Математические формулы и формулировки

Составитель: Month

Осень 2008

Версия 1.1

Содержание

1 Множества и операции над ними

1. $(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$
2. $(A \bigcap B) \bigcup C = (A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C)$
3. $A \setminus (B \bigcup C) = (A \setminus B) \bigcap (A \setminus C)$
4. $A \setminus (B \bigcap C) = (A \setminus B) \bigcup (A \setminus C)$
5. $A \triangle B = (A \setminus B) \bigcup (A \setminus B)$
6. $A \setminus B = A \bigcap \bar{B} = A \setminus (A \bigcap B)$
7. $A \bigcup B = \overline{\bar{A} \bigcap \bar{B}}$
8. $A \bigcap B = \overline{\bar{A} \bigcup \bar{B}}$

   Две последние формулы называются также *формулами двойственности* или *правилами Де Моргана.*

2 Комбинаторика

Перестановки. Совокупность n объектов можно переставить $n!$ различными способами.

Упорядоченная выборка. Из совокупности n объектов можно выбрать упорядоченную последовательность из r элементов $A^{n,r} = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$ различными способами.

Неупорядоченная выборка. Из совокупности n объектов можно выбрать неупорядоченную последовательность из r_k элементов $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ способами.[1]

Неупорядоченные выборки. Пусть положительные числа $r_1, r_2, \dots, r_k$ таковы, что их сумма равна n; тогда из группы n элементов можно выбрать k групп такие, что в i-й группе r_i элементов, $P^n_{r_1,r_2,\dots,r_k} = \dfrac{n!}{r_1!r_2!\dots r_n!}$ способами.[2]

3 Тригонометрия

1. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$
2. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha)$
3. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}(\alpha) \pm tg(\beta)}{1 \mp \operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)}$
4. $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}(\alpha)\operatorname{ctg}(\beta) \mp 1}{\operatorname{ctg}(\alpha) \pm \operatorname{ctg}(\beta)}$
5. $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
6. $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$
7. $\operatorname{tg}(2\alpha) = \dfrac{2\operatorname{tg}(\alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha)}$
8. $\operatorname{ctg}(2\alpha) = \dfrac{\operatorname{ctg}^2(\alpha) - 1}{2\operatorname{ctg}(\alpha)}$
9. $\sin(3\alpha) = 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha)$
10. $\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$
11. $\sin(x) + \sin(2x) + \ldots + \sin(nx) = \dfrac{\cos(x/2) - \cos(x(n+1/2))}{2\sin(x/2)}$

[1] Числа C_n^k также называются биномиальными коэффициентами.
[2] Числа $P^n_{r_1,r_2,\dots,r_k}$ также называются полиномиальными коэффициентами.

12. $\cos(x) + \cos(2x) + \ldots + \cos(nx) = \dfrac{\sin(x(n+1/2)) - \sin(x/2)}{2\sin(x/2)}$

13. $\cos^2(\alpha) = \dfrac{\cos(2\alpha) + 1}{2}$

14. $\sin^2(\alpha) = \dfrac{1 - \sin(2\alpha)}{2}$

15. $\sin(\alpha) \pm \sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha\pm\beta}{2})\cos(\frac{\alpha\mp\beta)}{2}$

16. $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

17. $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})$

18. $\mathrm{tg}(\alpha) \pm \mathrm{tg}(\beta) = \dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$

19. $\mathrm{ctg}(\alpha) \pm \mathrm{ctg}(\beta) = \dfrac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)}$

20. $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

21. $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$

22. $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

23. $\sin(\alpha) = \dfrac{2\,\mathrm{tg}(\frac{\alpha}{2})}{1 + \mathrm{tg}^2(\frac{\alpha}{2})}$

24. $\cos(\alpha) = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2(\frac{\alpha}{2})}{2\,\mathrm{tg}(\frac{\alpha}{2})}$

    Последние две формулы так же называются *формулами универсальной тригонометрической подстановки*.

4 Числовые соотношения и неравенства

В этом разделе числа n и k являются натуральными.

