137);

II) абсолютная сходимость ряда (1.137) влечет абсолютную сходимость двойного ряда (1.130);

III) абсолютная сходимость ряда (1.130) влечет сходимость повторного ряда (1.127), у которого все члены заменены их модулями.

Для доказательства утверждения 1 обозначим через S^* сумму повторного ряда (1.127), у которого все члены заменены их модулями, т. е. ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}|\right). \tag{1.127'}$$

Тогда при любых m и n

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}|a_{kl}|\leqslant S^*. \tag{1.138}$$

Если $S_r^*=|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_r|$ — произвольная частичная сумма ряда

$$\sum_{r=1}^{\infty}|a_r|, \tag{1.137'}$$

получающегося при замене членов ряда (1.137) их модулями, то заведомо можно найти столь большие номера m и n, что все члены ряда (1.137), входящие в его частичную сумму с номером r, будут содержаться в первых m строках и первых n столбцах матрицы (1.125).

Но тогда в силу (1.138) будет справедливо неравенство

$$S_r^*\leqslant S^*.$$

Это неравенство означает, что последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами (1.137′) ограничена. Следовательно, этот ряд сходится (в силу теоремы 1.2).

Для доказательства утверждения II предположим, что ряд (1.137′) сходится. Тогда в силу теоремы 1.2 последовательность его частичных сумм $\{S_r^*\}$ ограничена. Фиксируем произвольную частичную сумму S_{mn}^* двойного ряда из модулей (1.130′). Заведомо найдется номер r настолько большой, что r-я частичная сумма ряда (1.137) будет содержать все члены, входящие в частичную сумму S_{mn} ряда (1.130). Но тогда частичная сумма S_{mn}^* ряда (1.130′) не превосходит частичной суммы S_r^* ряда (1.137′). Поэтому множество всех частичных сумм двойного ряда (1.130′) ограничено. Таким образом, по теореме 1.22 этот ряд сходится.

Остается доказать утверждение III. Пусть сходится двойной ряд из модулей (1.130′). Для доказательства сходимости повторного ряда из модулей (1.127′) в силу теоремы 1.21 достаточно доказать сходимость каждого из рядов

$$\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}|, \quad k=1,\ 2,\ \ldots \tag{1.139}$$

Для этого в силу теоремы 1.2 достаточно доказать, что каждый из рядов (1.139) имеет ограниченную последовательность частичных сумм, но это последнее очевидно, ибо при любом k и любом номере n сумма

$$\sum_{l=1}^{n}|a_{kl}|$$

ограничена суммой двойного ряда из модулей (1.130′).

Теперь нам остается доказать, что суммы всех трех рядов (1.127), (1.130) и (1.137) совпадают[32]. Обозначим через S сумму двойного ряда (1.130). Очевидно, что и сумма ряда (1.137) равна S, так как в силу абсолютной сходимости этого ряда его сумма не меняется при изменении порядка следования

[32] Аналогичные рассуждения позволяют заключить, что и сумма повторного ряда (1.128) совпадает с суммами указанных трех рядов.

его членов и этот порядок можно изменить так, что частичные суммы после изменения порядка будут содержать в качестве подмножества частичные суммы S_{mn} двойного ряда (1.130).

Чтобы убедиться в том, что и сумма повторного ряда (1.127) также равна S, достаточно заметить, что из сходимости рядов (1.139) вытекает сходимость рядов (1.126), и сослаться на теорему 1.21. Теорема 1.24 полностью доказана.

Глава 2

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

Для представления различных функций в математическом анализе широко используются ряды и последовательности, членами которых являются не числа, а функции, определенные на некотором фиксированном множестве.

Такие ряды и последовательности, называемые **функциональными**, всесторонне изучаются в настоящей главе.

§ 1. ПОНЯТИЯ СХОДИМОСТИ В ТОЧКЕ И РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ НА МНОЖЕСТВЕ

1. Понятия функциональной последовательности и функционального ряда. Предположим, что на числовой прямой E^1 или в m-мерном евклидовом пространстве E^m задано некоторое множество $\{x\}$[1].

Если каждому числу n из натурального ряда чисел 1, 2, … …, n, … ставится в соответствие по определенному закону некоторая функция $f_n(x)$, определенная на множестве $\{x\}$, то множество занумерованных функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$, … мы и будем называть **функциональной последовательностью**.

Отдельные функции $f_n(x)$ будем называть **членами** или **элементами** рассматриваемой последовательности, а множество $\{x\}$, на котором определены все функции $f_n(x)$, будем называть **областью определения** этой последовательности.

Заметим, что если область определения $\{x\}$ является множеством в m-мерном евклидовом пространстве E^m, то каждая функция $f_n(x)$ является функцией m переменных $f_n(x)=f_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)$, где x_1, x_2, …, x_m — координаты точек x.

Для обозначения функциональной последовательности мы, как правило, будем использовать фигурные скобки: $\{f_n(x)\}$.

Рассмотрим функциональную последовательность $\{u_n(x)\}$, областью определения которой является некоторое множество $\{x\}$.

Формально написанную сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \tag{2.1}$$

[1] В случае m-мерного евклидова пространства E^m элементами множества $\{x\}$ являются точки $x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)$ с координатами $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$.

бесконечного числа членов указанной функциональной последовательности будем называть **функциональным рядом**.

При этом отдельные функции $u_n(x)$ мы будем называть **членами** рассматриваемого ряда, а множество $\{x\}$, на котором определены эти функции, будем называть **областью определения** этого ряда.

Как и в случае числового ряда, сумму первых n членов функционального ряда (2.1) будем называть **n-й частичной суммой** этого ряда.

Отметим, что изучение функциональных рядов совершенно эквивалентно изучению функциональных последовательностей, ибо каждому функциональному ряду (2.1) однозначно соответствует функциональная последовательность

$$S_1(x),\ S_2(x),\ \ldots,\ S_n(x),\ \ldots \tag{2.2}$$

его частичных сумм и, наоборот, каждой функциональной последовательности (2.2) однозначно соответствует функциональный ряд (2.1) с членами $u_1(x)=S_1(x)$, $u_n(x)=S_n(x)-S_{n-1}(x)$ при $n\geqslant 2$.

Примеры. 1°. Рассмотрим последовательность функций $\{f_n(x)\}$, каждая из которых определена на сегменте $0\leqslant x\leqslant 1$ и имеет вид

$$f_n(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi n x}{2} & \text{при } 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{при } \dfrac{1}{n}<x\leqslant 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

На рис. 2.1 приведены графики функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_n(x)$. Областью определения функциональной последовательности (2.3)

Рис. 2.1

является сегмент [0, 1]. Заметим, что каждая функция $f_n(x)$ непрерывна на сегменте [0, 1].

2°. Рассмотрим функциональный ряд

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+y)^k}{k!}=1+\frac{x+y}{1!}+\frac{(x+y)^2}{2!}+\ldots+\frac{(x+y)^n}{n!}+\ldots, \tag{2.4}$$

областью определения которого является плоскость $E^2=\{-\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty\}$.

Используя разложение по формуле Маклорена функции

$$e^u=1+\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{2!}+\ldots+\frac{u^n}{n!}+R_{n+1}(u)$$

(см. п. 2 § 9 гл. 6 ч. 1), мы придем к выводу, что $(n+1)$-я частичная сумма

$$S_{n+1}(x,\ y)=1+\frac{x+y}{1!}+\frac{(x+y)^2}{2!}+\ldots+\frac{(x+y)^n}{n!}$$

ряда (2.4) отличается от функции e^{x+y} на величину $R_{n+1}(x+y)$, где $R_{n+1}(u)$ — остаточный член в формуле Маклорена для e^u.

2. Сходимость функциональной последовательности (функционального ряда) в точке и на множестве. Предположим, что областью определения функциональной последовательности (функционального ряда) является множество $\{x\}$ пространства E^m. Фиксируем произвольную точку $x_0=(\overset{\circ}{x}_1,\ \overset{\circ}{x}_2,\ \ldots,\ \overset{\circ}{x}_m)$ множества $\{x\}$ и рассмотрим все члены функциональной последовательности (функционального ряда) в этой точке x_0. При этом получим числовую последовательность (числовой ряд).

Если указанная числовая последовательность (числовой ряд) сходится, то говорят, что функциональная последовательность (функциональный ряд) **сходится в точке** x_0.

Множество всех точек x_0, в которых сходится данная функциональная последовательность (функциональный ряд), называется **областью сходимости** этой последовательности (ряда).

В конкретных ситуациях область сходимости может совпадать с областью определения, являться подмножеством области определения или вообще быть пустым множеством. Соответствующие примеры приведены ниже.

Предположим, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ имеет в качестве области сходимости некоторое множество $\{x\}$. Совокупность пределов, взятых для всех точек x множества $\{x\}$, порождает множество всех значений вполне определенной функции $f(x)$, определенной на множестве $\{x\}$. Эту функцию называют **предельной функцией** функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$.

Аналогично, если функциональный ряд (2.1) имеет в качестве области сходимости некоторое множество $\{x\}$, то на этом множестве определена функция $S(x)$, являющаяся предельной функцией последовательности частичных сумм этого ряда и называемая его суммой.

Последовательность (2.3) из рассмотренного в предыдущем пункте примера 1° имеет в качестве области сходимости весь сегмент $0 \leqslant x \leqslant 1$. В самом деле, $f_n(0)=1$ для всех номеров n, т. е. в точке $x=0$, последовательность (2.3) сходится к единице. Если же фиксировать любое x из полусегмента $0<x\leqslant 1$, то все функции $f_n(x)$, начиная с некоторого номера (зависящего, конечно, от x), будут в этой точке x равны нулю. Отсюда следует, что в любой точке x полусегмента $0<x\leqslant 1$ последовательность (2.3) сходится к нулю.

Итак, последовательность (2.3) сходится на всем сегменте $0\leqslant x\leqslant 1$ к предельной функции $f(x)$, имеющей вид

$$f(x)=\begin{cases} 1 \text{ при } x=0, \\ 0 \text{ при } 0<x\leqslant 1. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 2.2. Сразу же отметим, что эта функция *не является непрерывной на сегменте* [0, 1] (она имеет разрыв в точке $x=0$ справа).

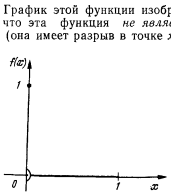

Рис. 2.2

Убедимся теперь в том, что ряд (2.4) из рассмотренного в предыдущем пункте примера 2° имеет в качестве области сходимости всю бесконечную плоскость $E^2=\{-\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty\}$.

В самом деле, в п. 2 § 9 гл. 6 ч. 1 доказано, что остаточный член $R_{n+1}(u)$ в формуле Маклорена для функции e^u стремится к нулю при $n\to\infty$ *для любого вещественного* u. Это и означает, что $(n+1)$-я частичная сумма $S_{n+1}(x, y)$ ряда (2.4) отличается от e^{x+y} на величину $R_{n+1}(x+y)$, стремящуюся к нулю при $n\to\infty$ в каждой точке (x, y) плоскости E^2.

Итак, ряд (2.4) сходится на всей плоскости E^2, и его сумма равна e^{x+y}.

3. Равномерная сходимость на множестве. Предположим, что функциональная последовательность

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{2.5}$$

сходится на множестве $\{x\}$ пространства E^m к предельной функции $f(x)$.

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность* (2.5) *сходится к функции* $f(x)$ *равномерно на множестве*

$\{x\}$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n\geqslant N(\varepsilon)$, и для всех точек x множества $\{x\}$ справедливо неравенство

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon. \tag{2.6}$$

Замечание 1. В этом определении весьма существенно то, что номер N зависит только от ε и не зависит от точек x, т. е. утверждается, что для любого $\varepsilon>0$ найдется универсальный номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого неравенство (2.6) справедливо сразу для всех точек x множества $\{x\}$.

Замечание 2. Отметим, что равномерная на множестве $\{x\}$ сходимость функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ эквивалентна бесконечной малости числовой последовательности $\{\varepsilon_n\}$, каждый член ε_n которой представляет собой точную верхнюю грань функции $|f_n(x)-f(x)|$ на множестве $\{x\}$.

Замечание 3. Из определения 1 непосредственно вытекает, что если последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ на всем множестве $\{x\}$, то $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ и на любом подмножестве множества $\{x\}$.

Приведем пример, показывающий, что из сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве $\{x\}$ не вытекает, вообще говоря, равномерная сходимость $\{f_n(x)\}$ на этом множестве.

Обратимся к последовательности (2.3) из примера 1°, рассмотренного в п. 1. В п. 2 было доказано, что эта последовательность сходится на всем сегменте [0, 1] к предельной функции

$$f(x)=\begin{cases} 1 \text{ при } x=0, \\ 0 \text{ при } 0<x\leqslant 1. \end{cases}$$

Докажем, что эта последовательность *не сходится равномерно на* [0, 1].

Рассмотрим последовательность точек $x_n=1/(2n)$ $(n=1, 2, \ldots)$, принадлежащих сегменту [0, 1]. В каждой из этих точек (т. е. для каждого номера n) справедливы соотношения

$$f_n(x_n)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad f(x_n)=0.$$

Таким образом, для любого номера n

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|=\sqrt{2}/2;$$

следовательно, при $\varepsilon\leqslant\sqrt{2}/2$ неравенство (2.6) не может выполняться сразу для всех точек x сегмента [0, 1] ни при одном номере n. Это и означает отсутствие равномерной на сегменте [0, 1] сходимости рассматриваемой последовательности.

Отметим, что рассматриваемая последовательность (2.3) сходится к предельной функции $f(x)$ *равномерно на каждом сегменте* $[\delta, 1]$, где δ — любое фиксированное число из интервала $0<\delta<1$. В самом деле, для любого выбранного δ найдется номер N_0, начиная с которого все элементы $f_n(x)$ равны нулю на всем сегменте $[\delta, 1]$. Так как и предельная функция $f(x)$ равна нулю на сегменте $[\delta, 1]$, то левая часть (2.6) равна нулю на всем сегменте $[\delta, 1]$, начиная с найденного номера N_0. Таким образом, начиная с номера N_0, неравенство (2.6) справедливо для всех x из сегмента $[\delta, 1]$ при любом $\varepsilon>0$.

Определение 2. *Функциональный ряд называется равномерно сходящимся на множестве $\{x\}$ к сумме $S(x)$, если последовательность $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к предельной функции $S(x)$.*

Заметим, что функциональный ряд (2.4) из примера 2° п. 1 сходится к сумме e^{x+y} равномерно в круге $x^2+y^2\leqslant r^2$ произвольного фиксированного радиуса r. В самом деле, всюду в этом круге $|x|\leqslant r$, $|y|\leqslant r$, и потому $|x+y|\leqslant|x|+|y|\leqslant 2r$, откуда в силу оценки (6.62*) из п. 2 § 9 гл. 6 ч. 1 получаем, что всюду в указанном круге

$$|R_{n+1}(x+y)|\leqslant\frac{(2r)^{n+1}}{(n+1)!}e^{2r}.$$

Из последнего неравенства вытекает, что $R_{n+1}(x+y)$ стремится к нулю при $n\to\infty$ равномерно в круге $x^2+y^2\leqslant r^2$, а это и означает, что ряд (2.4) сходится равномерно в этом круге к сумме e^{x+y}.

4. Критерий Коши равномерной сходимости последовательности (ряда). Справедливы следующие фундаментальные теоремы.

Теорема 2.1. *Для того чтобы функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно на множестве $\{x\}$ сходилась к некоторой предельной функции, необходимо и достаточно, чтобы для произвольного $\varepsilon>0$ нашелся номер $N(\varepsilon)$, гарантирующий справедливость неравенства*

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon \tag{2.7}$$

для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n\geqslant N(\varepsilon)$, всех натуральных p $(p=1, 2, \ldots)$ и всех точек x из множества $\{x\}$.

Теорема 2.2. *Для того чтобы функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{2.8}$$

равномерно на множестве $\{x\}$ сходился к некоторой сумме, необходимо и достаточно, чтобы для произвольного $\varepsilon>0$ нашелся номер $N(\varepsilon)$, гарантирующий справедливость неравенства

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right|<\varepsilon \tag{2.9}$$

для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n\geqslant N(\varepsilon)$, всех натуральных p $(p=1, 2, \ldots)$ и всех точек x множества $\{x\}$.

Достаточно провести доказательство только теоремы 2.1, так как теорема 2.2 является следствием теоремы 2.1 (заметим, что в левой части (2.9) под знаком модуля стоит разность $S_{n+p}(x)-S_n(x)$ частичных сумм с номерами $n+p$ и n функционального ряда (2.8)).

Доказательство теоремы 2.1. *Необходимость*. Предположим, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к предельной функции $f(x)$. Тогда, фиксировав произвольное $\varepsilon>0$, мы найдем для него номер $N(\varepsilon)$ такой, что неравенство

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{2.10}$$

будет справедливо для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n\geqslant N(\varepsilon)$, и для всех точек x множества $\{x\}$.

Если p — любое натуральное число, то при $n\geqslant N(\varepsilon)$ номер $n+p$ тем более будет удовлетворять условию $n+p\geqslant N(\varepsilon)$, а поэтому для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n\geqslant N(\varepsilon)$, всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$ тем более будет справедливо неравенство

$$|f_{n+p}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.11}$$

Так как модуль суммы двух величин не превосходит суммы их модулей, то в силу (2.10) и (2.11) получим, что

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\equiv|[f_{n+p}(x)-f(x)]+[f(x)-f_n(x)]|\leqslant$$
$$\leqslant|f_{n+p}(x)-f(x)|+|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

(для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n\geqslant N(\varepsilon)$, всех натуральных p и всех x из множества $\{x\}$). Необходимость доказана.

Достаточность. Предположим, что для произвольного $\varepsilon>0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что неравенство (2.7) справедливо для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n\geqslant N(\varepsilon)$, всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$.

Из неравенства (2.7) и из критерия Коши сходимости *числовой* последовательности (см. п. 3 § 3 гл. 3 ч. 1) вытекает сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ в каждой точке x множества $\{x\}$ и существование определенной в каждой точке x множества $\{x\}$ предельной функции $f(x)$.

Фиксировав произвольный номер n, удовлетворяющий условию $n\geqslant N(\varepsilon)$, и произвольную точку x множества $\{x\}$, перейдем в неравенстве (2.7) к пределу при $p\to\infty$. Используя теорему 3.13 п. 4 § 1 гл. 3 ч. 1, мы получим, что для произвольного номера n, удовлетворяющего условию $n\geqslant N(\varepsilon)$, и произвольной точки x множества $\{x\}$ справедливо неравенство

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon<2\varepsilon.$$

Это и доказывает, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к предельной функции $f(x)$ равномерно на множестве $\{x\}$. Достаточность доказана.

Наличие критерия Коши не снимает вопроса об установлении удобных для приложений достаточных признаков равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов, к которому мы сейчас и переходим.

§ 2. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И РЯДОВ

В п. 1 § 1 мы убедились в том, что изучение функциональных рядов эквивалентно изучению функциональных последовательностей. С этой точки зрения каждый признак равномерной сходимости имеет две эквивалентные формулировки: одну в терминах функциональных рядов, а другую — в терминах функциональных последовательностей. В зависимости от удобства мы будем формулировать устанавливаемые признаки либо в терминах последовательностей, либо в терминах рядов (а иногда будем приводить обе эквивалентные формулировки).

Теорема 2.3 (признак Вейерштрасса). *Если функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{2.12}$$

определен на множестве $\{x\}$ пространства E^m и если существует сходящийся числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \tag{2.13}$$

такой, что для всех точек x множества $\{x\}$ и для всех номеров k справедливо неравенство

$$|u_k(x)|\leqslant c_k, \tag{2.14}$$

то функциональный ряд (2.12) *сходится равномерно на множестве* $\{x\}$.

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Так как числовой ряд (2.13) сходится, то в силу критерия Коши сходимости числового ряда (см. теорему 1.1 из гл. 1) найдется $N(\varepsilon)$ такое, что

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k<\varepsilon \tag{2.15}$$

для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n\geqslant N(\varepsilon)$, и всех натуральных p.

Из неравенств (2.14) и (2.15) и из того, что модуль суммы p слагаемых не превосходит сумму их модулей, получаем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}|u_k|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k<\varepsilon$$

(для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n\geqslant N(\varepsilon)$, всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$).

В силу критерия Коши равномерной сходимости (см. теорему 2.2) ряд (2.12) сходится равномерно на множестве $\{x\}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Признак Вейерштрасса кратко может быть сформулирован так: *функциональный ряд сходится равномерно на данном множестве, если его можно мажорировать на этом множестве сходящимся числовым рядом.*

Замечание 2. Признак Вейерштрасса является достаточным, *но не необходимым признаком равномерной сходимости функционального ряда.* В самом деле, функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$$

сходится равномерно на сегменте $0\leqslant x\leqslant 1$ к сумме $\ln(1+x)$, поскольку (см. п. 2 § 9 гл. 6 ч. 1) разность между $\ln(1+x)$ и n-й частичной суммой этого ряда, равная остаточному члену $R_{n+1}(x)$ в формуле Маклорена для функции $\ln(1+x)$, для всех x из сегмента $0\leqslant x\leqslant 1$ удовлетворяет неравенству

$$|R_{n+1}(x)|\leqslant 1/(n+1).$$

Однако *для данного функционального ряда не существует на сегменте $0\leqslant x\leqslant 1$ мажорирующего его сходящегося числового ряда*, так как для каждого номера k

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right|=\frac{1}{k},$$

а числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ расходится.

Применим признак Вейерштрасса для установления равномерной сходимости функционального ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k^2x+ky+z)}{k^2}.$$

Можно утверждать, что этот ряд сходится равномерно во всем трехмерном евклидовом пространстве E^3, так как для любой точки (x, y, z) этого пространства он может быть мажорирован сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

Теорема 2.4 (признак Дини[2]). *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ не убывает (или не возрастает) в каждой точке x замкнутого ограниченного множества $\{x\}$ пространства E^m и сходится на этом множестве к предельной функции $f(x)$ и если все члены последовательности $f_n(x)$ и предельная функция $f(x)$ являются непрерывными на множестве $\{x\}$, то сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ является равномерной на множестве $\{x\}$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, предположим, что последовательность $\{f_n(x)\}$ не убывает на замкнутом ограниченном множестве $\{x\}$ (случай невозрастающей последовательности сводится к этому случаю умножением всех элементов последовательности на число -1). Положим $r_n(x)=f(x)-f_n(x)$. Последовательность $\{r_n(x)\}$ обладает следующими свойствами:

1) все $r_n(x)$ неотрицательны и непрерывны на множестве $\{x\}$;
2) $\{r_n(x)\}$ не возрастает на множестве $\{x\}$;
3) в каждой точке x множества $\{x\}$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0.$$

Достаточно доказать, что последовательность $\{r_n(x)\}$ сходится к тождественному нулю равномерно на множестве $\{x\}$, т. е. что для любого $\varepsilon>0$ найдется хотя бы один номер n такой, что $r_n(x)<\varepsilon$ для всех x из множества $\{x\}$. (Тогда в силу невозрастания последовательности $\{r_n(x)\}$ неравенство $r_n(x)<\varepsilon$ будет справедливо и для всех последующих номеров.)

Допустим, что для некоторого $\varepsilon>0$ не найдется ни одного номера n такого, что $r_n(x)<\varepsilon$ сразу для всех x из множества $\{x\}$. Тогда для любого номера n найдется хотя бы одна точка x_n множества $\{x\}$ такая, что

$$r_n(x_n)\geqslant\varepsilon. \tag{2.16}$$

В силу ограниченности множества $\{x\}$ и теоремы Больцано—Вейерштрасса (см. теорему 12.1 ч. 1) из последовательности то-

[2] Улисс Дини — итальянский математик (1845—1918).

чек $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность точек $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке x_0, принадлежащей в силу замкнутости множества $\{x\}$ этому множеству. Так как каждая функция $r_m(x)$ (с любым номером m) является непрерывной в точке x_0, то для любого номера m

$$\lim_{k\to\infty} r_m(x_{n_k})=r_m(x_0). \tag{2.17}$$

С другой стороны, выбрав для каждого номера m превосходящий его номер n_k, получим (в силу невозрастания последовательности $r_m(x)$)

$$r_m(x_{n_k})\geqslant r_{n_k}(x_{n_k}).$$

Сопоставление последнего неравенства с неравенством (2.16), справедливым для любого номера n, дает оценку

$$r_m(x_{n_k})\geqslant\varepsilon \tag{2.18}$$

(для любого номера n_k, превосходящего фиксированный нами произвольный номер m).

Из (2.17) и (2.18) вытекает, что

$$r_m(x_0)\geqslant\varepsilon$$

(для любого номера m), а это противоречит сходимости последовательности $\{r_m(x)\}$ в точке x_0 к нулю. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание 3. В теореме Дини весьма существенно требование монотонности последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве $\{x\}$, так как немонотонная на множестве $\{x\}$ последовательность непрерывных на этом множестве функций может сходиться в каждой точке x множества $\{x\}$ к непрерывной на этом множестве функции $f(x)$, но не сходиться равномерно на множестве $\{x\}$.

Примером может служить последовательность функций $\{f_n(x)\}$, для которой $f_n(x)$ равна $\sin nx$ при $0\leqslant x\leqslant\pi/n$ и равна нулю при $\pi/n<x\leqslant\pi$. Эта последовательность сходится к $f(x)\equiv 0$ в каждой точке сегмента $0\leqslant x\leqslant\pi$, но не сходится на этом сегменте равномерно, так как $|f_n(x_n)-f(x_n)|=1$ при $x_n=\pi/2n$ для всех номеров n.

Приведем эквивалентную формулировку теоремы Дини в терминах функциональных рядов.

Теорема 2.4*. *Если все члены функционального ряда непрерывны и неотрицательны (или неположительны) на замкнутом ограниченном множестве $\{x\}$ и если в каждой точке множества $\{x\}$ этот ряд сходится и сумма его является непрерывной на множестве $\{x\}$ функцией, то его сходимость является равномерной на множестве $\{x\}$.*

В качестве примера применения признака Дини изучим вопрос о характере сходимости последовательности

$$\{(x^2+y^2)^n\}$$

в круге $x^2+y^2\leqslant 1/4$ радиуса 1/2 с центром в точке (0, 0). Сходимость является равномерной в этом круге, так как рассматриваемая последовательность сходится в каждой точке этого круга к предельной функции $f(x, y)\equiv 0$, не возрастает в каждой точке круга и состоит из функций, непрерывных в нем.

Чтобы сформулировать еще два признака равномерной сходимости функциональных рядов, введем некоторые новые понятия.

Определение 1. *Последовательность $\{f_n(x)\}$ называется равномерно ограниченной на множестве $\{x\}$, если существует такое вещественное число $M>0$, что для всех номеров n и всех точек x множества $\{x\}$ справедливо неравенство*

$$|f_n(x)|\leqslant M.$$

Определение 2. *Функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ называется последовательностью, обладающей на множестве $\{x\}$ равномерно ограниченным изменением, если функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|v_{k+1}(x)-v_k(x)| \tag{2.19}$$

сходится равномерно на множестве $\{x\}$.

Отметим сразу же, что *всякая последовательность, обладающая на множестве $\{x\}$ равномерно ограниченным изменением, сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к некоторой предельной функции.* В самом деле, из равномерной на множестве $\{x\}$ сходимости ряда (2.19) и из критерия Коши вытекает равномерная на множестве сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}[v_{k+1}(x)-v_k(x)], \tag{2.19'}$$

n-я частичная сумма $S_n(x)$ которого имеет вид $S_n(x)=v_{n+1}(x)-v_1(x)$.

Из последнего равенства вытекает равномерная сходимость последовательности $\{v_n(x)\}$ к предельной функции $v(x)$, равной $S(x)+v_1(x)$, где $S(x)$ — сумма ряда (2.19').

Теперь мы можем сформулировать и доказать следующие два признака.

Теорема 2.5 (первый признак Абеля). *Если функциональный ряд* (2.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

обладает равномерно ограниченной на множестве $\{x\}$ последовательностью частичных сумм, а функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ обладает равномерно ограниченным на множестве $\{x\}$ изменением и имеет предельную функцию, тождественно равную нулю, то функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) v_n(x)] \qquad (2.20)$$

сходится равномерно на множестве $\{x\}$.

Доказательство. По условию существует число $M>0$ такое, что последовательность $S_n(x)$ частичных сумм ряда (2.1) для всех номеров n и всех точек x из множества $\{x\}$ удовлетворяет неравенству $|S_n(x)| \leqslant M$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и по нему номер N такой, что для всех n, превосходящих N, всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$ справедливы неравенства

$$|v_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}, \qquad (2.21)$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}. \qquad (2.22)$$

(Здесь мы воспользовались равномерной на множестве $\{x\}$ сходимостью последовательности $\{v_n(x)\}$ к нулю и равномерной на множестве $\{x\}$ сходимостью ряда (2.19).)

В силу тождества Абеля (1.77) и в силу того, что модуль суммы трех величин не превосходит сумму их модулей, имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x) v_k(x)]\right| \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} S_k(x)[v_k(x) - v_{k+1}(x)]\right| + $$
$$+ |S_{n+p}(x)| \cdot |v_{n+p}(x)| + |S_n(x)| \cdot |v_{n+1}(x)|.$$

Учитывая, что для всех номеров n и всех x из $\{x\}$ справедливо неравенство $|S_n(x)| \leqslant M$, получим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x) v_k(x)]\right| \leqslant M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| +$$
$$+ M\,|v_{n+p}(x)| + M\,|v_{n+1}(x)|.$$

Сопоставление последнего неравенства с (2.21) и (2.22), позволяет записать неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x) v_k(x)]\right| < \varepsilon,$$

справедливое для всех номеров n, превосходящих N, всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$, а это и означает, что ряд (2.20) сходится равномерно на множестве $\{x\}$ (в силу теоремы 2.2). Теорема доказана.

Теорема 2.6 (второй признак Абеля). *Если функциональный ряд* (2.1) *сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к сумме $S(x)$, ограниченной на этом множестве, а функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ обладает равномерно ограниченным на множестве $\{x\}$ изменением и имеет ограниченную на этом множестве предельную функцию $v(x)$, то функциональный ряд* (2.20) *сходится равномерно на множестве $\{x\}$.*

Доказательство. Будем исходить из тождества Абеля (1.77). Это тождество можно переписать в виде

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \equiv \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(x)[v_k(x) - v_{k+1}(x)] +$$
$$+ [S_{n+p}(x) - S_n(x)]\, v_{n+p}(x) + S_n(x)[v_{n+p}(x) - v_{n+1}(x)].$$

(Здесь символом $S_k(x)$ обозначена k-я частичная сумма ряда (2.1).)

Из последнего тождества вытекает неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |S_k(x)| \cdot |v_{k+1}(x) - v_k(x)| +$$
$$+ |S_{n+1}(x) - S_n(x)| \cdot |v_{n+p}(x)| + |S_n(x)| \cdot |v_{n+p}(x) - v_{n+1}(x)|. \qquad (2.23)$$

Так как по условию сумма $S(x)$ ряда (2.1) и предельная функция $v(x)$ последовательности $\{v_n(x)\}$ ограничены на множестве $\{x\}$, то найдутся постоянные M_1 и M_2 такие, что для всех x из множества $\{x\}$

$$|S(x)| \leqslant M_1, \quad |v(x)| \leqslant M_2. \qquad (2.24)$$

Из неравенств (2.24) и из равномерной на множестве $\{x\}$ сходимости последовательностей $\{S_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$ к предельным функциям $S(x)$ и $v(x)$ соответственно вытекает существование такого номера N_1, что для всех точек x множества $\{x\}$ и всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geqslant N_1$, будут справедливы неравенства

$$|S_n(x)| \leqslant M_1 + 1, \quad |v_n(x)| \leqslant M_2 + 1. \qquad (2.25)$$

Далее, из равномерной на множестве $\{x\}$ сходимости функциональных рядов (2.1) и (2.19) и из критерия Коши равномерной сходимости вытекает, что для произвольного $\varepsilon>0$ найдутся номера $N_2(\varepsilon)$ и $N_3(\varepsilon)$ такие, что неравенство

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3(M_2+1)} \qquad (2.26)$$

будет справедливо для точек x множества $\{x\}$, всех натуральных p и всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geqslant N_2(\varepsilon)$, а неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3(M_1+1)} \qquad (2.27)$$

— для всех точек x множества $\{x\}$, всех натуральных p и всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geqslant N_3(\varepsilon)$.

Наконец, из тождества

$$v_{n+p}(x) - v_n(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} [v_{k+1}(x) - v_k(x)],$$

из вытекающего из него неравенства

$$|v_{n+p}(x) - v_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)|$$

и из неравенства (2.27) получаем

$$|v_{n+p}(x) - v_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3(M_1+1)} \qquad (2.28)$$

для всех точек x множества $\{x\}$, всех натуральных p и всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geqslant N_3(\varepsilon)$.

Обозначим через $N(\varepsilon)$ наибольший из трех номеров N_1, $N_2(\varepsilon)$, и $N_3(\varepsilon)$. Тогда при $n \geqslant N(\varepsilon)$ для всех точек x множества $\{x\}$ и всех натуральных p будет справедливо каждое из четырех неравенств (2.25)—(2.28).

Из этих неравенств и из (2.23) вытекает, что

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x)\right| < \varepsilon$$

при всех $n \geqslant N(\varepsilon)$, всех натуральных p и для всех точек x множества $\{x\}$.

В силу критерия Коши ряд (2.20) сходится равномерно на множестве $\{x\}$. Теорема доказана.

Следствие из теоремы 2.5 (признак Дирихле — Абеля). *Если функциональный ряд* (2.1) *обладает равномерно ограниченной на множестве $\{x\}$ последовательностью частичных сумм, а функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ не возрастает в каждой точке множества $\{x\}$ и равномерно на этом множестве сходится к нулю, то функциональный ряд* (2.20) *сходится равномерно на множестве $\{x\}$.*

Достаточно заметить, что невозрастающая в каждой точке множества $\{x\}$ и сходящаяся равномерно на этом множестве к нулю последовательность $\{v_n(x)\}$ заведомо обладает на множестве $\{x\}$ равномерно ограниченным изменением, так как для нее n-я частичная сумма $S_n(x)$ ряда (2.19) равна $v_1(x) - v_{n+1}(x)$. Поэтому существует равномерный на множестве $\{x\}$ предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} [v_1(x) - v_{n+1}(x)] = v_1(x).$$

В качестве примера изучим вопрос о равномерной сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k + (1+|x|)^k}. \qquad (2.29)$$

Так как последовательность

$$v_n(x) = \frac{1}{n + (1+|x|)^n}$$

не возрастает в каждой точке бесконечной прямой $-\infty < x < \infty$ и равномерно на этой прямой сходится к нулю, то в силу признака Дирихле—Абеля ряд (2.29) сходится равномерно на любом множестве, на котором ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx \qquad (2.30)$$

обладает равномерно ограниченной последовательностью частичных сумм.

Для вычисления n-й частичной суммы $S_n(x)$ ряда (2.30) просуммируем тождество

$$2\sin\frac{x}{2}\sin kx = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x$$

по всем номерам k от 1 до n. При этом получим соотношение

$$2\sin\frac{x}{2}\, S_n(x) = \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x,$$

из которого вытекает равенство

$$S_n(x) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Следовательно, для всех номеров n справедливо неравенство

$$|S_n(x)| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},$$

которое означает, что последовательность частичных сумм ряда (2.30) равномерно ограничена на любом фиксированном сегменте, не содержащем точек $x_m = 2\pi m$, где $m = 0, \pm 1, \ldots$ (так как на любом таком сегменте $\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ имеет положительную точную нижнюю грань).

Итак, ряд (2.29) сходится равномерно на любом фиксированном сегменте, не содержащем точек $x_m = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \ldots$

В силу второго признака Абеля можно утверждать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{\left[\frac{\sin kx}{k + (1+|x|)^k}\right] \frac{k+1+|x|}{k+|x|}\right\}$$

также сходится равномерно на любом сегменте, не содержащем точек $x_m = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \ldots$, поскольку ряд (2.29) равномерно сходится на таком сегменте, причем к ограниченной сумме, а последовательность $v_k = \frac{k+1+|x|}{k+|x|}$ обладает равномерно ограниченным на любом сегменте изменением (так как ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k| \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+|x|)(k+|x|+1)}$$

на всей прямой мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$) и на всей прямой сходится равномерно к ограниченной функции $v(x) \equiv 1$.

§ 3. ПОЧЛЕННЫЙ ПЕРЕХОД К ПРЕДЕЛУ

Рассмотрим произвольную точку $\overset{0}{x}$ пространства E^m и произвольное множество $\{x\}$ пространства E^m, для которого эта точка

является предельной. При этом точка $\overset{0}{x}$ может сама не принадлежать множеству $\{x\}$.

Теорема 2.7. *Если функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \qquad (2.31)$$

сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к сумме $S(x)$ и у всех членов этого ряда существует в точке $\overset{0}{x}$ предел

$$\lim_{x\to\overset{0}{x}} u_k(x) = b_k,$$

то и сумма ряда $S(x)$ имеет в точке $\overset{0}{x}$ предел, причем

$$\lim_{x\to\overset{0}{x}} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\lim_{x\to\overset{0}{x}} u_k(x)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \qquad (2.32)$$

т. е. символ lim *предела и символ* Σ *суммирования можно переставлять местами (или, как говорят, к пределу можно переходить почленно).*

Доказательство. Сначала докажем сходимость числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. В силу критерия Коши, примененного к функциональному ряду (2.31), для любого $\varepsilon>0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon \qquad (2.33)$$

для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geqslant N(\varepsilon)$, всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$. Считая в неравенстве (2.33) фиксированными номера n и p и переходя в этом неравенстве к пределу при $x \to \overset{0}{x}$ (такой предельный переход можно осуществить по любой последовательности точек множества $\{x\}$, сходящейся к точке $\overset{0}{x}$), получим

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+p}| \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon$$

(для каждого $n \geqslant N(\varepsilon)$ и каждого натурального p). В силу критерия Коши ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.

Оценим теперь разность

$$S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

для всех точек x множества $\{x\}$ из достаточно малой окрестности точки $\overset{0}{x}$. Так как

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

для всех точек x множества $\{x\}$, то для любого номера n справедливо тождество

$$S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \equiv \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right] + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k,$$

из которого получаем неравенство

$$\left|S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right|, \qquad (2.34)$$

справедливое для всех точек x множества $\{x\}$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$, то для фиксированного $\varepsilon>0$ найдется номер n такой, что для всех точек x множества $\{x\}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (2.35)$$

Так как предел конечной суммы равен сумме пределов слагаемых, то для фиксированного нами $\varepsilon>0$ и выбранного номера n можно указать $\delta>0$ такое, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2.36)$$

для всех точек x множества $\{x\}$, удовлетворяющих условию $0 < \rho(x, \overset{0}{x}) < \delta$. Из (2.34)—(2.36) следует, что для всех таких x

$$\left|S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| < \varepsilon.$$

Это доказывает существование предела $S(x)$ в точке $\overset{0}{x}$, а следовательно, и справедливость равенства (2.32). Теорема доказана.

В терминах функциональных последовательностей теорема 2.7 звучит так:

Теорема 2.7*. *Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к предельной функции $f(x)$ и все элементы этой последовательности имеют предел в точке $\overset{0}{x}$, то и предельная функция $f(x)$ имеет предел в точке $\overset{0}{x}$, причем*

$$\lim_{x\to\overset{0}{x}} f(x) = \lim_{x\to\overset{0}{x}} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to\overset{0}{x}} f_n(x)\right),$$

т. е. символ $\lim\limits_{n\to\infty}$ предела последовательности и символ $\lim\limits_{x\to\overset{0}{x}}$ предела функции можно переставлять местами (или, как говорят, к пределу при $x \to \overset{0}{x}$ можно переходить почленно).

Следствие 1 из теоремы 2.7. *Если в условиях теоремы 2.7 дополнительно потребовать, чтобы точка $\overset{0}{x}$ принадлежала множеству $\{x\}$ и чтобы все члены $u_k(x)$ функционального ряда* (2.31) *были непрерывны в точке $\overset{0}{x}$, то и сумма $S(x)$ этого ряда будет непрерывна в точке $\overset{0}{x}$.*

В самом деле, в этом случае $b_k = u_k(\overset{0}{x})$ и равенство (2.32) принимает вид

$$\lim_{x\to\overset{0}{x}} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\overset{0}{x}) = S(\overset{0}{x}),$$

а это и означает непрерывность суммы $S(x)$ в точке $\overset{0}{x}$.

Следствие 2 из теоремы 2.7. *Если все члены функционального ряда (функциональной последовательности) непрерывны на плотном в себе множестве $\{x\}$*[3] *и если этот функциональный ряд (эта функциональная последовательность) сходится равномерно на множестве $\{x\}$, то и сумма указанного ряда (предельная функция указанной последовательности) непрерывна на множестве $\{x\}$.*

Для доказательства достаточно применить предыдущее следствие к каждой точке $\overset{0}{x}$ множества $\{x\}$.

[3] Напомним, что множество $\{x\}$ называется плотным в себе, если каждая его точка является предельной точкой этого множества.

§ 4. ПОЧЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ПОЧЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И РЯДОВ

1. Почленное интегрирование. Докажем следующую основную теорему.

Теорема 2.8. *Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к предельной функции $f(x)$ равномерно на сегменте $[a, b]$ и если каждая функция $f_n(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то и предельная функция $f(x)$ интегрируема на этом сегменте, причем указанную последовательность можно интегрировать на сегменте $[a, b]$ почленно, т. е. предел*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

существует и равен $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Доказательство. Сначала докажем, что *предельная функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$.*

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Достаточно доказать, что для предельной функции $f(x)$ найдется хотя бы одно разбиение сегмента $[a, b]$, для верхней суммы S и нижней суммы s которого справедливо неравенство $S - s < \varepsilon$ (см. п. 1 § 3 гл. 9 ч. 1).

Для этого достаточно доказать, что для фиксированного нами произвольного $\varepsilon>0$ найдется такой номер n, что для любого разбиения сегмента $[a, b]$ верхняя сумма S и нижняя сумма s функции $f(x)$ и верхняя сумма S_n и нижняя сумма s_n функции $f_n(x)$ связаны неравенством

$$S - s \leqslant (S_n - s_n) + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2.37)$$

(В самом деле, если для любого разбиения будет доказана справедливость для некоторого номера n неравенства (2.37), то в силу интегрируемости на $[a, b]$ функции $f_n(x)$ разбиение можно выбрать так, что будет справедливо неравенство $S_n - s_n < \frac{\varepsilon}{2}$, из которого в силу (2.37) следует $S - s < \varepsilon$, что и завершает доказательство интегрируемости на $[a, b]$ функции $f(x)$.) Рассмотрим произвольное разбиение $\{x_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ сегмента $[a, b]$ и обозначим символом $\omega_k(f_n)$ колебание[4] на k-м частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ функции $f_n(x)$, а символом $\omega_k(f)$ колебание на том же частичном сегменте предельной функции $f(x)$.

