ПОСОБИЕ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

для студентов младших курсов математических и технических специальностей

А. А. Кудрявцев

Кудрявцев Алексей Андреевич

ПОСОБИЕ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

для студентов младших курсов математических и технических специальностей

Пособие содержит 12 параграфов, разбитых на 15 занятий — стандартный курс семинаров по теории вероятностей. Каждое занятие включает в себя всю необходимую для решения задач теоретическую базу, при этом предполагается, что студент посещает курс лекций по данному предмету и имеет возможность углубленного изучения материала при помощи учебников. Разделы книги снабжены рисунками, иллюстрирующими теоретический и практический материал, который, в свою очередь, представлен задачами с решениями и так называемыми "домашними заданиями", предназначенными для самостоятельного решения в конце семинара и в домашних условиях.

Автор не задавался целью составления учебника или сборника задач, его целью являлось, скорее, объяснить, нежели научить. Материал, изложенный в данной работе, основан на курсе семинаров, который автор на протяжении нескольких лет ведет на Факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Данное пособие, в первую очередь, является "шпаргалкой" для самого автора и его учеников, но также может быть полезно молодым преподавателям и студентам, начинающим знакомиться с теорией вероятностей.

Содержание

Введение **4**

Список обозначений **7**

§ 1. Классическое определение вероятности **10**

§ 2. Геометрические вероятности **19**

§ 3. Условные вероятности и независимость событий **26**

§ 4. Формула полной вероятности и формула Байеса **32**

§ 5. Схема Бернулли **38**

§ 6. Вероятностное пространство **45**

§ 7. Случайные величины и их распределения **53**

§ 8. Математическое ожидание, дисперсия и моменты случайных величин **78**

§ 9. Характеристические и производящие функции **93**

§ 10. Многомерные случайные величины **100**

§ 11. Виды сходимостей случайных величин **107**

§ 12. Предельные теоремы теории вероятностей **113**

Приложение: характеристики основных законов распределения **120**

Рекомендуемая литература **122**

Литература **124**

Предметный указатель **127**

Введение

На протяжении многих веков философы не могут прийти к согласию по вопросу: существует ли случайность и неопределенность, или все, что происходит в нашем мире является следствием неизвестных нам закономерностей и, вообще говоря, детерминировано? Автор данного пособия придерживается той точки зрения, что случайность — это скорее неизвестность, нежели неопределенность; случайность проистекает из незнания всех параметров системы, в которой производится тот или иной эксперимент. Как мы с вами увидим, с математической точки зрения, случайности (в смысле неопределенности) также не существует, а основное понятие теории вероятностей "случайная величина" есть не что иное, как строго заданная функция, обладающая вполне определенными свойствами.

Что такое теория вероятностей? Как развивалась теория вероятностей? Что является предметом изучения этой науки? На первый вопрос читатель найдет ответ на лекциях по курсу "Теория вероятностей и математическая статистика" и в учебниках, ссылки на многие из которых приведены в конце книги. Вместо ответа на второй вопрос автор рекомендует ознакомиться с очерками по истории теории вероятностей такими, например, как (Майстров 1967) и (Гнеденко 2001). А вот ответу на третий вопрос и посвящена эта книга.

Преподавание теории вероятностей обычно ведется одним из двух способов: историческим и аксиоматическим. Исторический способ приводит к общепринятым аксиомам теории вероятностей постепенно, повторяя основные этапы формирования и развития теории вероятностей. Принято считать, что истоки теории вероятностей лежат в переписке выдающихся математиков Б. Паскаля и П. Ферма, относящейся к 1654 г. Очевидно, что за последние 350 лет определения основных понятий претерпели существенные изменения. Конец таким изменениям (в рамках классической теории вероятностей) положил великий советский математик А. Н. Колмогоров, предложивший в 1933 г. набор аксиом, который впервые был опубликован на немецком языке в книге (Kolmogoroff 1933) и на русском языке в (Колмогоров 1936) в переводе Г. М. Бавли. Основная опасность, которую представляет исторический подход для студента, впервые столкнувшегося с такой сложной дисциплиной, как теория вероятностей, состоит в следующем. Первые простейшие определения вероятности, случайной величины и прочие являются в 21 веке, мягко говоря, устаревшими. Некоторые же нерадивые студенты, не понимая, что такие определения приведены лишь в качестве иллюстрации, и не дочитав учебник до современных определений, удивляются полученной на экзамене неудовлетворительной оценке.

Аксиоматический способ преподавания основан на изложении современных аксиом и результатов теории вероятностей с минимальными историческими экскурсами. Такой подход опасен для студента большим объемом новых понятий, разбираться в которых по каким-то причинам тот же студент не желает, предпочитая оттянуть знакомство с учебником до экзаменационной сессии.