1. $1 + 2 + 3 + \ldots\ n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$

4. *(Бином Ньютона)* $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$, где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

5. *(Неравенство Бернулли)*Если числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, большие -1, одного знака, то $(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

6. $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ при $x > 0$

7. $n! < \dfrac{(n+1)^n}{2}$ при $n > 1$

8. $(2!)(4!)\cdots(2n)! > [(n+1)!]^n$ при $n \geqslant 1$

9. $n^{n+1} > (n+1)^n$ при $n > 1$

10. $\left(\dfrac{n}{3}\right)^n < n!$

11. $2^n > n^3$ при $n > 10$

12. $n! > \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

13. $n! < e\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$

14. *(Тождество Абеля)* Пусть даны две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ и p - произвольное натуральное число. Тогда $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(b_k - b_{k+1}) + S_{n+p}b_{n+p} - S_n b_{n+1}$. (При $p = 1$ сумма в правой части равенства отсутсвует.)

    В последующих неравенствах $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ - произволные комплексные числа.

15. *(Неравенство Коши-Буняковского)* $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\right)$

16. *(Неравенство Минковского)* Пусть $p \geqslant 1$. Тогда $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}$

    Пусть $p, q > 0, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

17. *(Неравенство Юнга)* Если $a, b \geqslant 0$, то $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

18. *(Неравенство Гёльдера)* $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/q}$

5 Комплексные числа

Формула Эйлера. $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

Формула де Муавра. $(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$

Формула корней. Существует ровно n корней n-й степени из комплексного числа $z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$,определяемых формулой:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right)$$

, где $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

6 Таблица производных

1. $c' = 0$ (c - константа)
2. $(a^x)' = a^x \ln(a)$
3. $(\log_a(x))' = \dfrac{1}{x\ln(a)}$
4. $(x^a)' = ax^{a-1}$
5. $(\sin(x))' = \cos(x)$
6. $(\cos(x))' = -\sin(x)$
7. $(\mathrm{tg}(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
8. $(\mathrm{ctg}(x))' = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$
9. $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\mathrm{arctg}(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$
12. $(\mathrm{arcctg}(x))' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
13. $(\mathrm{sh}(x))' = \mathrm{ch}(x)$
14. $(\mathrm{ch}(x))' = \mathrm{sh}(x)$

15. $(\text{th}(x))' = \dfrac{1}{\text{ch}^x(x)}$

16. $(x^a)^{(n)} = a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}$

17. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n(a)$

18. $(\sin(x))^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$

19. $(\cos(x))^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$

20. $(\ln(x))^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

21. $(\text{arctg}(x))^{(n)} = \dfrac{(n-1)!}{(x^2+1)^{n/2}} \sin(n(\text{arctg}(x) + \pi/2))$

7 Теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b)$, то существует $\xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$.

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b), то существует $\xi \in (a, b) : f'(\xi)(b - a) = f(b) - f(a)$.

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b), и $g'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$, то существует $\xi \in (a, b) : \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

8 Разложения и ассимптотические формулы

8.1 Разложения в ряд Тейлора

В этом разделе под $R_n(x)$ понимается остаточный чден ряда Тейлора в виде Коши, Лагранжа, Пеано или Шлемильха-Роша.

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x)$

2. $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+3}(x)$

3. $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+2}(x)$

4. $\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + R_{n+1}(x)$

5. $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$

6. $\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{n+2}(x)$

8.2 Другие разложения

1. *(Формула Стирлинга)* $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{\omega}{\sqrt{n}}\right)$, где $-1 \leqslant \omega \leqslant 1$.

2. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln(n) + C + \alpha_n$, где C - постоянная Эйлера-Маскеронни, равная 0.5177...[3], а $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

3. $\arcsin(x) = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2x+1}}{2n+1}$

4. $\sin(x) = x \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$

9 Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$

2. $\int x^a dx = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, & a \neq -1 \\ \ln|x| + C, & a = -1 \end{cases}$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$

4. $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$

5. $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}(x) + C$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}(x) + C$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$

9. $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg}(x) + C$

[3] Это загадочная константа,неизвестно даже, рациональна или иррациональна ли она по своей природе.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$

11. $\int \operatorname{sh}(x)dx = \operatorname{ch}(x) + C$

12. $\int \operatorname{ch}(x)dx = \operatorname{sh}(x) + C$

13. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2(x)} = \operatorname{th}(x) + C$

14. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2(x)} = -\operatorname{cth}(x) + C$

    В последующих интегралах константа $a > 0$.

15. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}(\frac{x}{a}) + C$

16. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin(\frac{x}{a}) + C$

19. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin(\frac{x}{a})$

20. $\int \sqrt{x^2 - a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1} + C|$ (знак “минус” выбирается при $|x| > a$)

10 Методы взятия неопределенных интегралов

10.1 Интегралы, сводимые к рациональным дробям

Под рациональной функцией $R(u, v)$ понимается дробь

$$\frac{a_{00} + a_{10}u + a_{01}v + a_{20}u^2 + a_{02}v^2 + \ldots + a_{k0}u^k + a_{0k}v^k}{b_{00} + b_{10}u + b_{01}v + b_{20}u^2 + b_{02}v^2 + \ldots + b_{k0}u^k + b_{0k}v^k}$$

(a_{ij}, b_{ij}- вещественные числа)

1. $\int R\left(x,\ \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ (m - натуральное, a, b, c, d - вещественные). Подстановка $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

2. *(Подстановки Эйлера)* $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$

   a) $a > 0$; подстановка $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x$
   b) $c > 0$; подстановка $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$
   c) $b^2 - 4ac \geqslant 0$;$ax^2+bx+c = (x-x_1)(x-x_2)$; подстановка $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$ (или $t(x-x_2)$)

10.2 Интегрирование дифференциальных биномов

Рассмотрим $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, где a, b - вещественные, m, n, p - рациональные.

1. p - целое; подстановка $x = t^N$, где N - общий знаменатель m и n;
2. $\dfrac{m+1}{n}$ - целое; подстановка $a + bx^n = t^N$, где N - знаменатель дроби p;
3. $\dfrac{m+1}{n} + p$- целое; подстановка $ax^{-n} + b = t^N$, где N - знаменатель дроби p.

   Теорема Чебышева. Если ни один из случаев (1),(2) или (3) не имеет место, то интеграл в элементарных функциях не вычисляется.

10.3 Интегрирование тригонометрических функций

1. $\int \cos^m(x)\sin^n(x)dx$

   a) n - нечетное; подстановка $t = \cos(x)$
   b) m - нечетное; подстановка $t = \sin(x)$
   c) $m \leqslant 0, n \leqslant 0$; $m + n$ - четное; подстановка $t = \mathrm{tg}(x)$

2. $\int R(\sin(x), \cos(x))dx$

   a) $R(\sin(x), \cos(x)) = -R(-\sin(x), \cos(x))$; подстановка $t = \cos(x)$
   b) $R(\sin(x), -\cos(x)) = R(\sin(x), \cos(x))$; подстановка $t = \sin(x)$
   c) $R(\sin(x), \cos(x)) = -R(-\sin(x), -\cos(x))$; подстановка $t = \mathrm{tg}(x)$

11 Определенные интегралы (собственные)

Первая теорема о среднем. Пусть $f(x)$ непрерывна на сегменте$[a, b]$, а $g(x)$ сохраняет на этом сегменте знак; тогда $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \alpha \int\limits_a^b g(x)dx$, где $\inf\limits_{[a,b]} f(x) \leqslant \alpha \leqslant \sup\limits_{[a,b]} f(x)$

Вторая теорема о среднем. Пусть $f(x)$ непрерывна и монотонна на сегменте$[a, b]$, а $g(x)$ непрерывна на нем; тогда $\exists\xi \in [a, b]$, т.ч.

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \begin{cases} f(a)\int\limits_a^\xi g(x)dx, & f(x) \text{ не возрастает;} \\ f(b)\int\limits_\xi^b g(x)dx, & f(x) \text{ не убывает.} \end{cases}$$

12 Геометрические приложения определенных интегралов

12.1 Площади криволинейных трапеций

1. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$, равна $\int\limits_a^b f(x)dx$.
2. Если функция задана параметрически уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, то означенная площадь, отвечающая изменению параметра от t до T, равна $\int\limits_t^T x(t)y'(t)dt$.
3. Площадь криволинейного сектора, ограниченного графиком функции $r = r(\varphi)$, прямыми $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, равна $\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$.