[4] Напомним, что колебанием функции на любом сегменте называется разность между точной верхней и точной нижней гранями этой функции на указанном сегменте.

Неравенство (2.37) будет доказано, если мы установим, что для достаточно большого номера n справедливо неравенство

$$\omega_k(f) \leqslant \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.38}$$

(В самом деле, умножая (2.38) на длину $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ частичного сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ и суммируя получающееся при этом неравенство по всем $k=1, 2, \ldots, m$, получим неравенство (2.37).)

Установим для любого частичного сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ и для любого достаточно большого номера n справедливость неравенства (2.38). Для любого номера n и любых двух точек x' и x'' сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ справедливо тождество

$$f(x') - f(x'') \equiv [f(x') - f_n(x')] + [f_n(x') - f_n(x'')] + [f_n(x'') - f(x'')],$$

из которого вытекает неравенство

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x'')| + |f_n(x'') - f(x'')|. \tag{2.39}$$

В силу равномерной на сегменте $[a, b]$ сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ для фиксированного нами произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер n такой, что для всех точек x сегмента $[a, b]$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \tag{2.40}$$

Используя в правой части (2.39) неравенство (2.40), взятое для точки $x = x'$ и для точки $x = x''$, получим из (2.39)

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f_n(x_n') - f_n(x'')| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{2.41}$$

(для выбранного нами достаточно большого номера n и для любых двух точек x' и x'' сегмента $[x_{k-1}, x_k]$).

Так как при любом расположении точек x' и x'' на сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ справедливо неравенство

$$|f_n(x') - f_n(x'')| \leqslant \omega_k(f_n),$$

то из (2.41) получим

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.42}$$

Заметим, что неравенство (2.42) справедливо при любом расположении точек x' и x'' на частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$.

Обозначая точную верхнюю и точную нижнюю грани функции $f(x)$ на указанном частичном сегменте соответственно через M_k и m_k, в силу определения точных граней найдем две последова-

тельности точек $\{x_p'\}$ и $\{x_p''\}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ такие, что

$$\lim_{p\to\infty} x_p' = M_k, \quad \lim_{p\to\infty} x_p'' = m_k.$$

В силу (2.42) для любого номера p

$$|f(x_p') - f(x_p'')| \leqslant \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.43}$$

Переходя в неравенстве (2.43) к пределу при $p \to \infty$ и замечая, что предел левой части (2.43) равен $M_k - m_k = \omega_k(f)$, получим в пределе из (2.43) требуемое неравенство (2.38).

Таким образом, доказательство интегрируемости предельной функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ завершено.

Заметим, что если бы мы в условиях теоремы 2.8 дополнительно потребовали непрерывности каждой функции $f_n(x)$ на сегменте $[a, b]$ (что делается в большинстве учебников по математическому анализу), то доказательство интегрируемости предельной функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ стало бы совсем тривиальным: в силу следствия 2 из теоремы 2.7 при таком дополнительном требовании предельная функция $f(x)$ являлась бы непрерывной на сегменте $[a, b]$, а потому и интегрируемой на этом сегменте.

Остается доказать второе утверждение теоремы 2.8 о том, что интегрирование последовательности $\{f_n(x)\}$ на сегменте $[a, b]$ можно производить почленно. Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Но это вытекает из того, что в силу равномерной сходимости $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех x из сегмента $[a, b]$ и для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geqslant N(\varepsilon)$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.44}$$

Из неравенства (2.44) и из известных оценок из теории определенного интеграла[5] получим

[5] Имеются в виду следующие установленные в п. 2 § 4 гл. 9 ч. 1 оценки: 1) если $F(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то и $|F(x)|$ интегрируема на $[a, b]$, причем $\left|\int_a^b F(x)\,dx\right| < \int_a^b |F(x)|\,dx$; 2) если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$ и всюду на этом сегменте $f(x) \leqslant g(x)$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Доказательство теоремы 2.8 полностью завершено.

Приведем формулировку теоремы 2.8 в терминах функциональных рядов:

Теорема 2.8*. *Если функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

сходится к своей сумме $S(x)$ равномерно на сегменте $[a, b]$ и если каждый член этого ряда $u_k(x)$ представляет собой функцию, интегрируемую на сегменте $[a, b]$, то и сумма $S(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, причем указанный ряд можно интегрировать на сегменте $[a, b]$ почленно, т. е. можно утверждать, что числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx$$

сходится и имеет своей суммой $\int_a^b S(x)\,dx$.

Замечание. В следующей главе будет указан аналог теоремы 2.8 (см. теорему 3.9) для случая, когда функциональная последовательность определена и интегрируема в некоторой области m-мерного евклидова пространства E^m (при $m \geqslant 2$).

2. Почленное дифференцирование. В дальнейшем под словами «функция $f(x)$ имеет производную на сегменте $[a, b]$» мы будем подразумевать, что функция $f(x)$ имеет обычную (двустороннюю) производную в любой внутренней точке сегмента $[a, b]$, правую производную $f'(a+0)$ в точке a и левую производную $f'(b-0)$ в точке b.

Теорема 2.9. *Если каждая функция $f_n(x)$ имеет производную на сегменте $[a, b]$, причем последовательность производных сходится равномерно на сегменте $[a, b]$, а сама последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится хотя бы в одной точке x_0 сегмента $[a, b]$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к некоторой предельной функции $f(x)$ равномерно на сегменте $[a, b]$, причем эту последовательность можно дифференцировать на сегменте $[a, b]$ почленно, т. е. всюду на сегменте $[a, b]$ предельная функция*

имеет производную[6] $f'(x)$, *являющуюся предельной функцией последовательности* $\{f_n'(x)\}$.

Доказательство. Докажем сначала, что *последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на сегменте* $[a, b]$. Из сходимости числовой последовательности $\{f_n(x_0)\}$ и из равномерной на сегменте $[a, b]$ сходимости $\{f_n'(x)\}$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f_{n+p}'(x) - f_n'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{2.45}$$

для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$, всех натуральных p и для всех x из сегмента $[a, b]$.

Пусть x — произвольная точка сегмента $[a, b]$. Так как для функции $[f_{n+p}(t) - f_n(t)]$ при любых фиксированных номерах n и p выполнены на сегменте, ограниченном точками x и x_0, все условия теоремы Лагранжа, то между x и x_0 найдется точка ξ такая, что

$$[f_{n+p}(x) - f_n(x)] - [f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)] = [f_{n+p}'(\xi) - f_n'(\xi)](x - x_0).$$

Из этого равенства и из того, что модуль суммы двух величин не превосходит сумму их модулей, получим, учитывая (2.45) и неравенство $|x - x_0| \leqslant b - a$, что

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

(для любого x из $[a, b]$, для любого $n \geqslant N(\varepsilon)$ и любого натурального p).

Это и означает в силу критерия Коши, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на сегменте $[a, b]$ к некоторой предельной функции $f(x)$.

Остается доказать, что эта предельная функция в любой фиксированной точке x сегмента $[a, b]$ имеет производную (в граничных точках одностороннюю производную) и эта производная является предельной функцией последовательности $\{f_n'(x)\}$.

Фиксируем произвольную точку x сегмента $[a, b]$ и по ней $\delta > 0$ такое, чтобы δ-окрестность точки x целиком содержалась в $[a, b]$ (в случае, если x является граничной точкой сегмента $[a, b]$ под δ-окрестностью точки x будем подразумевать правую полуокрестность $[a, a+\delta)$ точки a и левую полуокрестность $(b-\delta, b]$ точки b).

Обозначим символом $\{\Delta x\}$ множество всех чисел Δx, удовлетворяющих условию $0 < |\Delta x| < \delta$ при $a < x < b$, условию $0 < \Delta x < \delta$ при $x = a$ и условию $-\delta < \Delta x < 0$ при $x = b$, и докажем, что последовательность функций аргумента Δx

[6] В граничных точках $[a, b]$ имеется в виду односторонняя производная.

$$\varphi_n(\Delta x) = \frac{f_n(x + \Delta x) - f_n(x)}{\Delta x} \tag{2.46}$$

сходится равномерно на указанном множестве $\{\Delta x\}$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ в силу критерия Коши равномерной сходимости последовательности $\{f_n'(x)\}$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$|f_{n+p}'(x) - f_n'(x)| < \varepsilon \tag{2.47}$$

для всех x из $[a, b]$, всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ и всех натуральных p.

Фиксируем теперь произвольное Δx из множества $\{\Delta x\}$ и при любых фиксированных номерах n и p применим к функции

$$[f_{n+p}(t) - f_n(t)]$$

по сегменту, ограниченному точками x и $x + \Delta x$, теорему Лагранжа. Согласно этой теореме найдется число θ из интервала $0 < \theta < 1$ такое, что

$$\frac{[f_{n+p}(x + \Delta x) - f_n(x + \Delta x)] - [f_{n+p}(x) - f_n(x)]}{\Delta x} =$$
$$= f_{n+p}'(x + \theta\Delta x) - f_n'(x + \theta\Delta x).$$

Используя обозначение (2.46), последнее равенство можно переписать в виде

$$\varphi_{n+p}(\Delta x) - \varphi_n(\Delta x) = f_{n+p}'(x + \theta\Delta x) - f_n'(x + \theta\Delta x).$$

Из этого равенства и из (2.47) заключаем, что

$$|\varphi_{n+p}(\Delta x) - \varphi_n(\Delta x)| < \varepsilon$$

для любого Δx из $\{\Delta x\}$, любого $n \geqslant N(\varepsilon)$ и любого натурального p. В силу критерия Коши (т. е. теоремы 2.1) последовательность $\{\varphi_n(\Delta x)\}$ сходится равномерно на множестве $\{\Delta x\}$. Но тогда к этой последовательности можно применить теорему 2.7 о почленном предельном переходе в точке $\Delta x = 0$ (в терминах функциональных последовательностей). Согласно этой теореме функция

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

являющаяся предельной функцией последовательности (2.46), имеет предел в точке $\Delta x = 0$, причем этот предел можно вычислять почленно, т. е.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} [\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\Delta x)] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} [\lim_{\Delta x\to 0} \varphi_n(\Delta x)] = \lim_{n\to\infty} \left[\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f_n(x + \Delta x) - f_n(x)}{\Delta x} \right] = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Это и доказывает, что производная предельной функции $f(x)$ в точке x существует и равна $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$. Теорема доказана.

В терминах функциональных рядов теорема 2.9 формулируется так:

Теорема 2.9*. *Если каждая функция $u_k(x)$ имеет производную на сегменте $[a, b]$ и если ряд из производных $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сходится равномерно на сегменте $[a, b]$, а сам ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится хотя бы в одной точке x_0 сегмента $[a, b]$, то этот последний ряд сходится равномерно на сегменте $[a, b]$ к некоторой сумме $S(x)$, причем этот ряд можно дифференцировать на сегменте $[a, b]$ почленно, т. е. его сумма $S(x)$ имеет производную, являющуюся суммой ряда из производных $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$.*

Замечание 1. Подчеркнем, что в теореме 2.9 предполагается только существование на сегменте $[a, b]$ производной у каждого члена последовательности $f_n(x)$. Ни ограниченность, ни тем более непрерывность указанной производной (как это делается в большинстве учебников по математическому анализу) не предполагается.

Замечание 2. Если все же дополнительно предположить непрерывность производной у каждого члена последовательности на сегменте $[a, b]$, то в силу следствия 2 из теоремы 2.7 и предельная функция $f(x)$ будет иметь производную, непрерывную на сегменте $[a, b]$.

Замечание 3. Для функции m переменных теорема 2.9 может быть сформулирована в следующем виде:

Теорема 2.9**. *Если каждая из функций $f_n(x) = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ имеет в замкнутой ограниченной области G пространства E^m частную производную $\dfrac{\partial f_n}{\partial x_k}$ по переменной x_k и если последовательность производных $\left\{\dfrac{\partial f_n}{\partial x_k}\right\}$ сходится равномерно в области G, а сама последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в каждой точке области G, то последовательность $\{f_n(x)\}$ можно дифференцировать по переменной x_k в области G почленно.*

Из теоремы 2.9 легко вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.10. *Если каждая функция $f_n(x)$ имеет первообразную на сегменте $[a, b]$ и если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на сегменте $[a, b]$ к предельной функции $f(x)$, то и предельная функция $f(x)$ имеет первообразную на сегменте $[a, b]$. Более того, если x_0 — любая точка сегмента $[a, b]$, то по-*

следовательность первообразных $\Phi_n(x)$ функций $f_n(x)$, удовлетворяющих условию $\Phi_n(x_0) = 0$, сходится равномерно на сегменте $[a, b]$ к первообразной $\Phi(x)$ предельной функции $f(x)$, удовлетворяющей условию $\Phi(x_0) = 0$.

Доказательство. Для последовательности первообразных $\Phi_n(x)$ функций $f_n(x)$, удовлетворяющих требованию $\Phi_n(x_0) = 0$, выполнены все условия теоремы 2.9. Это обеспечивает равномерную на $[a, b]$ сходимость последовательности $\{\Phi_n(x)\}$ к предельной функции $\Phi(x)$, у которой в каждой точке $[a, b]$ существует производная, равная предельной функции последовательности $\{f_n(x)\}$. Теорема доказана.

Замечание к теореме 2.10. В теореме 2.10 не требуется ни ограниченность, ни тем более интегрируемость функций $f_n(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Теоремы, доказанные в данном и в предыдущем параграфах позволяют нам сделать следующий замечательный вывод:

Утверждение. *Равномерная сходимость не выводит из класса функций, имеющих предел в данной точке (теорема 2.7), из класса непрерывных функций (следствие 2 из теоремы 2.7), из класса интегрируемых функций (теорема 2.8), из класса функций, имеющих первообразную (теорема 2.10) и (в случае равномерной сходимости производных) из класса дифференцируемых функций (теорема 2.9).*

3. Сходимость в среднем. Потребуем, чтобы каждая функция $f_n(x)$ из функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ являлись интегрируемыми на сегменте $[a, b]$.

Тогда (в силу § 4 гл. 9 ч. 1) и функция

$$[f_n(x) - f(x)]^2 = f_n^2(x) - 2f_n(x)f(x) + f^2(x)$$

также будет являться интегрируемой на сегменте $[a, b]$.

Введем фундаментальное понятие сходимости в среднем.

Определение 1. *Будем говорить, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем на сегменте $[a, b]$ к функции $f(x)$, если существует равный нулю предел*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0. \tag{2.48}$$

Определение 2. *Будем говорить, что функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

сходится в среднем на сегменте $[a, b]$ к сумме $S(x)$, если последовательность частичных сумм этого ряда сходится в среднем на сегменте $[a, b]$ к предельной функции $S(x)$.

Замечание. Из определений 1 и 2 непосредственно вытекает, что если функциональная последовательность (функциональный ряд) сходится в среднем к $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, то эта последовательность (этот ряд) сходится в среднем к $f(x)$ и на любом сегменте $[c, d]$, содержащемся в $[a, b]$.

Выясним вопрос о связи между сходимостью в среднем и равномерной сходимостью последовательности.

Утверждение 1. *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на сегменте $[a, b]$, то эта последовательность сходится к $f(x)$ и в среднем на сегменте $[a, b]$.*

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу равномерной на сегменте $[a, b]$ сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ для положительного числа $\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}}$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$|f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \tag{2.49}$$

для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geqslant N(\varepsilon)$, и всех точек x сегмента $[a, b]$.

Но тогда в силу известной оценки из теории определенного интеграла (см. п. 2 § 4 гл. 9 ч. 1)

$$\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geqslant N(\varepsilon)$. Это и означает сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ в среднем.

Утверждение 2. *Сходимость последовательности на некотором сегменте в среднем не влечет за собой не только равномерной на этом сегменте сходимости, но и сходимости хотя бы в одной точке указанного сегмента.*

Рассмотрим последовательность принадлежащих $[0, 1]$ сегментов $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$, имеющих следующий вид:

$$I_1 = [0, 1],$$
$$I_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad I_3 = \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$
$$I_4 = \left[0, \frac{1}{4}\right], \quad I_5 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \quad I_6 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \quad I_7 = \left[\frac{3}{4}, 1\right],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$I_{2^n} = \left[0, \frac{1}{2^n}\right], \quad I_{2^n+1} = \left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right], \ldots, I_{2^{n+1}-1} = \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1\right],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Определим n-й член $f_n(x)$ функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ следующим соотношением:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{на сегменте } I_n, \\ 0 & \text{в остальных точках } [0, 1]. \end{cases}$$

Убедимся в том, что *последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к предельной функции $f(x) \equiv 0$ в среднем на сегменте* $[0, 1]$.

В самом деле,

$$\int_0^1 [f_n(x) - f(x)]^2 dx = \int_{I_n} dx = \text{длина сегмента } I_n,$$

так что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0.$$

Убедимся, наконец, в том, что *построенная последовательность не сходится ни в одной точке сегмента* $[0, 1]$. В самом деле, какую бы точку x_0 сегмента $[0, 1]$ мы ни фиксировали, среди как угодно больших номеров n найдутся как такие, для которых сегмент I_n содержит точку x_0 (для этих номеров $f_n(x_0) = 1$), так и такие, для которых сегмент I_n не содержит точку x_0 (для таких номеров $f_n(x_0) = 0$). Таким образом, последовательность $\{f_n(x_0)\}$ содержит бесконечно много членов, равных единице, и бесконечно много членов, равных нулю. Такая последовательность является расходящейся.

Оказывается, сходимость последовательности в среднем обеспечивает возможность почленного интегрирования этой последовательности:

Теорема 2.11. *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, то эту последовательность можно почленно интегрировать на сегменте $[a, b]$, т. е. предел*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

существует и равен $\int_a^b f(x)\,dx$.

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ в среднем на сегменте $[a, b]$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$

$$\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{b-a}. \tag{2.50}$$

Записав очевидное неравенство[7] $|A|\cdot|B|\leqslant\frac{A^2}{2}+\frac{B^2}{2}$ для величин

$$A=[f_n(x)-f(x)]\sqrt{\frac{b-a}{\varepsilon}};\quad B=\sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}},$$

получим

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant[f_n(x)-f(x)]^2\frac{b-a}{2\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.51}$$

Из (2.51) и известной оценки из теории определенного интеграла следует

$$\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\,dx\leqslant\frac{b-a}{2\varepsilon}\int_a^b[f_n(x)-f(x)]^2\,dx+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и из (2.50) ясно, что при всех $n\geqslant N(\varepsilon)$

$$\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \tag{2.52}$$

Так как

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right|=\left|\int_a^b[f_n(x)-f(x)]\,dx\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int_a^b\left|f_n(x)-f(x)\right|dx,$$

то из (2.52) получим, что для всех номеров $n\geqslant N(\varepsilon)$

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Теорема доказана.

§ 5. РАВНОСТЕПЕННАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ

Предположим, что каждая из функций $f_n(x)$ функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ определена на некотором плотном в себе множестве $\{x\}$ пространства E^m.

Определение. *Последовательность $\{f_n(x)\}$ называется равностепенно непрерывной на множестве $\{x\}$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что неравенство*

[7] Это неравенство эквивалентно неравенству $(|A|+|B|)^2\geqslant0$.

$$|f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon \tag{2.53}$$

справедливо для всех номеров n и всех точек x' и x'' множества $\{x\}$, связанных условием $\rho(x', x'')<\delta$.

Из этого определения очевидно, что если вся последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на множестве $\{x\}$, то и любая ее подпоследовательность равностепенно непрерывна на этом множестве.

Для простоты будем рассматривать последовательность $\{f_n(x)\}$ функций одной переменной x, равностепенно непрерывную на сегменте $[a, b]$. По определению для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что неравенство (2.53) справедливо для всех номеров n и всех точек x' и x'' сегмента $[a, b]$, связанных условием $|x'-x''|<\delta$.

Докажем утверждение, представляющее собой функциональный аналог теоремы Больцано — Вейерштрасса.

Теорема 2.12 (теорема Арцела). *Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна и равномерно ограничена на сегменте $[a, b]$, то из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно на сегменте $[a, b]$.*

Доказательство. Рассмотрим на сегменте $[a, b]$ следующую специальную последовательность точек $\{x_n\}$: в качестве x_1 возьмем ту точку, которая делит сегмент $[a, b]$ на две равные части, в качестве x_2 и x_3 возьмем те две точки, которые вместе с x_1 делят сегмент $[a, b]$ на четыре равные части, в качестве x_4, x_5, x_6 и x_7 возьмем те четыре точки, которые вместе с x_1, x_2 и x_3 делят сегмент $[a, b]$ на восемь равных частей (см. рис. 2.3), и т. д.

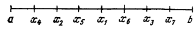

Рис. 2.3

Построенная последовательность обладает следующим свойством: *для любого $\delta>0$ найдется номер n_0 такой, что на любом принадлежащем $[a, b]$ сегменте длины δ лежит хотя бы один из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$*[8].

Приступим теперь к выделению из последовательности $\{f_n(x)\}$ равномерно на сегменте $[a, b]$ сходящейся подпоследовательности. Сначала рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\}$ в точке x_1. Получим ограниченную числовую последовательность $\{f_n(x_1)\}$, из которой на основании теоремы Больцано — Вейер-

[8] Про последовательность, обладающую таким свойством, говорят, что она является всюду плотной на сегменте $[a, b]$.

штрасса (см. § 4 гл. 3 ч. 1) можно выделить сходящуюся подпоследовательность, которую мы обозначим так:

$$f_{11}(x_1),\ f_{12}(x_1),\ \ldots,\ f_{1n}(x_1),\ \ldots$$

Далее рассмотрим функциональную последовательность

$$f_{11}(x),\ f_{12}(x),\ \ldots,\ f_{1n}(x),\ \ldots$$

в точке x_2. По теореме Больцано — Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, которую мы обозначим так:

$$f_{21}(x_2),\ f_{22}(x_2),\ \ldots,\ f_{2n}(x_2),\ \ldots$$

Таким образом, функциональная последовательность

$$f_{21}(x),\ f_{22}(x),\ \ldots,\ f_{2n}(x),\ \ldots \tag{2.54}$$

является сходящейся и в точке x_1, и в точке x_2.

Далее рассматриваем функциональную последовательность (2.54) в точке x_3 и выделяем из нее сходящуюся подпоследовательность

$$f_{31}(x_3),\ f_{32}(x_3),\ \ldots,\ f_{33}(x_3),\ \ldots$$

Продолжая аналогичные рассуждения, получим бесконечное множество подпоследовательностей

$$\begin{array}{l}
f_{11}(x),\ f_{12}(x),\ f_{13}(x),\ \ldots,\ f_{1n}(x),\ \ldots;\\
f_{21}(x),\ f_{22}(x),\ f_{23}(x),\ \ldots,\ f_{2n}(x),\ \ldots;\\
f_{31}(x),\ f_{32}(x),\ f_{33}(x),\ \ldots,\ f_{3n}(x),\ \ldots;\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_{n1}(x),\ f_{n2}(x),\ f_{n3}(x),\ \ldots,\ f_{nn}(x),\ \ldots;\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{array}$$

причем подпоследовательность, стоящая в n-й строке, является сходящейся в каждой из точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Рассмотрим теперь так называемую «диагональную» последовательность

$$f_{11}(x),\ f_{22}(x),\ f_{33}(x),\ \ldots,\ f_{nn}(x),\ \ldots$$

Докажем, что эта последовательность равномерно сходится на сегменте $[a, b]$. Для сокращения записи будем в дальнейшем обозначать эту диагональную последовательность (как и исходную последовательность) символом

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

(т. е. вместо сдвоенного индекса будем писать одинарный).

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Так как диагональная последовательность является равностепенно непрерывной на сегменте

$[a, b]$, то для фиксированного $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что каковы бы ни были две точки x и x_m из сегмента $[a, b]$, связанные неравенством $|x-x_m|<\delta$, для всех номеров n справедливо неравенство

$$|f_n(x)-f_n(x_m)|<\varepsilon/3. \tag{2.55}$$

Заметив это, разобьем сегмент $[a, b]$ на конечное число отрезков длины, меньшей δ. Из последовательности $\{x_n\}$ выберем конечное число n_0 первых членов $x_1, x_2, \ldots, x_{n0}$ настолько большое, чтобы в каждом из упомянутых отрезков содержалась хотя бы одна из точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$.

Очевидно, диагональная последовательность сходится в каждой из точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$. Поэтому для фиксированного выше $\varepsilon>0$ найдется номер N такой, что

$$|f_{n+p}(x_m)-f_n(x_m)|<\varepsilon/3 \tag{2.56}$$

для всех $n\geqslant N$, всех натуральных p и всех $m=1, 2, \ldots, n_0$.

Пусть теперь x — произвольная точка сегмента $[a, b]$. Эта точка обязательно лежит в одном из упомянутых выше отрезков длины, меньшей δ. Поэтому для этой точки x найдется хоть одна точка x_m (m — один из номеров, равных $1, 2, \ldots, n_0$), удовлетворяющая условию $|x-x_m|<\delta$.

В силу того что модуль суммы трех величин не превосходит суммы их модулей, можем записать:

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\leqslant|f_{n+p}(x)-f_{n+p}(x_m)|+$$
$$+|f_{n+p}(x_m)-f_n(x_m)|+|f_n(x_m)-f_n(x)|. \tag{2.57}$$

Второй член правой части (2.57) оценим с помощью неравенства (2.56), а для оценки первого и третьего членов правой части (2.57) учтем, что $|x-x_m|<\delta$, и используем неравенство (2.55), справедливое для любого номера n (а следовательно, и для любого $n+p$). Окончательно получим, что для произвольного $\varepsilon>0$ найдется номер N такой, что

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

для всех $n\geqslant N$, всех натуральных p и любой точки x из $[a, b]$. Равномерная сходимость диагональной последовательности доказана. Теорема 2.12 доказана.

Замечание 1. В теореме Арцела вместо равномерной ограниченности последовательности $\{f_n(x)\}$ на сегменте $[a, b]$ достаточно потребовать ограниченности этой последовательности хотя бы в одной точке этого сегмента. В самом деле, справедливо следующее утверждение: *если последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на сегменте $[a, b]$ и ограничена хотя бы в одной точке x_0 этого сегмента, то эта последовательность равномерно ограничена на сегменте $[a, b]$.* Для доказательства этого

утверждения заметим, что по определению равностепенной непрерывности для $\varepsilon=1$ найдется $\delta>0$ такое, что колебание любой функции $f_n(x)$ на любом сегменте длины, не превышающей δ, не превосходит числа $\varepsilon=1$. Так как весь сегмент $[a, b]$ можно покрыть конечным числом n_0 сегментов длины, не превышающей δ, то колебание любой функции $f_n(x)$ на всем сегменте $[a, b]$ не превосходит числа n_0. Но тогда из неравенства $|f_n(x_0)|\leqslant A$, выражающего ограниченность последовательности $\{f_n(x)\}$ в точке x_0, вытекает неравенство $|f_n(x)|\leqslant A+n_0$, справедливое для любой точки x из сегмента $[a, b]$ и выражающее равномерную ограниченность рассматриваемой последовательности на этом сегменте.

Замечание 2. Установим достаточный признак равностепенной непрерывности: *если последовательность $\{f_n(x)\}$ состоит из дифференцируемых на сегменте $[a, b]$ функций и если последовательность производных $\{f_n'(x)\}$ равномерно ограничена на этом сегменте, то последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на сегменте $[a, b]$.*

Для доказательства возьмем на сегменте $[a, b]$ две произвольные точки x' и x'' и запишем для функции $f_n(x)$ на сегменте $[x', x'']$ формулу Лагранжа (см. § 3 гл. 6 ч. 1).

Согласно теореме Лагранжа на сегменте $[x', x'']$ найдется точка ξ_n такая, что

$$|f_n(x')-f_n(x_n'')|=|f_n'(\xi_n)|\cdot|x'-x''|. \tag{2.58}$$

Поскольку последовательность производных $\{f_n'(x)\}$ равномерно ограничена на сегменте $[a, b]$, найдется постоянная A такая, что для всех номеров n справедливо неравенство

$$|f_n'(\xi_n)|\leqslant A. \tag{2.59}$$

Подставляя (2.59) в (2.58), получим

$$|f_n(x')-f_n(x'')|\leqslant A|x'-x''|. \tag{2.60}$$

Фиксируем любое $\varepsilon>0$. Тогда, взяв $\delta=\varepsilon/A$ и использовав (2.60), получим, что для всех номеров n и для всех x' и x'' из $[a, b]$, связанных условием $|x'-x''|<\delta$, будет справедливо неравенство

$$|f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon.$$

Равностепенная непрерывность последовательности $\{f_n(x)\}$ доказана.

В качестве примера рассмотрим последовательность $\{\sin nx/n\}$. Эта последовательность равностепенно непрерывна на любом сегменте $[a, b]$, так как на любом сегменте $[a, b]$ последовательность из производных $\{\cos nx\}$ равномерно ограничена.

Замечание 3. Понятие равностепенной непрерывности можно вводить не по отношению к последовательности функций, а по отношению к любому бесконечному множеству функций.

§ 6. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

1. Степенной ряд и область его сходимости. Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ \ldots, \tag{2.61}$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — постоянные вещественные числа, называемые коэффициентами ряда (2.61). Постараемся выяснить, как устроена область сходимости любого степенного ряда.

Заметим, что *всякий степенной ряд сходится в точке* $x=0$, причем существуют степенные ряды, сходящиеся только в этой точке (например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!x^n$).

Составим с помощью коэффициентов a_n ряда (2.61) следующую числовую последовательность:

$$\{\sqrt[n]{|a_n|}\}\quad(n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{2.62}$$

Могут представиться два случая: 1) последовательность (2.62) является неограниченной; 2) последовательность (2.62) является ограниченной.

В случае 2) у последовательности (2.62) существует конечный верхний предел (см. п. 1 § 3 гл. 3 ч. 1), который мы обозначим через L. Этот верхний предел L заведомо неотрицателен (так как все элементы последовательности (2.62) неотрицательны, а следовательно, и любая предельная точка этой последовательности неотрицательна).

Подводя итог, мы приходим к выводу, что могут представиться следующие три случая: I) последовательность (2.62) является неограниченной; II) последовательность (2.62) является ограниченной и имеет конечный верхний предел $L>0$; III) последовательность (2.62) является ограниченной и имеет верхний предел $L=0$.

Докажем теперь следующее замечательное утверждение.

Теорема 2.13 (теорема Коши — Адамара). I. *Если последовательность* (2.62) *не ограничена, то степенной ряд* (2.61) *сходится лишь при* $x=0$.

II. *Если последовательность* (2.62) *ограничена и имеет верхний предел $L>0$, то ряд* (2.61) *абсолютно сходится для значений x, удовлетворяющих неравенству $|x|<1/L$, и расходится для значений x, удовлетворяющих неравенству $|x|>1/L$.*

III. *Если последовательность* (2.62) *ограничена и ее верхний предел* $L=0$, то ряд (2.61) *абсолютно сходится для всех значений x.*

Доказательство. I. Пусть последовательность (2.62) не ограничена. Тогда при $x\neq0$ последовательность

$$|x|\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{|a_nx^n|}$$

также не ограничена, т. е. у этой последовательности имеются члены со сколь угодно большими номерами n, удовлетворяющие неравенству $\sqrt[n]{|a_nx^n|}>1$, или $|a_nx^n|>1$. Но это означает, что для ряда (2.61) (при $x\neq0$) нарушено необходимое условие сходимости (см. п. 2 § 1 гл. 1), т. е. ряд (2.61) расходится при $x\neq0$.

II. Пусть последовательность (2.62) ограничена и ее верхний предел $L>0$. Докажем, что ряд (2.61) абсолютно сходится при $|x|<1/L$ и расходится при $|x|>1/L$.

а) Фиксируем сначала любое x, удовлетворяющее неравенству $|x|<1/L$. Тогда найдется $\varepsilon>0$, такое, что $|x|<1/(L+\varepsilon)$. В силу свойств верхнего предела все элементы $\sqrt[n]{|a_n|}$, начиная с некоторого номера n, удовлетворяют неравенству

$$\sqrt[n]{|a_n|}<L+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, начиная с этого номера n, справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{|a_nx^n|}=|x|\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{L+\varepsilon/2}{L+\varepsilon}<1,$$

т. е. ряд (2.61) абсолютно сходится по признаку Коши (см. п. 3 § 2 гл. 1).

б) Фиксируем теперь любое x, удовлетворяющее неравенству $|x|>1/L$. Тогда найдется $\varepsilon>0$ такое, что $|x|>1/(L-\varepsilon)$. По определению верхнего предела из последовательности (2.62) можно выделить подпоследовательность $\{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\}$ $(k=1, 2, \ldots)$, сходящуюся к L. Но это означает, что, начиная с некоторого номера k, справедливо неравенство

$$L-\varepsilon<\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}<L+\varepsilon.$$

Таким образом, начиная с этого номера k, справедливо неравенство

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}x^{n_k}|}=|x|\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}>\frac{L-\varepsilon}{L-\varepsilon}=1,$$

или

$$|a_{n_k}x^{n_k}|>1,$$

откуда видно, что нарушено необходимое условие сходимости ряда (2.61) и этот ряд расходится.

III. Пусть последовательность (2.62) ограничена и ее верхний предел $L=0$. Докажем, что ряд (2.61) абсолютно сходится при любом x.

Фиксируем произвольное $x\neq0$ (при $x=0$ ряд (2.61) заведомо абсолютно сходится). Поскольку верхний предел $L=0$ и последовательность (2.62) не может иметь отрицательных предельных точек, число $L=0$ является единственной предельной точкой, а следовательно, является пределом этой последовательности, т. е. последовательность (2.62) является бесконечно малой.

Но тогда для положительного числа $1/(2|x|)$ найдется номер, начиная с которого

$$\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{1}{2|x|}.$$

Стало быть, начиная с указанного номера,

$$\sqrt[n]{|a_nx^n|}=|x|\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{1}{2}<1,$$

т. е. ряд (2.61) абсолютно сходится к признаку Коши (см. п. 3 § 2 гл. 1). Теорема полностью доказана.

Доказанная теорема непосредственно приводит к следующему фундаментальному утверждению.

Теорема 2.14. *Для каждого степенного ряда* (2.61), *если он не является рядом, сходящимся лишь в точке $x=0$, существует положительное число R (возможно, равное бесконечности) такое, что этот ряд абсолютно сходится при $|x|<R$ и расходится при $|x|>R$.*

Это число R называется радиусом сходимости рассматриваемого степенного ряда, а интервал $(-R, R)$ называется промежутком сходимости этого ряда. Для вычисления радиуса сходимости справедлива формула

$$R=\frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{2.63}$$

(в случае, когда $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0$, $R=\infty$).

Замечание 1. На концах промежутка сходимости, т. е. в точках $x=-R$ и $x=R$, степенной ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся[9].

[9] Отметим следующую теорему Абеля: *если степенной ряд* (2.61) *сходится при $x=R$, то сумма его $S(x)$ является непрерывной в точке R слева.* Без ограничения общности можно считать, что $R=1$, но в таком виде теорема Абеля (фактически утверждающая регулярность метода суммирования Пуассона—Абеля) доказана в п. 2 § 7 гл. 1.

Так, для ряда $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$ радиус сходимости R равен единице, промежуток сходимости имеет вид $(-1, +1)$, и этот ряд расходится на концах этого промежутка.

Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ промежуток сходимости тот же $(-1, +1)$, но он сходится на обоих концах этого промежутка.

Замечание 2. Все результаты настоящего пункта справедливы для ряда (2.61), в котором вещественная переменная x заменена комплексной переменной z. Для такого ряда устанавливается существование положительного числа R такого, что ряд абсолютно сходится при $|z|<R$ и расходится при $|z|>R$.

Для вычисления R справедлива формула (2.63). Число R называется радиусом сходимости, а область $|z|<R$ — кругом сходимости степенного ряда.

2. Непрерывность суммы степенного ряда. Пусть степенной ряд (2.61) имеет радиус сходимости $R>0$.

Лемма. *Каково бы ни было положительное число r, удовлетворяющее условию $r<R$, ряд* (2.61) *равномерно сходится на сегменте $[-r, +r]$, т. е. при $|x|\leqslant r$.*

Доказательство. В силу теоремы 2.14 ряд (2.61) абсолютно сходится при $x=r$, т. е. сходится ряд

$$|a_0|+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|r^n.$$

Но этот числовой ряд служит мажорантным для ряда (2.61) при всех x из сегмента $[-r, +r]$. На основании признака Вейерштрасса ряд (2.61) сходится равномерно на сегменте $[-r, +r]$. Лемма доказана.

Следствие из леммы. *В условиях леммы сумма ряда* (2.61) *является функцией, непрерывной на сегменте $[-r, +r]$ (в силу теоремы 2.7).*

Теорема 2.15. *Сумма степенного ряда внутри его промежутка сходимости является непрерывной функцией.*

Доказательство. Пусть $S(x)$ — сумма степенного ряда (2.61), а R — его радиус сходимости. Фиксируем любое x внутри промежутка сходимости, т. е. такое, что $|x|<R$. Всегда найдется число r такое, что $|x|<r<R$. В силу следствия из леммы функция $S(x)$ непрерывна на сегменте $[-r, +r]$. Следовательно, $S(x)$ непрерывна и в точке x. Теорема доказана.

3. Почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенного ряда.

Теорема 2.16. *Если $R>0$ — радиус сходимости степенного ряда* (2.61), *а x удовлетворяет условию $|x|<R$, то ряд* (2.61)

можно почленно интегрировать на сегменте $[0, x]$. *Полученный в результате почленного интегрирования ряд имеет тот же радиус сходимости* R, *что и исходный ряд.*

Доказательство. Для любого x, удовлетворяющего условию $|x|<R$, найдется r такое, что $|x|<r<R$. Согласно лемме ряд (2.61) сходится равномерно на сегменте $[-r, +r]$, а следовательно, и на сегменте $[0, x]$. Но тогда в силу теоремы 2.8 этот ряд можно почленно интегрировать на сегменте $[0, x]$.

В результате почленного интегрирования получится степенной ряд

$$a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\ldots+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\ldots,$$

радиус сходимости которого (согласно теореме 2.14) является величиной, обратной верхнему пределу последовательности

$$\sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}}=\frac{\sqrt[n]{|a_{n-1}|}}{\sqrt[n]{n}}. \qquad (2.64)$$

Так как верхний предел последовательности (2.64) тот же, что и у (2.62) [10], то теорема доказана.

Теорема 2.17 *Степенной ряд* (2.61) *внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать почленно. Ряд, полученный почленным дифференцированием, имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.*

Доказательство. Достаточно (в силу теоремы 2.9 и леммы) доказать лишь второе утверждение теоремы.

В результате почленного дифференцирования (2.61) получим ряд

$$a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+(n+1)a_{n+1}x^n+\ldots,$$

радиус сходимости R которого (согласно теореме 2.14) обратен верхнему пределу последовательности

$$\{\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}\}. \qquad (2.65)$$

Так как последовательность (2.65) имеет тот же верхний предел, что и (2.62) [11], то теорема доказана.

[10] Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_{n-1}|}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n+1]{|a_n|}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\{\sqrt[n]{|a_n|}\}^{\frac{n}{n+1}}=$ $=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$.

[11] Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_{n+1}|}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n-1]{|a_n|}=\overline{\lim\limits_{n\to 8}}\{\sqrt[n]{|a_n|}\}^{\frac{n}{n-1}}=$ $=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$.

Следствие из теоремы 2.17. *Степенной ряд внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать почленно сколько угодно раз. Ряд, полученный n-кратным почленным дифференцированием исходного степенного ряда, имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.*

§ 7. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

1. Разложение функции в степенной ряд.

Определение 1. *Будем говорить, что функция* $f(x)$ *на интервале* $(-R, +R)$ (*на множестве* $\{x\}$) *может быть разложена в степенной ряд, если существует степенной ряд, сходящийся к* $f(x)$ *на указанном интервале* (*указанном множестве*).

Приведем необходимые и достаточные условия того, чтобы функция $f(x)$ могла быть разложена в степенной ряд.

Утверждение 1. *Для того чтобы функция* $f(x)$ *могла быть разложена в степенной ряд на интервале* $(-R, +R)$, *необходимо, чтобы эта функция имела на указанном интервале непрерывные производные любого порядка* [12].

Действительно, степенной ряд внутри его промежутка сходимости, который во всяком случае содержит интервал $(-R, +R)$, можно почленно дифференцировать сколько угодно раз, причем все полученные при этом ряды сходятся внутри того же промежутка сходимости (теорема 2.17).

Но тогда суммы рядов, полученных сколь угодно кратным дифференцированием (в силу теоремы 2.15), представляют собой функции, непрерывные внутри указанного промежутка сходимости, а следовательно, непрерывные на интервале $(-R, +R)$.

Утверждение 2. *Если функция* $f(x)$ *может быть на интервале* $(-R, +R)$ *разложена в степенной ряд, то лишь единственным образом.*

В самом деле, пусть функция $f(x)$ может быть разложена на интервале $(-R, +R)$ в степенной ряд (2.61). Дифференцируя этот ряд почленно n раз (что заведомо можно делать внутри интервала $(-R, +R)$), получим

$$f^{(n)}(x)=a_nn!+a_{n+1}(n+1)!x+\ldots$$

Отсюда при $x=0$ найдем

$$f^{(n)}(0)=a_nn!,$$

или

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \qquad (2.66)$$

[12] Отметим, что существуют функции, имеющие на интервале непрерывные производные любого порядка, но не разложимые на этом интервале в степенной ряд. Примером такой функции может служить

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

Таким образом, коэффициенты степенного ряда (2.61), в который может быть разложена функция $f(x)$, *однозначно определяются формулой* (2.66).

Предположим теперь, что функция $f(x)$ имеет на интервале $(-R, +R)$ непрерывные производные любого порядка.

Определение 2. *Степенной ряд* (2.61), *коэффициенты которого определяются формулой* (2.66), *называется рядом Тейлора функции* $f(x)$.

Утверждение 2 приводит нас к следующему утверждению.

Утверждение 3. *Если функция* $f(x)$ *может быть разложена на интервале* $(-R, +R)$ *в степенной ряд, то этот ряд является рядом Тейлора функции* $f(x)$.

Из результатов § 8 гл. 6 ч. 1 непосредственно вытекает следующее

Утверждение 4. *Для того чтобы функция* $f(x)$ *могла быть разложена в ряд Тейлора на интервале* $(-R, +R)$ (*на множестве* $\{x\}$), *необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в формуле Маклорена для этой функции стремился к нулю на указанном интервале* (*указанном множестве*).

2. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора. В ч. 1 (см. п. 2 § 9 гл. 6) доказано, что остаточные члены в формуле Маклорена для функций e^x, $\cos x$ и $\sin x$ стремятся к нулю на всей числовой прямой, а остаточный член в формуле Маклорена для функции $\ln(1+x)$ стремится к нулю на полусегменте $-1<x\leqslant 1$.