   Если функция задана как $\varphi = \varphi(r)$, то означенная площадь будет равна $\frac{1}{2}\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{r^2}{r'(\varphi)}dr$

12.2 Длинны дуг

В этом подразделе все пункты оформлены как (уравнения, задающие кривую); (формула рассчета длинны кривой).

1. $x = x(t), y = y(t), t \in [t, T]; |L| = \int\limits_t^T \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt$
2. $y = y(x), x \in [a, b]; |L| = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dt$
3. $r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]; |L| = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r(\varphi)^2 + (r'(\varphi))^2}dt$
4. $\varphi = \varphi(r), r \in [r1, r2]; |L| = \int\limits_{r1}^{r2} \sqrt{r^2 + (\varphi'(r))^2}\varphi'(r)dt$

12.3 Объемы тел вращения

Найдем объем тела вращения, полученного путем вращения криволинейной трапеции(или криволнейного сектора) вокруг оси абсцисс (полярной оси).

1. Если трапеция задана как $y = y(x), x \in [a, b]$, то объем получившегося тела равен $\pi \int\limits_a^b y^2(x)dx$
2. Если трапеция задана как $y = y(t), x = x(t), t \in [t, T]$,то объем получившегося тела равен $\pi \int\limits_t^T y^2(t)x'(t)dt$
3. Если сектор задан как $r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$, то объем получившегося тела равен $\dfrac{2\pi}{3} \int\limits_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin(\varphi)d\varphi$

12.4 Площади поверхностей

Найдем площадь цилиндрической поверхности тела, полученной вращением криволинейной трапеции (или криволинейного сектора) вокруг оси абцисс.

1. Если трапеция задана как $y = y(x), x \in [a, b]$, то площадь равна $2\pi \int\limits_a^b xy(x)dx$
2. Если сектор задан как $r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$,то площадь равна $2\pi \int\limits_\alpha^\beta |r\sin(\varphi)|\sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}$

13 Несобственные интегралы

Рассмотрим интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ (1) и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ (2).

Теорема сравнения. Пусть $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ для $\forall x \in [a; +\infty)$. Тогда если (1) расходится, то (2) тоже расходится, и если (2) сходится, то (1) тоже сходится.

Первый признак сравнения. Если $\exists F(x) : |f(x)| \leqslant F(x)$, и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} F(x)dx$ сходится, то (1)тоже сходится.

Второй признак сравнения. Пусть $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \leqslant \infty$.

1. $0 < k < +\infty$. (1) сходится или расходится одновременно с (2).
2. $k = 0$. Сходимость (2) влечет сходимость (1).
3. $k = +\infty$. Расходимость (2) влечет расходимость (1).

Третий признак сравнения. Если $f(x) = \mathfrak{O}\left(\frac{1}{x^p}\right)$ при $x \to \infty$, то (1) сходится абсолютно при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

Критерий Коши. (1) сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists A_0 > a : \forall A_1, A_2 \geqslant A_0\ \left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)g(x)dx$ (3), где $a > 0$.

Признак Дирихле. (3) сходится, если:

1. $\exists K : \forall A > a$ верно, что $\left|\int\limits_{a}^{A} f(x)dx\right| < K$;
2. $g(x)$ монотонна и $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Признак Абеля. (3) сходится, если:

1. (1) сходится;
2. $\exists L : |g(x)| < L$

14 Эйлеровы интегралы

14.1 Интегралы Эйлера первого рода (Бета-функции)

Интегралом Эйлера первого рода (Бета-функцией) называется выражение

$$B(a, b) = \int\limits_{0}^{1} x^{a-1}(1-x)^{y-1}dx,$$

где $a, b > 0$. Эта функция оладает следующими свойствами:

1. $B(a, b) = B(b, a)$
2. $B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1}B(a, b-1)$
3. $B(a, n) = \frac{(n-1)!}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}$ (n - натуральное)
4. $B(a, b) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b-1}}dy$
5. $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

14.2 Интегралы Эйлера второго рода (Гамма-функции)

Интегралом Эйлера второго рода называется выражение

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}, dx$$

где $a > 0$

1. $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
2. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
3. $\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2k-1)\sqrt{2\pi}}{2^k}, & n = 2k, k = 1, 2, \dots \\ k!, & n = 2k+1, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$
4. *(Формула Эйлера-Гаусса)*$\Gamma(a) = \lim\limits_{n\to\infty} n^{(a)} \frac{(n-1)!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}$

15 Числовые ряды

15.1 Признаки сравнения знакопостоянных рядов

Расмотрим два ряда с положительными членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ (1) и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ (2)

Первый признак сравнения. Если для всякого n, начиная с некоторого, $a_n \leqslant b_n$, то сходимость ряда (2) влечет сходимость ряда (1); расходимость ряда (1) влечет расходимость ряда (2).