В силу утверждения 4 из предыдущего пункта это приводит нас к следующим разложениям:

$$e^x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

$$\cos x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}.$$

Первые три из этих разложений сходятся для всех значений x, а последнее — для значений x из полусегмента $-1<x\leqslant 1$.

Остановимся теперь на разложении в степенной ряд функции $(1+x)^\alpha$, или на так называемом биномиальном ряде. Если $f(x)=(1+x)^\alpha$, то

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Поэтому формула Маклорена с остаточным членом в форме Коши имеет вид (см. § 8 гл. 6 ч. 1)

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+R_{n+1}(x), \qquad (2.67)$$

где

$$R_{n+1}(x)=\frac{(1-\theta)^n}{n!}x^{n+1}f^{(n+1)}(\theta x)=$$

$$=\frac{(1-\theta)^n}{n!}x^{n+1}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}=$$

$$=\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{n!}\alpha(1+\theta x)^{\alpha-1}x^{n+1} \qquad (2.68)$$

(θ — некоторое число из интервала $0<\theta<1$).

Сначала убедимся в том, что при $\alpha>0$ всюду на интервале $-1<x<1$ остаточный член $R_{n+1}(x)$ стремится к нулю (при $n\to\infty$).

В самом деле, все члены последовательности $\left\{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\right\}$ всюду на указанном интервале не превосходят единицы; последовательность $\left\{\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{n!}\right\}$ ограничена, а число $\alpha(1+\theta x)^{\alpha-1}$ определено при любом фиксированном $\alpha>0$ и при любом x из интервала $-1<x<1$; наконец, последовательность $\{x^{n+1}\}$ является бесконечно малой для любого x из интервала $-1<x<1$.

Таким образом, в силу (2.68) остаточный член $R_{n+1}(x)$ стремится к нулю для любого фиксированного $\alpha>0$ и любого x из интервала $-1<x<1$.

Следовательно, в силу (2.67) при $\alpha>0$ всюду на интервале $-1<x<1$ справедливо разложение

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k. \qquad (2.69)$$

Докажем теперь, что *при* $\alpha>0$ *ряд, стоящий в правой части* (2.69), *равномерно сходится к функции* $(1+x)^\alpha$ *на замкнутом сегменте* $-1\leqslant x\leqslant 1$.

Всюду на указанном сегменте этот ряд мажорируется числовым рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\alpha|\cdot|1-\alpha|\cdot\ldots\cdot|k-1-\alpha|}{k!}. \qquad (2.70)$$

В силу признака Вейерштрасса для установления равномерной на сегменте $-1\leqslant x\leqslant 1$ сходимости ряда, стоящего в правой части (2.69), достаточно доказать сходимость мажорирующего ряда (2.70).

Обозначим k-й член ряда (2.70) символом p_k. Тогда для всех достаточно больших k получим

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{k-\alpha}{k+1}=1-\frac{1+\alpha}{k+1}. \qquad (2.71)$$

Из формулы (2.71) вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty}k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)=(1+\alpha)\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1}=(1+\alpha)>1,$$

т. е. ряд (2.70) сходится в силу признака Раабе (см. п. 5 § 2 гл. 1).

Таким образом, доказано, что при $\alpha>0$ ряд, стоящий в правой части (2.69), сходится равномерно на сегменте $-1\leqslant x\leqslant 1$. Остается доказать, что указанный ряд сходится на сегменте $-1\leqslant x\leqslant 1$ к функции $(1+x)^\alpha$.

В силу доказанного выше сумма указанного ряда $S(x)$ и функция $(1+x)^\alpha$ совпадают всюду на интервале $-1<x<1$. Кроме того, обе функции $S(x)$ и $(1+x)^\alpha$ непрерывны на сегменте $-1\leqslant x\leqslant 1$ (функция $S(x)$ как сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций; непрерывность функции $(1+x)^\alpha$ при $\alpha>0$ очевидна).

Но тогда значения $S(x)$ и $(1+x)^\alpha$ в точках $x=-1$ и $x=1$ обязаны совпадать, т. е. ряд, стоящий в правой части (2.69), равномерно сходится к $(1+x)^\alpha$ на замкнутом сегменте $-1\leqslant x\leqslant 1$.

3. Элементарные представления о функциях комплексной переменной. Выше отмечалось, что на случай степенного ряда относительно комплексной переменной z

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

переносятся теоремы 2.13 и 2.14 (о существовании и величине радиуса сходимости). Ряды такого типа используются для определения функций комплексной переменной z.

Функции e^z, $\cos z$ и $\sin z$ комплексной переменной z определяются как суммы следующих рядов:

$$e^z=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \qquad (2.72)$$

$$\cos z=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nz^{2n}}{(2n)!}, \qquad (2.73)$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nz^{2n+1}}{(2n+1)!}. \qquad (2.74)$$

Легко проверить, что эти ряды абсолютно сходятся для всех значений z (их радиус сходимости $R=\infty$).

Установим теперь связь между функциями e^z, $\cos z$ и $\sin z$. Заменяя в формуле (2.72) z на iz, получим

$$e^{iz}=1+iz+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\frac{(iz)^4}{4!}+\frac{(iz)^5}{5!}+\ldots=$$

$$=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\right)+i\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right). \qquad (2.75)$$

Сопоставляя правую часть равенства (2.75) с разложениями (2.73) и (2.74), придем к следующей замечательной формуле:

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z. \qquad (2.76)$$

Формула (2.76) играет фундаментальную роль в теории функций комплексной переменной и называется формулой Эйлера.

Полагая в формуле Эйлера переменную z равной сначала вещественному числу x, а затем вещественному числу $-x$, получим следующие формулы

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,\quad e^{-ix}=\cos x-i\sin x.$$

Складывая и вычитая эти формулы, получим формулы, выражающие $\cos x$ и $\sin x$ через показательную функцию:

$$\begin{cases}\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\\[2mm] \sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.\end{cases} \qquad (2.77)$$

В заключение остановимся на определении логарифмической функции $w=\ln z$ комплексной переменной z. Эту функцию естественно определить как функцию, обратную показательной, т. е. из соотношения $z=e^w$. Полагая $w=u+iv$, $z=x+iy$, поставим перед собой цель — выразить u и v через $z=x+iy$.

Из соотношения

$$z=x+iy=e^{u+iv}=e^u(\cos v+i\sin v)$$

получим, используя понятия модуля и аргумента комплексного числа,

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=e^u,\ \arg z=v-2\pi k,$$

где

$$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

Из последних равенств находим, что

$$u=\ln|z|=\ln\sqrt{x^2+y^2},$$

$$v=\arg z+2\pi k\quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots),$$

или окончательно

$$\ln z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k),\ \text{где } k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots \qquad (2.78)$$

Формула (2.78) показывает, что логарифмическая функция в комплексной области *не является однозначной*: ее мнимая часть для одного и того же значения z имеет бесчисленное множество значений, отвечающих различным $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$

Легко понять, что аналогичная ситуация будет иметь место и при определении в комплексной области обратных тригонометрических функций.

4. Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами.

Теорема 2.18 (теорема Вейерштрасса) [13]. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a, b]$, *то существует последовательность многочленов* $\{P_n(x)\}$, *равномерно на сегменте* $[a, b]$ *сходящаяся к* $f(x)$, *т. е. для любого* $\varepsilon>0$ *найдется многочлен* $P_n(x)$ *с номером* n, *зависящим от* ε, *такой, что*

$$|P_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

сразу для всех x *из сегмента* $[a, b]$.

Иными словами, *непрерывную на сегменте* $[a, b]$ *функцию* $f(x)$ *можно равномерно на этом сегменте приблизить многочленом с наперед заданной точностью* ε.

Доказательство. Не ограничивая общности, мы можем вместо сегмента $[a, b]$ рассматривать сегмент $[0, 1]$ [14]. Кроме того, достаточно доказать теорему для непрерывной функции $f(x)$, обращающейся в нуль на концах сегмента $[0, 1]$, т. е. удовлетворяющей условиям $f(0)=0$ и $f(1)=0$. В самом деле, если бы $f(x)$ не удовлетворяла этим условиям, то, положив

$$g(x)=f(x)-f(0)-x[f(1)-f(0)],$$

мы получили бы непрерывную на сегменте $[0, 1]$ функцию $g(x)$, удовлетворяющую условиям $g(0)=0$ и $g(1)=0$. Тогда из возможности представления $g(x)$ в виде предела равномерно сходящейся последовательности многочленов вытекало бы, что и $f(x)$ пред-

[13] Эта фундаментальная теорема была доказана Вейерштрассом в 1895 г.

[14] Поскольку один из этих сегментов преобразуется в другой линейной заменой $x=(b-a)t+a$.

ставима в виде предела равномерно сходящейся последовательности многочленов (так как разность $f(x)-g(x)$ является многочленом первой степени).

Итак, пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[0, 1]$ и удовлетворяет условиям $f(0)=0$, $f(1)=0$. Такую функцию $f(x)$ можно продолжить на всю прямую, положив ее равной нулю за пределами сегмента $[0,1]$, и утверждать, что так продолженная функция *является равномерно непрерывной на всей прямой.*

Рассмотрим следующую конкретную последовательность неотрицательных многочленов степени $2n$:

$$Q_n(x)=c_n(1-x^2)^n\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots), \qquad (2.79)$$

у каждого из которых постоянная c_n выбрана так, чтобы выполнялось равенство

$$\int_{-1}^{1}Q_n(x)\,dx=1\quad (n=1,\ 2,\ \ldots). \qquad (2.80)$$

Не вычисляя точного значения постоянной c_n, оценим ее сверху. Для этого заметим, что для любого номера $n=1, 2, \ldots$ и для всех x из сегмента $[0, 1]$ справедливо неравенство [15]

$$(1-x^2)^n\geqslant 1-nx^2. \qquad (2.81)$$

Применяя неравенство (2.81) и учитывая, что $\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant 1$ при любом $n\geqslant 1$, будем иметь

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^ndx=2\int_0^1(1-x^2)^ndx\geqslant 2\int_0^{1/\sqrt{n}}(1-x^2)^ndx\geqslant$$

$$\geqslant 2\int_0^{1/\sqrt{n}}(1-nx^2)\,dx=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}. \qquad (2.82)$$

Из (2.79), (2.80) и (2.82) заключаем, что для всех номеров $n=1, 2, \ldots$ справедлива следующая оценка сверху для постоянной c_n:

$$c_n<\sqrt{n}. \qquad (2.83)$$

[15] Это неравенство вытекает из того, что при любом $n\geqslant 1$ функция $\varphi(x)=(1-x^2)^n-(1-nx^2)$ неотрицательна всюду на сегменте $0\leqslant x\leqslant 1$, так как эта функция обращается в нуль при $x=0$ и имеет всюду на этом сегменте неотрицательную производную $\varphi'(x)=2nx[1-(1-x^2)^{n-1}]$.

Из (2.83) и (2.79) вытекает, что при любом $\delta>0$ для всех x из сегмента $\delta\leqslant|x|\leqslant 1$ справедливо неравенство

$$0\leqslant Q_n(x)\leqslant\sqrt{n}(1-\delta^2)^n. \qquad (2.84)$$

Из (2.84) следует, что при любом фиксированном $\delta>0$ последовательность неотрицательных многочленов $\{Q_n(x)\}$ сходится к нулю равномерно на сегменте $\delta\leqslant|x|\leqslant 1$ [16].

Положим теперь для любого x из сегмента $0\leqslant x\leqslant 1$

$$P_n(x)=\int_{-1}^{+1}f(x+t)\,Q_n(t)\,dt \qquad (2.85)$$

и убедимся в том, что для любого $n=1, 2, \ldots$ функция $P_n(x)$ есть многочлен степени $2n$, причем $\{P_n(x)\}$ и является искомой последовательностью многочленов, равномерно сходящейся на сегменте $[0, 1]$ к функции $f(x)$.

Так как изучаемая функция $f(x)$ равна нулю за пределами сегмента $[0, 1]$, то для любого x из сегмента $[0, 1]$ интеграл (2.85) можно записать в виде

$$P_n(x)=\int_{-x}^{1-x}f(x+t)\,Q_n(t)\,dt.$$

Заменяя в последнем интеграле переменную t на $t-x$, мы придадим ему вид

$$P_n(x)=\int_0^1f(t)\,Q_n(t-x)\,dt. \qquad (2.86)$$

Из (2.86) и (2.79) ясно, что функция $P_n(x)$ представляет собой многочлен степени $2n$.

Остается доказать, что последовательность $\{P_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте $0\leqslant x\leqslant 1$. Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Для фиксированного ε в силу равномерной непрерывности $f(x)$ на всей числовой прямой найдется $\delta>0$ такое, что

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2\ \text{при}\ |x-y|<\delta. \qquad (2.87)$$

Заметим еще, что так как $f(x)$ непрерывна на сегменте $[0, 1]$, то она ограничена на этом сегменте, а следовательно, и всюду на

[16] В самом деле, достаточно доказать, что последовательность $a_n=(1-\delta^2)^n\sqrt{n}$ сходится к нулю, а это вытекает, например, из того, что, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=(1-\delta^2)\lim\limits_{n\to\infty}n^{1/2n}=(1-\delta^2)<1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится по признаку Коши (см. теорему 1.6.).

числовой прямой. Это означает, что существует постоянная A такая, что для всех x

$$|f(x)| \leqslant A. \tag{2.88}$$

Используя (2.80), (2.84), (2.87) и (2.88) и учитывая неотрицательность $Q_n(x)$, оценим разность $P_n(x)-f(x)$. Для всех x из сегмента $0 \leqslant x \leqslant 1$ будем иметь

$$|P_n(x)-f(x)| = \left|\int_{-1}^{1}[f(x+t)-f(x)]\,Q_n(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-1}^{1}|f(x+t)-f(x)|\,Q_n(t)\,dt \leqslant 2A\int_{-1}^{-\delta}Q_n(t)\,dt +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta}Q_n(t)\,dt + 2A\int_{\delta}^{1}Q_n(t)\,dt \leqslant 4A\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что для всех достаточно больших номеров n справедливо неравенство

$$4A\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n < \varepsilon/2.$$

Следствие из теоремы 2.18. *Если не только сама функция $f(x)$, но и ее производные до некоторого порядка k включительно непрерывны на сегменте* $[0, 1]$[17]*, то существует последовательность многочленов $\{P_n(x)\}$ такая, что каждая из последовательностей $\{P_n(x)\}$, $\{P_n'(x)\}$, ..., $\{P_n^{(k)}(x)\}$ сходится равномерно на сегменте* $[0, 1]$ *соответственно к $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(k)}(x)$.*

В самом деле, не ограничивая общности, мы можем считать, что каждая из функций $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(k)}(x)$ обращается в нуль при $x=0$ и при $x=1$[18], а при таких условиях функцию $f(x)$ можно продолжить на всю прямую, полагая ее равной нулю вне $[0, 1]$, так что продолженная функция и все ее производные до порядка k включительно окажутся равномерно непрерывными на всей числовой прямой.

Но тогда, обозначая через $P_n(x)$ тот же многочлен (2.85), что и выше, и повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2.18, мы докажем, что каждая из разностей

$$P_n(x)-f(x),\ P_n'(x)-f'(x),\ \ldots,\ P_n^{(k)}(x)-f^{(k)}(x)$$

[17] Конечно, вместо $[0, 1]$ можно взять $[a, b]$.

[18] Если бы $f(x)$ не удовлетворяла этим условиям, то мы нашли бы многочлен $\overline{p_k}(x)$ степени $2k$ такой, что для функции $g(x)=f(x)-\overline{p_k}(x)$ эти условия были бы выполнены.

является бесконечно малой, равномерно относительно x на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Замечание 1. Изложенное нами доказательство легко обобщается на случай функции m переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, непрерывной в m-мерном кубе $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i=1, 2, \ldots, m)$.

Совершенно аналогично теореме 2.18 доказывается, что для такой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ существует равномерно сходящаяся к ней в m-мерном кубе последовательность многочленов от m переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Замечание 2. Заметим, что фигурирующие в теореме 2.18 многочлены можно заменить функциями более общей природы, сохраняя при этом утверждение о возможности равномерного приближения такими функциями любой непрерывной функции f.

Договоримся называть произвольную совокупность A функций, определенных на некотором множестве E, алгеброй, если[19]: 1) $f+g \in A$; 2) $fg \in A$; 3) $\alpha f \in A$ при произвольных $f \in A$ и $g \in A$ и при вещественном α.

Иными словами, алгебра есть совокупность функций, замкнутая относительно сложения и умножения функций и умножения функций на вещественные числа.

Если для каждой точки x множества E найдется некоторая функция $g \in A$ такая, что $g(x) \neq 0$, то говорят, что алгебра A не исчезает ни в одной точке x множества E.

Говорят, что совокупность A функций, определенных на множестве E, разделяет точки множества E, если для любых двух различных точек x_1 и x_2 этого множества найдется функция f из A такая, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Имеет место следующее замечательное утверждение:

Теорема 2.19 (теорема Вейерштрасса — Стоуна[20]). *Пусть A — алгебра непрерывных на компактном*[21] *множестве E функций, которая разделяет точки множества E и не исчезает ни в одной точке этого множества. Тогда каждая непрерывная на множестве E функция $f(x)$ может быть представлена в виде предела равномерно сходящейся последовательности функций алгебры A.*

[19] Напомним, что символ $f \in A$ означает принадлежность f к A.

[20] М. Стоун — современный американский математик.

[21] Напомним, что компактным называется замкнутое ограниченное множество.

Глава 3

ДВОЙНЫЕ И n-КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Во вводной главе ч. 1 были указаны важные задачи о вычислении площади криволинейной трапеции и о нахождении пройденного материальной точкой пути, приводящие к понятию однократного определенного интеграла. Аналогичные «многомерные» задачи, такие, например, как задача о вычислении объема или задача о вычислении массы неоднородного тела, естественным образом приводят к рассмотрению двойных и тройных интегралов.

В настоящей главе излагается теория n-кратных интегралов $(n \geqslant 2)$. Построение теории n-кратных интегралов проводится в полной аналогии с построением теории однократного интеграла. Для более эффективного использования аналогии с однократным интегралом сначала вводится понятие двойного интеграла для прямоугольника. Затем вводится понятие двойного интеграла по произвольной области как с помощью прямолинейного, так и с помощью произвольного разбиения этой области. Построенная теория переносится на случай n-кратного интеграла. В конце главы изучаются кратные несобственные интегралы.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1. Определение двойного интеграла для прямоугольника. Рассмотрим произвольную функцию $f(x, y)$, определенную всюду на прямоугольнике $R=[a \leqslant x \leqslant b] \times [c \leqslant y \leqslant d]$ (рис. 3.1). Введем понятие интегральной суммы функции $f(x, y)$.

Разобьем сегмент $[a, b]$ на n частичных сегментов при помощи точек $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$, а сегмент $[c, d]$ на p частичных сегментов при помощи точек $c=y_0<y_1<y_2<\ldots<y_p=d$. Этому разбиению сегментов соответствует разбиение прямоугольника R прямыми, параллельными осям Ox и Oy, на $n \cdot p$ частичных прямоугольников

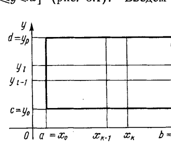

Рис. 3.1

$$R_{kl}=[x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k] \times [y_{l-1} \leqslant y \leqslant y_l]\ (k=1, 2, \ldots, n;\ l=1, 2, \ldots, p).$$

Указанное разбиение прямоугольника R обозначим символом T. Разбиение прямоугольника R, полученное из разбиения T добавлением прямых, параллельных осям Ox и Oy, назовем измельчением разбиения T и будем обозначать символом T'.

Всюду в этой главе под термином «прямоугольник» мы будем понимать прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям. На каждом частичном прямоугольнике R_{kl} выберем произвольную точку (ξ_k, η_l). Положим $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $\Delta y_l=y_l-y_{l-1}$ и обозначим через ΔR_{kl} площадь прямоугольника R_{kl}. Очевидно, $\Delta R_{kl}=\Delta x_k \cdot \Delta y_l$. Длину диагонали прямоугольника R_{kl}, равную $\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_l)^2}$, назовем диаметром этого прямоугольника. Наибольший из диаметров всех частичных прямоугольников назовем диаметром разбиения T прямоугольника R и обозначим символом Δ.

Определение 1. *Число*

$$\sigma=\sigma(f, T)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} f(\xi_k, \eta_l)\,\Delta R_{kl} \tag{3.1}$$

назовем интегральной суммой функции $f(x, y)$, соответствующей данному разбиению T прямоугольника R и данному выбору промежуточных точек (ξ_k, η_l) на частичных прямоугольниках разбиения T.

Определение 2. *Число I называется пределом интегральных сумм* (3.1) *при $\Delta \to 0$, если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ, что при $\Delta<\delta$ независимо от выбора промежуточных точек (ξ_k, η_l) на R_{kl} выполняется неравенство $|\sigma-I|<\varepsilon$.*

Отметим, что интегральную сумму (3.1) можно рассматривать как прямоугольную частичную сумму S_{np} двойного ряда, а предел интегральных сумм (3.1) при $\Delta \to 0$ — как предел $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ p\to\infty}} S_{np}$ при независимом стремлении n и p к бесконечности, т. е. как сумму соответствующего двойного ряда. (Элементы теории двойных рядов изложены в гл. 1.)

Определение 3. *Функция $f(x, y)$ называется интегрируемой (по Риману) на прямоугольнике R, если существует конечный предел I интегральных сумм этой функции при $\Delta \to 0$.*

Указанный предел I называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по прямоугольнику R и обозначается одним из следующих символов:

$$I=\iint_R f(x, y)\,dx\,dy=\iint_R f(M)\,d\sigma.$$

Замечание. Точно так же, как и для однократного определенного интеграла (см. § 1 гл. 9 ч. 1), методом доказательства от противного устанавливается, что любая интегрируемая на прямоугольнике R функция $f(x, y)$ является ограниченной на этом прямоугольнике. Поэтому везде в этой главе, кроме последнего параграфа, не оговаривая это дополнительно, будем рассматривать лишь ограниченные функции.

2. Условия существования двойного интеграла для прямоугольника. Теория Дарбу, развитая в гл. 9 ч. 1 для однократного определенного интеграла, полностью переносится на случай двойного интеграла в прямоугольнике R. Ввиду полной аналогии мы ограничимся указанием общей схемы рассуждений.

Составим для данного разбиения T прямоугольника R две суммы: верхнюю сумму

$$S=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} M_{kl}\,\Delta R_{kl} \quad \left(M_{kl}=\sup_{R_{kl}} f(x, y)\right)$$

и нижнюю сумму

$$s=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} m_{kl}\,\Delta R_{kl} \quad \left(m_{kl}=\inf_{R_{kl}} f(x, y)\right).$$

Справедливы следующие утверждения (доказательства их полностью аналогичны доказательствам, приведенным в п. 2 § 2 гл. 9 ч. 1).

Утверждение 1. *Для любого разбиения T прямоугольника R при любом выборе промежуточных точек (ξ_k, η_l) на частичных прямоугольниках R_{kl} интегральная сумма σ удовлетворяет неравенствам $s \leqslant \sigma \leqslant S$.*

Утверждение 2. *Для любого фиксированного разбиения T и любого числа $\varepsilon>0$ промежуточные точки $(\xi_k, \eta_l) \in R_{kl}$ можно выбрать так, что интегральная сумма σ будет удовлетворять неравенствам $0 \leqslant S-\sigma<\varepsilon$.*

Точки (ξ_k, η_l) можно выбрать и таким образом, что интегральная сумма σ будет удовлетворять неравенствам $0 \leqslant \sigma-s<\varepsilon$.

Утверждение 3. *Пусть T' — измельчение разбиения T прямоугольника R и S', s' — соответственно верхняя и нижняя суммы разбиения T'. Тогда справедливы неравенства*

$$s \leqslant s',\ S' \leqslant S.$$

Утверждение 4. *Пусть T' и T'' — любые два разбиения прямоугольника R, S', s' и S'', s'' — верхние и нижние суммы этих разбиений соответственно. Тогда*

$$s' \leqslant S'',\ s'' \leqslant S'.$$

Утверждение 5. *Множество $\{S\}$ верхних сумм данной функции $f(x, y)$ для всевозможных разбиений прямоугольника R ограничено снизу. Множество нижних сумм $\{s\}$ ограничено сверху.*

Таким образом, существуют числа

$$\bar{I}=\inf\{S\}, \qquad \underline{I}=\sup\{s\},$$

называемые соответственно верхним и нижним интегралами Дарбу (от функции $f(x, y)$ по прямоугольнику R). Легко убедиться в том, что $\underline{I} \leqslant \bar{I}$.

Утверждение 6. *Пусть T' — измельчение разбиения T прямоугольника R, полученное из T добавлением p новых прямых, и пусть S', s' и S, s — верхние и нижние интегральные суммы разбиений T' и T соответственно. Тогда имеют место оценки*

$$S-S' \leqslant (M_R-m_R)\,p\Delta d;\quad s'-s \leqslant (M_R-m_R)\,p\Delta d,$$

где $M_R=\sup\limits_R f(x, y)$, $m_R=\inf\limits_R f(x, y)$, Δ — диаметр разбиения T, d — диаметр прямоугольника R.

В полной аналогии с понятием предела интегральных сумм (определение 2 п. 1) вводится понятие предела верхних и нижних сумм. Так, число $\bar{I}$ называется пределом верхних сумм S при $\Delta \to 0$, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать $\delta>0$ такое, что $|S-\bar{I}|<\varepsilon$ при $\Delta<\delta$.

Утверждение 7. *Верхний и нижний интегралы Дарбу $\bar{I}$ и $\underline{I}$ от функции $f(x, y)$ по прямоугольнику R являются пределами соответственно верхних и нижних сумм при $\Delta \to 0$.*

Из приведенных утверждений 1—7 вытекает следующая

Теорема 3.1. *Для того чтобы ограниченная на прямоугольнике R функция $f(x, y)$ была интегрируема на этом прямоугольнике, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлось такое разбиение T прямоугольника R, для которого $S-s<\varepsilon$.*

Как и в гл. 9 ч. 1, теорема 3.1 в соединении с теоремой о равномерной непрерывности позволяет выделить важнейшие классы интегрируемых функций.

Теорема 3.2. *Любая непрерывная в прямоугольнике R функция $f(x, y)$ интегрируема на этом прямоугольнике.*

Определение 1. *Назовем элементарной фигурой множество точек, представляющих собой объединение конечного числа прямоугольников (со сторонами, параллельными осям Ox и Oy).*

Заметим, что в определении 1 можно брать прямоугольники, как имеющие общие внутренние точки, так и не имеющие их.

Определение 2. *Будем говорить, что функция $f(x, y)$ обладает в прямоугольнике R (в произвольной замкнутой области D) I-свойством, если:* 1) *$f(x, y)$ ограничена в R (в D);* 2) *для любого $\varepsilon>0$ найдется элементарная фигура площади, меньшей ε, содержащая все точки и линии разрыва функции $f(x, y)$.*

Теорема 3.3. *Если функция $f(x, y)$ обладает в прямоугольнике I-свойством, то она интегрируема на этом прямоугольнике.*

Доказательство теорем 3.2 и 3.3 полностью аналогично доказательству теорем 9.1 и 9.2 ч. 1.

3. Определение и условия существования двойного интеграла для произвольной области. В п. 2 § 2 гл. 10 ч. 1 были введены понятия квадрируемости и площади плоской фигуры. Напомним, что плоской фигурой мы назвали часть плоскости, ограниченную простой замкнутой кривой. Плоская фигура называется квадрируемой, если верхняя и нижняя площади этой фигуры[1] равны между собой. Это число называется площадью фигуры. Эти понятия без каких-либо изменений переносятся на случай произвольного ограниченного множества Q точек плоскости.

Во всех определениях и утверждениях указанного пункта вместо плоской фигуры можно брать произвольное ограниченное множество Q на плоскости.

В том же пункте было дано определение кривой (или границы фигуры) площади нуль: Γ называется кривой площади нуль, если для любого $\varepsilon>0$ найдется многоугольник, содержащий все точки Γ и имеющий площадь, меньшую ε. В этом определении термин «многоугольник» можно заменить термином «элементарная фигура». Это следует из того, что любая элементарная фигура является многоугольником, а любой многоугольник с площадью, меньшей числа ε, содержится в элементарной фигуре, имеющей площадь, меньшую числа 32ε (см. теорему 10.2″ ч. 1).

Утверждение 1. *Пусть кривая Γ имеет площадь нуль и плоскость покрыта квадратной сеткой с шагом h. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется число $h>0$ такое, что сумма площадей всех квадратов, имеющих общие точки с Γ, меньше ε.*

Действительно, для каждого $\varepsilon>0$ можно фиксировать некоторую элементарную фигуру Q, содержащую внутри себя Γ и имеющую площадь, меньшую $\varepsilon/4$. При достаточно малом h все квадраты, имеющие общие с Γ точки, содержатся в элементарной фигуре, получающейся заменой каждого прямоугольника прямоугольником со вдвое большими сторонами и с тем же центром.

Отметим, что класс кривых площади нуль весьма широк. Этому классу принадлежит, например, любая спрямляемая кривая (см. § 1 гл. 10 ч. 1).

Введем понятие двойного интеграла для произвольной двумерной области D. Пусть D — замкнутая ограниченная область, граница Γ которой имеет площадь нуль, а $f(x, y)$ — произвольная

[1] Верхняя площадь определяется как точная нижняя грань площадей всех многоугольников, содержащих фигуру, а нижняя площадь — как точная верхняя грань площадей всех многоугольников, содержащихся в фигуре.

ограниченная функция, определенная в области D. Обозначим через R любой прямоугольник (со сторонами, параллельными координатным осям), содержащий область D (рис. 3.2). Определим в прямоугольнике R следующую функцию:

$$F(x, y)=\begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D; \\ 0, & (x, y) \in R \setminus D. \end{cases} \tag{3.2}$$

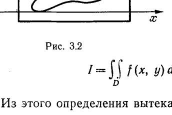

Рис. 3.2

Определение. *Функцию $f(x, y)$ назовем интегрируемой в области D, если функция $F(x, y)$ интегрируема в прямоугольнике R. Число $I=\iint\limits_R F(x, y)\,dx\,dy$ назовем двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D и обозначим символом*

$$I=\iint_D f(x, y)\,dx\,dy=\iint_D f(M)\,d\sigma.$$

Из этого определения вытекает следующее

Утверждение 2. *Интеграл $\iint\limits_D 1\,dx\,dy$ равен площади области D.*

Действительно, подвергая соответствующий прямоугольник R все более мелким разбиениям, получим, что верхние интегральные суммы этих разбиений будут равны площадям элементарных фигур, содержащих D, а нижние суммы — площадям элементарных фигур, содержащихся в D. Интегрируемость функции $f(x, y)=1$ в области D следует из теоремы 3.3.

Утверждение 3. *Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема в ограниченной квадрируемой области D, плоскость покрыта квадратной сеткой с шагом h, $C_1, C_2, \ldots, C_{n(h)}$ — квадраты указанной сетки, целиком содержащиеся в области D, (ξ_k, η_k) — произвольная точка квадрата C_k, $m_k=\inf\limits_{C_k} f(x, y)$, $k=1, 2, \ldots, n(h)$. Тогда каждая из сумм*

$$\sum_{k=1}^{n(h)} f(\xi_k, \eta_k)\,h^2, \qquad \sum_{k=1}^{n(h)} m_k h^2$$

имеет предел при $h \to 0$, равный $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$.

Для доказательства достаточно заметить, что указанные суммы отличаются от обычной интегральной суммы (соответственно от нижней суммы) функции $f(x, y)$ в области D только отсутствием

слагаемых по квадратам, имеющим общие точки с границей Γ области D, причем сумма всех отсутствующих слагаемых по модулю меньшей произведения числа $M=\sup\limits_D|f(x, y)|$ на площадь S элементарной фигуры, состоящей из квадратов, имеющих общие точки с Γ. Поскольку граница Γ имеет площадь нуль, то согласно утверждению 1 $S \to 0$ при $h \to 0$.

Из теоремы 3.3 и приведенного выше определения двойного интеграла вытекает следующая основная теорема.

Теорема 3.4. *Если функция $f(x, y)$ обладает в области D I-свойством, то она интегрируема в этой области.*

Доказательство. Функция $F(x, y)$, определенная формулой (3.2), в данном случае обладает I-свойством в прямоугольнике R. В самом деле, функция $F(x, y)$ ограничена в R и все ее точки и линии разрыва либо совпадают с соответствующими разрывами $f(x, y)$, либо лежат на границе Γ области D. Но граница Γ имеет площадь нуль. Таким образом, утверждение теоремы следует из теоремы 3.3. Теорема доказана.

Следствие 1 из теоремы 3.4. *Если функция $f(x, y)$ ограничена в области D и имеет в этой области разрывы лишь на конечном числе спрямляемых линий, то $f(x, y)$ интегрируема в области D.*

Следствие 2 из теоремы 3.4. *Если функция $f(x, y)$ обладает в области D I-свойством, а $g(x, y)$ ограничена и совпадает с $f(x, y)$ всюду в D, за исключением множества точек площади нуль, то функция $g(x, y)$ интегрируема в области D, причем*

$$\iint_D g(x, y)\,dx\,dy=\iint_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

В отношении данного нами определения двойного интеграла возникает вопрос о его корректности. Зависит ли факт существования двойного интеграла и его величина 1) от выбора на плоскости координатных осей Ox и Oy, 2) от выбора прямоугольника R, на котором определяется функция $F(x, y)$?

В следующем пункте будет дано другое определение интегрируемости функции $f(x, y)$ и двойного интеграла, не зависящее ни от выбора координатных осей, ни от выбора прямоугольника R, и доказана эквивалентность этого определения приведенному выше.

4. Общее определение двойного интеграла. Пусть D — замкнутая ограниченная область с границей Γ площади нуль. Разобьем область D при помощи конечного числа произвольных кривых площади нуль на конечное число r (не обязательно связных) замкнутых частичных областей $D_1, D_2, \ldots, D_r$. Каждая область D_i имеет границу площади нуль и потому квадрируема. Обозначим площадь области D_i символом ΔD_i. В каждой области D_i выберем произвольную точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$.

Определение 1. *Число*

$$\tilde{\sigma}=\sum_{i=1}^{r} f(P_i)\,\Delta D_i \qquad (3.3)$$

называется ***интегральной суммой*** *функции $f(x, y)$, соответствующей данному разбиению области D на частичные области D_i и данному выбору промежуточных точек P_i в частичных областях.*

Назовем **диаметром области** D_i число $d_i=\sup\limits_{M_1 M_2\in D_i}\rho(M_1, M_2)$ ($\rho(M_1, M_2)$ — расстояние между точками M_1, M_2). **Диаметром разбиения** области D назовем число $\tilde{\Delta}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant r} d_i$.

Определение 2. *Число I называется* ***пределом интегральных сумм*** *(3.3) при $\tilde{\Delta}\to 0$, если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ, что при $\tilde{\Delta}<\delta$ независимо от выбора точек P_i в частичных областях D_i выполняется неравенство $|\tilde{\sigma}-I|<\varepsilon$.*

Определение 3 (общее определение интегрируемости). *Функция $f(x, y)$ называется* ***интегрируемой (по Риману)*** *в области D, если существует конечный предел I интегральных сумм $\tilde{\sigma}$ этой функции при $\tilde{\Delta}\to 0$. Этот предел I называется* ***двойным интегралом*** *от функции $f(x, y)$ по области D.*

Докажем следующую фундаментальную теорему.

Теорема 3.5. *Общее определение интегрируемости эквивалентно определению, данному в* п. 3.

Доказательство. 1) Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема в области D согласно общему определению интегрируемости и ее двойной интеграл согласно этому определению равен I. Заключим D в прямоугольник R, разобьем его на частичные прямоугольники и введем на R функцию $F(x, y)$ по правилу (3.2). Рассмотрим интегральную сумму (3.3) $\tilde{\sigma}$ функции $f(x, y)$ и интегральную сумму (3.1) σ функции $F(x, y)$. Эти суммы могут отличаться друг от друга лишь слагаемыми, соответствующими частичным прямоугольникам разбиения, имеющим общие точки с границей Γ области D. Поскольку Γ имеет площадь нуль, а функция $f(x, y)$ ограничена, то эта функция интегрируема и согласно определению п. 3. По этому же определению она имеет тот же самый двойной интеграл I.

2) Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема в области D согласно определению п. 3 и I — двойной интеграл от $f(x, y)$ по области D согласно этому определению. Докажем, что для функции $f(x, y)$ существует равный I предел интегральных сумм $\tilde{\sigma}$ при $\tilde{\Delta}\to 0$.

Составим для данного разбиения области D верхнюю и нижнюю суммы

$$\tilde{S}=\sum_{i=1}^{r}\tilde{M}_i\Delta D_i \text{ и } \tilde{s}=\sum_{i=1}^{r}\tilde{m}_i\Delta D_i$$

(здесь $\tilde{M}_i=\sup\limits_{D_i} f(x, y)$, $\tilde{m}_i=\inf\limits_{D_i} f(x, y)$). Так как для любого разбиения (при любом выборе промежуточных точек в интегральной сумме $\tilde{\sigma}$)

$$\tilde{s}\leqslant\tilde{\sigma}\leqslant\tilde{S},$$

то достаточно доказать, что обе суммы $\tilde{S}$ и $\tilde{s}$ стремятся к I при $\tilde{\Delta}\to 0$: для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что каждая из сумм $\tilde{S}$ и $\tilde{s}$ отклоняется от I меньше чем на ε при $\tilde{\Delta}<\delta$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. В силу теоремы 3.1 и утверждения 1 для этого ε найдется разбиение T прямоугольника R ($D\subset R$) на частичные прямоугольники R_k такое, что для него

$$S-s<\frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \sum_{R_k\cap\Gamma\neq\varnothing}\Delta R_k<\frac{\varepsilon}{6M_0}, \qquad (3.4)$$

где $M_0=\sup\limits_{D}|f(x, y)|$.

Заключим все отрезки прямых, производящих разбиение T, и границу Γ области D строго внутрь элементарной фигуры Q, площадь которой меньше числа $\dfrac{\varepsilon}{6M_0}$. Тогда заведомо существует положительная точная нижняя грань δ расстояния между двумя точками, одна из которых принадлежит границе фигуры Q, а другая — отрезкам прямых, производящим разбиение T, или границе Γ области D. Построение фигуры Q может быть проведено по схеме, предложенной при обосновании утверждения 1 в п. 3.

Докажем, что для сумм $\tilde{S}$ и $\tilde{s}$ любого разбиения области D, удовлетворяющего условию $\tilde{\Delta}<\delta$, справедливы неравенства

$$\tilde{S}<S+\varepsilon/2,\quad s-\varepsilon/2<\tilde{s}. \qquad (3.5)$$

Докажем первое неравенство (3.5) (второе неравенство доказывается аналогично).

Удалим из суммы $\tilde{S}$ все слагаемые $\tilde{M}_i\Delta D_i$, соответствующие областям D_i, каждая из которых не лежит целиком в одном частичном прямоугольнике разбиения T. Все такие области $D_i\subset Q$ (так как $d_i\leqslant\tilde{\Delta}<\delta$), а поэтому общая сумма площадей таких областей меньше числа $\varepsilon/6M_0$.

Следовательно, сумма всех удаленных слагаемых $\tilde{M}_i\Delta D_i$ меньше числа $\varepsilon/6$, и справедлива оценка

$$\tilde{S}<\sum_i{}'\,\tilde{M}_i\Delta D_i+\frac{\varepsilon}{6}, \qquad (3.6)$$

где штрих обозначает, что сумма распространена лишь на области D_i, каждая из которых целиком содержится в одном из прямоугольников разбиения T.

Заменим теперь в правой части (3.6) точные грани $\tilde{M}_i$ в областях D_i, содержащихся в частичном прямоугольнике R_k, точной верхней гранью M_k в прямоугольнике R_k. Введем обозначение $\tilde{R}_k=\bigcup\limits_{i\subset R_k} D_i$ и через $\Delta\tilde{R}_k$ обозначим площадь области $\tilde{R}_k$. Тогда получим

$$\tilde{S}<\sum_k M_k\Delta\tilde{R}_k+\frac{\varepsilon}{6}. \qquad (3.7)$$

Для прямоугольников $R_k\subset D$ области $R_k\setminus\tilde{R}_k\subset Q$, поэтому для них

$$\sum_k\Delta(R_k\setminus\tilde{R}_k)=\sum_k(\Delta R_k-\Delta\tilde{R}_k)\leqslant\Delta Q<\frac{\varepsilon}{6M_0};$$

для прямоугольников R_k, пересекающихся с Γ,

$$\sum_k\Delta(R_k\setminus\tilde{R}_k)\leqslant\sum_k\Delta R_k<\frac{\varepsilon}{6M_0},$$

и, следовательно,

$$\Bigl|S-\sum_k M_k\Delta\tilde{R}_k\Bigr|=\Bigl|\sum_k M_k(\Delta R_k-\Delta\tilde{R}_k)\Bigr|<\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}=\frac{\varepsilon}{3},$$

т. е.

$$\sum_k M_k\Delta\tilde{R}_k<S+\frac{\varepsilon}{3}.$$

Из последнего неравенства и из неравенства (3.7) получаем, что

$$\tilde{S}<S+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{6}=S+\frac{\varepsilon}{2},$$

и первое неравенство (3.5) доказано. Второе неравенство (3.5) доказывается аналогично.

Из (3.5) получим

$$s-\frac{\varepsilon}{2}<\tilde{s}\leqslant\tilde{S}<S+\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3.8)$$

Так как в силу (3.4) каждая из сумм s и S отклоняется от I меньше чем на $\varepsilon/2$, то каждая из сумм $\tilde{s}$ и $\tilde{S}$ в силу (3.8) отклоняется от I меньше чем на ε. Теорема доказана.

§ 2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Свойства двойного интеграла вполне аналогичны соответствующим свойствам однократного определенного интеграла.

1°. Аддитивность. *Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области D и если область D при помощи кривой Γ площади нуль разбивается на две связные и не имеющие общих внутренних точек области D_1 и D_2, то функция $f(x, y)$ интегрируема в каждой из областей D_1 и D_2, причем*

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy=\iint_{D_1} f(x, y)\,dx\,dy+\iint_{D_2} f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (3.9)$$

Для доказательства этого свойства разобьем области D_1 и D_2 на конечное число квадрируемых областей, тем самым получим разбиение области D. Пусть $\tilde{S}$ и $\tilde{s}$, $\tilde{S}_1$ и $\tilde{s}_1$, $\tilde{S}_2$ и $\tilde{s}_2$ — верхние и нижние суммы функции $f(x, y)$ соответственно в областях D, D_1, D_2.

Так как $D_1\subset D$ и $D_2\subset D$, то $\tilde{S}_1-\tilde{s}_1\leqslant\tilde{S}-\tilde{s}$ и $\tilde{S}_2-\tilde{s}_2\leqslant\tilde{S}-\tilde{s}$, откуда и вытекает интегрируемость функции $f(x, y)$ в каждой из областей D_1 и D_2.

Справедливость соотношения (3.9) следует из того, что

$$\tilde{S}=\tilde{S}_1+\tilde{S}_2,\quad \tilde{s}=\tilde{s}_1+\tilde{s}_2. \qquad (3.10)$$

Замечание. Справедливо и обратное утверждение: *из интегрируемости функции $f(x, y)$ в каждой из областей D_1 и D_2 следует интегрируемость функций в области D и справедливость формулы* (3.9).

Действительно, разбивая область D на конечное число квадрируемых частей D_i и вводя верхние и нижние суммы функции $f(x, y)$ в областях D, D_1, D_2, мы получим равенства (3.10), верные с точностью до слагаемых, отвечающих тем областям D_i, которые имеют общие внутренние точки с кривой Γ. Кривая Γ имеет площадь нуль, функция $f(x, y)$ ограничена, поэтому общая сумма этих слагаемых будет стремиться к нулю при стремлении к нулю диаметра разбиения $\tilde{\Delta}$.

Вывод последующих свойств (так же, как и вывод свойства 1) вполне аналогичен выводу соответствующих свойств однократного определенного интеграла. Ограничимся формулировкой этих свойств.

2°. Линейное свойство. *Пусть функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в области D, α и β — произвольные вещественные*

числа. Тогда функция $\alpha f(x, y)+\beta g(x, y)$ также интегрируема в области D, причем

$$\iint_D[\alpha f(x, y)+\beta g(x, y)]\,dx\,dy=\alpha\iint_D f(x, y)\,dx\,dy+$$
$$+\beta\iint_D g(x, y)\,dx\,dy.$$

3°. *Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в области D, то и произведение этих функций интегрируемо в D.*

4°. *Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в области D и всюду в этой области $f(x, y)\leqslant g(x, y)$, то*

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy\leqslant\iint_D g(x, y)\,dx\,dy.$$

5°. *Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области D, то и функция $|f(x, y)|$ интегрируема в области D, причем*

$$\Bigl|\iint_D f(x, y)\,dx\,dy\Bigr|\leqslant\iint_D|f(x, y)|\,dx\,dy.$$

(Обратное утверждение неверно: из интегрируемости $|f(x, y)|$ в D, вообще говоря, не вытекает интегрируемость $f(x, y)$ в D.)

6°. *Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области D, а $g(x, y)$ ограничена и совпадает с $f(x, y)$ всюду в D, за исключением множества точек площади нуль, то и $g(x, y)$ интегрируема в области D.*

7°. Теорема о среднем значении. *Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в области D, функция $g(x, y)$ неотрицательна (неположительна) всюду в этой области, $M=\sup\limits_D f(x, y)$, $m=\inf\limits_D f(x, y)$, то найдется число $\mu\in[m, M]$ такое, что справедлива формула*

$$\iint_D f(x, y)\,g(x, y)\,dx\,dy=\mu\iint_D g(x, y)\,dx\,dy.$$

Если при этом функция $f(x, y)$ непрерывна в D, а область D связна, то в этой области найдется такая точка (ξ, η), что $\mu=f(\xi, \eta)$.

8°. Геометрическое свойство. $\iint\limits_D 1\,dx\,dy$ *равен площади области D* (см. утверждение 2 из п. 3).

§ 3. СВЕДЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА К ПОВТОРНОМУ ОДНОКРАТНОМУ

Эффективным способом вычисления двойных интегралов является сведение их к однократным интегралам.

1. Случай прямоугольника. Начнем с простого случая, когда область интегрирования представляет собой прямоугольник $R=[a\leqslant x\leqslant b]\times[c\leqslant y\leqslant d]$.

Теорема 3.6. *Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема в прямоугольнике R, и пусть для каждого $x\in[a, b]$ существует однократный интеграл*

$$I(x)=\int_c^d f(x, y)\,dy. \qquad (3.11)$$

Тогда существует повторный интеграл

$$\int_a^b I(x)\,dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)\,dy$$

и справедливо равенство

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)\,dy. \qquad (3.12)$$

Доказательство. Разобьем прямоугольник R с помощью точек $\{x_k\}$, $\{y_l\}$ на np частичных прямоугольников

$$R_{kl}=[x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k]\times[y_{l-1}\leqslant y\leqslant y_l]$$

($k=1, 2, \ldots, n$; $l=1, 2, \ldots, p$) так, что $x_0=a$, $x_n=b$, $y_0=c$, $y_p=d$ и $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}>0$, $\Delta y_l=y_l-y_{l-1}>0$.

Пусть, как и в § 1, число Δ обозначает диаметр разбиения прямоугольника R, $M_{kl}=\sup\limits_{R_{kl}} f(x, y)$, $m_{kl}=\inf\limits_{R_{kl}} f(x, y)$, а S и s — верхняя и нижняя суммы функции $f(x, y)$. Тогда всюду на прямоугольнике R_{kl}

$$m_{kl}\leqslant f(x, y)\leqslant M_{kl}. \qquad (3.13)$$

Фиксируем произвольное число $\xi_k\in[x_{k-1}, x_k]$ и проинтегрируем неравенство (3.13) по y в пределах от y_{l-1} до y_l, положив в нем $x=\xi_k$. Получим

$$m_{kl}\Delta y_l\leqslant\int_{y_{l-1}}^{y_l} f(\xi_k, y)\,dy\leqslant M_{kl}\Delta y_l. \qquad (3.14)$$

Умножим (3.14) на Δx_k, просуммируем полученные неравенства сначала по всем l от 1 до p, а затем по всем k от 1 до n. Используя обозначение (3.11), будем иметь

$$s=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} m_{kl}\Delta x_k\Delta y_l\leqslant\sum_{k=1}^{n} I(\xi_k)\,\Delta x_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} M_{kl}\Delta x_k\Delta y_l=S. \qquad (3.15)$$

Пусть $\Delta\to 0$. Тогда и $\max\limits_k\Delta x_k\to 0$. При этом s и S стремятся к двойному интегралу $\iint\limits_R f(x, y)\,dx dy$. Следовательно, существует предел и среднего члена в (3.15), равный тому же самому двойному интегралу. Но этот предел по определению однократного интеграла равен

$$\int_a^b I(x)\,dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)\,dy.$$

Таким образом, доказано существование повторного интеграла и равенство (3.12). Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы 3.6 ясно, что x и y можно поменять ролями, т. е. можно предположить существование двойного интеграла и существование для любого $y\in[c, d]$ однократного интеграла

$$K(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx.$$

Тогда теорема будет утверждать существование повторного интеграла

$$\int_c^d K(y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x, y)\,dx$$

и равенство его двойному интегралу.

2. Случай произвольной области. Рассмотрим теперь произвольную ограниченную замкнутую квадрируемую область D с границей Γ.

Теорема 3.7. *Пусть выполнены следующие условия:* 1) *область D такова, что любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает границу Γ по целому отрезку $[y_1(x), y_2(x)]$ либо не более чем в двух точках, ординаты которых суть $y_1(x)$ и $y_2(x)$, где $y_1(x)\leqslant y_2(x)$* (рис. 3.3); 2) *функция $f(x, y)$ интегрируема в области D и для любого $x\in[x_1, x_2]$ допускает существование однократного интеграла*

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy$$

($[x_1, x_2]$ — *проекция области D на ось Ox). Тогда существует повторный интеграл*

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy$$

и справедливо равенство

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy=\int_{x_1}^{x_2} dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy. \qquad (3.16)$$

Доказательство. Обозначим через R прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, содержащий область D, а через $F(x, y)$ функцию (3.2), совпадающую с $f(x, y)$ в

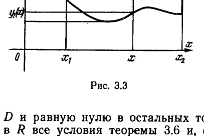

Рис. 3.3

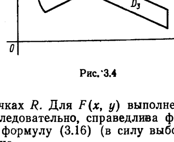

Рис. 3.4

D и равную нулю в остальных точках R. Для $F(x, y)$ выполнены в R все условия теоремы 3.6 и, следовательно, справедлива формула (3.12), которая переходит в формулу (3.16) (в силу выбора функции $F(x, y)$). Теорема доказана.

Замечание 1. В теореме 3.7 можно поменять ролями x и y, т. е. можно предположить, что выполнены следующие два условия: 1) область D такова, что любая прямая, параллельная оси Ox, пересекает границу Γ либо по целому отрезку $[x_1(y), x_2(y)]$, либо не более чем в двух точках, абсциссы которых суть $x_1(y)$ и $x_2(y)$, где $x_1(y)\leqslant x_2(y)$; 2) функция $f(x, y)$ интегрируема в области D и для любого $y\in[y_1, y_2]$ допускает существование однократного интеграла

$$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx$$

($[y_1, y_2]$ — проекция D на ось Oy).

При выполнении этих условий существует повторный интеграл

$$\int_{y_1}^{y_2} dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx$$

и справедливо равенство

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy=\int_{y_1}^{y_2} dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx.$$

Замечание 2. В случае, если область D не удовлетворяет требованиям теоремы 3.7 или замечания 1 к этой теореме, часто удается разбить эту область на сумму конечного числа областей такого типа, не имеющих общих внутренних точек. Тогда интеграл по области D в силу свойства аддитивности равен сумме интегралов по соответствующим областям. Так, область D, изображенную на рис. 3.4, можно разбить на сумму трех областей D_1, D_2, D_3, к каждой из которых применима или теорема 3.7, или замечание 1.

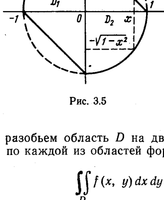

Рис. 3.5

Пример. Пусть область D ограничена кривыми $|x+y|\leqslant 1$ и $x^2+y^2\leqslant 1$, а $f(x, y)=xy$ (рис. 3.5). Любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает границу D не более чем в двух точках. Для удобства записи повторных интегралов разобьем область D на две области D_1 и D_2 осью Oy. Применяя по каждой из областей формулу (3.16), получим

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy=\iint_{D_1} xy\,dx\,dy+\iint_{D_2} xy\,dx\,dy=$$
$$=\int_{-1}^{0} x\,dx\int_{-1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy+\int_0^1 x\,dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} y\,dy=-\int_{-1}^{0}(x^3+x^2)\,dx+$$
$$+\int_0^1(x^3-x^2)\,dx=-\frac{1}{6}.$$

§ 4. ТРОЙНЫЕ И n-КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Изложенная нами теория двойного интеграла без каких-либо осложнений и новых идей переносится на случай тройного и вообще n-кратного интеграла. Остановимся на основных моментах теории n-кратного интеграла.

При определении класса квадрируемых множеств в E^2 и класса кубируемых множеств в E^3 мы заимствовали из курса средней школы понятия площади многоугольной фигуры и объема многогранного тела, которые обладают свойствами аддитивности, инвариантности, монотонности (см. § 2, 3 гл. 10 ч. 1). В пространстве E^n, $n>3$ дело осложняется тем, что нам не известен объем множества (тела) в E^n, ограниченного гиперплоскостями. Для введения класса кубируемых тел в E^n будем считать известным способ вычисления объема частного вида тел в E^n — n-мерного прямоугольного параллелепипеда.

Напомним (см. § 1 гл. 13 ч. 1), что множество $R=[a_1, b_1]\times\times[a_2, b_2]\times\ldots\times[a_n, b_n]$ всех точек $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в E^n, для которых $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, называется n-мерным координатным прямоугольным параллелепипедом. Если $b_i-a_i=h$ для всех i, то R называют n-мерным координатным кубом с ребром h. Точки $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, где c_i равны либо a_i, либо b_i, назовем вершинами R, а сегменты, соединяющие вершины типа $(c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, a_i, c_{i+1}, \ldots, c_n)$ и $(c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, b_i, c_{i+1}, \ldots, c_n)$, — ребрами R. Все ребра R параллельны координатным осям.

По аналогии с E^1, E^2, E^3 естественно определить объем n-мерного прямоугольного параллелепипеда R как число, равное произведению длин всех его ребер, выходящих из одной вершины, т. е. как число $\mu(R)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$.

Назовем элементарным телом множество точек E^n, представляющее собой объединение конечного числа n-мерных прямоугольных параллелепипедов, не имеющих общих внутренних точек, ребра которых параллельны осям координат. Объем любого элементарного тела нам известен и равен сумме объемов составляющих его параллелепипедов.

Пусть теперь D — произвольная ограниченная область в E^n. Назовем нижним объемом области D точную верхнюю грань $\mu_*=\mu_*(D)$ объемов всех содержащихся в D элементарных тел, а верхним объемом области D — точную нижнюю грань $\mu^*=\mu^*(D)$ объемов всех элементарных тел, содержащих область D. Легко убедиться в том, что $\mu_*\leqslant\mu^*$.

Область D называется кубируемой, если $\mu_*=\mu^*$. При этом число $\mu(D)=\mu_*(D)=\mu^*(D)$ называется n-мерным объемом области D.

В полной аналогии со случаем плоской области доказывается следующее утверждение:

для того чтобы n-мерная область D была кубируемой, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлись два элементарных тела, одно из которых содержит D, а другое содержится в D, разность объемов которых по модулю меньше числа ε.

Поверхностью (или многообразием) n-мерного объема нуль назовем замкнутое множество, все точки которого принадлежат элементарному телу как угодно малого n-мерного объема.

Из приведенного утверждения получаем, что *n-мерная область D кубируема тогда и только тогда, когда граница этой области представляет собой многообразие n-мерного объема нуль.*

Определим n-кратный интеграл от функции n переменных $f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ сначала в n-мерном координатном прямоугольном параллелепипеде R. С этой целью производим разбиение T параллелепипеда R конечным числом гиперплоскостей, параллельных координатным осям, на конечное число частичных n-мерных параллелепипедов.

Для указанного разбиения T в полной аналогии со случаем $n=2$ определяем интегральную, верхнюю и нижнюю суммы любой ограниченной в R функции $f(x)$. Теперь определим n-кратный интеграл от функции $f(x)$ по параллелепипеду R как предел интегральных сумм при стремлении к нулю диаметра разбиения T параллелепипеда R.

Как и для случая $n=2$, теория Дарбу устанавливает необходимое и достаточное условие интегрируемости в следующей форме:

Для интегрируемости функции $f(x)$ в параллелепипеде R необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлось разбиение T параллелепипеда R, для которого разность верхней и нижней сумм была меньше ε.

Пусть теперь D — произвольная замкнутая ограниченная n-мерная область, граница которой имеет n-мерный объем нуль, n-кратный интеграл от функции f по области D определяется как интеграл по n-мерному координатному прямоугольному параллелепипеду R, содержащему область D, от функции F, совпадающей с f в D и равной нулю вне D.

Для обозначения n-кратного интеграла от функции $f(x)$ по области D естественно использовать один из следующих символов:

$$\int_D f(x)\,dx=\iint\limits_D\ldots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n. \qquad (3.17)$$

Отметим, что произведение $dx=dx_1dx_2\ldots dx_n$ обычно называют элементом объема в пространстве E^n.

Точно так же, как и для случая $n=2$, доказывается интегрируемость по n-мерной области D любой непрерывной функции, а

также функции f, обладающей в области D I-свойством (т. е. ограниченной в D функции, множество точек разрыва которой имеет n-мерный объем нуль). Вообще, изменение интегрируемой функции f на множестве точек n-мерного объема нуль не изменяет величину интеграла от этой функции.

Для определения n-кратного интеграла можно использовать разбиение области D и при помощи конечного числа произвольных многообразий объема нуль на конечное число частичных областей произвольной формы. В полной аналогии с теоремой 3.5 доказывается, что такое общее определение n-кратного интеграла эквивалентно указанному выше определению.

Для n-кратного интеграла остаются справедливыми 8 основных свойств, сформулированные в § 2 для двойного интеграла.

В полной аналогии с теоремами 3.6 и 3.7 устанавливается формула повторного интегрирования для интеграла (3.17).

Пусть n-мерная область D_n обладает тем свойством, что любая прямая, параллельная оси Ox_1, пересекает ее границу не более чем в двух точках (или по целому отрезку, ограниченному двумя точками), проекции которых на ось Ox_1 суть $a(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ и $b(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, где $a(x_2, x_3, \ldots, x_n)\leqslant b(x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема в области D_n и допускает существование для любых $x_2, x_3, \ldots, x_n$ из $(n-1)$-мерной области D_{n-1}, являющейся проекцией D_n на координатную гиперплоскость $Ox_2x_3\ldots x_n$, однократного интеграла

$$J(x_2, \ldots, x_n)=\int\limits_{a(x_2, x_3, \ldots, x_n)}^{b(x_2, x_3, \ldots, x_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1.$$

Тогда существует $(n-1)$-кратный интеграл

$$\int\limits_{D_{n-1}}\!\!\cdots\!\int J(x_2, \ldots, x_n)\,dx_2\ldots dx_n=$$

$$=\iint\limits_{D_{n-1}}\ldots\int dx_2\,dx_3\ldots dx_n\int\limits_{a(x_2, \ldots, x_n)}^{b(x_2, \ldots, x_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1$$

по области D_{n-1} и справедлива формула повторного интегрирования

$$\iint\limits_{D_n}\ldots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$

$$=\iint\limits_{D_{n-1}}\ldots\int dx_2\,dx_3\ldots dx_n\int\limits_{a(x_2, x_3, \ldots, x_n)}^{b(x_2, x_3, \ldots, x_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1. \qquad (3.18)$$

В сформулированном утверждении в роли x_1 может выступать любая из переменных $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Договоримся называть область D простой, если для каждой из координатных осей любая прямая, параллельная этой оси, либо пересекает границу этой области не более чем в двух точках, либо имеет на этой границе целый отрезок. Примером простой области может служить n-мерный прямоугольный параллелепипед (ребра которого не обязательно параллельны координатным осям). Для простой области формулу повторного интегрирования можно применять по любой из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

В заключение отметим, что, как и для случая $n=2$, справедливо следующее утверждение:

Пусть функция $f(x)$ интегрируема в ограниченной кубируемой области D. Пусть пространство E^n покрыто сеткой n-мерных кубов с ребром h; $C_1, C_2, \ldots, C_{m(h)}$ — те кубы указанной сетки, которые целиком содержатся в D; $\xi^{(k)}=(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)})$ — произвольная точка куба C_k; $m_k=\inf\limits_{C_k} f(x)$, $k=1, 2, \ldots, m(h)$. Тогда каждая из сумм

$$\sum_{k=1}^{m(h)} f(\xi^{(k)})\,h^n \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{m(h)} m_k h^n$$

имеет предел при $h\to 0$, равный n-кратному интегралу (3.17) *от функции $f(x)$ по области D.*

Примеры. 1°. Вычислить объем $T_n(h)$ n-мерного симплекса

$$\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in E^n:\ x_i\geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, n;\ \sum_{i=1}^{n} x_i\leqslant h\right\}.$$

Применяя формулу (3.18) последовательно по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$, получим следующее выражение для объема:

$$T_n(h)=\int\limits_0^h\Bigg(\int\limits_0^{h-x_1}\Bigg(\ldots\Bigg(\int\limits_0^{h-\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i} 1\,dx_n\Bigg)\ldots\Bigg)dx_2\Bigg)dx_1. \qquad (3.19)$$

Сделаем в каждом однократном интеграле в правой части (3.19) замену переменной $x_1=h\xi_1$, $x_2=h\xi_2, \ldots, x_n=h\xi_n$. Получим

$$T_n(h)=h^n\int\limits_0^1\Bigg(\int\limits_0^{1-\xi_1}\Bigg(\ldots\Bigg(\int\limits_0^{1-\sum\limits_{i=1}^{n-1}\xi_i} d\xi_n\Bigg)\ldots\Bigg)d\xi_2\Bigg)d\xi_1. \qquad (3.20)$$

Из (3.20) следует, что $T_n(h)=h^nT_n(1)$. Для вычисления $T_n(1)$ получаем следующую рекуррентную формулу:

$$T_n(1)=\int\limits_0^1\Bigg(\int\limits_0^{1-\xi_1}\Bigg(\ldots\Bigg(\int\limits_0^{1-\sum\limits_{i=1}^{n-1}\xi_i} d\xi_n\Bigg)\ldots\Bigg)d\xi_2\Bigg)d\xi_1=\int\limits_0^1 T_{n-1}(1-\xi_1)\,d\xi_1=$$

$$=\int\limits_0^1(1-\xi_1)^{n-1}\,T_{n-1}(1)\,d\xi_1=T_{n-1}(1)\int\limits_0^1(1-\xi_1)^{n-1}\,d\xi_1=T_{n-1}(1)\,\frac{1}{n}.$$

Следовательно, $T_n(1)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot T_1(1)$, и так как $T_1(1)=1$, то $T_n(h)=\frac{h^n}{n!}$.

2°. Вычислить объем $V_n(R)$ n-мерного шара $B(R)$ радиуса R:

$$B(R)=\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in E^n:\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2\leqslant R^2\right\}.$$

Используя формулу (3.18), получаем

$$V_n(R)=\iint\limits_{B(R)}\ldots\int 1\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$

$$=\int\limits_{-R}^{R}\Bigg(\int\limits_{-\sqrt{R^2-x_1^2}}^{\sqrt{R^2-x_1^2}}\Bigg(\ldots\Bigg(\int\limits_{-\sqrt{R^2-\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i^2}}^{\sqrt{R^2-\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i^2}} 1\,dx_n\Bigg)\ldots\Bigg)dx_2\Bigg)dx_1.$$

В однократном интеграле по переменной x_i сделаем замену переменной $x_i=R\xi_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Получим

$$V_n(R)=R^n\int\limits_{-1}^{1}\Bigg(\int\limits_{-\sqrt{1-\xi_1^2}}^{\sqrt{1-\xi_1^2}}\Bigg(\ldots\Bigg(\int\limits_{-\sqrt{1-\sum\limits_{i=1}^{n-1}\xi_i^2}}^{\sqrt{1-\sum\limits_{i=1}^{n-1}\xi_i^2}} d\xi_n\Bigg)\ldots\Bigg)d\xi_2\Bigg)d\xi_1=R^nV_n(1).$$

Для вычисления $V_n(1)$, как и в предыдущем примере, получаем рекуррентную формулу

$$V_n(1)=\int\limits_{-1}^{1}V_{n-1}\left(\sqrt{1-\xi_1^2}\right)d\xi_1=\int\limits_{-1}^{1}(1-\xi_1^2)^{\frac{n-1}{2}}\,V_{n-1}(1)\,d\xi_1=$$

$$=V_{n-1}(1)\int\limits_{-1}^{1}(1-\xi_1^2)^{\frac{n-1}{2}}\,d\xi_1.$$

Сделаем замену переменной $\xi_1=\cos\theta$ в последнем интеграле, введем обозначение $I_k=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^k\theta\,d\theta$ и примем во внимание тот факт, что $V_1(1)=2$. Тогда

$$V_n(1)=2V_{n-1}(1)\int\limits_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,d\theta=2V_{n-1}(1)\,I_n=\ldots=$$

$$=2^{n-1}I_nI_{n-1}\ldots I_2V_1(1)=2^nI_nI_{n-1}\ldots I_2.$$

Таким образом, объем n-мерного шара радиуса R выражается формулой

$$V_n(R)=2^nR^nI_nI_{n-1}\ldots I_2,$$

откуда, используя известные формулы для интегралов I_k [2], окончательно получаем

$$V_n(R)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{n+1}{2}}}{n!!}R^n\pi^{\frac{n-1}{2}}, & \text{если } n \text{ нечетно;}\\[2ex] \dfrac{2^{\frac{n}{2}}}{n!!}R^n\pi^{\frac{n}{2}}, & \text{если } n \text{ четно.}\end{cases}$$

§ 5. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В n-КРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Устанавливаемая в этом параграфе формула замены переменной является одним из важнейших средств вычисления n-кратного интеграла.

Предположим, что функция $f(y)=f(y_1, \ldots, y_n)$ интегрируема в некоторой замкнутой, ограниченной кубируемой области D в пространстве E^n. Предположим, далее, что от переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ мы переходим к переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. совершаем преобразование

[2] В п. 4 § 5 гл. 9 ч. 1 показано, что

$$I_k=\begin{cases}\dfrac{(k-1)!!}{k!!}, & \text{если } k \text{ нечетно;}\\[2ex] \dfrac{(k-1)!!}{k!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } k \text{ четно.}\end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1=\psi_1(x_1, \ldots, x_n);\\ y_2=\psi_2(x_1, \ldots, x_n);\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n=\psi_n(x_1, \ldots, x_n),\end{cases} \qquad (3.21)$$

которое кратко можно записать в виде

$$y=\psi(x), \qquad (3.21')$$

понимая под y точку n-мерного пространства $(y_1, \ldots, y_n)$, под x точку n-мерного пространства $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а под ψ совокупность n функций $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$.

Обозначим через D' ту область в E^n, которая при преобразовании (3.21) или (3.21′) переводится в D, т. е. положим $D=\psi(D')$. При этом мы всегда будем требовать, чтобы преобразование (3.21) или (3.21′) допускало обратное, так что $D'=\psi^{-1}(D)$.

Докажем, что если функции (3.21) имеют в области D' непрерывные частные производные первого порядка и если в этой области D' отличен от нуля якобиан (см. § 2 гл. 14 ч. 1).

$$\frac{D(y)}{D(x)}=\frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}, \qquad (3.22)$$

то для n-кратного интеграла от функции $f(y)$ по области D справедлива следующая формула замены переменных:

$$\int_D f(y)\,dy=\int_{D'} f[\psi(x)]\left|\frac{D(y)}{D(x)}\right|dx, \qquad (3.23)$$

которая в подробной записи принимает следующий вид:

$$\int\limits_D\!\!\cdots\!\int f(y_1, \ldots, y_n)\,dy_1\ldots dy_n=$$

$$=\int\limits_{D'}\!\!\cdots\!\int f[\psi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_n)]\times$$

$$\times\left|\frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}\right|dx_1\ldots dx_n. \qquad (3.23')$$

Точнее, мы докажем следующую основную теорему.

Теорема 3.8. *Если преобразование* (3.21) *переводит область D' в D и является взаимно однозначным и если функции* (3.21) *имеют в области D' непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным и отличный от нуля якобиан* (3.22), *то для каждой интегрируемой в D функции $f(y)$ справедлива формула замены переменных* (3.23′).

Отметим, что при условиях теоремы 3.8 существует преобразование ψ^{-1}, обратное преобразованию ψ.

Доказательству теоремы 3.8 предпошлем семь лемм. Сначала дадим обоснование формулы (3.23) для случая, когда преобразование (3.21) является линейным (леммы 1—4), а затем сведем к этому случаю общее преобразование (3.21) (леммы 5—7).

Лемма 1. *Если преобразование $z=\psi(x)$ является суперпозицией (или произведением) двух преобразований $z=\psi_1(y)$ и $y=\psi_2(x)$ (т. е. $z=\psi_1[\psi_2(x)]$), причем все участвующие в этих преобразованиях функции имеют непрерывные частные производные первого порядка, то якобиан $\frac{D(z)}{D(x)}$, взятый в точке $\mathring{x}=(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_n)$, равен произведению якобиана $\frac{D(y)}{D(x)}$, взятого в точке $\mathring{x}$, на якобиан $\frac{D(z)}{D(y)}$, взятый в точке $\mathring{y}=(\mathring{y}_1, \ldots, \mathring{y}_n)$, где $\mathring{y}=\psi_2(\mathring{x})$, т. е.*

$$\frac{D(z)}{D(x)}=\frac{D(z)}{D(y)}\cdot\frac{D(y)}{D(x)}, \qquad (3.24)$$

или в подробной записи:

$$\frac{D(z_1, \ldots, z_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}=\frac{D(z_1, \ldots, z_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}\cdot\frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Доказательство леммы 1. Заметим, что для любых $i=1, 2, \ldots, n$ и $k=1, 2, \ldots, n$ элемент $\frac{\partial z_i}{\partial x_k}(\mathring{x})$, стоящий на пересечении i-й строки и k-го столбца якобиана $\frac{D(z)}{D(x)}$ и взятый в точке $\mathring{x}=(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_n)$, по правилу дифференцирования сложной функции равен

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k}(\mathring{x})=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial y_l}(\mathring{y})\cdot\frac{\partial y_l}{\partial x_k}(\mathring{x}), \qquad (3.25)$$

где $\mathring{y}=\psi_2(\mathring{x})$.

Но по правилу перемножения определителей равенство (3.25) и означает, что якобиан $\frac{D(z)}{D(x)}$, взятый в точке $\mathring{x}$, равен произведению якобиана $\frac{D(y)}{D(x)}$, взятого в точке $\mathring{x}$, на якобиан $\frac{D(z)}{D(y)}$, взятый в точке $\mathring{y}$. Лемма 1 доказана.

Напомним, что линейным преобразованием координат называется преобразование вида

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n;\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n;\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n,\end{cases} \qquad (3.26)$$

где a_{ik} $(i, k=1, 2, \ldots, n)$ — произвольные постоянные числа.

Для линейного преобразования (3.26) якобиан $\frac{D(y)}{D(x)}$ совпадает с определителем матрицы этого преобразования $T=\|a_{ij}\|$, т. е.

$$\frac{D(y)}{D(x)}\equiv\det T. \qquad (3.27)$$

Если этот определитель отличен от нуля, то линейное преобразование (3.26) называется невырожденным. В этом случае существует обратное преобразование, также линейное и невырожденное, и уравнения (3.26) можно разрешить относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Кратко будем обозначать линейное преобразование (3.26) символом $y=Tx$, а обратное ему преобразование символом $x=T^{-1}y$.

Основной целью следующих трех лемм является доказательство того факта, что для невырожденного линейного преобразования (3.26) и для каждой непрерывной функции $f(y)$ справедлива формула замены переменных (3.23), которую с учетом соотношения (3.27) можно представить в следующем виде:

$$\int_D f(y)\,dy=\int_{D'} f(Tx)\,|\det T|\,dx=|\det T|\int_{D'} f(Tx)\,dx, \qquad (3.28)$$

где $D'=T^{-1}D$.

Сначала рассмотрим два линейных преобразования частного вида:

1) линейное преобразование T_{ij}, заключающееся в том, что к i-й координате добавляется j-я координата, а все остальные координаты при этом сохраняются:

$$y_k=x_k \text{ при } k=1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n;$$
$$y_i=x_i+x_j,$$

или $y=T_{ij}x$ (краткая запись);

2) линейное преобразование T_i^λ, заключающееся в том, что i-я координата умножается на число $\lambda\neq 0$, а все остальные координаты при этом не меняются:

$$\begin{cases} y_k=x_k \text{ при } k=1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n;\\ y_i=\lambda x_i,\end{cases}$$

или $y=T_i^\lambda x$ (краткая запись).

Легко видеть, что

$$\det T_{ij}=\begin{vmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1\ldots 1 & & \\ & & \vdots \ \ddots \ \vdots & & \\ 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix}=1,\quad \det T_i^{\lambda}=\begin{vmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix}=\lambda,$$

поэтому преобразования T_{ij} и T_i^{λ} невырожденные.

Лемма 2. *Для преобразований T_{ij} и T_i^{λ} при любой непрерывной в области D функции $f(y)$ справедлива формула замены переменных* (3.28).

Доказательство леммы 2. Пусть R — n-мерный прямоугольный параллелепипед, содержащий D, функция $F(y)$ имеет вид

$$F(y)=\begin{cases} f(y) & \text{при } y\in D,\\ 0 & \text{при } y\in R\setminus D.\end{cases}$$

Достаточно доказать, что

$$\int_R F(y)\,dy=\int_{T^{-1}R} F(Tx)\,|\det T|\,dx, \tag{3.28'}$$

где символом T обозначено одно из преобразований T_{ij} или T_i^{λ}.

Заметим, что если R — прямоугольный параллелепипед $\{y_k: a_k\leqslant y_k\leqslant b_k,\ k=1, 2, \ldots, n\}$, то $[T_i^{\lambda}]^{-1}R$ — снова прямоугольный параллелепипед

$$\left\{x_k:\ a_k\leqslant x_k\leqslant b_k,\ k\neq i,\ \frac{a_i}{\lambda}\leqslant x_i\leqslant\frac{b_i}{\lambda}\ \text{при } \lambda>0 \text{ и } \frac{b_i}{\lambda}\leqslant x_i\leqslant\right.$$
$$\left.\leqslant\frac{a_i}{\lambda}\ \text{при } \lambda<0\right\},$$

а $[T_{ij}]^{-1}R$ — кубируемая область

$$\{x_k: a_k\leqslant x_k\leqslant b_k,\quad k\neq i,\quad a_i-x_j\leqslant x_i\leqslant b_i-x_j\}.$$

На основании формулы повторного интегрирования (3.18)

$$\int_R F(y)\,dy=$$
$$=\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}}\int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}}\ldots\int_{a_n}^{b_n}\left[\int_{a_i}^{b_i}F(y_1, \ldots, y_n)\,dy_i\right]dy_1\ldots dy_{i-1}\,dy_{i+1}\ldots dy_n. \tag{3.29}$$

Применяя к однократному интегралу по переменной i формулу замены переменной $y_i=\lambda x_i$ для случая преобразования T_i^{λ} и $y_i=x_i+x_j$ для случая преобразования T_{ij} (см § 5 гл. 9 ч. 1), получим

а) для случая преобразования T_i^{λ}

$$\int_{a_i}^{b_i}F(y_1, \ldots, y_n)\,dy_i=$$
$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{a_i/\lambda}^{b_i/\lambda}F(y_1, \ldots, y_{i-1}, \lambda x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)\,\lambda\,dx_i \text{ при } \lambda>0;\\ \displaystyle\int_{b_i/\lambda}^{a_i/\lambda}F(y_1, \ldots, y_{i-1}, \lambda x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)(-\lambda)\,dx_i \text{ при } \lambda<0;\end{cases} \tag{3.30}$$

б) для случая преобразования T_{ij}

$$\int_{a_i}^{b_i}F(y_1, \ldots, y_n)\,dy_i=\int_{a_i-x_j}^{b_i-x_j}F(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i+x_j, y_{i+1}, \ldots, y_n)\,dx_i. \tag{3.30'}$$

Подставим (3.30) или (3.30′) в (3.29); затем, воспользовавшись формулой повторного интегрирования (3.18) и тем, что

$$|\det T|=\begin{cases}1 & \text{для } T=T_{ij};\\ |\lambda| & \text{для } T=T_i^{\lambda},\end{cases}$$

а также полагая $y_k=x_k$ при $k=1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$, придем к равенству (3.28′). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Всякое невырожденное линейное преобразование* (3.26) *представимо в виде суперпозиции конечного числа преобразований вида T_{ij} и T_i^{λ} при $\lambda\neq 0$.*

Доказательство леммы 3. Разобьем доказательство на три этапа.

1. Покажем, что линейное преобразование T', заключающееся в перестановке местами i-й и j-й координат (при сохранении всех остальных координат), представимо в виде суперпозиции шести преобразований типа T_{ij} и T_i^{λ}.

В самом деле, сохраняя при записи $(x_1, \ldots, x_n)$ только i-ю и j-ю координаты (остальные не меняются), можем записать:

$$(x_i, x_j)\xrightarrow[T_{ij}]{}(x_i+x_j, x_j)\xrightarrow[T_i^{-1}]{}(-x_i-x_j, x_j)\xrightarrow[T_{ji}]{}$$
$$\to(-x_i-x_j, -x_i)\xrightarrow[T_j^{-1}]{}(-x_i-x_j, x_i)\xrightarrow[T_{ij}]{}(-x_j, x_i)\xrightarrow[T_i^{-1}]{}(x_j\ x_i),$$

т. е. $T'=T_i^{-1}T_{ij}T_j^{-1}T_{ji}T_i^{-1}T_{ij}$.

2) Отметим, что путем конечного числа перестановок местами двух строк или двух столбцов (т. е. путем конечного числа преобразований типа T') мы можем привести любое линейное невырожденное преобразование к линейному преобразованию с матрицей $\|a_{ij}\|$, у которой отличны от нуля все главные миноры, т. е. определители

$$\Delta_k=\begin{vmatrix}a_{11}\ldots a_{1k}\\ \cdots\cdots\\ a_{k1}\ldots a_{kk}\end{vmatrix},\quad k=1, 2, \ldots, n.$$

3) Остается доказать, что линейное преобразование с отличными от нуля главными минорами можно представить в виде конечного числа преобразований типа T_{ij} и T_i^{λ}. Докажем это по индукции.

Для $n=1$ рассмотрим преобразование T с матрицей

$$\begin{pmatrix}a_{11} & & & 0\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix},\quad \Delta_1=a_{11}\neq 0.$$

Преобразование $T_1^{a_{11}}$ переводит $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в $(a_{11}x_1, x_2, \ldots, x_n)=Tx$, т. е. $T=T_1^{a_{11}}$; утверждение справедливо.

Рассмотрим теперь преобразование T с матрицей

$$\begin{Vmatrix}a_{11}\ldots a_{1k} & & & \\ \cdots\cdots & 0 & & \\ a_{k1}\ldots a_{kk} & & & \\ & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1\end{Vmatrix}.$$

Предположим, что это преобразование T можно представить в виде конечного числа преобразований типа T_{ij} и T_i^{λ}, т. е. что существует конечное число преобразований вида T_{ij} и T_i^{λ}, переводящие $x=(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ в

$$(a_{11}x_1+\ldots+a_{1k}x_k, \ldots, a_{k1}x_1+\ldots+a_{kk}x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)=Tx. \tag{3.31}$$

Для завершения индукции достаточно доказать, что путем суперпозиции конечного числа преобразований типа T_{ij} и T_i^{λ}

можно привести последовательность координат (3.31) к виду

$$\begin{gathered}(a_{11}x_1+\ldots+a_{1(k+1)}x_{k+1}, \ldots, a_{k1}x_1+\ldots+a_{k(k+1)}x_{k+1},\\ a_{(k+1)1}x_1+\ldots+a_{(k+1)(k+1)}x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n),\end{gathered} \tag{3.32}$$

т. е. представить преобразование T с матрицей

$$\begin{Vmatrix}a_{11} & \ldots a_{1k} & a_{1(k+1)} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{k1} & \ldots a_{kk} & a_{k(k+1)} & 0 & \\ a_{(k+1)1} & \ldots a_{(k+1)k} & a_{(k+1)(k+1)} & & \\ & & & 1 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & 1\end{Vmatrix} \tag{3.33}$$

в виде суперпозиции конечного числа преобразований вида T_{ij} и T_i^{λ}.

Для доказательства этого, сначала для каждого номера $i=1, 2, \ldots, k$, для которого элемент $a_{i(k+1)}\neq 0$, произведем преобразование, представимое суперпозицией трех преобразований: $T_{k+1}^{\frac{1}{a_{i(k+1)}}}T_{i(k+1)}T_{k+1}^{a_{i(k+1)}}$ (для тех i, для которых $a_{i(k+1)}=0$, этого преобразования не производим). Суперпозиция всех указанных троек преобразований для всех $i=1, 2, \ldots, k$ переведет элемент (3.31) в

$$\begin{gathered}(a_{11}x_1+\ldots+a_{1k}x_k+a_{1(k+1)}x_{k+1}, \ldots, a_{k1}x_1+\ldots+a_{kk}x_k+\\ +a_{k(k+1)}\,x_{k+1}, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n).\end{gathered} \tag{3.34}$$

Далее заметим, что поскольку минор Δ_k матрицы (3.33) отличен от нуля, то отличен от нуля и равный ему определитель матрицы

$$\begin{pmatrix}a_{11}\ldots a_{1k} & a_{1(k+1)}\\ \cdots\cdots & \cdots\\ a_{k1}\quad a_{kk} & a_{k(k+1)}\\ 0\ \ldots\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

По теореме о базисном миноре существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$, линейная комбинация с которыми строк матрицы (3.35) равна

$$a_{(k+1)1}, \ldots, a_{(k+1)k}, a_{(k+1)(k+1)},$$

т. е. равна первым $k+1$ элементам $(k+1)$-й строки матрицы (3.33). Это означает, что если мы для каждого $j=1, 2, \ldots, k+1$, для которого $\lambda_j\neq 0$, произведем преобразование, представимое суперпозицией трех преобразований: $T_j^{1/\lambda_j}T_{(k+1)j}T_j^{\lambda_j}$ (для тех j, для которых $\lambda_j=0$, соответствующую тройку преобразований

не производим), то суперпозиция $T_{k+1}^{\lambda_{k+1}}$ ($|\lambda_{k+1}|\geqslant 0$) и всех произведенных троек преобразований переведет элемент (3.34) в (3.32). Индукция завершена. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для любого невырожденного линейного преобразования* (3.26) *и любой непрерывной в области D функции f справедлива формула замены переменных* (3.28).

В самом деле, формула (3.28) справедлива для каждого из преобразований вида T_{ij} и T_i^{λ} (лемма 2), но любое линейное невырожденное преобразование представимо в виде суперпозиции конечного числа таких преобразований (лемма 3), причем якобиан этой суперпозиции преобразований равен произведению якобианов (лемма 1).

Следствие из леммы 4. *Если G — произвольная кубируемая область в E^n, T — произвольное невырожденное линейное преобразование, то n-мерный объем $V(G)$ области G и n-мерный объем $V(TG)$ ее образа TG связаны равенством*

$$V(TG)=|\det T|\,V(G). \tag{3.36}$$

Для доказательства этого утверждения достаточно в формуле (3.28) взять $f(y)\equiv 1$ в области D, $D=TG$, $D'=T^{-1}D=G$.

Пусть теперь дано любое преобразование (3.21) ((3.21′)) и выполнены условия теоремы 3.8. При этом оба интеграла в (3.23) существуют, если только $D'=\psi^{-1}(D)$ — кубируемая область, так что нам нужно доказать кубируемость D' и равенство интегралов в (3.23).

Пусть $\dfrac{\partial\psi_i}{\partial x_j}(x)=J_{ij}(x)$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$ — элементы матрицы Якоби, взятые в точке $x=(x_1, \ldots, x_n)$, саму матрицу Якоби $\|J_{ij}(x)\|$ обозначим символом $J_\psi=J_\psi(x)$. Назовем нормой точки $x=(x_1, \ldots, x_n)$ величину $\|x\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$. Назовем нормой матрицы $A=\|a_{ij}\|$ $(i, j=1, \ldots, n)$ величину

$$\|A\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left[\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right].$$

Ясно, что если $y=Ax$, то

$$\|y\|=\|Ax\|\leqslant\|A\|\cdot\|x\|. \tag{3.37}$$

Кроме того, для единичной матрицы $\|E\|=1$.