Второй признак сравнения. Если существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, то сходимость ряда (2) влечет сходимость ряда (1); расходимость ряда (1) влечет расходимость ряда (2).

Третий признак сравнения. Если для всякого n, начиная с некоторого, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ то сходимость ряда (2) влечет сходимость ряда (1); расходимость ряда (1) влечет расходимость ряда (2).

15.2 Достаточные признаки сходимости

Признак Даламбера. 1. Если для всякого n, начиная с некоторого, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant L < 1$, то ряд (1) сходится; если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, то ряд (1)расходится.

2. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=L$, то ряд расходится при $L>1$ сходится при $L<1$.

Признак Коши. 1. Если для всякого n, начиная с некоторого, $\sqrt[n]{a_n}\leqslant L<1$, то ряд (1) сходится; если $\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1$, то ряд (1)расходится.

2. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=L$, то ряд расходится при $L>1$ сходится при $L<1$.

Признак Раабе. 1. Если для всякого n, начиная с некоторого, $n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)\geqslant L>1$, то ряд (1) сходится; если $n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)\leqslant L<1$, то ряд (1)расходится.

2. Если $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)=L$, то ряд расходится при $L<1$ сходится при $L>1$.

!***Замечание.*** Признаки Коши,Даламбера и Раабе не работают при $L=1$.

Логарифмический признак. Если $\dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln(n)}\leqslant 1$, то ряд (1) расходится; если это отношние больше единицы, то он сходится.

Интегральный признак Коши-Маклорена. Пусть $f(x)$ - невозрастающая функция, принимающая неотрицательные значения; тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f(k)$ сходится или расходится одновременно с интегралом $\int\limits_{1}^{+\infty}f(x)dx$.

Признак Ермакова. Пусть $f(x)$ - невозрастающая функция, принимающая неотрицательные значения, и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x f(e^x)}{f(x)=L}$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f(k)$ сходится при $L>1$ и расходится при $L<1$.

Признак Лейбница. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ (*ряд Лейбница*)сходится, если (a_k) - монотонно стремящаяся к нулю последовательность. При этом справедлива оценка: $|S_n(x)-S(x)|<a_{n+1}$, где $S_n(x)$ - энная частичная сумма ряда, $S(x)$ - сумма ряда.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_kv_k(3)$

Признак Абеля. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ сходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k$ обладает ограниченной и монотонной последовательностью частичных сумм, то ряд (3) сходится.

Признак Дирихле-Абеля . Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ обладает ограниченной последовательностью частичных сумм, а (v_k) - монотонно стремящаяся к нулю последовательность, то ряд (3) сходится.

16 Функциональные ряды

16.1 Исследование равномерной сходимости

Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ (1) и функциональную последовательнсть $\{v_k\}$ (2), определенные на множестве $\{X\}$.

Критерий Коши. Для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ существовал такой номер N, что для всякого $n > N$, любого натурального p и всех$x \in \{X\}$ $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)| < \varepsilon$.

Первый признак Абеля. Если функциональный ряд (1) обладает равномерно - ограниченной последовательностью частичных сумм, а функциональная последовательность (2) обладает равномерно-ограниченным на $\{X\}$ изменением и сходится к тождественному нулю, то функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)v_k(x)$ сходится равномерно на $\{X\}$.

Второй признак Абеля. Если функциональный ряд (1) равномерно сходится, а функциональная последовательность (2) обладает равномерно-ограниченным изменением на $\{X\}$, то функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)v_k(x)$ сходится равномерно на $\{X\}$.

Признак Дирихле-Абеля. Если функциональный ряд (1) обладает равномерно-ограниченной последовательностью частичных сумм, а функциональная последовательность (2) не возрастает на $\{X\}$ и сходится к тождественному нулю, то функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)v_k(x)$ сходится равномерно на $\{X\}$.