Лемма 5. *Если выполнены условия теоремы 3.8 и C — n-мерный координатный куб, принадлежащий области D', то n-мерные объемы куба C и его образа $\psi(C)$ связаны неравенством*

$$V(\psi(C))\leqslant[\max_{x\in C}\|J_\psi(x)\|]^n\,V(C). \tag{3.38}$$

Доказательство леммы 5. Пусть C — n-мерный куб с центром в точке $\overset{0}{x}=(\overset{0}{x}_1, \ldots, \overset{0}{x}_n)$ и с ребром $2s$. Тогда куб C можно определить неравенством

$$\|x-\overset{0}{x}\|\leqslant s. \tag{3.39}$$

В силу формулы Тейлора для функции n переменных $\psi_i(x)$ (см. п. 3 § 5 гл. 12 ч. 1) найдется число θ_i из интервала $(0, 1)$ такое, что

$$\psi_i(x)-\psi_i(\overset{0}{x})=\sum_{j=1}^{n}J_{ij}[\overset{0}{x}+\theta_i(x-\overset{0}{x})](x_j-\overset{0}{x}_j).$$

Отсюда и из соотношения (3.37) заключаем, что

$$\|\psi(x)-\psi(\overset{0}{x})\|\leqslant\max_{x\in C}\|J_\psi(x)\|\cdot\|x-\overset{0}{x}\|. \tag{3.40}$$

Полагая $y=\psi(x)$, $\overset{0}{y}=\psi(\overset{0}{x})$, получим из (3.40) и (3.39):

$$\|y-\overset{0}{y}\|\leqslant s\max_{x\in C}\|J_\psi(x)\|.$$

Таким образом, если точка x находится в кубе C с ребром $2s$ и с центром в точке $\overset{0}{x}$, то образ $y=\psi(x)$ точки x находится в кубе с центром в точке $\overset{0}{y}$ и с ребром $2s\max\limits_{x\in C}\|J_\psi(x)\|$. Поэтому множество $\psi(C)$ кубируемо и

$$V(\psi(C))\leqslant[\max_{x\in C}\|J_\psi(x)\|]^n\,V(C).$$

Лемма 5 доказана.

Следствие 1 из леммы 5. *Если выполнены условия теоремы 3.8 и область G кубируема, то и ее образ $\psi(G)$ кубируем. В частности, если D кубируема, то и $D'=\psi^{-1}(D)$ кубируема.*

Действительно, граница любого кубируемого множества G является множеством n-мерного объема нуль, а такое множество согласно доказанному утверждению преобразуется в множество, n-мерный объем которого также равен нулю.

Кубируемость области $D'=\psi^{-1}(D)$ следует из того, что в условиях теоремы 3.8 для преобразования ψ^{-1} выполнены те же условия, что и для ψ.

Следствие 2 из леммы 5. *Если функция $f(y)$ интегрируема в области D, $D'=\psi^{-1}(D)$ и выполнены условия теоремы 3.8, то $f(\psi(x))$, а потому и $f[\psi(x)]\,|\det J_\psi(x)|$ интегрируемы в D'.*

Лемма 6. *Пусть выполнены все условия теоремы 3.8 и пусть G — произвольное кубируемое подмножество D', а $\psi(G)$ — его образ при преобразовании* (3.21). *Тогда для n-мерного объема области $\psi(G)$ справедливо неравенство*

$$V(\psi(G))\leqslant\int_G|\det J_\psi(x)|\,dx. \tag{3.41}$$

Доказательство леммы 6. Разобьем доказательство на два этапа.

1) Докажем, что для любого невырожденного линейного преобразования T и для любого n-мерного куба $C\subset D'$ справедливо неравенство

$$V(\psi(C))\leqslant|\det T|\,[\max_{x\in C}\|T^{-1}J_\psi(x)\|]^n\,V(C). \tag{3.42}$$

В силу следствия из леммы 4 для любого кубируемого множества G и для линейного преобразования T справедливо равенство (3.36). Положим $G=T^{-1}\psi(C)$, тогда $TG=T(T^{-1}\psi(C))=\psi(G)$ и

$$V(\psi(C))=|\det T|\,V(T^{-1}\psi(C)). \tag{3.43}$$

Оценив правую часть (3.43) с помощью неравенства (3.38), в котором вместо преобразования ψ возьмем суперпозицию преобразований $T^{-1}\psi$, получим

$$V(\psi(C))\leqslant|\det T|\,[\max_{x\in C}\|J_{T^{-1}\psi}(x)\|]^n\,V(C). \tag{3.44}$$

По лемме 1 $J_{T^{-1}\psi}=J_{T^{-1}}J_\psi=T^{-1}J_\psi$, ибо матрица Якоби линейного преобразования совпадает с матрицей этого преобразования. Но это и означает, что неравенство (3.44) может быть переписано в виде (3.42). Неравенство (3.42) доказано.

2) Докажем теперь непосредственно неравенство (3.41). Покроем пространство E^n сеткой n-мерных кубов с ребром h. Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_{m(h)}$ — те кубы, которые целиком содержатся в G, и пусть $G_h=\bigcup\limits_{1\leqslant k\leqslant m(h)}C_k$.

В каждом кубе C_k фиксируем произвольную точку x_k и запишем для этого куба C_k неравенство (3.42), полагая при этом $T=J_\psi(x_k)$. Получим

$$V(\psi(C_k))\leqslant|\det J_\psi(x_k)|\,\{\max_{x\in C_k}\|[J_\psi(x_k)]^{-1}J_\psi(x)\|\}^n\,V(C_k). \tag{3.45}$$

Поскольку элементы матрицы Якоби $J_\psi(x)$ являются непрерывными функциями переменной x во всей области D', а следовательно, и равномерно непрерывными в D', то $\|J_\psi(x)\|$ — равномерно непрерывная функция в $G\subset D'$. Отсюда заключаем,

что функция $\|[J_\psi(x_k)]^{-1}J_\psi(x)\|^n$ также равномерно непрерывна в G. Учитывая, что $\|[J_\psi(x_k)]^{-1}J_\psi(x_k)\|=1$, получаем, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всех $x, x_k\in G$, для которых $\rho(x, x_k)<\delta$, выполняется неравенство $\|[J_\psi(x_k)]^{-1}\times\times J_\psi(x)\|^n<1+\varepsilon$. Таким образом, если выбрать $h>\delta$, то $\max\limits_{x\in C_k}\times\times\|[J_\psi(x_k)]^{-1}J_\psi(x)\|^n<1+\varepsilon$ (для всех k) и оценку (3.45) можно записать в виде

$$V(\psi(C_k))\leqslant(1+\varepsilon)\,|\det J_\psi(x_k)|\,V(C_k).$$

Суммируя последнее неравенство по всем $k=1, 2, \ldots, m(h)$, получим

$$V(\psi(G_h))\leqslant(1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{m(h)}|\det J_\psi(x_k)|\,V(C_k). \tag{3.46}$$

Из утверждения, сформулированного в конце § 4 этой главы, следует, что предел при $h\to 0$ всей правой части (3.46) существует и равен $(1+\varepsilon)\int_G|\det J_\psi(x)|\,dx$ ($\varepsilon>0$ — произвольное число). Кроме того, $\lim\limits_{h\to 0}G_h=G$, так что в пределе при $h\to 0$ из неравенства (3.46) получается неравенство (3.41). Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Если выполнены все условия теоремы* 3.8 *и дополнительно предполагается, что функция $f(y)$ неотрицательна в D, то справедлива формула замены переменных* (3.23).

Доказательство леммы 7. Покроем пространство E^n сеткой n-мерных кубов с ребром h и обозначим через $C_1, C_2, \ldots, C_{m(h)}$ те из этих кубов, которые целиком содержатся в D. Пусть $G_k=\psi^{-1}(C_k)$. Для каждой области G_k запишем неравенство (3.41):

$$V(C_k)\leqslant\int_{G_k}|\det J_\psi(x)|\,dx. \tag{3.47}$$

Умножим обе части (3.47) на m_k, где

$$m_k=\inf_{C_k}f(y)=\inf_{G_k}f[\psi(x)],$$

и просуммируем полученные неравенства по всем k от 1 до $m(h)$:

$$\sum_{k=1}^{m(h)}m_kV(C_k)\leqslant\sum_{k=1}^{m(h)}m_k\int_{G_k}|\det J_\psi(x)|\,dx. \tag{3.48}$$

По теореме о среднем значении

$$\int_{G_k}f[\psi(x)]\,|\det J_\psi(x)|\,dx=\mu_k\int_{G_k}|\det J_\psi(x)|\,dx,$$

где $\mu_k\in[m_k, M_k]$, $M_k=\sup\limits_{G_k}f[\psi(x)]$. Поэтому

$$m_k\int_{G_k}|\det J_\psi(x)|\,dx\leqslant\mu_k\int_{G_k}|\det J_\psi(x)|\,dx=\int_{G_k}f[\psi(x)]\,|\det J_\psi(x)|\,dx$$

и неравенство (3.48) можно усилить:

$$\sum_{k=1}^{m(h)}m_kV(C_k)\leqslant\sum_{k=1}^{m(h)}\int_{G_k}f[\psi(x)]\,|\det J_\psi(x)|\,dx. \tag{3.49}$$

В силу утверждения, сформулированного в конце § 4, левая часть (3.49) при $h\to 0$ имеет предел, равный $\int_D f(y)\,dy$, и поскольку $\lim\limits_{h\to 0}\sum\limits_{k=1}^{m(h)}G_k=G$, где $G=\psi^{-1}(D)$, то в пределе при $h\to 0$ получается

$$\int_D f(y)\,dy\leqslant\int_{D'}f[\psi(x)]\,|\det J_\psi(x)|\,dx. \tag{3.50}$$

Меняя в этих рассуждениях ролями D и D', рассматривая в D' функцию $g(x)=f[\psi(x)]\,|\det J_\psi(x)|$ и используя лемму 1 и теорему об определителе произведения двух матриц, получим противоположное неравенство

$$\int_{D'}f[\psi(x)]\,|\det J_\psi(x)|\,dx\leqslant\int_D f(y)\,dy. \tag{3.51}$$

Из (3.50) и (3.51) вытекает доказываемая формула замены переменных. Лемма 7 доказана.

Доказательство теоремы 3.8. Пусть $f(y)$ — произвольная интегрируемая по области D функция и выполнены все условия теоремы 3.8.

Из интегрируемости функции $f(y)$ в области D получаем, что существует постоянная $M>0$ такая, что $|f(y)|\leqslant M$ в D.

Для каждой из неотрицательных функций $f_1(y)\equiv M$ и $f_2(y)=M-f(y)$ теорема 3.8 справедлива (в силу леммы 7). Но тогда из линейного свойства интеграла вытекает справедливость формулы (3.23) и для разности $f_1(y)-f_2(y)=f(y)$. Теорема 3.8 доказана.

Замечание 1. В условиях теоремы 3.8 можно допустить обращение в нуль якобиана (3.22) на некотором принадлежащем D' множестве точек S, имеющем n-мерный объем нуль. В самом деле, множество S лежит внутри элементарной фигуры C как угодно малого объема, причем согласно доказанному выше справедлива формула

$$\int\limits_{\psi(D'\setminus C)} f(y)\,dy = \int\limits_{D'\setminus C} f[\psi(x)]\,|\det J_\psi(x)|\,dx. \qquad (3.52)$$

Осуществляя в формуле (3.52) предельный переход по последовательности элементарных фигур $\{C_k\}$, $S\subset C_k$, n-мерный объем $V(C_k)$ которых стремится к нулю, убедимся в справедливости формулы (3.23) и для рассматриваемого случая.

Замечание 2. Имеет место следующее утверждение, являющееся частным случаем так называемой теоремы Сарда[3].

Утверждение. *Пусть G — замкнутая ограниченная кубируемая область в E^n, а функции* (3.21) *имеют в G непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным. Пусть $A=\{x\in G : \det J_\psi(x)=0\}$. Тогда n-мерный объем множества A равен нулю.*

Это утверждение и замечание 1 позволяют освободиться в теореме 3.8 от требования необращения якобиана (3.22) в нуль в области D'.

Замечание 3. Как показывает рассматриваемый ниже пример, требование взаимной однозначности преобразования ψ существенно даже в случае связной области и условия $\det J_\psi(x)\neq 0$ для всех $x\in E^n$.

Пример. Пусть $D'=\{(x_1, x_2)\in E^2 : x_1\in[0, 1];\ x_2\in[-2\pi, 2\pi]\}$, а $y=\psi(x)$ определено равенствами

$$y_1=e^{x_1}\cos x_2,\quad y_2=e^{x_1}\sin x_2.$$

Тогда $D=\psi(D')=\{(y_1, y_2)\in E^2 : 1\leqslant (y_1{}^2+y_2{}^2)^{1/2}\leqslant e\}$. Легко подсчитать, что якобиан преобразования $\det J_\psi(x)=e^{2x_1}$ не равен нулю для всех $x\in E^2$. Сравним между собой интегралы в формуле (3.23′) для $f(y)\equiv 1$:

$$\iint\limits_D dy_1dy_2=\pi(e^2-1);\ \iint\limits_{D'} |\det J_\psi(x_1, x_2)|\,dx_1dx_2=$$

$$=\int\limits_{-2\pi}^{2\pi} dx_2\int\limits_0^1 e^{2x_1}\,dx_1=2\pi(e^2-1).$$

Таким образом, формула замены переменных не имеет места.

[3] Артур Сард — американский математик (род. в 1909 г.)

Замечание 4. В условиях теоремы 3.8 можно допустить неоднозначность преобразования ψ на некотором принадлежащем D' множестве S, имеющем n-мерный объем нуль.

Доказательство этого факта полностью аналогично доказательству утверждения в замечании 1.

§ 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ n-МЕРНЫХ ТЕЛ

В § 4 этой главы было отмечено, что интеграл

$$I=\iint\limits_D\ldots\int 1\,dy_1dy_2\ldots dy_n \qquad (3.53)$$

равен n-мерному объему $V(D)$ области D. Поэтому величину $dy_1dy_2\ldots dy_n$ естественно назвать элементом объема в рассматриваемой декартовой системе координат $Oy_1y_2, \ldots, y_n$.

С помощью преобразования (3.21) перейдем от декартовых координат $y_1, y_2, \ldots, y_n$ к новым, вообще говоря, криволинейным координатам $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Поскольку при таком переходе (согласно формуле замены переменных (3.23)) интеграл (3.53) преобразуется к виду

$$I=\iint\limits_{D'}\ldots\int\left|\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right| dx_1dx_2\ldots dx_n,$$

то величину

$$\left|\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right|=dx_1dx_2\ldots dx_n$$

естественно назвать элементом объема в криволинейной системе координат $Ox_1x_2\ldots x_n$.

Итак, модуль якобиана характеризует «растяжение» (или «сжатие») объема при переходе от декартовых координат $y_1, y_2, \ldots, y_n$ к криволинейным координатам $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Подсчитаем элементы объема в сферических и цилиндрических координатах.

1°. Для сферических координат в пространстве E^3

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi\sin\theta, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \quad (r\geqslant 0,\ \theta\in[0, \pi],\ \varphi\in[0, 2\pi)) \\ z=r\cos\theta \end{cases}$$

якобиан имеет вид

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \theta)}=\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix}=r^2\sin\theta.$$

Следовательно, элемент объема равен $r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$.

2°. Для цилиндрических координат в пространстве E^3

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi, \quad (r\geqslant 0,\ \varphi\in[0, 2\pi),\ z\in(-\infty, +\infty)) \\ z=z \end{cases}$$

якобиан имеет вид

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z)}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=r.$$

Следовательно, элемент объема равен $rdrd\varphi dz$. В частности, для полярных координат на плоскости элемент площади равен $rdrd\varphi$.

3°. В пространстве E^n сферические координаты определяются равенствами

$$\begin{cases} x_1=r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-1}; \\ x_m=r\cos\theta_{m-1}\prod\limits_{k=m}^{n-1}\sin\theta_k,\ m=2, 3, \ldots, n-1; \\ x_n=r\cos\theta_{n-1},\ (r\geqslant 0,\ \theta_1\in[0, 2\pi),\ \theta_m\in[0, \pi],\ m=2, 3, \ldots, n-1), \end{cases}$$

якобиан имеет вид

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})}=r^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin^{k-1}\theta_k.$$

Таким образом, элемент объема в n-мерных сферических координатах равен $r^{n-1}dr\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin^{k-1}\theta_k d\theta_k$.

Примеры. 1°. Вычислить объем V тела, вырезанного цилиндром $x^2+y^2=Rx$ из сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ (рис. 3.6)[4].

Тело симметрично относительно координатных плоскостей Oxy и Oxz и расположено направо от плоскости Oyz. Поэтому достаточно вычислить объем четверти тела, лежащей в первом октанте, т. е.

$$V=4\iiint\limits_D dxdydz,$$

$$D=\{(x, y, z)\in E^3 : x\in[0, R],\ y\in[0, \sqrt{Rx-x^2}],$$

[4] Эта фигура называется «телом Вивиани» по имени итальянского математика XVII в.

$$z\in[0, \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}]\}.$$

Перейдем к цилиндрическим координатам. Область D' определяется так:

$$D'=\left\{(\varphi, r, z)\in E^3 : \varphi\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ r\in[0, R\cos\varphi],\ z\in[0, \sqrt{R^2-r^2}]\right\}.$$

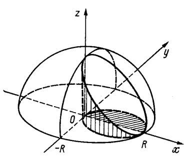

Рис. 3.6

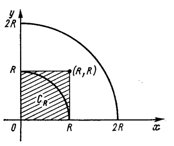

Рис. 3.7

Формула замены переменных дает

$$V=4\iiint\limits_{D'} rdrd\varphi dz=4\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{R\cos\varphi}rdr\int\limits_0^{\sqrt{R^2-r^2}}1dz=$$

$$=4\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{R\cos\varphi}r\sqrt{R^2-r^2}\,dr=\frac{4}{3}\int\limits_0^{\pi/2}R^3(1-\sin^3\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

Таким образом,

$$V=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

Записав результат в виде $V=(2/3)\pi R^3-(8/9)R^3$, отметим, что вычисляемый объем на $(8/9)R^3$ меньше объема полушара радиуса R, из которого оно вырезано.

2°. Вычислить интеграл

$$I=\iiint\limits_D\frac{xyz}{x^2+y^2}\,dxdydz,$$

где D — тело, ограниченное сверху поверхностью

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2xy, \qquad (3.54)$$

а снизу плоскостью $z=0$.

В сферических координатах уравнение поверхности (3.54) примет вид

$$r^2=a^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi.$$

Так как $z\geqslant 0$ для точек поверхности D, то, учитывая симметрию тела относительно оси Oz, после замены переменных получим

$$I=2\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^{a\sin\theta\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}r^3\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta dr=$$

$$=\frac{a^4}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos^3\varphi d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin^5\theta\cos\theta d\theta=\frac{a^4}{144}.$$

3°. Вычислить интеграл

$$I=\iint\limits_D\ldots\int\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\,dx_1dx_2\ldots dx_n,$$

где D — n-мерный шар радиуса R с центром в начале координат: $D=\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in E^n : \sum\limits_{k=1}^n x_k^2\leqslant R^2\right\},\ n\geqslant 2.$

Перейдем к сферическим координатам в E^n:

$$D'=\{(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})\in E^n : r\in[0, R],$$

$$\theta_1\in[0, 2\pi],\ \theta_k\in[0, \pi],\ k=2, 3, \ldots, n-1\},$$

т. е. область D' — параллелепипед.

Формулы замены переменных (3.23) и повторного интегрирования (3.18) приводят к интегралу

$$I=\int\limits_0^R r^ndr\int\limits_0^{2\pi}d\theta_1\int\limits_0^{\pi}\sin\theta_2d\theta_2\ldots\int\limits_0^{\pi}\sin^{n-2}\theta_{n-1}d\theta_{n-1}.$$

Воспользовавшись формулой, выражающей интегралы от степеней синуса (см. п. 4 § 5 гл. 9 ч. 1 или сноску на с. 138 этой книги), получим

$$I=2^n\frac{R^{n+1}}{n+1}A(n),$$

$$\text{где } A(n)=\begin{cases} \dfrac{2^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)!!}\pi^{\frac{n-1}{2}}, & \text{если } n \text{ нечетное;} \\ \dfrac{2^{\frac{n-2}{2}}}{(n-2)!!}\pi^{\frac{n}{2}}, & \text{если } n \text{ четное.} \end{cases}$$

4°. Вычислить интеграл Пуассона

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

Рассмотрим на плоскости две области

$$C_R=\{(x, y)\in E^2 : x^2+y^2\leqslant R^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\},$$

$$K_R=\{(x, y)\in E^2 : 0\leqslant x\leqslant R,\ 0\leqslant y\leqslant R\}$$

и неотрицательную функцию двух переменных $e^{-(x^2+y^2)}$. На рис. 3.7 изображены области C_R, C_{2R} — четверти кругов радиусов R и $2R$ в первом квадранте, и область K_R — заштрихованный квадрат.

Поскольку $C_R\subset K_R\subset C_{2R}$, то

$$\iint\limits_{C_R}e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy\leqslant\iint\limits_{K_R}e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy\leqslant\iint\limits_{C_{2R}}e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy. \qquad (3.55)$$

Для среднего интеграла (3.55) получим

$$\iint\limits_{K_R}e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy=\int\limits_0^R e^{-x^2}dx\int\limits_0^R e^{-y^2}dy=\left(\int\limits_0^R e^{-x^2}dx\right)^2.$$

Чтобы подсчитать оставшиеся два интеграла, сделаем замену переменных, переходя к полярным координатам. Область, которая при этом преобразовании переходит в C_R, имеет вид

$$C_R'=\left\{(r, \varphi)\in E^2 :\ r\in[0, R],\ \varphi\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Применяя формулу замены переменных, получим

$$\iint\limits_{C_R}e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy=\iint\limits_{D_R}e^{-r^2}rdrd\varphi=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^R e^{-r^2}rdr=\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2});$$

$$\iint\limits_{C_{2R}}e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy=\frac{\pi}{4}(1-e^{-4R^2}).$$

Подставим полученные выражения в (3.55):

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-R^2}}\leqslant\int\limits_0^R e^{-x^2}dx\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-4R^2}}. \qquad (3.56)$$

Перейдем к пределу в (3.56) при $R\to\infty$:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Этот элегантный прием вычисления принадлежит Пуассону.

§ 7. ТЕОРЕМА О ПОЧЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И РЯДОВ

В § 4 гл. 2 была доказана теорема 2.8 о почленном интегрировании функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ на сегменте $[a, b]$ числовой прямой. Аналогичная теорема имеет место и для случая, когда функциональная последовательность определена и интегрируема в некоторой области пространства E^m $(m\geqslant 2)$.

Теорема 3.9. *Пусть D — некоторая ограниченная замкнутая кубируемая область в E^m. Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к предельной функции $f(x)$ равномерно в D и если каждая функция $f_n(x)$ интегрируема в области D, то и предельная функция интегрируема в этой области, причем указанную последовательность можно интегрировать в области D почленно, т. е.*

$$\int\limits_D f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int\limits_D f_n(x)\,dx.$$

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Как и при доказательстве теоремы 2.8, для доказательства интегрируемости f в области D достаточно доказать, что найдется номер n такой, что для любого разбиения области D верхняя сумма S и нижняя сумма s предельной функции $f(x)$ и верхняя сумма S_n и нижняя сумма s_n интегрируемой в D функции $f_n(x)$ связаны неравенством

$$S-s\leqslant(S_n-s_n)+\varepsilon/2. \qquad (3.57)$$

Рассмотрим произвольное разбиение области D при помощи конечного числа произвольных многообразий m-мерного объема нуль на конечное число частичных областей D_i $(i=1, 2, \ldots, r)$ произвольной формы, не имеющих общих внутренних точек. Обозначим символом $\omega_i(f_n)$ колебание функции $f_n(x)$ в области

D_i $(\omega_i(f_n)=\sup\limits_{D_i}f_n(x)-\inf\limits_{D_i}f_n(x))$, а символом $\omega_i(f)$ колебание в D_i предельной функции $f(x)$.

Докажем, что для любого достаточно большого номера n справедливы неравенства

$$\omega_i(f)\leqslant\omega_i(f_n)+\varepsilon/(2\Delta D),\ i=1, 2, \ldots, r, \qquad (3.58)$$

где ΔD — n-мерный объем области D. Умножая затем (3.58) на объем ΔD_i частичной области D_i и суммируя получающиеся при этом неравенства по всем i, получим неравенство (3.57).

Для любого номера n и любых двух точек x' и x'' области D_i справедливо тождество

$$f(x')-f(x'')\equiv[f(x')-f_n(x')]+[f_n(x')-f_n(x'')]+[f_n(x'')-f(x'')]. \qquad (3.59)$$

В силу равномерной на D сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$, для фиксированного нами произвольного $\varepsilon>0$ найдется номер n такой, что для всех точек x области D

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/(4\Delta D). \qquad (3.60)$$

Применяя к правой части (3.59) неравенство (3.60), взятое для точек $x=x'$ и $x=x''$, получим

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f_n(x')-f_n(x'')|+\varepsilon/(2\Delta D). \qquad (3.61)$$

Из неравенства (3.61) получаем

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant\omega_i(f_n)+\varepsilon/(2\Delta D),$$

откуда, как и в случае теоремы 2.8, следует доказываемое неравенство (3.58). Таким образом, доказательство интегрируемости предельной функции $f(x)$ в области D завершено.

Утверждение о возможности почленного интегрирования последовательности $\{f_n(x)\}$ следует из оценки (3.60), справедливой для всех точек $x\in D$, и из отмеченного в § 4 факта: значение интеграла $\int\limits_D 1\,dx$ равно n-мерному объему ΔD области D. Теорема 3.9 доказана.

Приведем формулировку теоремы 3.9 в терминах функциональных рядов:

Теорема 3.9*. *Если функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^\infty u_k(x)\ \ (x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)\in E^m)$$

сходится к своей сумме $S(x)$ равномерно на некоторой ограниченной замкнутой кубируемой области $D\subset E^m$ и если каждый член

этого ряда $u_k(x)$ представляет собой функцию, интегрируемую в области D, то и сумма $S(x)$ интегрируема в области D, причем указанный ряд можно интегрировать на множестве D почленно, т. е.

$$\int\limits_D S(x)\,dx=\sum_{k=1}^\infty\int\limits_D u_k(x)\,dx. \qquad (3.62)$$

§ 8. КРАТНЫЕ НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Этот параграф посвящен обобщению понятия кратного интеграла на случаи неограниченной области интегрирования и неограниченной подынтегральной функции. Мы сформулируем понятие несобственного кратного интеграла так, что будут охвачены оба указанных случая.

1. Понятие кратных несобственных интегралов. Пусть D — открытое связное множество пространства E^m. Символом $\bar{D}$ обозначим замыкание D, которое получается путем присоединения к D его границы.

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность $\{D_n\}$ открытых связных множеств монотонно исчерпывает множество D, если:* 1) *для любого номера n $\bar{D}_n\subset D_{n+1}$;* 2) *объединение всех множеств D_n совпадает с D.*

Пусть на множестве D задана функция $f(x)$, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, интегрируемая по Риману на любом замкнутом кубируемом подмножестве D. Будем рассматривать всевозможные последовательности $\{D_n\}$ открытых множеств, монотонно исчерпывающие D и такие, что замыкание $\bar{D}_n$ каждого множества D_n кубируемо (отсюда, в частности, вытекает, что каждое множество D_n ограничено).

Определение 2. *Если для любой такой последовательности $\{D_n\}$ существует предел числовой последовательности*

$$a_n=\int\limits_{\bar{D}_n}f(x)\,dx \qquad (3.63)$$

и этот предел не зависит от выбора последовательности $\{D_n\}$, то этот предел называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ по множеству D и обозначается одним из следующих символов:

$$\int\limits_D f(x)\,dx \text{ или } \int\limits_D\ldots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\,dx_1dx_2\ldots dx_m. \qquad (3.64)$$

При этом несобственный интеграл (3.64) называется сходящимся.

Отметим, что символ (3.64) используется и в случае, когда предела указанных выше последовательностей не существует. В этом случае интеграл (3.64) называется р а с х о д я щ и м с я.

2. Два признака сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций.

Т е о р е м а 3.10. *Для сходимости несобственного интеграла* (3.64) *от неотрицательной в области D функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы хотя бы для одной последовательности кубируемых областей $\{D_n\}$, монотонно исчерпывающей D, была ограниченной числовая последовательность* (3.63).

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Сходимость несобственного интеграла (3.64) по определению 2 означает, что последовательность $\{a_n\}$, определяемая равенством (3.63), сходится для всех последовательностей областей $\{D_n\}$, монотонно исчерпывающих D, а, следовательно, последовательность $\{a_n\}$ ограничена для каждой такой последовательности $\{D_n\}$.

Достаточность. Последовательность (3.63) ограничена и не убывает, так как $\bar D_n \subset \bar D_{n+1}$ и $f(x) \geqslant 0$, следовательно, она сходится к некоторому числу I. Остается доказать, что если мы выберем любую другую последовательность кубируемых областей $\{D'_n\}$, монотонно исчерпывающую область D, то последовательность

$$a'_n = \int\limits_{\bar D'_n} f(x)\,dx$$

сходится к тому же числу I. Фиксируем любой номер n_0 и рассмотрим область D'_{n_0}. Найдется номер n_1 такой, что $\bar D'_{n_0} \subset D_{n_1}$. Действительно, допустим, что это не так. Тогда для любого номера k можно указать такую точку $M_k \in \bar D'_{n_0}$, которая не принадлежит области D_k. Из последовательности $\{M_k\}$ можно (в силу замкнутости и ограниченности $\bar D'_{n_0}$) выделить сходящуюся к некоторой точке $M \in \bar D'_{n_0}$ последовательности. Точка M вместе с некоторой окрестностью принадлежит одному из множеств D_{k_1}. Но тогда этому же множеству D_{k_1} (и всем множествам D_k с бо́льшими номерами) принадлежат точки M_k с как угодно большими номерами. А это противоречит выбору точек M_k.

Итак, существует номер n_1 такой, что $\bar D'_{n_0} \subset D_{n_1}$. Поэтому

$$a'_{n_0} \leqslant a_{n_1} \leqslant I.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{a_n'\}$ сходится к некоторому числу $I' \leqslant I$. Меняя местами в наших рассуждениях последовательности $\{a_n'\}$ и $\{a_n\}$, придем к неравенству $I \leqslant I'$. Следовательно, $I' = I$. Теорема доказана.

В § 6 можно найти пример вычисления несобственного интеграла

$$I = \iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{C_n} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \frac{\pi}{4},$$

где $D = \{(x, y) \in E^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$, $C_n = \{(x, y) \in E^2,\ x^2 + y^2 \leqslant n^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$; $n = 1, 2, \ldots$ (см. пример 4° § 6, в котором следует заменить R на n).

Т е о р е м а 3.11 (общий признак сравнения). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ всюду на открытом множестве D удовлетворяют условию $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int\limits_D g(x)\,dx$ вытекает сходимость несобственного интеграла $\int\limits_D f(x)\,dx$, а из расходимости $\int\limits_D f(x)\,dx$ вытекает расходимость $\int\limits_D g(x)\,dx$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{D_n\}$ — последовательность кубируемых областей, монотонно исчерпывающих область D. Из очевидных неравенств

$$a_n = \int\limits_{\bar D_n} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_{\bar D_n} g(x)\,dx = b_n$$

следует, что ограниченность $\{b_n\}$ влечет ограниченность $\{a_n\}$ и неограниченность $\{a_n\}$ влечет неограниченность $\{b_n\}$ (для любой последовательности областей $\{D_n\}$). Отсюда и из теоремы 3.10 вытекает справедливость сформулированной теоремы.

Обычно при исследовании несобственных интегралов на сходимость используют стандартные (эталонные) функции сравнения, наиболее употребительной из которых является функция $g(x) = |x|^{-p}$, $p > 0$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}$. Легко проверить, что если область D — шар радиуса R ($R > 0$) с центром в начале координат, то несобственный интеграл от функции $|x|^{-p}$ по области D сходится при $p < m$ и расходится при $p \geqslant m$. Если же D — внешность того же шара, то несобственный интеграл от функции $|x|^{-p}$ по области D сходится при $p > m$ и расходится при $p \leqslant m$.

3. Несобственные интегралы от знакопеременных функций. В этом пункте мы выясним связь между сходимостью и абсолютной сходимостью кратных несобственных интегралов. При этом, как и в одномерном случае, несобственный интеграл $\int\limits_D f(x)\,dx$ будем называть а б с о л ю т н о с х о д я щ и м с я, если сходится интеграл $\int\limits_D |f(x)|\,dx$. Кратные несобственные интегралы в отличие от одномерного случая обладают тем свойством, что из обыч-

ной сходимости несобственного кратного интеграла вытекает его абсолютная сходимость.

Т е о р е м а 3.12. *Для несобственных m-кратных интегралов при $m \geqslant 2$ понятия сходимости и абсолютной сходимости эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Докажем, что из абсолютной сходимости кратного несобственного интеграла в области D следует его обычная сходимость в этой области. Рассмотрим две неотрицательные функции

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2},\quad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}. \tag{3.65}$$

Представим их в виде

$$\begin{aligned} f_+(x) &= \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0; \\ 0, & \text{если } f(x) < 0; \end{cases} \\ f_-(x) &= \begin{cases} -f(x), & \text{если } f(x) \leqslant 0; \\ 0, & \text{если } f(x) > 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.66}$$

и отметим следующие соотношения, непосредственно вытекающие из определения этих функций:

$$0 \leqslant f_+(x) \leqslant |f(x)|;\ 0 \leqslant f_-(x) \leqslant |f(x)|; \tag{3.67}$$

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x);\ |f(x)| = f_+(x) + f_-(x). \tag{3.68}$$

Из интегрируемости в собственном смысле функции $f(x)$ по любой кубируемой подобласти области D вытекает интегрируемость по любой такой подобласти функции $|f(x)|$, а следовательно, и функций $f_+(x)$ и $f_-(x)$ (что следует из формул (3.65)). Используя сходимость интеграла $\int\limits_D |f(x)|\,dx$, только что указанное свойство функций $f_+(x)$, $f_-(x)$, неравенства (3.67) и теорему 3.11, убеждаемся в сходимости несобственных интегралов $\int\limits_D f_+(x)\,dx$ и $\int\limits_D f_-(x)\,dx$. Из определения несобственного интеграла следует, что если сходится несобственный интеграл по области D от каждой из функций $f_+(x)$ и $f_-(x)$, то сходятся интегралы от суммы и разности этих функций. Из первого соотношения (3.68) следует сходимость интеграла $\int\limits_D f(x)\,dx$. Первая часть теоремы доказана.

2) Пусть кратный несобственный интеграл $\int\limits_D f(x)\,dx$ сходится. Докажем, что он сходится абсолютно. Допустим, что это утверждение неверно. Тогда из теоремы 3.10 вытекает, что пос-

ледовательность интегралов от функции $|f(x)|$ по любой монотонно исчерпывающей область D последовательности кубируемых областей $\{D_n\}$ будет м о н о т о н н о в о з р а с т а ю щ е й б е с к о н е ч н о б о л ь ш о й последовательностью. В частности, последовательность $\{D_n\}$ можно выбрать так, что для любого $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\bar D_{n+1}} |f(x)|\,dx > 3\int\limits_{\bar D_n} |f(x)|\,dx + 2n + 4 \tag{3.69}$$

(достаточно взять любую последовательность $\{D_n\}$ и «проредить» ее, отбросив те области, для которых неравенство (3.69) не выполняется). Обозначим через P_n множество $D_{n+1} \setminus D_n$. Тогда из (3.69) получим, что для любого n

$$\int\limits_{\bar P_n} |f(x)|\,dx > 2\int\limits_{\bar D_n} |f(x)|\,dx + 2n + 4. \tag{3.70}$$

Из второго соотношения (3.68) следует, что

$$\int\limits_{\bar P_n} |f(x)|\,dx = \int\limits_{\bar P_n} f_+(x)\,dx + \int\limits_{\bar P_n} f_-(x)\,dx. \tag{3.71}$$

Фиксируем произвольный номер n. Пусть для этого n из двух интегралов в правой части (3.71) бо́льшим будет первый. Тогда из соотношений (3.70) и (3.71) получим

$$\int\limits_{\bar P_n} f_+(x)\,dx > \int\limits_{\bar D_n} |f(x)|\,dx + n + 2. \tag{3.72}$$

Разобьем область P_n на конечное число областей P_n^i так, чтобы нижняя сумма $\sum\limits_i m_i \Delta\sigma_i$ функции $f_+(x)$ для этого разбиения удовлетворяла неравенству [5])

$$0 \leqslant \int\limits_{\bar P_n} f_+(x)\,dx - \sum_i m_i \Delta\sigma_i < 1.$$

Тогда, заменив в левой части (3.72) интеграл нижней суммой, получим следующее неравенство:

$$\sum_i m_i \Delta\sigma_i > \int\limits_{\bar D_n} |f(x)|\,dx + n + 1. \tag{3.73}$$

[5]) Здесь $m_i = \inf\limits_{P_n^i} f_+(x)$, $\Delta\sigma_i$ — m-мерный объем P_n^i.

Так как $m_i \geqslant 0$, то оставим в сумме $\sum\limits_i m_i \Delta\sigma_i$ лишь те слагаемые, для которых $m_i > 0$. Объединение областей P_n^i, соответствующих оставшимся в сумме слагаемым, обозначим через $\tilde P_n$.

В области $\tilde P_n$ функция $f_+(x)$ положительна, поэтому в этой области $f_+(x) = f(x)$ (см. (3.66)). Следовательно, согласно (3.73) получаем неравенство

$$\int\limits_{\bar{\tilde P}_n} f(x)\,dx > \int\limits_{\bar D_n} |f(x)|\,dx + n + 1. \tag{3.74}$$

Обозначим через D_n^* объединение D_n и $\tilde P_n$. Тогда, складывая неравенство (3.74) с неравенством

$$\int\limits_{\bar D_n} f(x)\,dx \geqslant -\int\limits_{\bar D_n} |f(x)|\,dx,$$

заведомо справедливым для фиксированного нами n, получим

$$\int\limits_{\bar D_n^*} f(x)\,dx > n + 1. \tag{3.75}$$

Если для фиксированного нами номера n из двух интегралов в правой части (3.71) бо́льшим (или равным первому) будет второй, то, проделав аналогичные преобразования, учитывая, что в области $\tilde P_n$ $f_-(x) = -f(x)$, получим неравенство

$$\int\limits_{\bar D_n^*} f(x)\,dx < -n - 1. \tag{3.76}$$

Из соотношений (3.75) и (3.76) следует, что для любого $n = 1, 2, \ldots$

$$\Big|\int\limits_{\bar D_n^*} f(x)\,dx\Big| > n + 1. \tag{3.77}$$

Последовательность областей $\{D_{2n}^*\}$ удовлетворяет всем условиям определения 1, кроме, быть может, условия связности областей D_{2n}^* (связность областей D_n^* могла быть нарушена при отбрасывании из P_n тех областей P_n^i, на которых точная нижняя грань m_i равна нулю). *Малой деформацией сделаем эти области связными* [6]).

Соединим каждую область P_n^i из $\tilde P_n$ с областью D_n m-мерной кубируемой связной областью K_n^i (которую будем называть

[6]) Именно этот момент доказательства существенно использует требование $m \geqslant 2$ (при $m = 1$ описываемые рассуждения не проходят).

с в я з к о й или к а н а л о м) так, чтобы полученное множество стало связным. Поскольку число областей P_n^i в $\tilde P_n$ конечно, то и число каналов конечно. Обозначим объединение всех каналов через K_n. Наложим ограничение на m-мерный объем $V(K_n)$ каналов.

Так как функция $f(x)$ интегрируема, а следовательно, и ограничена на P_n, то

$$\Big|\int\limits_{\bar K_n} f(x)\,dx\Big| \leqslant \int\limits_{\bar K_n} |f(x)|\,dx \leqslant M \cdot V(K_n),$$

где $M = \sup\limits_{\bar P_n} |f(x)|$. Потребуем, чтобы m-мерный объем каналов $V(K_n)$ удовлетворял условию $V(K_n) < 1/M$. Тогда

$$\Big|\int\limits_{\bar K_n} f(x)\,dx\Big| < 1. \tag{3.78}$$

Из неравенства (3.77) и (3.78) получаем для любого n неравенство

$$\Big|\int\limits_{\overline{D_n^* \cup K_n}} f(x)\,dx\Big| > n. \tag{3.79}$$

Последовательность с в я з н ы х кубируемых областей $\{D_{2n}^* \cup K_{2n}\}$ монотонно исчерпывает область D [7]). Из неравенства (3.79) следует, что последовательность интегралов в левой части этого неравенства расходится, т. е. несобственный интеграл $\int\limits_D f(x)\,dx$ расходится. Но по условию теоремы этот интеграл сходится. Полученное противоречие доказывает справедливость нашего утверждения. Теорема полностью доказана.

4. Главное значение кратных несобственных интегралов. Обозначим через $B(R, x_0)$ m-мерный шар радиуса R с центром в точке x_0, и пусть начало координат находится в точке $0 \in E^m$.

О п р е д е л е н и е. *Пусть функция $f(x)$ определена при всех $x \in E^m$ и интегрируема в каждом шаре $B(R, 0)$. Будем говорить, что функция $f(x)$ и н т е г р и р у е м а п о К о ш и в E^m, если существует предел*

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{B(R,0)} f(x)\,dx.$$

Этот предел мы будем называть г л а в н ы м з н а ч е н и е м несоб-

[7]) Мы берем $\{D^*_{2n} \cup K_{2n}\}$ вместо $\{D^*_n \cup K_n\}$, чтобы удовлетворить условию $\overline{D_{2n} \cup K_{2n}} \subset D_{2(n+1)} \cup K_{2(n+1)}$ из определения 1.

ственного интеграла от функции $f(x)$ в смысле Коши и обозначать символом

$$\text{v. p.} \int\limits_{E^m} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{B(R,0)} f(x)\,dx.$$

П р и м е р. Нетрудно проверить, что для функции $f(x, y) = x$ в E^2

$$\int\limits_{B(R,0)} x\,dxdy = 0;$$

тем самым функция $f(x, y) = x$ интегрируема по Коши в E^2 и

$$\text{v. p.} \int\limits_{E^2} x\,dxdy = 0.$$

Отметим, что несобственный интеграл $\int\limits_{E^2} x\,dxdy$ расходится.

В случае, когда функция $f(x)$ имеет особенность в некоторой точке x_0 области $D \subset E^m$ и $f(x)$ интегрируема в каждой области $D_R = D \setminus B(R, x_0)$, где $B(R, x_0) \subset D$, интеграл в смысле Коши вводится как предел:

$$\text{v. p.} \int\limits_D f(x)\,dx = \lim_{R\to 0} \int\limits_{D_R} f(x)\,dx.$$

Г л а в а 4

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В этой главе мы перенесем понятие одномерного определенного интеграла, взятого по прямолинейному отрезку, на случай, когда областью интегрирования является отрезок некоторой плоской или пространственной кривой. Такого рода интегралы называются криволинейными.

§ 1. ПОНЯТИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

Рассмотрим на плоскости Oxy некоторую спрямляемую кривую L, не имеющую точек самопересечения и участков самоналегания. Предположим, что эта кривая определяется параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{4.1}$$

и сначала будем считать ее незамкнутой и ограниченной точками A и B с координатами $A(\varphi(a), \psi(a))$, $B(\varphi(b), \psi(b))$.

Пусть на кривой $L = AB$ определены три функции: $f(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$, каждая из которых является непрерывной (а следовательно, и равномерно непрерывной) в д о л ь э т о й к р и в о й (так, для функции $f(x, y)$ это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$ для любых точек $M_1, M_2 \in L$, расстояние между которыми меньше δ).

Разобьем сегмент $[a, b]$ при помощи точек $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ на n частичных сегментов $[t_{k-1}, t_k]$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). При этом кривая L распадается на n частичных дуг: M_0M_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}M_n$, где точки $M_k(x_k, y_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, имеют координаты $x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \psi(t_k)$.

Выберем на каждой частичной дуге $M_{k-1}M_k$ произвольную точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$, координаты которой отвечают некоторому принадлежащему сегменту $[t_{k-1}, t_k]$ значению τ_k параметра t, так что $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \psi(\tau_k)$. Обозначим символом Δl_k длину k-й частичной дуги $M_{k-1}M_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). Как было доказано в § 10 гл. 10 ч. 1, для Δl_k справедлива формула

$$\Delta l_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt. \tag{4.2}$$

Назовем д и а м е т р о м р а з б и е н и я к р и в о й L число $\Delta = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta l_k$.

Составим три интегральные суммы:

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta l_k; \tag{4.3¹}$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k; \tag{4.3²}$$

$$\sigma_3 = \sum_{k=1}^n Q(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k; \tag{4.3³}$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.

О п р е д е л е н и е 1. *Назовем число I п р е д е л о м и н т е г р а л ь н о й с у м м ы σ_s ($s = 1, 2, 3$) при стремлении к нулю диаметра разбиения Δ, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что (независимо от выбора точек N_k на частичных дугах $M_{k-1}M_k$) $|\sigma_s - I| < \varepsilon$, как только $\Delta < \delta$.*

О п р е д е л е н и е 2. *Если существует предел интегральной суммы σ_1 при $\Delta \to 0$, то этот предел называется к р и в о л и н е й н ы м и н т е г р а л о м п е р в о г о р о д а от функции $f(x, y)$ по кривой L и обозначается одним из символов*:

$$\int\limits_L f(x, y)\,dl \quad \text{или} \quad \int\limits_{AB} f(x, y)\,dl. \tag{4.4¹}$$

О п р е д е л е н и е 3. *Если существует предел интегральной суммы σ_2 [соответственно σ_3] при $\Delta \to 0$, то этот предел называется к р и в о л и н е й н ы м и н т е г р а л о м в т о р о г о р о д а от функции $P(x, y)$ [$Q(x, y)$] по кривой $L = AB$ и обозначается символом*

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx\ \Big[\text{соответственно} \int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy\Big]. \tag{4.4²}$$

Сумму

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + \int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy$$

принято называть о б щ и м к р и в о л и н е й н ы м и н т е г р а л о м в т о р о г о р о д а и обозначать символом

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{4.4³}$$

Из определения криволинейных интегралов следует, что:

1) криволинейный интеграл первого рода не зависит от того, в каком направлении (от A к B или от B к A) пробегает кривая

L, а для криволинейного интеграла второго рода изменение направления на кривой ведет к изменению знака, т. е.

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = -\int_{BA} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy;$$

2) физически криволинейный интеграл первого рода (4.4^1) представляет собой массу кривой L, линейная плотность вдоль которой равна $f(x, y)$; общий криволинейный интеграл второго рода (4.4^3) физически представляет собой работу по перемещению материальной точки из A в B вдоль кривой L под действием силы, имеющей составляющие $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

Замечание. Для пространственной кривой $L=AB$ аналогично вводятся криволинейный интеграл первого рода $\int_{AB} f(x, y, z)\,dl$ и три криволинейных интеграла второго рода

$$\int_{AB} P(x, y, z)\,dx, \quad \int_{AB} Q(x, y, z)\,dy, \quad \int_{AB} R(x, y, z)\,dz.$$

Сумму трех последних интегралов принято называть **общим криволинейным интегралом второго рода** и обозначать символом

$$\int_{AB} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz.$$

§ 2. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Определение. *Кривая L называется гладкой, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ из определяющих ее параметрических уравнений* (4.1) *имеют на сегменте $[a, b]$ непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ (т. е. производные непрерывны в интервале $a<t<b$ и обладают конечными предельными значениями в точке a справа и в точке b слева).*

Напомним, что в гл. 13 ч. 1 мы договорились называть **особыми точками** кривой L точки, соответствующие тому значению параметра t из $[a, b]$, для которого $[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2=0$, т. е. обе производные обращаются в нуль. Те точки кривой L, для которых $[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2\neq 0$, мы назвали **обыкновенными точками**.

Теорема 4.1. *Если кривая $L=AB$ является гладкой и не содержит особых точек и если функции $f(x, y)$, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вдоль этой кривой, то криволинейные интегралы* (4.4^1) *и* (4.4^2) *существуют и могут быть вычислены по следующим формулам, сводящим эти криволинейные интегралы к обычным определенным интегралам:*

$$\int_{AB} f(x, y)\,dl = \int_a^b f[\varphi(t), \psi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt; \qquad (4.5^1)$$

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx = \int_a^b P[\varphi(t), \psi(t)]\,\varphi'(t)\,dt; \qquad (4.5^2)$$

$$\int_{AB} Q(x, y)\,dy = \int_a^b Q[\varphi(t), \psi(t)]\,\psi'(t)\,dt. \qquad (4.5^3)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что определенные интегралы, стоящие в правых частях формул (4.5^1), (4.5^2), (4.5^3), существуют, ибо при сделанных нами предположениях подынтегральные функции в каждом из этих интегралов непрерывны на сегменте $a\leqslant t\leqslant b$.

Отметим также, что вывод соотношений (4.5^2) и (4.5^3) для криволинейных интегралов второго рода вполне аналогичен, поэтому мы будем выводить только соотношения (4.5^1) и (4.5^2) и доказывать существование интегралов (4.4^1) и (4.4^2).

Как и в § 1, разобьем сегмент $[a, b]$ на n частичных сегментов $[t_{k-1}, t_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$, и составим интегральные суммы (4.3^1), (4.3^2). Учитывая соотношение (4.2) и соотношение

$$\Delta x_k = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\,dt,$$

представим интегральные суммы (4.3^1) и (4.3^2) в следующем виде:

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n}\left\{f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)]\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt\right\};$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n}\left\{P[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)]\int_{t_{k-1}}^{t_k}\varphi'(t)\,dt\right\}.$$

Обозначим определенные интегралы, стоящие в правых частях формул (4.5^1) и (4.5^2), соответственно через I_1 и I_2 и представим эти интегралы по сегменту $[a, b]$ в виде суммы n интегралов по частичным сегментам $[t_{k-1}, t_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим и оценим разности

$$\sigma_1 - I_1 = \sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\{f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] - f[\varphi(t), \psi(t)]\}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt, \qquad (4.6^1)$$

$$\sigma_2 - I_2 = \sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\{P[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] - P[\varphi(t), \psi(t)]\}\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (4.6^2)$$

При сделанных нами предположениях о функциях $f(x, y)$, $P(x, y)$ и функциях (4.1) функции $f[\varphi(t), \psi(t)]$ и $P[\varphi(t), \psi(t)]$ как сложные функции аргумента t непрерывны на сегменте $a\leqslant t\leqslant b$, а следовательно, и равномерно непрерывны на этом сегменте.

Заметим теперь, что при стремлении к нулю диаметра разбиения Δ кривой L стремится к нулю и наибольшая из разностей $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.

Действительно, так как функции $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ непрерывны на $[a, b]$ и не обращаются в нуль одновременно, то

$$m = \min_{a\leqslant t\leqslant b}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2} > 0 \text{ и } \Delta l_k \geqslant m\int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m\Delta t_k, \text{ т. е.}$$

$\Delta t_k \leqslant \frac{1}{m}\Delta l_k$ (мы учли формулу (4.2) для длины Δl_k).

Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ можно указать $\delta>0$ такое, что при $\Delta<\delta$ фигурная скобка в формуле (4.6^1) по модулю меньше ε/l, где l — длина кривой L, а фигурная скобка в (4.6^2) по модулю меньше $\frac{\varepsilon}{M(b-a)}$, где $M = \max_{a\leqslant t\leqslant b}|\varphi'(t)|$.

Полагая, что диаметр разбиения Δ меньше δ, получим для разностей (4.6^1), (4.6^2) следующие оценки:

$$|\sigma_1 - I_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{l}\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt = \frac{\varepsilon}{l}\sum_{k=1}^{n}\Delta l_k = \varepsilon,$$

$$|\sigma_2 - I_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{M(b-a)}\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}|\varphi'(t)|\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{M(b-a)}M\sum_{k=1}^{n}\Delta t_k = \varepsilon.$$

Итак, мы доказали, что интегральные суммы σ_1 и σ_2 при $\Delta\to 0$ имеют пределы, соответственно равные I_1 и I_2. Таким образом, доказано существование криволинейных интегралов (4.4^1), (4.4^2) и справедливость для них формул (4.5^1), (4.5^2) соответственно. Отметим, что при выводе формулы (4.5^2) мы не использовали условия непрерывности функции $\psi'(t)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Будем называть кривую L **кусочно гладкой**, если она непрерывна и распадается на конечное число не имеющих общих внутренних точек кусков, каждый из которых представляет собой гладкую кривую. В случае кусочно гладкой кривой L криволинейные интегралы по этой кривой естественно определить как суммы соответствующих криволинейных интегра-

лов по всем гладким частям, составляющим кривую L. При этом равенства (4.5^1), (4.5^2), (4.5^3) будут справедливы и для кусочно гладкой кривой L. Эти равенства справедливы и в случае, когда функции $f(x, y)$, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются лишь кусочно непрерывными вдоль кривой L (т. е. когда кривая L распадается на конечное число не имеющих общих внутренних точек кусков, вдоль каждого из которых указанные функции непрерывны).

Замечание 2. Аналогичные результаты и формулы справедливы и для криволинейных интегралов, взятых по пространственной кривой

$$L = AB = \{(x, y, z):\ x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t) \text{ при } a\leqslant t\leqslant b\}.$$

Так, формулы для вычисления этих интегралов имеют следующий вид:

$$\int_{AB} f(x, y, z)\,dl = \int_a^b f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,dt;$$

$$\int_{AB} P(x, y, z)\,dx = \int_a^b P[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\,\varphi'(t)\,dt;$$

$$\int_{AB} Q(x, y, z)\,dy = \int_a^b Q[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\,\psi'(t)\,dt;$$

$$\int_{AB} R(x, y, z)\,dz = \int_a^b R[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\,\chi'(t)\,dt.$$

Замечание 3. Выше было отмечено, что криволинейный интеграл второго рода зависит от направления обхода кривой $L=AB$. Поэтому следует договориться о том, что мы будем понимать под символом

$$\int_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \qquad (4.7)$$

в случае, когда L — замкнутая кривая (т. е. когда точка B совпадает с точкой A).

Из двух возможных направлений обхода замкнутого контура L назовем **положительным** то направление обхода, при котором область, лежащая внутри этого контура, остается по левую сторону по отношению к точке, совершающей обход (т. е. направление движения «против часовой стрелки»).

Будем считать, что *в интеграле* (4.7) *по замкнутому контуру L этот контур всегда обходится в положительном направлении.*

В случае, когда необходимо подчеркнуть, что контур L замк-

нут, будем использовать следующую форму записи интеграла (4.7):

$$\oint_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Замечание 4. Криволинейные интегралы обладают теми же свойствами, что и обычные определенные интегралы (доказательства аналогичны изложенным в § 4 гл. 9 ч. 1). Отметим, что при более жестких предположениях указанные свойства сразу вытекают из формул (4.5^1), (4.5^2), (4.5^3). Перечислим эти свойства применительно к криволинейным интегралам первого рода.

1°. Линейное свойство. *Если для функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ существуют криволинейные интегралы по кривой AB и если α и β — любые постоянные, то для функции $[\alpha f(x, y)+\beta g(x, y)]$ также существует криволинейный интеграл по кривой AB, причем*

$$\int_{AB}[\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]\,dl = \alpha\int_{AB} f(x, y)\,dl + \beta\int_{AB} g(x, y)\,dl.$$

2°. Аддитивность. *Если дуга AB составлена из двух дуг AC и CB, не имеющих общих внутренних точек, и если для функции $f(x, y)$ существует криволинейный интеграл по дуге AB, то для этой функции существует криволинейный интеграл по каждой из дуг AC и CB, причем*

$$\int_{AB} f(x, y)\,dl = \int_{AC} f(x, y)\,dl + \int_{CB} f(x, y)\,dl.$$

3°. Оценка модуля интеграла. *Если существует криволинейный интеграл по кривой AB от функции $f(x, y)$, то существует и криволинейный интеграл по кривой AB от функции $|f(x, y)|$, причем*

$$\left|\int_{AB} f(x, y)\,dl\right| \leqslant \int_{AB}|f(x, y)|\,dl.$$

4°. Формула среднего значения. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна вдоль кривой AB, то на этой кривой найдется точка M такая, что*

$$\int_{AB} f(x, y)\,dl = lf(M),$$

где l — длина кривой AB.

Замечание 5. В полной аналогии с изложенной здесь теорией криволинейного интеграла на плоскости строится теория криволинейного интеграла в пространстве E^n $(n>2)$.

Примеры. 1°. Найти длину дуги пространственной кривой L, определяемой параметрическими уравнениями

$$x=e^{-t}\cos t, \quad y=e^{-t}\sin t, \quad z=e^{-t} \quad \text{при } 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

Задача сводится к вычислению криволинейного интеграла первого рода $\int_L 1\,dl$. С помощью формулы для вычисления криволинейного интеграла первого рода, приведенной в замечании 2, получим

$$\int_L 1\,dl = \int_0^{2\pi}\sqrt{[(e^{-t}\cos t)']^2+[(e^{-t}\sin t)']^2+[(e^{-t})']^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{e^{-2t}+e^{-2t}+e^{-2t}}\,dt = \sqrt{3}\,(1-e^{-2\pi}).$$

2°. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_{AB}(x+y)\,dx + (x-y)\,dy,$$

в котором AB — часть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $y\geqslant 0$, $A(a, 0)$, $B(0, b)$. Указанную кривую можно задать параметрическими уравнениями

$$x = a\cos t, \ y = b\sin t \text{ при } 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Поэтому с помощью формул (4.5^2), (4.5^3) получим

$$I = \int_0^{\pi/2}[(a\cos t + b\sin t)(-a\sin t) + (a\cos t - b\sin t)\,b\cos t]\,dt =$$

$$= \left[\frac{ab}{2}\sin(2t) + \frac{a^2+b^2}{4}\cos(2t)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Отметим, что подынтегральное выражение $(x+y)\,dx+(x-y)\,dy$ является полным дифференциалом функции

$$u(x, y) = \frac{x^2-y^2}{2} + xy.$$

Как будет доказано в гл. 6, из этого факта следует, что интеграл I не зависит от кусочно гладкого пути интегрирования, соединяющего точки A и B (рассмотренная часть эллипса — лишь одна из таких кривых), и равен разности

$$u(B) - u(A) = u(0, b) - u(a, 0) = -\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Глава 5

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В этой главе будет рассмотрен вопрос об интегрировании функций, заданных на поверхностях в трехмерном евклидовом пространстве E^3, а также исследуется вопрос о понятии поверхности и понятии площади поверхности.

§ 1. ПОНЯТИЯ ПОВЕРХНОСТИ И ЕЕ ПЛОЩАДИ

1. Понятие поверхности.

Определение 1. *Отображение f области G на плоскости на множество G^* трехмерного пространства называется **гомеоморфным**, если это отображение осуществляет взаимно однозначное соответствие между точками G и G^*, при котором каждая фундаментальная последовательность точек G переходит в фундаментальную последовательность точек G^* и, наоборот, каждая фундаментальная последовательность точек G^* является образом фундаментальной последовательности точек G.*

Определение 2. *Отображение f области G на G^* называется **локально гомеоморфным**, если у каждой точки G есть окрестность, которая гомеоморфно отображается на свой образ.*

Определение 3. *Область G на плоскости T называется **элементарной**, если эта область является образом открытого круга D при гомеоморфном отображении этого круга на плоскость T.*

Определение 4. *Связная область G на плоскости T называется **простой**, если любая точка G имеет окрестность, являющуюся элементарной областью.*

Определение 5. *Множество точек Φ пространства называется **поверхностью**, если это множество является образом простой плоской области G при локально гомеоморфном отображении f области G в пространство E^3.*

В дальнейшем мы договоримся называть **окрестностью точки M поверхности Φ** подмножество точек Φ, принадлежащее окрестности точки M в E^3.

Пример. Пусть G — простая область на плоскости Oxy (например, круг), (x, y) — координаты точек $M\in G$, $z=z(M)$ — непрерывная в G функция, G^* — график этой функции. Очевидно, отображение f области G на G^*, задаваемое соотношениями

$$x=u, \quad y=v, \quad z=z(u, v),$$

является гомеоморфным отображением этой области на множество G^*, а $\Phi=G^*$ является поверхностью.

Пусть на плоскости (u, v) задана простая область G и для всех точек этой области определены три функции:

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v), \qquad (5.1)$$

или, что то же самое, одна векторная функция

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v), \qquad (5.1')$$

где $\mathbf{r}(u, v)$ — вектор с компонентами $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$.

Будем считать выполненными следующие **два требования** A:

1) функции (5.1) имеют в области G непрерывные частные производные первого порядка по переменным u и v;

2) всюду в области G матрица

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \qquad (5.2)$$

имеет ранг, равный двум.

Утверждение. *При выполнении этих двух требований A множество Φ точек, определяемых уравнениями* (5.1), *представляет собой поверхность*, т. е. является образом плоской области G при локально гомеоморфном отображении G в E^3.

Пусть $N_0(u_0, v_0)$ — любая точка G. Ясно, что малая окрестность этой точки отображается в малую окрестность точки $M(x_0, y_0, z_0)$, где $x_0=x(u_0, v_0)$, $y_0=y(u_0, v_0)$, $z_0=z(u_0, v_0)$ (для этого достаточно, чтобы функции (5.1) являлись непрерывными в G, что в нашем случае заведомо выполняется).

Ясно также, что если $N_n(u_n, v_n)$ — фундаментальная последовательность точек в малой окрестности точки N_0, то последовательность образов этих точек $M_n(x_n, y_n, z_n)$, где $x_n=x(N_n)$, $y_n=y(N_n)$, $z_n=z(N_n)$, также является фундаментальной в Φ. Это сразу вытекает из непрерывности функций (5.1); например, разность $|x_{n+p}-x_n|=|x(N_{n+p})-x(N_n)|$ может быть сделана меньше произвольного числа $\varepsilon>0$ при $\rho(N_{n+p}, N_n)<\delta=\delta(\varepsilon)$.

Остается доказать, что при отображении, определяемом уравнениями (5.1), каждой точке множества Φ из достаточно малой окрестности точки M_0 отвечает определенная точка области G из малой окрестности точки N_0, причем любой фундаментальной последовательности точек $\{M_n\}$ из указанной окрестности точки M_0 отвечает фундаментальная последовательность $\{N_n\}$ точек G.

Так как в каждой точке $N_0(u_0, v_0)\in G$ ранг матрицы (5.2) равен двум, то в этой точке N_0 отличен от нуля хотя бы один минор второго порядка матрицы (5.2).

Пусть это будет минор

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0 \text{ в точке } N_0.$$

Объединяя это условие с первым из двух требований A, придем к выводу, что для системы

$$\begin{cases} x(u, v) - x = 0; \\ y(u, v) - y = 0 \end{cases} \qquad (5.3)$$

в окрестности точки M_0 выполнены все условия теоремы Юнга — Ковалевского (см. § 2 гл. 13 ч. 1). Поэтому система (5.3) имеет в окрестности точки M_0 единственное непрерывное и дифференцируемое решение

$$\begin{cases} u = u(x, y); \\ v = v(x, y). \end{cases} \qquad (5.4)$$

Это означает, что существует гомеоморфное отображение малой окрестности точки $N_0\in G$ на малую окрестность точки $P_0(x_0, y_0)$ плоскости Oxy. (В одну сторону это отображение задается непрерывными функциями (5.4), а в другую сторону — первыми двумя соотношениями (5.1), в которых функции $x=x(u, v)$ и $y=y(u, v)$ также непрерывны; непрерывность и тех и других функций обеспечивает перевод фундаментальной последовательности в окрестности одной из точек N_0 или P_0 в фундаментальную последовательность в окрестности другой из этих точек.)

Подставляя функции (5.4) в третью функцию (5.1), получим непрерывную в окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$ функцию

$$z = z[u(x, y), v(x, y)] = \varphi(x, y). \qquad (5.5)$$

Эта функция осуществляет гомеоморфное отображение малой окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$ плоскости Oxy на малую окрестность точки $M_0(x_0, y_0, z_0)\in\Phi$. Можно сказать, что (5.5) проектирует Φ в малой окрестности точки M_0 на плоскость Oxy.

Так как суперпозиция гомеоморфных отображений представляет собой снова гомеоморфное отображение, то гомеоморфно и отображение малой окрестности точки $N_0\in G$ на малую окрестность точки $M_0\in\Phi$.

Таким образом, множество Φ точек, определяемых уравнениями (5.1), при выполнении этих требований A представляет собой поверхность.

Замечание 1. Поверхность Ф, определяемую уравнениями (5.1), при выполнении первого из двух требований A принято называть гладкой, а при выполнении второго из требований A — не имеющей особых точек.

Итак, можно сказать, что поверхность Ф, определяемая уравнениями (5.1), при выполнении этих требований A, является гладкой и не имеет особых точек.

Замечание 2. Попутно мы установили, что гладкая без особых точек поверхность в достаточно малой окрестности каждой из своих точек однозначно проектируется хотя бы на одну из трех координатных плоскостей.

Рассмотрим поверхность Ф, определяемую уравнениями (5.1), для которых выполнены два требования A.

Записав уравнения (5.1) в векторном виде (5.1′), выясним геометрический смысл векторной функции $\mathbf{r}(u, v)$. Если фиксировать некоторое значение $v=v_0=\text{const}$ из области G, то уравнение $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v_0)$ будет определять кривую на поверхности Ф, называемую координатной линией, а вектор $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v_0)$ будет являться касательным к этой линии. Аналогично при $u=u_0=\text{const}$ уравнение $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u_0, v)$ будет определять другую координатную линию, а вектор $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v)$ будет касательным к этой линии. Через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $x_0=x(u_0, v_0)$, $y_0=y(u_0, v_0)$, $z_0=z(u_0, v_0)$, будут проходить обе указанные линии.

Второе условие требований A, говорящее о том, что ранг матрицы (5.2) равен двум, т. е. условие отсутствия особых точек, означает, что векторы $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$, компоненты которых составляют строки матрицы (5.2), являются линейно независимыми, т. е. неколлинеарными. Это означает, что эти два вектора определяют плоскость, которая является касательной плоскостью к поверхности Ф в точке M_0. Нормальный вектор этой касательной плоскости называется вектором нормали (или нормалью) к поверхности Ф в точке M_0. Этот вектор может быть определен как векторное произведение векторов $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$. Таким образом, вектор

$$\mathbf{n}=\frac{\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]}{\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right|} \tag{5.6}$$

представляет собой вектор единичной нормали к поверхности Ф. В силу требований, наложенных на функции (5.1), этот вектор непрерывен по u и v в некоторой окрестности произволь-

ной точки поверхности. В этом случае говорят, что *в окрестности любой точки гладкой поверхности без особых точек существует непрерывное векторное поле нормалей.*

В целом на всей поверхности такого непрерывного поля нормалей может и не существовать.

Пример. Лист Мёбиуса. Если склеить прямоугольник $ABB'A'$ так, чтобы A совпала с B', а B совпала с A', получится поверхность, называемая листом Мёбиуса[1]. При обходе по листу Мёбиуса нормаль меняет направление на противоположное (см. рис. 5.1).

В дальнейшем будем рассматривать только такие поверхности Ф, на которых в целом существует непрерывное поле нормалей. Такие поверхности принято называть двусторонними.

Поверхность Ф называется полной, если любая фундаментальная последовательность точек этой поверхности сходится к точке этой поверхности.

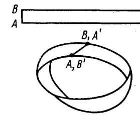

Рис. 5.1

Поверхность Ф называется ограниченной, если существует трехмерный шар, содержащий все точки этой поверхности.

Плоскость, сфера, эллипсоид, однополостный гиперболоид — примеры полных поверхностей. При этом сфера и эллипсоид — ограниченные поверхности. Круг без границы, любое открытое связное множество на сфере — неполные поверхности.

В дальнейшем мы будем рассматривать поверхность Ф, определяемую уравнениями (5.1) и удовлетворяющую пяти требованиям: она должна быть 1) гладкой, 2) без особых точек, 3) двусторонней, 4) полной и 5) ограниченной.

2. Вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Если Ф — гладкая поверхность и M_0 — не особая ее точка, то достаточно малая окрестность точки M_0 однозначно проектируется на касательную плоскость, проходящую через любую точку этой окрестности.*

Доказательство. Пусть окрестность $\widehat{Ф}$ точки M_0 такова, что: 1) нормаль в пределах этой окрестности составляет с нормалью в точке M_0 угол, меньший $\pi/4$, 2) окрестность $\widehat{Ф}$ однозначно проектируется на некоторый круг в одной из координатных плоскостей (например, Oxy). Возможность выбора такой окрестности $\widehat{Ф}$ вытекает из того, что в предыдущем пункте было установлено существование окрестности рассматриваемой точки M_0, обладающей двумя свойствами: 1) в этой окрестности существует

[1] А. Мёбиус — немецкий математик (1790—1868).

непрерывное векторное поле нормалей; 2) эта окрестность однозначно проектируется на одну из координатных плоскостей (очевидно, в этой окрестности есть часть, проектирующаяся на некоторый круг в координатной плоскости).

Отметим, что любые две нормали к точкам $\widehat{Ф}$ составляют угол, меньший $\pi/2$.

Предположим, что рассматриваемая окрестность $\widehat{Ф}$ не проектируется однозначно на касательную плоскость, проходящую через некоторую точку $M\in\widehat{Ф}$. Тогда в этой окрестности найдутся две точки P и Q такие, что хорда PQ параллельна нормали к Ф в точке M. Рассмотрим линию пересечения $\widehat{Ф}$ с плоскостью, параллельной оси Oz и проходящей через хорду PQ (предполагаем, что $\widehat{Ф}$ однозначно проектируется на плоскость Oxy). На этой линии в силу теоремы Лагранжа найдется точка N, касательная к которой параллельна хорде PQ, а поэтому параллельна нормали в точке M. Это означает, что нормали в точках M и N составляют угол $\pi/2$, что противоречит выбору $\widehat{Ф}$. Полученное противоречие убеждает нас в справедливости леммы. Лемма доказана.

Будем говорить, что участок поверхности имеет размеры меньше δ $(\delta>0)$, если он лежит внутри некоторого шара радиуса $\delta/2$.

Лемма 2. *Для гладкой ограниченной полной поверхности Ф без особых точек найдется число $\delta>0$ такое, что любой участок Ф, размеры которого меньше δ, однозначно проектируется* а) *на одну из координатных плоскостей,* б) *на касательную плоскость, проходящую через любую точку этого участка.*

Доказательство. Выше, в замечании 2 и в лемме 1, мы доказали, что для каждой точки поверхности Ф найдется достаточно малая окрестность $\widehat{Ф}$, которая однозначно проектируется а) на одну из координатных плоскостей, б) на касательную плоскость, проходящую через любую точку $\widehat{Ф}$.

Предположим, что утверждение леммы неверно, т. е. не найдется числа $\delta>0$, указанного в формулировке леммы. Тогда для любого $\delta_n=1/n$ $(n=1, 2, \ldots)$ найдется участок $\widehat{Ф}_n$, имеющий размеры меньше δ_n и не проектирующийся однозначно либо на одну из координатных плоскостей, либо на касательную плоскость, проходящую через некоторую точку $M_n\in\widehat{Ф}_n$. Выберем в каждой части $\widehat{Ф}_n$ точку $\widehat{M}_n$ и выделим из последовательности $\{\widehat{M}_n\}$ точек ограниченной полной поверхности Ф подпоследовательность $\{\widehat{M}_{k_n}\}$, сходящуюся к некоторой точке $M_0\in Ф$.

В силу замечания 2 и леммы 1 найдется достаточно малая окрестность $\widehat{Ф}$ точки M_0, которая однозначно проектируется на одну из координатных плоскостей и на касательную плоскость,

проходящую через любую точку $\widehat{Ф}$. Все $\widehat{Ф}_{k_n}$, начиная с некоторого номера k_n, попадут внутрь $\widehat{Ф}$, а это противоречит выбору частей $\widehat{Ф}_n$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть Ф — гладкая без особых точек двусторонняя полная ограниченная поверхность, определяемая уравнениями* (5.1). *Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для каждого участка поверхности Ф, имеющего размеры меньше δ, угол γ между двумя любыми нормалями к точкам этого участка удовлетворяет условию*

$$\cos\gamma=1-\alpha, \tag{5.7}$$

где $0\leqslant\alpha<\varepsilon$.

Доказательство. Поверхность Ф двусторонняя, поэтому поле нормалей непрерывно, а следовательно, и равномерно непрерывно на всей поверхности Ф. Это означает, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для любых двух точек M_1 и M_2, для которых $\rho(M_1, M_2)<\delta$, справедливо неравенство

$$|\mathbf{n}(M_2)-\mathbf{n}(M_1)|<\sqrt{2\varepsilon} \tag{5.8}$$

($\mathbf{n}$ — вектор единичной нормали).

Так как

$$\cos\gamma=(\mathbf{n}(M_1), \mathbf{n}(M_2)),$$

а величина

$$\alpha=\frac{1}{2}(\mathbf{n}(M_2)-\mathbf{n}(M_1))^2=$$

$$=\frac{1}{2}|\mathbf{n}(M_2)|^2+\frac{1}{2}|\mathbf{n}(M_1)|^2-(\mathbf{n}(M_1), \mathbf{n}(M_2))=1-\cos\gamma,$$

то

$$\cos\gamma=1-\alpha$$

и для α в силу (5.8) справедливы неравенства

$$0\leqslant\alpha<\frac{1}{2}(\sqrt{2\varepsilon})^2=\varepsilon.$$

Лемма доказана.

3. Площадь поверхности. Пусть Ф — поверхность, определяемая уравнениями (5.1) и удовлетворяющая указанным выше пяти требованиям (гладкая без особых точек ограниченная полная двусторонняя). С помощью гладких кривых разобьем Ф на конечное число гладких участков $Ф_i$, имеющих размер меньше δ, где δ достаточно мало (и определяется условиями леммы 2). Обозначим через Δ максимальный из размеров частей $Ф_i$ (диаметр разбиения). На каждом участке $Ф_i$ выберем произвольную точку M_i и спроектируем $Ф_i$ на касательную плоскость, проходящую через точку M_i. Пусть σ_i — площадь проекции $Ф_i$ на указанную ка-

сательную плоскость. Составим сумму площадей проекций всех участков

$$\sum_i \sigma_i. \tag{5.9}$$

Определение 1. *Число σ называется пределом сумм* (5.9) *при $\Delta\to 0$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всех разбиений Ф гладкими кривыми на конечное число частей $Ф_i$, для которых $\Delta<\delta$, независимо от выбора точек M_i на частях $Ф_i$, выполняется неравенство*

$$\left|\sum_i \sigma_i-\sigma\right|<\varepsilon.$$

Определение 2. *Если для поверхности Ф существует предел σ сумм* (5.9) *при $\Delta\to 0$, то поверхность Ф называется квадрируемой, а число σ называется ее площадью.*

Замечание. Нельзя получить площадь поверхности, аппроксимируя поверхность вписанными многогранниками при измельчении размеров граней и беря в качестве площади точную верхнюю грань площадей вписанных многогранников (как мы это делали при нахождении длины кривой). Существует классический пример Шварца[2] (так называемый «сапог Шварца»), показывающий, что у площадей вписанных в цилиндрическую поверхность многогранников не существует конечной точной верхней грани.

Теорема 5.1. *Гладкая ограниченная полная двусторонняя поверхность Ф без особых точек, определяемая уравнениями* (5.1), *квадрируема, и для ее площади σ справедливо равенство*

$$\sigma=\iint_G\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right|du\,dv. \tag{5.10}$$

Доказательство. При условиях теоремы подынтегральная функция в (5.10) непрерывна в G и интеграл (5.10) существует.

Фиксируем любое $\varepsilon>0$ и по нему $\delta>0$ такое, что выполнены два условия:

1) любая часть $Ф_i$ поверхности Ф, размеры которой меньше δ, однозначно проектируется на касательную плоскость, проходящую через любую точку $Ф_i$;

2) косинус угла γ между двумя нормалями каждого участка $Ф_i$ размера меньше δ, представим в виде $\cos\gamma=1-\alpha_i$, где $\alpha_i<\varepsilon/\sigma$ и $\alpha_i\leqslant 1$ (σ — величина интеграла (5.10)).

Такой выбор числа $\delta>0$ возможен в силу лемм 2 и 3.

[2] Г. А. Шварц — немецкий математик (1843—1921). Более подробно о примере Шварца см. конец п. 1 § 2 гл. 5 книги В. А. Ильина и Э. Г. Позняка «Основы математического анализа. Ч. 2» (М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1982).

Разобьем с помощью гладких кривых поверхность Ф на частичные участки $Ф_i$ размера меньше δ и, выбрав на каждом участке $Ф_i$ произвольную точку M_i, спроектируем $Ф_i$ на касательную плоскость в точке M_i. Обозначим через σ_i площадь проекции и составим сумму (5.9).

Для вычисления площади σ_i плоской области воспользуемся формулой замены переменных в двойном интеграле. Выберем декартову систему координат так, чтобы ее начало совпало с M_i, ось Oz была направлена по вектору нормали к поверхности в M_i, а оси Ox и Oy были бы расположены в касательной плоскости в точке M_i. В этой системе координат поверхность Ф определяется параметрическими уравнениями (5.1), а вектор нормали $\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]$ имеет координаты $\{A, B, C\}$, где

$$A=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

Отметим, что косинус угла γ_M между нормалью в точке M участка $Ф_i$ и осью Oz равен

$$\cos\gamma_M=\left.\frac{C}{\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right|}\right|_M. \tag{5.11}$$

Для точек участка $Ф_i$, в силу выбора δ и ориентации оси Oz, $C>0$. Ясно, что угол γ_M является углом между нормалями в точках M и M_i участка $Ф_i$, и поэтому для него справедливо представление (5.7).

Если части $Ф_i$ отвечает часть G_i простой плоской области G, то, используя формулу для площади плоской области при переходе от координат (x, y) к координатам (u, v) с помощью соотношений $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, получим

$$\sigma_i=\iint_{G_i}\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\,du\,dv. \tag{5.12}$$

$\left(\text{Мы учли, что величина } C=\frac{D(x, y)}{D(u, v)}>0.\right)$

Приняв во внимание выражение (5.11) для $\cos\gamma_M$, перепишем (5.12) в виде

$$\sigma_i=\iint_{G_i}\cos\gamma_M\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right|du\,dv. \tag{5.13}$$

Применяя к интегралу (5.13) первую формулу среднего значения, получим

$$\sigma_i=\cos\gamma_{M_i^*}\iint_{G_i}\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right|du\,dv, \tag{5.14}$$

где M_i^* — некоторая точка части $Ф_i$. Заменив $\cos\gamma_{M_i^*}$ в (5.14) представлением (5.7), получим равенства

$$\sigma_i=(1-\alpha_i)\iint_{G_i}\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right|du\,dv. \tag{5.15}$$

Просуммируем эти равенства по всем i, учитывая, что

$$\sum_i\iint_{G_i}\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right|du\,dv=\iint_G\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right|du\,dv=\sigma.$$

Получим

$$\sum_i\sigma_i=\sigma-\sum_i\alpha_i\iint_{G_i}\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right|du\,dv.$$

Отсюда, используя оценку для α_i, будем иметь

$$\left|\sum_i\sigma_i-\sigma\right|\leqslant\sum_i|\alpha_i|\iint_{G_i}\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right|du\,dv\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{\sigma}\sum_i\iint_{G_i}\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right|du\,dv=\frac{\varepsilon}{\sigma}\sigma=\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Формула (5.10) инвариантна относительно выбора осей координат.

Замечание 2. Теорема 5.1 доказана в предположении, что поверхность Ф определяется уравнениями (5.1). В общем случае согласно лемме 2 поверхность Ф может быть разбита на конечное число частей, каждая из которых определяется своими уравнениями (5.1). После этого площадь поверхности можно определить как сумму площадей указанных частей. Площадь каждой такой части может быть вычислена по формуле (5.10). Таким образом, имеет место следующая

Теорема 5.1*. *Гладкая ограниченная полная двусторонняя поверхность без особых точек квадрируема.*

Замечание 3. Пусть поверхность Ф кусочно гладкая, т. е. составлена из конечного числа гладких ограниченных полных двусторонних поверхностей. Очевидно, поверхность Ф квадрируема, и

ее площадь может быть определена как сумма площадей составляющих ее поверхностей.

Замечание 4. Если ввести обозначения

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)^2=\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|^2=E,\quad \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)^2=\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|^2=D,\quad \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)=F,$$

то, поскольку для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ справедливо равенство $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2+(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2=|\mathbf{a}|^2\cdot|\mathbf{b}|^2$, получим

$$\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right|=ED-F^2. \tag{5.16}$$

Поэтому выражение (5.10) для площади поверхности можно записать также в следующей форме:

$$\sigma=\iint_G\sqrt{ED-F^2}\,du\,dv. \tag{5.17}$$

Замечание 5. Площадь поверхности обладает свойством аддитивности: если поверхность Ф разбита кусочно гладкой кривой на части $Ф_1$ и $Ф_2$, не имеющие общих внутренних точек, то площадь поверхности Ф равна сумме площадей частей $Ф_1$ и $Ф_2$.

Это свойство вытекает из представления площади поверхности с помощью интеграла и аддитивного свойства интеграла.

§ 2. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пусть Ф — гладкая, двусторонняя полная ограниченная поверхность без особых точек, определяемая параметрическими уравнениями (5.1) (или, что то же самое, (5.1′)) в области G.

Пусть на Ф определены четыре функции: $f(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, каждая из которых является непрерывной (а, следовательно, и равномерно непрерывной) на множестве точек поверхности Ф.

Разобьем поверхность Ф при помощи гладких или кусочно гладких кривых на конечное число частичных поверхностей $Ф_i$ и обозначим через Δ максимальный размер частей $Ф_i$ (диаметр разбиения поверхности). Выберем на каждой частичной поверхности $Ф_i$ произвольную точку M_i.

Пусть $\mathbf{n}(M_i)$ — единичная нормаль в точке M_i, а $\cos X_i$, $\cos Y_i$, $\cos Z_i$ — компоненты этой единичной нормали (или, как их называют, направляющие косинусы). Обозначим через σ_i площадь частичной поверхности $Ф_i$. Как показано выше (см. (5.17)),

$$\sigma_i=\iint_{G_i}\sqrt{ED-F^2}\,du\,dv,$$

где G_i — подобласть G, образом которой является $Ф_i$.

Составим четыре суммы:

$$\Sigma_1=\sum_i f(M_i)\,\sigma_i; \tag{5.18¹}$$

$$\Sigma_2=\sum_i P(M_i)\,\sigma_i\cos X_i; \tag{5.18²}$$

$$\Sigma_3=\sum_i Q(M_i)\,\sigma_i\cos Y_i; \tag{5.18³}$$

$$\Sigma_4=\sum_i R(M_i)\,\sigma_i\cos Z_i. \tag{5.18⁴}$$

Определение 1. *Число I_k $(k=1, 2, 3, 4)$ называется пределом сумм Σ_k при $\Delta\to 0$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при $\Delta<\delta$ (независимо от выбора точек $M_i\in Ф_i$) выполняется неравенство*

$$|\Sigma_k-I_k|<\varepsilon.$$

Определение 2. *Если при $\Delta\to 0$ существует предел сумм Σ_1, то этот предел называется поверхностным интегралом первого рода от функции $f(x, y, z)$ по поверхности Ф и обозначается символом*

$$I_1=\iint_Ф f(M)\,d\sigma. \tag{5.19¹}$$

Определение 2*. *Если при $\Delta\to 0$ существуют пределы сумм Σ_k, где $k=2$, 3 или 4, то эти пределы называются поверхностными интегралами второго рода и обозначаются соответственно символами*

$$I_2=\iint_Ф P(M)\cos X\,d\sigma; \tag{5.19²}$$

$$I_3=\iint_Ф Q(M)\cos Y\,d\sigma; \tag{5.19³}$$

$$I_4=\iint_Ф R(M)\cos Z\,d\sigma. \tag{5.19⁴}$$

Сумма последних трех интегралов называется общим поверхностным интегралом второго рода. Этот интеграл может быть записан в виде

$$\iint_Ф(\mathbf{A}, \mathbf{n})\,d\sigma, \tag{5.19⁵}$$

где $\mathbf{A}=\mathbf{A}(x, y, z)$ — вектор с компонентами $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$,

$R(x, y, z)$, а $\mathbf{n}=\{\cos X, \cos Y, \cos Z\}$ — вектор единичной нормали к поверхности Φ.

Из определений поверхностных интегралов следует, что:

1) поверхностный интеграл первого рода не зависит от выбора стороны поверхности и не меняется при изменении направления нормали на противоположное, а поверхностные интегралы второго рода меняют знак при изменении направления нормали на противоположное;

2) поверхностный интеграл первого рода (5.19^1) и общий поверхностный интеграл второго рода (5.19^5) не зависят от выбора системы координат и инвариантны относительно перехода к новым координатам;

3) физически интеграл (5.19^5) представляет собой поток вектора $\mathbf{A}$ через поверхность Φ, а интеграл (5.19^1) дает массу нагруженной поверхности Φ при условии, что поверхностная плотность распределения массы равна $f(x, y, z)$;

4) каждый из поверхностных интегралов второго рода (5.19^2)—(5.19^4) сводится к поверхностному интегралу первого рода (5.19^1): достаточно взять в поверхностном интеграле первого рода подынтегральную функцию $f(M)$ соответственно равной $P(M)\cos X$, $Q(M)\cos Y$ и $R(M)\cos Z$, причем если P, Q и R являются непрерывными на Φ, то и f окажется непрерывной вдоль Φ.