Признак Вейерштрасса. Если для функционального ряда (1) существует числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$, т.ч. $|u_k(x)| \leqslant c_l \forall k, \forall x \in \{X\}$ [4] то ряд (1) сходится равномерно на $\{X\}$.

Признак Дини. Пусть ряд (1) сходится в каждой точке $\{X\}$ к сумме $S(x)$, и:

1. Множество $\{X\}$ компактно (т.е. замкнуто и ограничено);

[4]В таком случае говорят, что ряд мажорируется числовым рядом.

2. $u_k(x) > 0 (< 0) \forall k, \forall x \in \{X\}$;
3. $\forall k \; S_k(x)$ непрерывна на $\{X\}$;
4. $S(x)$ непрерывна на $\{X\}$.

Тогда ряд (1) сходится равномерно к $S(x)$ на $\{X\}$.

16.2 Почленные операции над рядами

Почленный переход к пределу. Пусть ряд (1) равномерно сходится на множестве $\{X\}$, и каждый его член имеет предел в точке $x_0 \in \{X\}$. Тогда и сумма этого ряда имеет в этой точке предел, причем его можно вычислять почленно.

Следствие. Пусть ряд (1) равномерно сходится на множестве $\{X\}$, и каждый его член непрерывен в точке $x_0 \in \{X\}$. Тогда и сумма этого ряда непрерывна в этой точке.

Почленное интегрирование. Пусть ряд (1) равномерно сходится на сегмемнте $[a, b]$, и каждый его член интегрируеем на $[a, b]$. Тогда и сумма этого ряда интегрируема на $[a, b]$, причем вычислять интеграл можно почленно.

Почленное дифференцирование. Если каждый член ряда (1) имеет производную на сегменте $[a, b]$, и если ряд, составленный из этих производных, сходится равномерно на $[a, b]$, то и сумма этого ряда имеет производную на $[a, b]$, причем вычислять ее можно почленно.

17 Таблица свойств распределений случайных велечин

17.1 Дискретные случайные величины

Имя распределения	$\mathbf{P}(\xi = k)$	**Мат.ожидание**	**Дисперсия**
$\mathrm{Bi}(n, p)$(Биноминальное)	$C_n^k p^k (1-p)^k$	np	$np(1-p)$
$\mathrm{Pois}(\lambda)$(Пуассоновское)	$e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
$\mathfrak{G}(p)$ (Геометрическое)	$(1-p)^{k-1} p$	$\dfrac{p}{1-p}$	$\dfrac{p}{(1-p)^2}$

Имя распределения	**Хар.функция**	**Произв.функция**
$\mathrm{Bi}(n, p)$(Биноминальное)	$(1 + p(e^{it} - 1))^n$	$(1 + p(z-1))^n$
$\mathrm{Pois}(\lambda)$(Пуассоновское)	$\exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}$	$\exp\{\lambda(z-1)\}$
$\mathfrak{G}(p)$ (Геометрическое)	$\dfrac{1-p}{1-pe^{it}}$	$\dfrac{1-p}{1-pz}$

17.2 Абсолютно-непрерывные случайные величины

Имя распределения	**Плотность**	**Мат.ожидание**	**Дисперсия**
R$[a,b]$(Равномерное)	$\begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in [a,b] \\ 0, x \notin [a,b] \end{cases}$	$\frac{b-a}{2}$	$\frac{(a-b)^2}{12}$
Exp(λ)(Показательное, $\lambda > 0$)	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \geqslant 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$
N(a, σ^2) (Нормальное, $\sigma > 0$)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$	a	σ^2
K(a,b)(Распред.Коши, $a, b > 0$)	$\frac{b}{\pi(b^2 + (x-a)^2)}$	-	-

Имя распределения	**Хар.функция**
R$[a,b]$(Равномерное)	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Exp(λ)(Показательное, $\lambda > 0$)	$\frac{\lambda}{\lambda - it}$
N(a, σ^2) (Нормальное, $\sigma > 0$)	$\exp\{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\}$
K(a,b)(Распред.Коши, $a, b > 0$)	$\exp\{ita - b\|t\|\}$