Отметим, что в случае замкнутой поверхности Φ вектор нормали всегда считают направленным во внешность области, ограниченной этой поверхностью.

Теорема 5.2. *Если Φ гладкая двусторонняя полная ограниченная поверхность без особых точек, задаваемая уравнениями* (5.1), *а функция $f(x, y, z)$ [соответственно функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$] непрерывна вдоль Φ, то поверхностный интеграл* (5.19^1) *[соответствующий из поверхностных интегралов* (5.19^2)—(5.19^4)*] существует и сводится к обычному двойному интегралу с помощью формулы*

$$\iint_{\Phi} f(M)\,d\sigma=\iint_{G} f[x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)]\sqrt{ED-F^2}\,du\,dv \qquad (5.20^1)$$

[с помощью соответствующей из формул

$$\iint_{\Phi} P(M)\cos X\,d\sigma=\iint_{G} P[x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)]\times$$
$$\times\cos X\sqrt{ED-F^2}\,du\,dv; \qquad (5.20^2)$$

$$\iint_{\Phi} Q(M)\cos Y\,d\sigma=\iint_{G} Q[x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)]\times$$
$$\times\cos Y\sqrt{ED-F^2}\,du\,dv; \qquad (5.20^3)$$

$$\iint_{\Phi} R(M)\cos Z\,d\sigma=\iint_{G} R[x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)]\times$$
$$\times\cos Z\sqrt{ED-F^2}\,du\,dv\Big]. \qquad (5.20^4)$$

Доказательство. Достаточно провести доказательство существования только интеграла (5.19^1) и справедливости формулы (5.20^1), так как все поверхностные интегралы второго рода сводятся к этому интегралу.

Заметим, что интеграл, стоящий в правой части (5.20^1) (обозначим его I_1), существует (поскольку подынтегральная функция непрерывна), поэтому достаточно доказать, что предел сумм (5.18^1) при диаметре разбиения $\Delta\to 0$ существует и равен I_1. Фиксируем любое $\varepsilon>0$ и оценим разность

$$\sum\nolimits_1-I_1=\sum_i f(M_i)\,\sigma_i-\sum_i\iint_{G_i} f(M)\sqrt{ED-F^2}\,du\,dv=$$
$$=\sum_i f(M_i)\iint_{G_i}\sqrt{ED-F^2}\,du\,dv-\sum_i\iint_{G_i} f(M)\sqrt{ED-F^2}\,du\,dv=$$
$$=\sum_i\iint_{G_i}[f(M_i)-f(M)]\sqrt{ED-F^2}\,du\,dv. \qquad (5.21)$$

Здесь мы использовали представление (5.17) для σ_i. Так как функция $f(M)$ равномерно непрерывна в G, то для фиксированного $\varepsilon>0$ найдется $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при $\rho(M, M_i)<\delta$ выполняется неравенство

$$|f(M)-f(M_i)|<\frac{\varepsilon}{\sigma}, \qquad (5.22)$$

где σ — площадь поверхности Φ. Из (5.21), (5.22) получим

$$|\Sigma_1-I_1|\leqslant\frac{\varepsilon}{\sigma}\sum_i\iint_{G_i}\sqrt{ED-F^2}\,du\,dv=$$
$$=\frac{\varepsilon}{\sigma}\iint_{G}\sqrt{ED-F^2}\,du\,dv=\frac{\varepsilon}{\sigma}\,\sigma=\varepsilon$$

при $\Delta<\delta$. Это означает, что существует равный I_1 предел сумм Σ_1 при $\Delta\to 0$. Теорема доказана.

Следствие. *Если поверхность Φ задана уравнением $z=z(x, y)$ (т. е. $x=u$, $y=v$, $z=z(u, v)$), где $z(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая в области G плоскости Oxy функция, то, выбирая на поверхности Φ ту сторону, для которой вектор нормали*

поверхности составляет с осью Oz острый угол, можем переписать формулу (5.20^4) *следующим образом:*

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z)\cos Z\,d\sigma=\iint_{G} R[x, y, z(x, y)]\,dx\,dy.$$

В самом деле, достаточно учесть, что

$$d\sigma=\sqrt{ED-F^2}\,dx\,dy,\quad ED-F^2=1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

$$\cos Z=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}.$$

Это оправдывает следующее обозначение для поверхностного интеграла второго рода:

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z)\cos Z\,d\sigma=\iint_{\Phi} R(x, y, z)\,dx\,dy. \qquad (5.23)$$

Отметим, что обозначение (5.23) используется и в случае, когда Φ не является графиком функции $z=z(x, y)$.

Для общего поверхностного интеграла второго рода (5.19^5) также применяется следующее обозначение:

$$\iint_{\Phi}(P\cos X+Q\cos Y+R\cos Z)\,d\sigma=\iint_{\Phi} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy.$$

Замечание. Понятия поверхностных интегралов первого и второго рода естественно распространяются на случай, когда поверхность Φ является кусочно гладкой. Для таких поверхностей, очевидно, также справедлива доказанная в этом параграфе теорема существования.

Глава 6

ТЕОРИЯ ПОЛЯ. ОСНОВНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ АНАЛИЗА

В этой главе будут рассмотрены скалярные и векторные поля, а также основные понятия и операции, связанные с ними. Важнейшей формулой анализа является уже известная нам формула Ньютона—Лейбница. Здесь будут получены формулы Грина, Остроградского—Гаусса и Стокса, которые, с одной стороны, являются обобщением формулы Ньютона—Лейбница на многомерный случай, а с другой стороны, составляют важную часть аппарата интегрального исчисления.

§ 1. ОБОЗНАЧЕНИЯ. БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ. ИНВАРИАНТЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

1. Обозначения. Ниже нам часто придется записывать суммы некоторого числа слагаемых. Поясним обозначения, которыми будем пользоваться. Мы будем иметь дело с системами величин, которые помечены несколькими индексами, например a_k^i. Обычно в таких случаях один индекс пишут внизу, другой — вверху. Если индексы меняются независимо, то они обозначаются разными буквами. Если индексов много, то они обозначаются одной буквой с подындексом.

Например, $\omega_{i_1}\dots{}_{i_p}$ или $\xi_1^{i_1}\dots\xi_p^{i_p}$. В некоторых случаях для обозначения суммирования будет использована запись $\sum\limits_{\sigma}A(\sigma)$, где суммирование производится по некоторому множеству величин σ. Если индексы суммирования $i_1, i_2, \dots, i_p$ меняются так, что при этом $i_1<i_2<\dots<i_p$, то будем писать

$$\sum_{i_1<i_2<\dots<i_p} B_{i_1 i_2\dots i_p}.$$

Наконец, заключим следующее соглашение о суммировании. Пусть имеется выражение, составленное из сомножителей. Если в этом выражении имеется два буквенных индекса, из которых один верхний, а другой нижний, то будем полагать, что по этим индексам происходит суммирование. При этом индексы последовательно принимают значение $1, 2, \dots$, а полученные слагаемые складываются.

Например, если $i, j=1, 2, \dots, n$, то

$$a_i e^i=a_1e^1+a_2e^2+\dots+a_ne^n,$$
$$a_{ij}e^ie^j=a_{1j}e^1e^j+a_{2j}e^2e^j+\dots+a_{nj}e^ne^j=$$
$$=a_{11}e^1e^1+a_{12}e^1e^2+\dots+a_{1n}e^1e^n+a_{21}e^2e^1+$$
$$+a_{22}e^2e^2+\dots+a_{2n}e^2e^n+\dots+a_{n1}e^ne^1+a_{n2}e^ne^2+\dots+a_{nn}e^ne^n.$$

При этих обозначениях разложение вектора $\mathbf{a}$ по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ пространства E^n может быть записано так:

$$\mathbf{a}=a^i\mathbf{e}_i,$$

где a^i — коэффициенты разложения этого вектора. Эта запись означает, что

$$\mathbf{a}=\sum_{i=1}^{n} a^i\mathbf{e}_i.$$

Символом $\delta_i{}^j$ будем обозначать величину, принимающую всего два значения:

$$\delta_i{}^i=1,\ \delta_i{}^j=0,\ \text{при } i\neq j,$$

$\delta_i{}^j$ — так называемый символ Кронекера [1].

Скалярное произведение двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в пространстве E^n обозначается $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

2. Биортогональные базисы в пространстве E^n. Пусть $\mathbf{e}_i$, $i=1, 2, \dots, n$ — базис [2] в n-мерном пространстве E^n. Очевидно, что $\mathbf{e}_i$ — линейно независимые векторы.

Определение. *Базис $\mathbf{e}^j$ (индекс вверху), $j=1, 2, \dots, n$, называется биортогональным к базису $\mathbf{e}_i$, если выполнены соотношения*

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j)=\delta_i^j=\begin{cases}1, & i=j;\\ & i, j=1, 2, \dots, n;\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

Утверждение. *Для всякого базиса $\mathbf{e}_i$, $i=1, 2, \dots, n$, пространства E^n существует единственный биортогональный базис $\mathbf{e}^j$, $j=1, 2, \dots, n$.*

Доказательство. Обозначим линейную оболочку (т. е. множество всех линейных комбинаций) векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{i-1}$,

[1] Л. Кронекер — немецкий математик (1823—1891).

[2] Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ образуют базис в E^n, если любой вектор $\mathbf{a}$ из E^n представим единственным образом в виде

$$\mathbf{a}=a^1\mathbf{e}_1+a^2\mathbf{e}_2+\dots+a^n\mathbf{e}_n=a^i\mathbf{e}_i.$$

$\mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ через M_i. Взяв из ортогонального дополнения к M_i [3] вектор $\mathbf{e}^i$, нормированный условием

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^i)=1,$$

мы, очевидно, найдем, что

$$(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j)=\delta_i{}^j,\ i, j=1, 2, \dots, n.$$

Векторы $\mathbf{e}^j$ также образуют базис пространства E^n. Действительно, если бы это было не так, то нашелся бы вектор из этого пространства, который неоднозначно разлагался бы по системе $\mathbf{e}^j$, т. е. нулевой вектор имел бы разложение по базису с коэффициентами, не равными одновременно нулю. Следовательно, какой-нибудь вектор $\mathbf{e}^k$ из системы $\mathbf{e}^j$ принадлежал бы линейной оболочке [4] M^k векторов $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^{k-1}, \mathbf{e}^{k+1}, \dots, \mathbf{e}^n$. Но этого быть не может, так как $\mathbf{e}^k$ в этом случае был бы ортогонален вектору $\mathbf{e}_k$ (поскольку $(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}^p)=0$ при $k\neq p$). Однако вектор $\mathbf{e}^k$ не может быть ортогональным $\mathbf{e}_k$, потому что по построению $(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}^k)=1$.

Таким образом, к произвольному базису $\mathbf{e}_i$ построен биортогональный базис $\mathbf{e}^j$, причем все векторы этого базиса определяются единственным образом. В самом деле, если бы наряду с $\mathbf{e}^j$ был бы еще один биортогональный базис $\tilde{\mathbf{e}}^j$, то мы имели бы, что $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j-\tilde{\mathbf{e}}^j)=0$ для всех $i, j=1, 2, \dots, n$. Отсюда следует, что $\mathbf{e}^j=\tilde{\mathbf{e}}^j$, поскольку если некоторый вектор ортогонален всем векторам базиса, то он ортогонален и самому себе, поэтому является нулевым вектором. Утверждение доказано.

Заметим, что если базис $\mathbf{e}_i$ — ортонормированный, то биортогональный к нему совпадает с ним самим.

3. Преобразования базисов. Ковариантные и контрвариантные координаты вектора. Мы часто будем пользоваться переходом от биортогональных базисов $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}^i$ к новым биортогональным базисам $\mathbf{e}_{i'}$, $\mathbf{e}^{i'}$.

Используя наши соглашения о суммировании, запишем разложения базисных векторов:

$$\mathbf{e}_{i'}=b_{i'}^i\mathbf{e}_i,\quad \mathbf{e}_i=b_i^{i'}\mathbf{e}_{i'},\quad i, i'=1, 2, \dots, n, \qquad (6.1)$$

$$\mathbf{e}^{i'}=\tilde{b}_i^{i'}\mathbf{e}^i,\quad \mathbf{e}^i=\tilde{b}_{i'}^i\mathbf{e}^{i'},\quad i, i'=1, 2, \dots, n. \qquad (6.2)$$

Здесь $(b_{i'}^i)$ — матрица перехода от старого базиса $\mathbf{e}_i$ к новому $\mathbf{e}_{i'}$, $(b_i^{i'})$ — матрица обратного перехода от базиса $\mathbf{e}_{i'}$ к $\mathbf{e}_i$. Аналогично $(\tilde{b}_i^{i'})$ и $(\tilde{b}_{i'}^i)$ — матрицы прямого и обратного перехода от базиса $\mathbf{e}^i$ к базису $\mathbf{e}^{i'}$.

[3] Т. е. из подпространства пространства E^n, все векторы которого ортогональны M_i.

[4] Т. е. вектор $\mathbf{e}^k$ был бы линейной комбинацией векторов $\mathbf{e}^p$ при $p\neq k$.

Формулы (6.1) — это формулы перехода от старого базиса $\mathbf{e}_i$ к новому $\mathbf{e}_{i'}$ и формулы обратного перехода. Формулы (6.2) — это формулы перехода от старого базиса $\mathbf{e}^i$ к новому $\mathbf{e}^{i'}$ и формулы обратного перехода.

Преобразования (6.1) взаимно обратны, поэтому и матрицы $(b_{i'}^i)$ и $(b_i^{i'})$ взаимно обратны. Действительно, умножив первое из равенств (6.1) скалярно на $\mathbf{e}^{j'}$, а второе из равенств (6.1) на $\mathbf{e}^j$, получим, учитывая биортогональность базисов:

$$\delta_{i'}^{j'}=b_{i'}^i(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^{j'}),\quad \delta_i^j=b_i^{i'}(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}^j).$$

Однако, как следует из тех же формул (6.1),

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^{j'})=b_i^{i'}\delta_{i'}^{j'}=b_i^{j'},\ (\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}^j)=b_{i'}^i\delta_i^j=b_{i'}^j. \qquad (6.3)$$

Таким образом,

$$\delta_{i'}^{j'}=b_{i'}^ib_i^{j'},\quad \delta_i^j=b_i^{i'}b_{i'}^j,$$

т. е. матрицы $(b_{i'}^i)$ и $(b_i^{i'})$ взаимно обратны.

Аналогично устанавливается, что и матрицы $(\tilde{b}_i^{i'})$ и $(\tilde{b}_{i'}^i)$ взаимно обратны.

Справедливо следующее утверждение о связи между матрицами $(b_{i'}^i)$ и $(\tilde{b}_{i'}^i)$, $(b_i^{i'})$ и $(\tilde{b}_i^{i'})$.

Утверждение. *Матрица $(b_{i'}^i)$ совпадает с матрицей $(\tilde{b}_{i'}^{i})$ а матрица $(b_i^{i'})$ совпадает с матрицей $(\tilde{b}_i^{i'})$.*

Доказательство. Очевидно, в силу взаимной обратности матриц $(b_{i'}^i)$ и $(b_i^{i'})$ и матриц $(\tilde{b}_{i'}^i)$ и $(\tilde{b}_i^{i'})$, достаточно доказать, что совпадают $(b_{i'}^i)$ и $(\tilde{b}_{i'}^i)$.

В силу (6.3) получим, что

$$b_{i'}^i=(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}^i). \qquad (6.4)$$

Аналогично с помощью (6.2) получим, что

$$\tilde{b}_{i'}^i=(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}^i). \qquad (6.4')$$

Правые части соотношений (6.4) и (6.4′) равны, поэтому $b_{i'}^i=\tilde{b}_{i'}^i$, что и требовалось.

Следствие. *Для перехода от базисов $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}^i$ к базисам $\mathbf{e}_{i'}$, $\mathbf{e}^{i'}$ достаточно знать только матрицу $(b_{i'}^i)$ перехода от базиса $\mathbf{e}_i$ к базису $\mathbf{e}_{i'}$ (матрица $(b_i^{i'})$ является обратной к $(b_{i'}^i)$, и вычисляется по ней).*

Таким образом, мы приходим к следующим формулам преобразования базисов:

$$\mathbf{e}_{i'}=b_{i'}^i\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_i=b_i^{i'}\mathbf{e}_{i'},$$
$$\mathbf{e}^{i'}=b_i^{i'}\mathbf{e}^i,\ \mathbf{e}^i=b_{i'}^i\mathbf{e}^{i'}. \qquad (6.5)$$

Выведем теперь формулы преобразования координат вектора при переходе к новому базису. Сначала проведем следующие рассуждения.

Пусть $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}^j$ — биортогональные базисы, $\mathbf{a}$ — произвольный вектор. Тогда разложения вектора $\mathbf{a}$ имеют вид

$$\mathbf{a}=a^i\mathbf{e}_i,\quad \mathbf{a}=a_i\mathbf{e}^i. \qquad (6.6)$$

Биортогональный базис дает очень удобный способ вычисления коэффициентов a^i и a_i в разложении (6.6). Действительно, умножая первое из соотношений (6.6) скалярно на $\mathbf{e}^j$, а второе — на $\mathbf{e}_j$, получаем

$$a^j=(\mathbf{a}, \mathbf{e}^j),\ a_j=(\mathbf{a}, \mathbf{e}_j),\ j=1, 2, \dots, n. \qquad (6.7)$$

Следовательно, формулы (6.6) с учетом соотношений (6.7) принимают вид

$$\mathbf{a}=(\mathbf{a}, \mathbf{e}^i)\mathbf{e}_i,\quad \mathbf{a}=(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}^i. \qquad (6.8)$$

В частности, представляя в первое равенство (6.8) вместо вектора $\mathbf{a}$ вектор $\mathbf{e}^j$, а во второе равенство — вектор $\mathbf{e}_j$, получим

$$\mathbf{e}^j=(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}^i)\mathbf{e}_i=g^{ji}\mathbf{e}_i,$$
$$\mathbf{e}_j=(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}^i=g_{ji}\mathbf{e}^i, \qquad (6.9)$$

где

$$g^{ji}=(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}^i),\ g_{ji}=(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i).$$

Если умножить первое из соотношений (6.9) скалярно на $\mathbf{e}_k$, а второе — на $\mathbf{e}^k$, то

$$g^{ji}g_{ik}=\delta_k{}^j,\ g_{ji}g^{ik}=\delta_j{}^k,\quad j, k=1, 2, \dots, n,$$

т. е. матрицы (g^{ji}) и (g_{ji}) взаимно обратны и по своему построению в силу симметрии скалярного произведения симметричны.

Выведем формулы преобразования координат вектора при переходе к новому базису. Если $\mathbf{e}_i$ — старый базис, а $\mathbf{e}_{i'}$ — новый, $\mathbf{e}^i$ и $\mathbf{e}^{i'}$ — биортогональные к ним базисы и если

$$\mathbf{a}=a_{i'}\mathbf{e}^{i'},$$

то, как мы знаем, из формул (6.7) следует, что

$$a_{i'}=(\mathbf{a}, \mathbf{e}_{i'}).$$

Подставляя в правую часть этого соотношения вместо $\mathbf{e}_{i'}$ его выражение из (6.5), получим

$$a_{i'}=(\mathbf{a},\ b_{i'}^i\mathbf{e}_i)=b_{i'}^i(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i)=b_{i'}^ia_i.$$

Итак, координаты $a_{i'}$ вектора $\mathbf{a}$, разложенного по базису $\mathbf{e}^{i'}$ (биортогональному к новому базису $\mathbf{e}_{i'}$), в новом базисе $\mathbf{e}^{i'}$ имеют вид

$$a_{i'}=b_{i'}^ia_i, \qquad (6.10)$$

здесь $(b_{i'}^i)$ — матрица прямого перехода от старого базиса $\mathbf{e}_i$ к новому базису $\mathbf{e}_{i'}$, a_i — координаты вектора $\mathbf{a}$ в разложении по биортогональному базису e^i:

$$\mathbf{a}=a_i\mathbf{e}^i.$$

Таким образом, координаты a_i при переходе от старого базиса $\mathbf{e}_i$ к новому $\mathbf{e}_{i'}$ преобразуются с помощью $(b_{i'}^i)$ — матрицы перехода от старого базиса к новому по формуле (6.10). Поэтому говорят, что координаты a_i преобразуются «согласованно», и эти координаты называются ковариантными (что означает «согласованно изменяющийся») координатами вектора $\mathbf{a}$.

Если теперь согласно формулам (6.7) записать

$$a^{i'}=(\mathbf{a}, \mathbf{e}^{i'})$$

и подставить сюда вместо $\mathbf{e}^{i'}$ его выражение из (6.5), то

$$a^{i'}=(\mathbf{a},\ b_i^{i'}\mathbf{e}^i)=b_i^{i'}(\mathbf{a}, \mathbf{e}^i)=b_i^{i'}a^i. \qquad (6.11)$$

Из формулы (6.11) видно, что при переходе к новому базису координаты a^i в разложении вектора $\mathbf{a}$ по старому базису $\mathbf{e}_i$ $(\mathbf{a}=a^i\mathbf{e}_i)$ преобразуются с помощью матрицы $(b_i^{i'})$ перехода от нового базиса к старому.

Поэтому говорят, что координаты a^i преобразуются «несогласованно», и эти координаты называются контравариантными (что означает «противоположно изменяющийся») координатами вектора $\mathbf{a}$.

4. Инварианты линейного оператора. Дивергенция и ротор. Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что у нас рассматривается трехмерное пространство E^3. Рассмотрим произвольный линейный оператор A в этом пространстве. Напомним, что оператор A называется линейным, если для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и любых вещественных чисел λ и μ справедливо равенство

$$A(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})=\lambda A\mathbf{a}+\mu A\mathbf{b}.$$

Пусть $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}^i$ — биортогональные базисы в E^3. Ниже нам понадобятся два равенства, справедливые для линейного оператора A:

1) $(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i)=(\mathbf{e}^i, A\mathbf{e}_i)$ [5];

[5] Напомним, что если в выражении у сомножителей встречаются повторя-

2) $\mathbf{e}_i \times A\mathbf{e}^i = e^i \times A\mathbf{e}_i$
($\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ означает векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

Докажем эти соотношения. Согласно формулам (6.9) получим $\mathbf{e}^i = g^{ik}\mathbf{e}_k$, $\mathbf{e}_i = g_{ip}\mathbf{e}^p$. Поэтому

$$(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i) = (g_{ip}\mathbf{e}^p, Ag^{ik}\mathbf{e}_k) = g_{ip}g^{ik}(\mathbf{e}^p, A\mathbf{e}_k) = \\ = \delta_p{}^k(\mathbf{e}^p, A\mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}^k, A\mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}^i, A\mathbf{e}_i).$$

Выше мы воспользовались тем, что матрицы (g_{ip}) и (g^{ik}) взаимно обратны и симметричны. Соотношение 1) доказано. Перейдем к доказательству соотношения 2). Используя те же равенства для $\mathbf{e}^i$ и $\mathbf{e}_i$ и свойства матриц (g_{ip}) и (g^{ik}), получим

$$\mathbf{e}_j \times A\mathbf{e}^i = g_{ip}\mathbf{e}^p \times Ag^{ik}\mathbf{e}_k = g_{ip}g^{ik}\mathbf{e}^p \times A\mathbf{e}_k = \\ = \delta_p^k\mathbf{e}^p \times A\mathbf{e}_k = \mathbf{e}^k \times A\mathbf{e}_k = \mathbf{e}^i \times A\mathbf{e}_i.$$

Некоторое выражение называется **инвариантом** (или **инвариантным**), если оно не меняется при преобразовании базиса пространства. Например, инвариантом является скалярное произведение двух векторов, значение скалярной функции в данной точке пространства.

Рассмотрим некоторые величины, связанные с оператором A, являющиеся инвариантами. Пусть $\mathbf{e}_i$ — базис пространства E^3, $\mathbf{e}^i$ — биортогональный базис.

Утверждение 1. *Величина* $(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i)$ *(или ей равная* $(\mathbf{e}^i, A\mathbf{e}_i)$*) — инвариант.*

Доказательство. Необходимо показать, что если перейти к другому базису $\mathbf{e}_{i'}$ ($\mathbf{e}^{i'}$ — биортогональный базис к $\mathbf{e}_{i'}$), то будет выполнено равенство

$$(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i) = (\mathbf{e}_{i'}, A\mathbf{e}^{i'}).$$

Запишем, используя формулы (6.5):

$$\mathbf{e}_i = b_i^{i'}\mathbf{e}_{i'}, \quad \mathbf{e}^i = b_{p'}^i\mathbf{e}^{p'},$$

где $(b_i^{i'})$ — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_{i'}$ к базису $\mathbf{e}_i$, $(b_{p'}^i)$ — обратная ей матрица. Тогда

$$(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i) = b_i^{i'}b_{p'}^i(\mathbf{e}_{i'}, A\mathbf{e}^{p'}) = \\ = \delta_{p'}^{i'}(\mathbf{e}_{i'}, A\mathbf{e}^{p'}) = (\mathbf{e}_{i'}, A\mathbf{e}^{i'}).$$

Сравнивая первый и последний члены в этой цепочке равенств, получаем доказательство утверждения.

ющиеся индексы, один из которых вверху, а другой — внизу, то суммирование проводится по этим индексам.

Определение 1. *Инвариант* $(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i)$ *(или* $(\mathbf{e}^i, A\mathbf{e}_i)$*) линейного оператора A называется дивергенцией этого оператора и обозначается* $\operatorname{div} A$.

Таким образом,

$$\operatorname{div} A = (\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i) = (\mathbf{e}^i, A\mathbf{e}_i).$$

Замечание 1. Всякий линейный оператор в данном базисе $\mathbf{e}_i$ однозначно может быть задан с помощью матрицы, называемой матрицей линейного оператора. Для построения этой матрицы достаточно задать оператор на базисных векторах $\mathbf{e}_i$, т. е. задать векторы $A\mathbf{e}_i$. Разлагая эти векторы $A\mathbf{e}_i$ по базису e_j, получаем

$$A\mathbf{e}_i = a_i{}^k\mathbf{e}_k \text{ и } (\mathbf{e}^j, A\mathbf{e}_i) = a_i{}^k(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k) = a_i{}^j. \tag{6.12}$$

Матрица $(a_i{}^k)$ и есть матрица линейного оператора A в базисе $\mathbf{e}_i$.

Теперь дивергенция оператора A может быть выражена через элементы матрицы $(a_i{}^k)$:

$$\operatorname{div} A = (\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i) = (\mathbf{e}^i, A\mathbf{e}_i) = a_1{}^1 + a_2{}^2 + a_3{}^3.$$

Замечание 2. Величина $a_1{}^1 + a_2{}^2 + a_3{}^3$ в линейной алгебре называется матричным следом оператора A. Там же доказывается, что этот матричный след равен сумме собственных чисел оператора A с учетом их кратности (спектральному следу оператора), т. е.

$$a_1{}^1 + a_2{}^2 + a_3{}^3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — занумерованные с учетом их кратности собственные числа оператора A.

Ясно, что сумма $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ не зависит от выбора базиса пространства. Следовательно, и $\operatorname{div} A$ не зависит от выбора базиса, т. е. является инвариантом. Это еще одно доказательство утверждения об инвариантности дивергенции.

Утверждение 2. *Величина* $\mathbf{e}_i \times A\mathbf{e}^i$ *(или ей равная* $\mathbf{e}^i \times A\mathbf{e}_i$*) — инвариант.*

Доказательство. *Пусть* $\mathbf{e}_{i'}$ — новый базис ($\mathbf{e}^{i'}$ — биортогональный базис к $\mathbf{e}_{i'}$). Запишем согласно формулам (6.5):

$$\mathbf{e}_i = b_i^{i'}\mathbf{e}_{i'}, \quad \mathbf{e}^i = b_{p'}^i\mathbf{e}^{p'}.$$

Подставив эти величины в выражение $\mathbf{e}_i \times A\mathbf{e}^i$, получим

$$\mathbf{e}_i \times A\mathbf{e}^i = b_i^{i'}b_{p'}^i\mathbf{e}_{i'} \times A\mathbf{e}^{p'} = \delta_{p'}^{i'}\mathbf{e}_i \times A\mathbf{e}^{p'} = \mathbf{e}_{i'} \times A\mathbf{e}^{i'}.$$

Таким образом, инвариантность величины $\mathbf{e}_i \times A\mathbf{e}^i$ доказана.

Определение 2. *Инвариант* $\mathbf{e}_i \times A\mathbf{e}^i$ *(или* $\mathbf{e}^i \times A\mathbf{e}_i$*) линейного оператора A называется ротором этого оператора и обозначается* $\operatorname{rot} A$.

Таким образом,

$$\operatorname{rot} A = \mathbf{e}_i \times A\mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i \times A\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_1 \times A\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}_2 \times A\mathbf{e}^2 + \\ + \mathbf{e}_3 \times A\mathbf{e}^3 = \mathbf{e}^1 \times A\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}^2 \times A\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}^3 \times A\mathbf{e}_3.$$

5. Выражения для дивергенции и ротора линейного оператора в ортонормированном базисе. Пусть в пространстве E^3 выбран *ортонормированный базис* $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. В этом случае, как уже говорилось, биортогональный базис совпадает с самим собой (см. п. **2**). Согласно формулам (6.12) получаем

$$\begin{gathered} a_1{}^1 = (\mathbf{i}, A\mathbf{i}),\ a_2{}^1 = (\mathbf{i}, A\mathbf{j}),\ a_3{}^1 = (\mathbf{i}, A\mathbf{k}), \\ a_1{}^2 = (\mathbf{j}, A\mathbf{i}),\ a_2{}^2 = (\mathbf{j}, A\mathbf{j}),\ a_3{}^2 = (\mathbf{j}, A\mathbf{k}), \\ a_1{}^3 = (\mathbf{k}, A\mathbf{i}),\ a_2{}^3 = (\mathbf{k}, A\mathbf{j}),\ a_3{}^3 = (k, Ak). \end{gathered} \tag{6.13}$$

Поэтому

$$\operatorname{div} A = a_1{}^1 + a_2{}^2 + a_3{}^3 = (\mathbf{i}, A\mathbf{i}) + (\mathbf{j}, A\mathbf{j}) + (\mathbf{k}, A\mathbf{k}). \tag{6.14}$$

Найдем выражение для $\operatorname{rot} A$. Имеем

$$\operatorname{rot} A = \mathbf{i} \times A\mathbf{i} + \mathbf{j} \times A\mathbf{j} + \mathbf{k} \times A\mathbf{k}.$$

Осталось вычислить векторные произведения слагаемых справа через элементы матрицы оператора A. Запишем по формуле (6.12):

$$A\mathbf{i} = a_1{}^1\mathbf{i} + a_1{}^2\mathbf{j} + a_1{}^3\mathbf{k}.$$

Поэтому

$$\mathbf{i} \times A\mathbf{i} = a_1{}^1\mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_1{}^2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_1{}^3\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \\ = -a_1{}^3\mathbf{j} + a_1{}^2\mathbf{k}.$$

Аналогично

$$\mathbf{j} \times A\mathbf{j} = a_2{}^3\mathbf{i} - a_2{}^1\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times A\mathbf{k} = -a_3{}^2\mathbf{i} + a_3{}^1\mathbf{j}.$$

Поэтому

$$\operatorname{rot} A = (a_2{}^3 - a_3{}^2)\mathbf{i} + (a_3{}^1 - a_1{}^3)\mathbf{j} + (a_1{}^2 - a_2{}^1)\mathbf{k}. \tag{6.15}$$

§ 2. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

1. Скалярные и векторные поля. В теории поля рассматриваются функции, которые каждой точке M фиксированной области D сопоставляют некоторый специальный объект $a(M)$, называемый тензором. В этом случае говорят, что в области D задано **тензорное поле**. Мы будем изучать только два простейших частных случая тензорного поля, а именно скалярное и векторное поля.

Будем говорить, что в области D задано **скалярное поле**, если каждой точке M этой области сопоставлено по некоторому закону определенное число $u(M)$. Таким образом, понятия скалярного поля и скалярной функции, определенной в области D, совпадают.

Аналогично говорят, что в области D задано **векторное поле**, если каждой точке M этой области сопоставлен по некоторому закону вектор $\mathbf{a}(M)$. Таким образом, понятия векторного поля и векторной функции, определенной в области D, совпадают.

Пусть, например, $\mathbf{E}(M)$ — напряженность электрического поля, созданного единичным отрицательным зарядом, помещенным в начало координат трехмерного пространства E^3. Тогда в точке $M(x, y, z)$ вектор $\mathbf{E}(M)$ имеет, как известно, длину $1/\rho$, где $\rho = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, и направлен от точки M к началу координат. Получаем следующую формулу для задания данного векторного поля $\mathbf{E}(M)$:

$$\mathbf{E}(M) = \left\{-\frac{x}{\rho^3}, \ -\frac{y}{\rho^3}, \ -\frac{z}{\rho^3}\right\}.$$

Другими примерами скалярного и векторного полей могут быть скалярное поле температур внутри нагретого тела, векторное поле скоростей установившегося потока жидкости и т. д.

Приведем еще ряд примеров скалярных и векторных полей, играющих важную роль в анализе и физике. Для этого понадобится изучить понятие дифференцируемости скалярного и векторного полей.

Поскольку скалярное поле — это числовая функция, заданная в области D, то понятие дифференцируемости скалярного поля (этой числовой функции) мы уже знаем (см. определение п. 2 § 4 гл. 12 ч. 1).

Напомним это определение, заменяя слово «функция» на слова «скалярное поле». Пусть задано скалярное поле $u = f(x, y, z)$ в области D из E^3.

Определение 1. *Скалярное поле $u = f(x, y, z) = f(M)$ называется дифференцируемым в точке $M(x, y, z)$ области D, если его полное приращение $\Delta u(M)$ в этой точке может быть представлено в виде*

$$\Delta u(M) = A_1\Delta x + A_2\Delta y + A_3\Delta z + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y + \alpha_3\Delta z,$$

где A_1, A_2, A_3 — некоторые не зависящие от $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ числа, а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — бесконечно малые при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0, \Delta z \to 0$ функции, равные нулю при $\Delta x = 0, \Delta y = 0, \Delta z = 0$.

Условие дифференцируемости скалярного поля $u = f(x, y, z)$ (как показано в п. 2 § 4 гл. 12 ч. 1) может быть записано в виде

$$\Delta u(M) = A_1\Delta x + A_2\Delta y + A_3\Delta z + o(\rho),$$

где $\rho = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{1/2}$, причем это представление единственно.

Эту формулу можно переписать в более компактном виде:

$$\Delta u(M) = (\mathbf{A}, \mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|), \tag{6.16}$$

где $(\mathbf{A}, \mathbf{h})$ — скалярное произведение векторов

$$\mathbf{A} = \{A_1, A_2, A_3\}, \quad \mathbf{h} = \{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}, \quad \|\mathbf{h}\| = \rho.$$

Таким образом, можно дать следующее

Определение 1*. *Скалярное поле $u(M)$ дифференцируемо в точке M, если в этой точке для полного приращения справедливо соотношение* (6.16). *Скалярное поле $u(M)$ дифференцируемо в области D, если оно дифференцируемо в каждой точке этой области.*

Напомним (см. п. 8 § 4 гл. 12 ч. 1), что условие дифференцируемости (6.16) может быть переписано в виде

$$\Delta u(M) = (\operatorname{grad} u, \mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|), \tag{6.17}$$

где вектор $\operatorname{grad} u(M) = \left\{\frac{\partial u(M)}{\partial x}, \frac{\partial u(M)}{\partial y}, \frac{\partial u(M)}{\partial z}\right\}$.

Формула (6.17) приводит нас еще к одному примеру векторного поля, а именно к полю градиента дифференцируемого в области D скалярного поля $u(M)$. Определение градиента не зависит от выбора системы координат, и поэтому он является инвариантом [6].

Согласно рассмотрениям п. 8 § 4 гл. 12 ч. 1 в случае дифференцируемости поля $u(M)$ можно ввести производную $u(M)$ по направлению вектора $\mathbf{e}$:

[6] Своим появлением на свет понятие градиента обязано выдающемуся шотландскому физику, создателю математической теории электромагнитного поля Джеймсу Клерку Максвеллу (1831—1879) и происходит от латинского слова gradior, означающего «расти». Как мы знаем из ч. 1, главное свойство градиента состоит в том, что он определяет направление наибыстрейшего спуска. Поэтому Максвелл собирался сначала назвать этот вектор словом slope — «склон». Ирландский математик и механик Вильям Роуен Гамильтон (1805—1865) придумал для этого вектора специальное обозначение ∇ — перевернутую греческую букву Δ («дельта»). Таким образом, если $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — фиксированный ортонормированный базис, то

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k},$$

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Сначала название значка ∇ было «атлед» — прочитанное наоборот слово дельта. Затем английские ученые (О. Хевисайд, Р. Смит) чаще стали называть этот значок словом «на́бла» (из-за сходства с остовом древнеассирийского музыкального инструмента наблы). Набла — очень удобное в физике обозначение, многие формулы с его применением сильно упрощаются. Сам Максвелл посвятил набле специальную оду в восьми частях.

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}} = (\mathbf{e}, \operatorname{grad} u). \tag{6.18}$$

Производная по направлению задает, очевидно, некоторое новое скалярное поле в области D.

Перейдем к изучению дифференцируемого векторного поля. Понятие дифференцируемости векторного поля дается в полной аналогии с понятием дифференцируемости скалярного поля, и это понятие было нами дано в дополнении 2 к гл. 12 ч. 1.

Пусть в области D пространства E^3 задано векторное поле $\mathbf{a}(M)$ (векторная функция $\mathbf{a}(M)$ точек M, принадлежащих D). Напомним, что $\mathbf{a}(M)$ каждой точке $M(x, y, z)$ ставит в соответствие вектор $\mathbf{a}(M)$.

Определение 2. *Векторное поле $\mathbf{a}(M)$ называется дифференцируемым в точке M области D, если его полное приращение $\Delta\mathbf{a}(M)$ представляется в виде*

$$\Delta\mathbf{a}(M) = A\mathbf{h} + \mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|), \tag{6.19}$$

где A — некоторый линейный оператор в E^3,

$$\mathbf{h} = \{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}, \ \|\mathbf{h}\| = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{1/2},$$

$\mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|)$ — *вектор, длина которого стремится к нулю при* $\|\mathbf{h}\| \to 0$.

Утверждение. *Если векторное поле дифференцируемо, то представление* (6.19) *единственно.*

Действительно (см. также дополнение 2 к гл. 12 ч. 1), если бы было два представления вида (6.19), т. е.

$$\Delta\mathbf{a}(M) = A\mathbf{h} + \mathbf{o}_1(\|\mathbf{h}\|), \ \Delta\mathbf{a}(M) = B\mathbf{h} + \mathbf{o}_2(\|\mathbf{h}\|),$$

то

$$(A - B)\mathbf{h} = \mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|),$$

где $\mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|) = \mathbf{o}_1(\|\mathbf{h}\|) - \mathbf{o}_2(\|\mathbf{h}\|)$.

Разделив на $\|\mathbf{h}\|$ обе части полученного равенства, получим

$$(A - B)\mathbf{e} = \frac{\mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|)}{\|\mathbf{h}\|},$$

где $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}$ — вектор единичной длины. Справа стоит бесконечно малый вектор (его длина стремится к нулю при $\|\mathbf{h}\| \to 0$), следовательно, для любого единичного вектора $\mathbf{e}$ величина слева равна нулю:

$$(A - B)\mathbf{e} = 0.$$

Но если два линейных оператора A и B совпадают на единичной сфере, то они равны, очевидно, на любом векторе, т. е. совпадают всюду. Следовательно, $A = B$.

Так же, как и в случае скалярного поля, векторное поле *дифференцируемо в области D*, если оно дифференцируемо в каждой точке области D.

Как и в случае скалярного поля, возникает вопрос об определении производной по направлению для векторного поля $\mathbf{a}(M)$.

Пусть M — точка области D, $\mathbf{e}$ — единичный вектор с координатами $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, определяющий некоторое направление. Пусть M' — любая точка из D, отличная от M и такая, что вектор $\mathbf{MM'}$ коллинеарен вектору $\mathbf{e}$. Обозначим расстояние между M и M' через ρ.

Определение 3. *Производной векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в точке M по направлению $\mathbf{e}$ называется предел отношения*

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta\mathbf{a}(M)}{\rho} = \frac{\partial\mathbf{a}(M)}{\partial\mathbf{e}} = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{e}}$$

(в случае, если этот предел существует). Здесь $\Delta\mathbf{a}(M) = \mathbf{a}(M') - \mathbf{a}(M)$.

Утверждение. *Пусть векторное поле $\mathbf{a}(M)$ дифференцируемо, A — линейный оператор, определяемый из соотношения дифференцируемости (т. е. из соотношения $\Delta\mathbf{a}(M) = A\mathbf{h} + \mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|)$). Тогда производная $\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{e}}$ поля в этой точке M по любому направлению $\mathbf{e}$ существует и определяется равенством*

$$\frac{\partial\mathbf{a}(M)}{\partial\mathbf{e}} = A\mathbf{e}. \tag{6.20}$$

Интересно сравнить эту формулу с формулой (6.18). В формуле (6.18) справа также стоит результат действия оператора $A = (A_1, A_2, A_3)$ на вектор $\mathbf{e}$. Результат этого действия и есть скалярное произведение градиента поля и вектора $\mathbf{e}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}$ — фиксированный вектор. Выберем точку M' так, чтобы $\mathbf{h} = \rho\mathbf{e}$. Тогда согласно (6.19) получим

$$\Delta\mathbf{a}(M) = \rho A\mathbf{e} + \mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|).$$

Поскольку $\|\mathbf{h}\| = \rho$, то

$$\frac{\Delta\mathbf{a}(M)}{\rho} = A\mathbf{e} + \frac{\mathbf{o}(\rho)}{\rho}.$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $\rho \to 0$, получаем формулу (6.20), т. е. то, что и требовалось доказать.

Вернемся снова к рассмотрению формулы (6.19):

$$\Delta\mathbf{a}(M) = A\mathbf{h} + \mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|).$$

Здесь A — линейный оператор, действующий на вектор $\mathbf{h}$ из E^3. Как мы знаем, в фиксированном базисе всякий линейный опера-

тор определяется своей матрицей. Найдем матрицу линейного оператора A в ортонормированном базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, с которым связана декартова прямоугольная система координат $Oxyz$. Пусть в этом базисе вектор $\mathbf{a}(M)$ имеет координаты P, Q, R. Согласно формулам (6.20)

$$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{i}} = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x} = A\mathbf{i}, \quad \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{j}} = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y} = A\mathbf{j}, \quad \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{k}} = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z} = A\mathbf{k}. \tag{6.21}$$

По формулам (6.13) вычисляем элементы матрицы $\overset{0}{A}$ оператора A:

$$\overset{0}{A} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{Bmatrix}. \tag{6.22}$$

2. Дивергенция, ротор и производная по направлению векторного поля. Пусть $\mathbf{a}(M)$ — дифференцируемое в области D векторное поле. Тогда согласно (6.19) $\Delta\mathbf{a}(M) = A\mathbf{h} + \mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|)$, где A — линейный оператор, зависящий от точки M, вектор $\mathbf{h}$ — приращение аргумента $\mathbf{a}(M)$, $\mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|)$ — вектор, стремящийся к нулю при $\|\mathbf{h}\| \to 0$.

Определение 1. *Дивергенцией векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в точке M называется дивергенция линейного оператора A из условия дифференцируемости* (6.19):

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M) = \operatorname{div} A.$$

Определение 2. *Ротором векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в точке M называется ротор линейного оператора A из условия дифференцируемости* (6.19):

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}(M) = \operatorname{rot} A.$$

Заметим, что поскольку векторное поле дифференцируемо во всей области D, то $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)$ определены в каждой точке M области D. Эти величины по своему определению инвариантны, т. е. не зависят от выбора базиса. Поэтому $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$ представляет собой скалярное поле, а $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)$ — векторное поле.

Выберем ортонормированный базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ и свяжем с ним декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$. Пусть координаты поля $\mathbf{a}(M)$ в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ есть P, Q, R. Матрица оператора A в этом базисе нами уже найдена (см. формулу (6.22)). Поскольку $\operatorname{div}\mathbf{a}(M) = \operatorname{div} A$, по формуле (6.14) сразу получаем

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M) = (\mathbf{i}, A\mathbf{i}) + (\mathbf{j}, A\mathbf{j}) + (\mathbf{k}, A\mathbf{k}) = \\ = a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (\nabla, \mathbf{a}(M)), \tag{6.23}$$

где

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{a}(M) = \mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}.$$

Далее, так как $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M) = \operatorname{rot} A$, то по формулам (6.15) и (6.22) получим

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \\ + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \tag{6.24}$$

Написанный определитель — символическая запись ротора, удобная для запоминания.

Вычислим производную векторного поля $\mathbf{a}(M)$ по направлению $\mathbf{e}$, воспользовавшись формулой (6.20). Поскольку единичный вектор $\mathbf{e}$ имеет координаты $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, то

$$\frac{\partial\mathbf{a}(M)}{\partial\mathbf{e}} = A\mathbf{e} = A(\mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma) = \\ = \cos\alpha(A\mathbf{i}) + \cos\beta(A\mathbf{j}) + \cos\gamma(A\mathbf{k}).$$

Далее, по формулам (6.21)

$$A\mathbf{i} = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x}, \quad A\mathbf{j} = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y}, \quad A\mathbf{k} = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial\mathbf{a}(M)}{\partial\mathbf{e}} = \cos\alpha\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z}.$$

Учитывая, что $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, запишем еще одно выражение для производной по направлению:

$$\frac{\partial\mathbf{a}(M)}{\partial\mathbf{e}} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial P}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial P}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathbf{i} + \\ + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial Q}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathbf{j} + \\ + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial R}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial R}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathbf{k}.$$

3. Некоторые другие формулы векторного анализа. Допустим, что в области D заданы скалярное поле $u(M)$ и векторное поле $\mathbf{a}(M)$, причем все частные производные второго порядка функций

$u(M)$ и $\mathbf{a}(M)$ непрерывны в области D. Тогда $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$ — дифференцируемое скалярное поле, $\operatorname{grad} u$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)$ — дифференцируемые векторные поля. Следовательно, можно повторно применять дифференциальные операторы grad, div, rot, и имеют смысл следующие операции:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u,\ \operatorname{div}\operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a},\ \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a},\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}.$$

Пусть $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — фиксированный ортонормированный базис, с которым связана декартова прямоугольная система координат $Oxyz$.

Утверждение. *Имеют место следующие пять соотношений*:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla\times\nabla u = 0;$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = (\nabla,\ \nabla u) = \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} = \nabla(\nabla,\ \mathbf{a}) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial z}\right)\mathbf{i} +$$
$$+\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y\,\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\mathbf{k};$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = (\nabla, \nabla\times\mathbf{a}) = 0;$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{a}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \Delta\,\mathbf{a},$$

где

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Доказательство. Все эти формулы доказываются по одной схеме: последовательно применяются дифференциальные операторы к скалярному или векторному полю. Докажем, например, первое равенство. Вектор $\operatorname{grad} u = \nabla u$ имеет координаты $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$, поэтому для $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla\times\operatorname{grad} u$ по формулам (6.24) получаем выражение

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla\times\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}\right)\mathbf{i} +$$
$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\right)\mathbf{k} = 0.$$

Докажем второе равенство (см. формулу (6.23)):

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = (\nabla,\ \nabla u) = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z},\right.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u.$$

Символ Δ («дельта») имеет специальное название — оператор Лапласа[7]. Символически можно записать: $\Delta = \nabla^2$.

Докажем еще третье соотношение, предоставив доказательство двух остальных равенств читателю. Запишем соотношение

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} = \nabla(\nabla,\ \mathbf{a}) = \nabla\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) = \nabla b,$$

где

$$b = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Далее,

$$\nabla b = \frac{\partial b}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial b}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial b}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Подставляя вместо b его выражение, получим правую часть третьего соотношения. Утверждение доказано.

Замечание. Как уже неоднократно подчеркивалось, величины $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div} u$, $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ инвариантны. Поэтому инвариантны и величины $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$. Следовательно, в любой системе координат имеем, например, что

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \mathbf{0},\ \operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u =$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\ \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0.$$

4. Заключительные замечания. Обсудим физический смысл рассмотренных понятий дивергенции и ротора. Дивергенцию векторной функции $\operatorname{div}\mathbf{a} = (\nabla,\ \mathbf{a}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ еще называют расходимостью. Она определяет скорость изменения каждой компоненты вектора в своем «собственном» направлении. Если векторное поле описывает поток жидкости, то положительность дивергенции ($\operatorname{div}\mathbf{a}>0$) в данной точке означает, что из этой точки вытекает больше жидкости, чем в нее притекает. Говорят, что такая точка служит источником. Если же $\operatorname{div}\mathbf{a}<0$, то наблюдается обратный баланс и точка служит стоком, т. е. в нее притекает больше, чем вытекает. Если $\operatorname{div}\mathbf{a}=0$, то существует баланс — жидкости притекает столько же, сколько и вытекает.

Величина ротор векторного поля

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla\times\mathbf{a} = \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\mathbf{j} +$$

[7] Пьер Симон Лаплас — выдающийся французский астроном, математик и физик (1749—1827).

$$+\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

еще называется вихрем. Это название связано с тем, что он как бы «смешивает» производные и компоненты. Он как бы «следит», как меняются компоненты векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в «чужих» направлениях. Таким образом, ротор — это мера «вращения» векторного поля. Кстати, если $\mathbf{V}$ — линейная скорость, то вектор $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости вращения есть $\boldsymbol{\omega} = (1/2)\operatorname{rot}\mathbf{V}$. Этот вектор направлен по оси вращения. Отсюда и возникло название ротора.

В заключение приведем систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме:

1) $\operatorname{div}\mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$; 2) $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$;

3) $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$; 4) $\operatorname{rot}\mathbf{B} = \dfrac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2} + \dfrac{1}{e^2}\cdot\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$.

Здесь $\rho(M,\ t)$ — плотность электрического заряда (количество заряда, отнесенное к единице объема), $\mathbf{j}(M,\ t)$ — вектор плотности электрического тока (скорость протекания заряда через единичную площадку), $\mathbf{E}(M,\ t)$ и $\mathbf{B}(M,\ t)$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей соответственно, ε_0 и e — размерные постоянные, c — скорость света в вакууме.

§ 3. ОСНОВНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ АНАЛИЗА

В этом параграфе будут доказаны основные интегральные формулы анализа — формула Грина[8], формула Остроградского—Гаусса[9] и формула Стокса[10]. Эти формулы, с одной стороны, являются далеко идущими обобщениями формулы Ньютона—Лейбница — основной формулы интегрального исчисления, а с другой стороны, являются важнейшими формулами математического анализа и математической физики.

1. Формула Грина. Пусть π — плоскость в пространстве E^3, $\mathbf{k}$ — единичный вектор нормали к π, D — односвязная область на π (напомним, что область D называется односвязной, если любая кусочно гладкая замкнутая без самопересечений кривая, расположенная в D, ограничивает область, все точки которой также принадлежат D). Пусть, далее, область D удовлетворяет следующим двум условиям:

[8] Дж. Грин — английский математик (1793—1841).

[9] М. В. Остроградский — русский математик (1801—1861), К. Ф. Гаусс — немецкий математик (1777—1855).

[10] Дж. Г. Стокс — английский физик и математик (1819—1903).

1) граница C области D является замкнутой кусочно гладкой кривой без особых точек;

2) на плоскости π можно выбрать такую декартову прямоугольную систему координат, что все прямые, параллельные координатным осям, пересекают C не более чем в двух точках.

Пусть, наконец, $\mathbf{t}$ — единичный вектор касательной к кривой C, согласованный с $\mathbf{k}$, т. е. положительное направление обхода кривой C совпадает в точке приложения вектора $\mathbf{t}$ с направлением этого вектора, и если смотреть с конца нормали $\mathbf{k}$, то контур C ориентирован положительно (его обход осуществляется против часовой стрелки). Говорят, что ориентация кривой C согласована с нормалью «по правилу штопора».

Теорема 6.1 (формула Грина). *Пусть* $\mathbf{a}$ — *векторное поле, дифференцируемое в области D, удовлетворяющей условиям* 1), 2), *и такое, что его производная по любому направлению непрерывна в объединении $D\cup C = \bar{D}$. Тогда справедлива формула*

$$\iint\limits_{\bar{D}}(\mathbf{k},\ \operatorname{rot}\mathbf{a})\,d\sigma = \oint\limits_{C}(\mathbf{a},\ \mathbf{t})\,dl. \tag{6.25}$$

Выражение справа обычно называют циркуляцией векторного поля $\mathbf{a}$ по кривой C, а выражение слева — потоком векторного поля $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ через область D.

Данная формула допускает такую физическую трактовку: поток векторного поля $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ через область D (поток тепла, жидкости и т. п.) равняется циркуляции векторного поля $\mathbf{a}$ по замкнутому контуру C (работе сил поля $\mathbf{a}$ по перемещению точки вдоль C).

Доказательство. Поскольку все входящие в формулу (6.25) функции непрерывны, то оба интеграла существуют.

Заметим также, что интегралы слева и справа в формуле (6.25) инвариантны относительно выбора прямоугольной системы координат, поскольку величины $(\mathbf{k}, \operatorname{rot}\mathbf{a})$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{t})$ инвариантны, элементы площади $d\sigma$ и длины дуги dl не зависят от выбора декартовой системы координат. Поэтому достаточно доказать формулу (6.25) в какой-то одной специально выбранной системе.

Выберем декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы выполнялось условие 2), и ось Oz направим вдоль $\mathbf{k}$. Поскольку векторное поле $\mathbf{a} = P(x,\ y)\mathbf{i} + Q(x,\ y)\mathbf{j} + R(x,\ y)\mathbf{k}$ плоское, то $R(x,\ y)\equiv 0$, $t = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\} = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ 0\} = \{\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0\}$.

Следовательно, можно записать:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} +$$
$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Далее,

$$(\mathbf{k},\ \operatorname{rot}\mathbf{a}) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},\ (\mathbf{a},\ \mathbf{t}) = P\cos\alpha + Q\sin\alpha.$$

Так как для плоской области $d\sigma = dx\,dy$, то формула (6.25) принимает вид

$$\iint\limits_{\bar{D}}(\mathbf{k},\ \operatorname{rot}\mathbf{a})\,d\sigma = \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy =$$
$$= \oint\limits_{C}(P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,dl = \oint\limits_{C}Pdx + Qdy. \tag{6.25'}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $dx = \cos\alpha\,dl$, $dy = \sin\alpha\,dl$, где l — длина дуги C, выбранная в качестве параметра, возрастание которого согласовано с направлением обхода C.

Для доказательства формулы Грина достаточно доказать два равенства:

$$I = -\iint\limits_{\bar{D}}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \oint\limits_{C}Pdx,$$

$$J = \iint\limits_{\bar{D}}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \oint\limits_{C}Qdy.$$

Обратимся для наглядности к рис. 6.1. Пусть прямая, параллельная оси Oy, пересекает C в точках $(x,\ y_1(x))$ и $(x,\ y_2(x))$, $y_1(x)\leqslant y_2(x)$. Пусть x_1 и x_2 — наименьшая и наибольшая абсциссы точек области $\bar{D}$, кривая C_1 соединяет точку $(x_1,\ y_1(x_1))$ с точкой $(x_2,\ y_1(x_2))$, а кривая C_2 — точку $(x_2,\ y_2(x_2))$, с точкой $(x_1,\ y_2(x_1))$ и $C = C_1\cup C_2$, C_1, C_2 ориентированы согласованно с C. Тогда по формуле сведения двойного интеграла к повторному получим

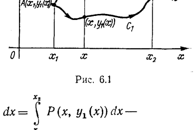

Рис. 6.1

$$I = -\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P(x,\ y)}{\partial y}\,dy\right]dx = \int\limits_{x_1}^{x_2}P(x,\ y_1(x))\,dx -$$
$$-\int\limits_{x_1}^{x_2}P(x,\ y_2(x))\,dx = \int\limits_{C_1}Pdx - \left(-\int\limits_{C_2}Pdx\right) = \oint\limits_{C}Pdx.$$

Аналогично вычисляется интеграл J. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 6.1 справедлива и для более общих областей D (с границей C) таких, что с помощью конечного числа кусочно гладких кривых эта область может быть разбита на конечное число областей D_i с границами C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющих условиям 1) и 2). Действительно, для каждой области D_i по доказанному формула верна. Сложив эти равенства, в силу аддитивности двойного интеграла слева $\sum\limits_{i=1}^{n}\iint\limits_{\bar{D}_i}$ можно заменить на $\iint\limits_{\bar{D}}$, а справа $\sum\limits_{i=1}^{n}\oint\limits_{C_i} = \oint\limits_{C}$, поскольку интегралы по «внутренним» кривым[11] сократятся (так как интегрирование по ним производится в противоположных направлениях). Останется лишь интеграл по границе C области D.

Замечание 2. В формулировке теоремы 6.1 от условия 2) можно избавиться, т. е. считать, что граница области D есть любая замкнутая кусочно гладкая кривая C без особых точек. Однако доказательство теоремы несколько усложняется.

Замечание 3. Условие на гладкость векторного поля можно также несколько ослабить. Достаточно требовать, чтобы поле $\mathbf{a}$ было непрерывно в $D\cup C = \bar{D}$, а дифференцируемо только в D, и производная по любому направлению была непрерывна в D. Формула (6.25) при этом сохраняется, однако входящий в нее двойной интеграл является при этом, вообще говоря, несобственным.

Замечание 4. Теорема 6.1, т. е. формула Грина, верна и в общем случае областей D с границей C, являющейся только спрямленной кривой[12].

Замечание 5. Формула Грина (6.25) может быть записана, как это следует из доказательства, в виде (6.25′):

$$\iint\limits_{\bar{D}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \oint\limits_{C}P\,dx + Q\,dy.$$

Интегралы слева и справа имеют инвариантный характер, т. е. их значение и форма не меняются при переходе к новой декартовой системе координат. Действительно, значения подынтегральных выражений слева и справа в формуле (6.25′) равны соответственно $(\mathbf{k}, \operatorname{rot}\mathbf{a})$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{t})$ — инвариантным величинам. Форма подынтегральных выражений в формуле (6.25′) тоже, очевидно, не меняется при переходе к новой декартовой системе координат $Ox'y'$; если в новом базисе векторное поле $\mathbf{a}$ имеет координаты P' и Q', то

[11] Т. е. по вспомогательным кусочно гладким кривым, разбивающим область D.

[12] См. статью Э. Г. Позняка, Е. В. Шикина // (ДАН СССР, 1980, **253**, № 1, с. 42—44).

$$(\mathbf{k},\ \operatorname{rot}\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\mathbf{k},\ \left(\frac{\partial Q'}{\partial x'} - \frac{\partial P'}{\partial y'}\right)\mathbf{k}\right) =$$
$$= \frac{\partial Q'}{\partial x'} - \frac{\partial P'}{\partial y'},\ (\mathbf{a},\ \mathbf{t})\,dl = P\,dx + Q\,dy =$$
$$= (P'\cos\alpha' + Q'\sin\alpha')\,dx = P'\,dx' + Q'\,dy'.$$

Наконец, якобиан преобразования при переходе к новой системе координат по модулю равен единице, а параметризация с помощью длины дуги не связана с системой координат. Поэтому интегралы слева и справа в (6.25′) не меняют своего значения и формы.

2. Формула Остроградского—Гаусса. Пусть D — односвязная область в E^3 (т. е. для любой кусочно гладкой замкнутой кривой C, расположенной в D, можно указать ориентируемую кусочно гладкую поверхность G, расположенную в D, имеющую границей C), S — ее граница, удовлетворяющая двум условиям:

1) поверхность S — кусочно гладкая двусторонняя полная ограниченная замкнутая и без особых точек;

2) прямоугольную декартову систему координат в E^3 можно выбрать так, что для каждой из осей координат любая прямая, параллельная этой оси, будет пересекать поверхность S не более чем в двух точках.

Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к S. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6.2 (формула Остроградского—Гаусса). *Пусть* $\mathbf{a}$ — *векторное поле, дифференцируемое в области D, удовлетворяющей условиям* 1), 2), *и такое, что производная по любому направлению непрерывна в $D\cup S = \bar{D}$. Тогда справедлива формула*

$$\iiint\limits_{\bar{D}}\operatorname{div}\mathbf{a}\,dv = \oint\!\!\oint\limits_{S}(\mathbf{a},\ \mathbf{n})\,ds. \tag{6.26}$$

Интеграл справа в формуле (6.26) называется потоком векторного поля $\mathbf{a}$ через поверхность S, а интеграл слева в этой формуле — это объемный интеграл от дивергенции вектора по области D. Поэтому теорема 6.2 допускает такую формулировку:

Объемный интеграл от дивергенции вектора по области D равен потоку векторного поля $\mathbf{a}$ *через поверхность S — границу этой области.*

Доказательство. Все входящие в формулу (6.26) функции непрерывны, поэтому интегралы слева и справа существуют.

Заметим, что формула (6.26) инвариантна относительно выбора прямоугольной системы координат, поскольку все входящие в нее величины — инварианты. Поэтому достаточно доказать формулу (6.26) при каком-то одном выборе декартовой системы. Вы-

берем декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы выполнялось условие 2); пусть $\mathbf{a} = \{P,\ Q,\ R\}$, $\mathbf{n} = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$. Тогда, учитывая, что

$$\cos\alpha\,ds = dydz,\ \cos\beta\,ds = dzdx,\ \cos\gamma\,ds = dxdy,$$

получим

$$\iiint\limits_{\bar{D}}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oint\!\!\oint\limits_{S}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds =$$
$$= \oint\!\!\oint\limits_{S}(Pdydz + Qdzdx + Rdxdy). \tag{6.26'}$$

Докажем, что справедливы следующие три равенства:

$$I = \iiint\limits_{\bar{D}}\frac{\partial P}{\partial x}\,dxdydz = \oint\!\!\oint\limits_{S}P\,dydz;$$

$$J = \iiint\limits_{\bar{D}}\frac{\partial Q}{\partial y}\,dxdydz = \oint\!\!\oint\limits_{S}Q\,dzdx;$$

$$L = \iiint\limits_{\bar{D}}\frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz = \oint\!\!\oint\limits_{S}R\,dxdy.$$

Ограничимся доказательством равенства для интеграла L, так как равенства для I и J доказываются аналогично. Обозначим через D' проекцию области D на плоскость Oxy. Через граничные точки области D' проведем прямые, параллельные Oz. Каждая из этих прямых пересекается с S лишь в одной точке. Множество этих точек разделяет S на две части: S_1 и S_2 (см. рис. 6.2). Если мы проведем прямую из внутренней точки области D', параллельную оси Oz, то она пересечет поверхность в двух точках: $(x,\ y,\ z_1(x,\ y))\in S_1$ и $(x,\ y,\ z_2(x,\ y))\in S_2$; $z_1(x,\ y)\geqslant z_2(x,\ y)$. Заметим, что $z_1(x,\ y)$ и $z_2(x,\ y)$ кусочно и непрерывно дифференцируемые функции в D'. По формуле сведения тройного интеграла к повторному интегралу получим

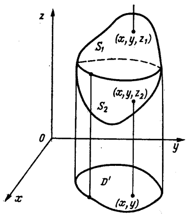

Рис. 6.2

$$L = \iint\limits_{\bar{D}'}\left[\int\limits_{z_2(x,y)}^{z_1(x,y)}\frac{\partial R(x,\ y,\ z)}{\partial z}\,dz\right]dxdy = \iint\limits_{\bar{D}'}R(x,\ y,\ z_1(x,\ y))\,dxdy -$$
$$-\iint\limits_{\bar{D}'}R(x,\ y,\ z_2(x,\ y))\,dxdy = \iint\limits_{S_1}R(x,\ y,\ z)\,dxdy +$$
$$+\iint\limits_{S_2}R(x,\ y,\ z)\,dxdy = \oint\!\!\oint\limits_{S}R(x,\ y,\ z)\,dxdy.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $S = S_1\cup S_2$, и соотношением

$$-\iint\limits_{\bar{D}'}R(x,\ y,\ z_2(x,\ y))\,dxdy = \iint\limits_{S_2}R(x,\ y,\ z)dxdy = \iint\limits_{S_2}R\cos\gamma\,ds,$$

справедливым в силу того, что внешняя нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности S_2 образует тупой угол с осью Oz (поэтому $\cos\gamma<0$). Теорема доказана.

Замечание 1. Формула Остроградского—Гаусса (6.26) может быть доказана и в случае областей D более общего вида, чем указано, а именно для таких, у которых существует конечное разбиение на области D_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, рассмотренного вида. Для этого достаточно формулу (6.26) написать для каждой области D_i и полученные результаты сложить. При этом получится искомая формула. Действительно, в силу аддитивности интеграла в левой части получится интеграл по D. В правой части поверхностные интегралы по соответствующим частям границ областей D_i в сумме дадут ноль, так как внешние нормали в точках границ областей D_i, принадлежащих границам двух таких областей, направлены в разные стороны. Таким образом, останутся только интегралы по частям границ D_i, составляющим в совокупности границу S области D.

Замечание 2. В формулировке теоремы 6.2 от условия 2) можно избавиться и считать, что S — кусочно гладкая двусторонняя полная ограниченная поверхность без особых точек. Однако в этом случае доказательство теоремы усложняется.

Замечание 3. Можно считать, что векторное поле $\mathbf{a}$ непрерывно дифференцируемо только в открытой области D и непрерывно в $D\cup S = \bar{D}$. Тогда тройной интеграл в формуле (6.26) следует понимать как несобственный.

Замечание 4. Формула Остроградского—Гаусса (6.26) может быть записана, как это следует из доказательства, в виде

$$\iiint\limits_{\bar{D}}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oint\!\!\oint\limits_{S}(P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy).$$

Заметим, что интегралы слева и справа имеют инвариантный характер, т. е. их значение и форма не меняются при переходе к новой декартовой системе координат. Для этого достаточно провести рассуждения, аналогичные проведенным в замечании 5 после доказательства теоремы 6.1.

3. Формула Стокса. Пусть S — односвязная [13] поверхность в E^3, удовлетворяющая двум условиям:

1) S — кусочно гладкая двусторонняя полная ограниченная поверхность без особых точек; ее границей является замкнутый кусочно гладкий контур C;

2) декартову систему координат можно выбрать так, чтобы S однозначно проектировалась на любую из трех координатных плоскостей.

Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к S, $\mathbf{t}$ — единичный вектор касательной к C, согласованный с $\mathbf{n}$ (см. п. 1). При этих условиях имеет место следующая теорема.

Теорема 6.3 (формула Стокса). *Пусть* $\mathbf{a}$ — *векторное поле, непрерывно дифференцируемое в некоторой окрестности поверхности* S *(т. е. на некотором открытом множестве в* E^3, *содержащем* S*). Тогда справедлива формула*

$$\iint_S (\mathbf{n}, \operatorname{rot}\mathbf{a})\, ds = \oint_C (\mathbf{a}, \mathbf{t})\, dl. \qquad (6.27)$$

Эта теорема допускает еще такую формулировку:

Поток вектора $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ *через поверхность* S *равен циркуляции вектора* $\mathbf{a}$ *по замкнутому контуру* C.

Доказательство. В силу условий теоремы интегралы в формуле (6.27) существуют. Формула (6.27), очевидно, инвариантна относительно выбора базиса. Поэтому достаточно доказать эту формулу при каком-то одном выборе базиса. Выберем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ так, чтобы S однозначно проектировалась на все три координатные плоскости. Пусть

$$\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}, \quad n = \{\cos X, \cos Y, \cos Z\},$$

$$t = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

Согласуем выбор системы координат так, чтобы вектор нормали $\mathbf{n}$ образовывал острые углы с координатными осями.

Учитывая выражение для $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ в декартовой прямоугольной системе координат, получим

[13] Напомним, что поверхность S называется односвязной, если любая кусочно гладкая замкнутая кривая без точек самопересечения, расположенная на S, ограничивает множество, целиком состоящее из точек этой поверхности.

$$\iint_S (\mathbf{n}, \operatorname{rot}\mathbf{a})\, ds =$$

$$= \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos X + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos Y + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos Z \right\} ds = \oint_C (\mathbf{a}, \mathbf{t})\, dl = \oint_C (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dl =$$

$$= \oint_C (Pdx + Qdy + Rdz). \qquad (6.27')$$

Достаточно, очевидно, доказать, что

$$I = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos Y - \frac{\partial P}{\partial y}\cos Z\right) ds = \oint_C Pdx.$$

Для остальных слагаемых:

$$J = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos Z - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos X\right) ds = \oint_C Qdy,$$

$$L = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos X - \frac{\partial R}{\partial x}\cos Y\right) ds = \oint_C Rdz$$

доказательство аналогичное.

Заметим, что поверхность S — кусочно гладкая и однозначно проектируется на Oxy. Пусть D — ее проекция, Γ — проекция C на плоскость Oxy (см. рис. 6.3). Поэтому существует дифференцируемая функция $z = z(x, y)$, которая задает уравнение поверхности S. При этом

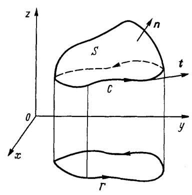

Рис. 6.3

$$\cos Y = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & z'_x \\ 0 & z'_y \end{vmatrix}}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}} =$$

$$= -\frac{z'_y}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}.$$

Аналогично $\cos Z = \dfrac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}$.

Поэтому, учитывая эти формулы, будем иметь

$$I = -\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos Z\, ds = -\iint_D \frac{\partial}{\partial y}\left[P(x, y, z(x, y))\right] dxdy,$$

поскольку на поверхности S функция $P(x, y, z)$ равна

$$P(x, y, z(x, y)), \quad \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y}$$

и поверхностный интеграл по S равен двойному интегралу по D.

Далее, используя формулу Грина, получим

$$-\iint_D \frac{\partial}{\partial y}\left[P(x, y, z(x, y))\right] dxdy = \oint_\Gamma P(x, y, z(x, y))\, dx = \oint_C P(x, y, z)\, dx.$$

Здесь мы воспользовались тем, что если точка (x, y) находится на кривой Γ, то точка $(x, y, z(x, y))$, очевидно, принадлежит кривой C. Теорема доказана.

Формула Стокса верна и для более общих ограниченных полных кусочно гладких двусторонних поверхностей с кусочно гладкой границей.

Замечание 1. Прежде всего покажем, что формула Стокса верна для поверхностей S, удовлетворяющих условию 1), но не удовлетворяющих, вообще говоря, условию 2) однозначного проектирования S на любую из координатных плоскостей.

Оказывается, что *существует такое число* $\delta > 0$, *что для любой части* Φ *поверхности* S *размера меньше* δ [14] *можно так выбрать декартову координатную систему, что* Φ *однозначно проектируется на все координатные плоскости.* Действительно, пусть M_0 — фиксированная точка S. Проведем касательную плоскость через точку M_0, пусть $\mathbf{n}_{M_0}$ — вектор единичной нормали поверхности в точке M_0. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы вектор $\mathbf{n}_{M_0}$ составлял острые углы с осями координат. Поскольку поле $\mathbf{n}$ нормалей непрерывно, то существует окрестность точки M_0 такая, что все нормали в точках этой окрестности образуют острые углы с осями координат. Но тогда согласно утверждению п. 1 гл. 5 и замечанию 2 к нему можно утверждать, что существует некоторая окрестность радиуса $\delta/2$ точки M_0, которая однозначно проектируется на все координатные плоскости.

Отметим, что указанное число δ зависит, вообще говоря, от точки M_0: $\delta = \delta(M_0)$. Покажем, что можно выбрать универсальное, не зависящее от точки число $\delta > 0$. Допустим противное, что такого числа δ не существует. Тогда для каждого $\delta_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, можно указать часть Φ_n поверхности S, размеры ко-

[14] Такая часть поверхности может быть расположена в сфере радиуса $\delta/2$.

торой меньше δ_n и которая не проектируется однозначно на все три координатные плоскости любой декартовой системы координат.

Выберем в каждой части Φ_n точку M_n, а из полученной последовательности выберем последовательность, сходящуюся к некоторой точке M поверхности S [15]. Согласно проведенным выше рассуждениям у точки M существует однозначно проектируемая на координатные плоскости некоторой прямоугольной системы окрестность. Эта окрестность для некоторого номера n содержит часть Φ_n, которая также будет однозначно проектироваться на все три координатные плоскости. Получилось противоречие с выбором Φ_n, завершающее доказательство.

Теперь уже нетрудно сделать заключение о справедливости формулы Стокса для поверхностей, удовлетворяющих условию 1) и не удовлетворяющих, вообще говоря, условию 2). Для этого разобьем поверхность S на конечное число гладких частей Φ_n, размер каждой из которых меньше δ, указанного выше. Поскольку часть Φ_n однозначно проектируется на все координатные плоскости некоторой декартовой системы координат, то формула Стокса верна для каждой части Φ_n. Просуммируем левые и правые части этих формул. Интегралы по общим участкам границы Φ_n берутся в противоположных направлениях и поэтому сократятся.

Таким образом, слева мы получим интеграл по поверхности от величины $(\mathbf{n}, \operatorname{rot}\mathbf{a})$, а справа — интеграл по границе C поверхности S от величины $(\mathbf{a}, \mathbf{t})$, т. е. формулу Стокса для общего случая.

Замечание 2. Формула Стокса верна и для поверхностей S, допускающих разбиение с помощью кусочно гладких кривых на конечное число односвязных, обладающих свойством 1) поверхностей. Доказательство этого факта очевидно: достаточно просуммировать интегралы слева и справа в формулах Стокса для односвязных поверхностей и учесть, что интегралы по кривым, входящим в разбиение, берутся в разных направлениях и поэтому сократятся.

Замечание 3. Формула Стокса (6.27) может быть записана, как это следует из доказательства, в виде (6.27′):

$$\oint\!\!\oint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos X + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos Y + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos Z \right\} ds = \oint_C (Pdx + Qdy + Rdz).$$

[15] Это можно сделать в силу ограниченности и полноты, используя теорему Больцано—Вейерштрасса.

Интегралы слева и справа имеют инвариантный характер — их значение и форма не меняются при переходе к новой декартовой системе координат. Чтобы убедиться в этом, достаточно провести рассуждения, аналогичные проведенным в замечании 5 п. 1.

§ 4. УСЛОВИЯ НЕЗАВИСИМОСТИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА НА ПЛОСКОСТИ ОТ ПУТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Пусть $\mathbf{a}(M)$ — векторное поле, заданное в связной плоской области D.

Определение 1. *Функция* $U(M)$ *называется* *потенциалом поля* $\mathbf{a}(M)$ *в области* D, *если в этой области*

$$\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} U(M).$$

Поле $\mathbf{a}$, *обладающее потенциалом, называется* *потенциальным полем.*

Теорема 6.4. *Пусть функции* $P(x, y)$, $Q(x, y)$ *непрерывны в* D. *Для любых двух точек* $A \in D$, $B \in D$ *значение интеграла*

$$\int_{\breve{AB}} Pdx + Qdy$$

не зависит от кусочно гладкой кривой $\breve{AB} \subset D$, *соединяющей точки* A *и* B, *тогда и только тогда, когда поле*

$$\mathbf{a}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$$

потенциально. В этом случае

$$\int_{\breve{AB}} Pdx + Qdy = U(B) - U(A),$$

где $U(x, y)$ — *потенциал поля* $\mathbf{a}(x, y)$.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть

$$\mathbf{a}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\} = \operatorname{grad} U(x, y) = \left\{\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right\}.$$

Произвольные точки A и B из области D соединим некоторой кусочно гладкой кривой $\breve{AB}$, и пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ — ее параметрическое представление. В силу непрерывности $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ заключаем, что функция $U(x, y)$ дифференцируема в D. Тогда по формуле Ньютона—Лейбница получаем

$$\int_{\breve{AB}} Pdx + Qdy = \int_a^b \left(P(x(t), y(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t))\, y'(t)\right) dt =$$

$$= \int_a^b U'\, dt = U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a)) = U(B) - U(A).$$

Необходимость. Фиксируем в D некоторую точку $M_0(x_0, y_0)$ и пусть $M(x, y)$ — произвольная точка области D. Положим

$$U(M) = \int_{\breve{M_0M}} Pdx + Qdy,$$

где интеграл берется по любой кусочно гладкой кривой, соединяющей точки M_0 и M (см. рис. 6.4).

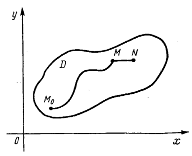

Рис. 6.4

Покажем, что так определенная функция $U(x, y)$ является искомым потенциалом поля $\mathbf{a}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$. Докажем, например, существование $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ и равенство $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x, y)$. От точки $M(x, y)$ сместимся в точку $N(x + \Delta x, y)$ так, чтобы отрезок $\overline{MN}$ содержался в D. Это можно сделать для всех достаточно малых приращений Δx, так как D — открытое множество, состоящее из внутренних точек. При таком смещении функция $U(x, y)$ получит приращение

$$U(x + \Delta x, y) - U(x, y) = \int_{\breve{M_0MN}} Pdx + Qdy - \int_{\breve{M_0M}} Pdx + Qdy =$$

$$= \int_{\overline{MN}} Pdx + Qdy.$$

На отрезке $\overline{MN}$ координата y имеет постоянное значение, и, следовательно,

$$\int_{\overline{MN}} Qdy = 0.$$

Поэтому

$$U(x + \Delta x, y) - U(x, y) = \int_{\overline{MN}} Pdx = \int_x^{x+\Delta x} P(t, y)\, dt.$$

В силу непрерывности функции $P(x, y)$ из теоремы о среднем получим

$$U(x + \Delta x, y) - U(x, y) = P(x + \theta\Delta x, y)\Delta x,$$

где $0 < \theta < 1$, откуда

$$\frac{U(x + \Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x} = P(x + \theta\Delta x, y).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции $P(x, y)$, получаем, что предел существует и

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y).$$

Совершенно аналогично доказывается равенство

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = Q(x, y).$$

Теорема 6.4 доказана.

Если поле $\mathbf{a}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ потенциально и функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ вместе со своими частными производными непрерывны в области D, то должно выполняться равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

которое означает равенство смешанных производных:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

В силу теоремы 6.4 необходимым условием независимости криволинейного интеграла

$$\int_{\breve{AB}} Pdx + Qdy$$

от пути интегрирования при условии непрерывности функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и их частных производных в области D является легко проверяемое равенство

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Если область D односвязна, то это условие будет и достаточным для независимости интеграла $\int_{\breve{AB}} Pdx + Qdy$ от выбора кривой, соединяющей данные точки A и B. Чтобы при изложении не использовать не доказанную в общем случае формулу Грина (см. замечание 2 к теореме 6.1), рассмотрим сначала случай, когда область D является кругом.

Теорема 6.5. *Пусть функции* $P(x, y)$, $Q(x, y)$ *и их частные производные непрерывны в некотором круге* K. *В этом случае поле* $\mathbf{a}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ *потенциально в этом круге тогда и только тогда, когда в* K

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Доказательство. Очевидно, требуется доказать только достаточность условия. Через центр круга, точку M_0, проведем прямые M_0x' и M_0y', параллельные координатным осям Ox и Oy соответственно. Из произвольной точки $M(x, y) \in K$ опустим перпендикуляры MM_1 и MM_2 на M_0x' и M_0y' соответственно. Точку M_0 соединим с точками M_1 и M_2 отрезками M_0M_1 и M_0M_2.

Применяя формулу Грина (6.25′) к прямоугольнику $M_0M_1MM_2$, получаем

$$\int_{M_0\breve{M_1}MM_2} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy = 0,$$

откуда следует, что

$$\int_{M_0\breve{M_1}M} Pdx + Qdy = \int_{M_0\breve{M_2}M} Pdx + Qdy,$$

т. е. интеграл $\int_\gamma Pdx + Qdy$ не зависит от двузвенной ломаной γ, соединяющей фиксированную точку M_0 с некоторой точкой M. Поэтому определим функцию

$$U(M) = \int_{\breve{M_0M}} Pdx + Qdy,$$

где $\breve{M_0M}$ — двузвенная ломаная, звенья которой параллельны координатным осям. Проверка, что так определенная функция $U(x, y)$ является потенциалом данного поля $\mathbf{a}(x, y)$, проводится аналогично той, которая проведена при доказательстве теоремы 6.4. Теорема 6.5 доказана.

Замечание. Теорема 6.5 справедлива в случае произвольной односвязной области D. Чтобы убедиться в этом, докажем, что для независимости криволинейного интеграла

$$\int_{\breve{AB}} Pdx + Qdy$$

от выбора кривой $\breve{AB}$, соединяющей точки A и B, достаточно выполнение в области D условия $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{dQ}{\partial x}$.

Пусть L — произвольная замкнутая кусочно гладкая кривая, расположенная в D. Обозначим через D^* область, которую

ограничивает кривая L. В силу односвязности области D каждая точка области D^* принадлежит D. Применяя к области D^* формулу Грина (6.25′) (см. замечание 2 к теореме 6.1), получим

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{D^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

Отсюда следует, что для любых фиксированных точек A и B области D и любых двух кусочно гладких кривых $A\breve{C}B$ и $A\breve{C'}B$, соединяющих эти точки, выполняются равенства:

$$0 = \int_{A\breve{C}B \cup B\breve{C'}A} Pdx + Qdy = \int_{A\breve{C}B} Pdx + Qdy + \int_{B\breve{C'}A} Pdx + Qdy =$$

$$= \int_{A\breve{C}B} Pdx + Qdy - \int_{A\breve{C'}B} Pdx + Qdy.$$

Поэтому

$$\int_{A\breve{C}B} Pdx + Qdy = \int_{A\breve{C'}B} Pdx + Qdy.$$

Следовательно, значение интеграла

$$\int_{\breve{AB}} Pdx + Qdy$$

не зависит от кусочно гладкой кривой $\breve{AB}$, соединяющей точки A и B.

§ 5. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ПРИЛОЖЕНИЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. Выражение площади плоской области через криволинейный интеграл. Пусть D — односвязная область с границей C, удовлетворяющей условиям теоремы 6.1.

Полагая в формуле Грина (формула (6.25′)) $P = -y$, $Q = x$, получим

$$\iint_D 2dxdy = \oint_C -ydx + xdy.$$

Для площади $\sigma(D)$ области D на плоскости имеем следующее выражение через криволинейный интеграл по ориентированной границе этой области:

$$\sigma(D) = \frac{1}{2}\oint_C -ydx + xdy.$$

С помощью полученной формулы найдем площадь области, ограниченной циклоидой $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, $a>0$, и прямой $y=0$. Так как

$$\int_\gamma -ydx+xdy=0,$$

где γ — отрезок $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, $y=0$, то в соответствии с положительной ориентацией контура получим

$$\sigma(D)=\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0}(-a^2(1-\cos t)^2+a^2(t-\sin t)\sin t)\,dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(2-2\cos t-t\sin t)\,dt=2\pi a^2-\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}t\sin t\,dt=$$

$$=2\pi a^2+\frac{a^2}{2}(t\cos t)\Big|_0^{2\pi}=3\pi a^2.$$

2. Выражение объема через поверхностный интеграл. Пусть D — односвязная область в E^3 с границей S, удовлетворяющей условиям теоремы 6.2 (формула Остроградского—Гаусса). Положим, что в области D

$$P(x, y, z)=x,\ Q(x, y, z)=y,\ R(x, y, z)=z.$$

Эти функции удовлетворяют условиям, при которых справедлива формула Остроградского—Гаусса, поэтому

$$\iint_S x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy=\iiint_D 3dxdydz=3V(D),$$

где $V(D)$ — объем области D.

3. Рассмотрим векторное поле, которое создает электрический заряд величины q. Поместим этот заряд в начало координат. Сила, действующая на единичный заряд, помещенный в точку $M(x, y, z)$, по закону Кулона выражается формулой

$$\mathbf{E}(M)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ε_0 — постоянная.

Электростатическое поле $\mathbf{E}$ потенциально в $E^3\setminus\{0\}$. Напомним, что поле $\mathbf{a}(M)$ называется потенциальным в области D, если в этой области существует функция $U(M)$ такая, что

$$\mathbf{a}(M)=\operatorname{grad}U(M).$$

Потенциалом поля $\mathbf{E}$ служит функция

$$\Phi(M)=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}.$$

Поле $\mathbf{F}$, создаваемое точечной массой m, помещенной в начало координат, называется *гравитационным*, и оно также потенциально.

По закону Ньютона сила $\mathbf{F}(M)$, с которой поле действует на единичную массу, помещенную в точку $M(x, y, z)$, выражается формулой

$$\mathbf{F}(M)=-gm\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Потенциалом поля $\mathbf{F}$ во всем E^3 (за исключением начала координат) служит функция

$$U(M)=gm\frac{1}{r}.$$

Для потенциального поля

$$\mathbf{a}(M)=\{P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z)\},$$

заданного в области $D\subset E^3$, независимость интеграла

$$\int_\gamma Pdx+Qdy+Rdz$$

от пути интегрирования (интеграл зависит только от начала и конца пути) доказывается так же, как и в теореме 6.4, в случае области D, принадлежащей E^2.

Поэтому работа, совершаемая таким полем при перемещении единичной пробной частицы из точки A в точку B, не зависит от пути перемещения. Если расстояния от начала координат до точек A и B равны r_1 и r_2 соответственно, то эта работа поля $\mathbf{E}$ равна

$$\Phi(B)-\Phi(A)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right),$$

а работа поля $\mathbf{F}$ равна

$$U(B)-U(A)=gm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right).$$

ОГЛАВЛЕНИЕ