В рамках данного пособия автор попытался, излагая теорию вероятностей при помощи исторического подхода, предупредить читателя о том, какие из определений уже устарели, а также уделить особое внимание разъяснению современных аксиом на уровне студента второго курса технического ВУЗа, знакомого с основными методами математического анализа и теории множеств.

Пособие содержит 12 параграфов, разбитых на 15 занятий — стандартный курс семинаров по теории вероятностей. Каждое занятие включает в себя всю необходимую для решения задач теоретическую базу, при этом предполагается, что студент посещает курс лекций по данному предмету и имеет возможность углубленного изучения материала при помощи учебников (список учебников и задачников, использованных при написании пособия и рекомендованных автором, можно найти в конце книги). Разделы книги снабжены рисунками, иллюстрирующими теоретический и практический материал, который, в свою очередь, представлен задачами с решениями и так называемыми "домашними заданиями", предназначенными для самостоятельного решения в конце семинара и в домашних условиях.

Автор не задавался целью составления учебника или сборника задач, его целью являлось, скорее, объяснить, нежели научить. Материал, изложенный в данной работе, основан на курсе семинаров, который автор на протяжении нескольких лет ведет на Факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Данное пособие, в первую очередь, является "шпаргалкой" для самого автора и его учеников, но также может быть полезно молодым преподавателям и студентам, начинающим знакомиться с теорией вероятностей.

Автор выражает признательность профессору В. Ю. Королеву за внимательное прочтение данной работы и за ценные замечания, касающиеся содержания рукописи; А. М. Кудрявцеву за конструктивную критику; студентам, "позаимствовавшим" у автора конспекты семинарских занятий, за побудительный мотив к написанию пособия.

Москва, 2005 г.

Список обозначений

В тексте данного пособия используются следующие обозначения:

(!)	—	знак, указывающий на то, что приводимое определение является устаревшим;
$\square$	—	конец решения задачи;
Ω	—	пространство элементарных исходов (событий);
ω	—	элементарный исход (элементарное событие);
$\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$	—	множество, состоящее из элементов $\omega_1, \ldots, \omega_n$;
$A \cup B$	—	сумма событий A и B;
$A \cap B$	—	произведение событий A и B;
AB	—	произведение событий A и B;
$A \backslash B$	—	разность событий A и B;
$\emptyset$	—	невозможное событие;
$\overline{A}$	—	событие, дополнительное к событию A;
$\mathsf{P}(A)$	—	вероятность события A;
$\lvert A \rvert$	—	мощность множества A;
C_n^k	—	число сочетаний из n по k: $C_n^k = n!/(k!(n-k)!)$;
$n!$	—	факториал числа n: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$;
$mes\, G$	—	геометрическая мера (длина, площадь, объем) множества G;
$\mathsf{P}(A \vert\, B)$	—	условная вероятность события A при условии, что произошло событие B;
$P(n, k)$	—	вероятность появления k "успехов" в схеме n независимых испытаний Бернулли;
$R(n, k)$	—	вероятность появления не менее k "успехов" в схеме n независимых испытаний Бернулли;
$\mathbb{R}$	—	множество действительных чисел;
$\mathcal{A}$	—	алгебра подмножеств Ω;
$\mathcal{F}$	—	σ-алгебра подмножеств Ω;

$\sigma(B)$	—	σ-алгебра, порожденная множеством B;
$\mathcal{B}$	—	борелевская σ-алгебра;
$\mathcal{B}_{[0,\,1]}$	—	борелевская σ-алгебра подмножеств отрезка $[0,\,1]$;
$f:X\longrightarrow Y$	—	отображение f, действующее из X в Y;
$\xi^{-1}(B)$	—	полный прообраз множества B при отображении ξ;
$\mathsf{P}_\xi(B)$	—	распределение случайной величины ξ;
$\xi\equiv\eta$	—	тождественное равенство случайных величин ξ и η;
$\xi\overset{п.н.}{=}\eta$	—	равенство почти наверное (эквивалентность) случайных величин ξ и η;
$\xi\overset{d}{=}\eta$	—	равенство по распределению случайных величин ξ и η;
$F_\xi(x)$	—	функция распределения случайной величины ξ;
$\xi\overset{п.н.}{=}a$	—	случайная величина ξ, вырожденная в точке a;
$\xi\sim\mathsf{P}_\xi$	—	случайная величина ξ имеет распределение P_ξ;
$Bi(n,\,p)$	—	биномиальное распределение с параметрами n и p;
$Pois(\lambda)$	—	пуассоновское распределение с параметром λ;
$\mathcal{G}(p)$	—	геометрическое распределение с параметром p;
$\mathbb{N}$	—	множество натуральных чисел;
$\int_S g\,d\mu$	—	интеграл Лебега функции g по мере μ на множестве S;
$\int_S g(s)\,\mu(ds)$	—	интеграл Лебега функции g по мере μ на множестве S;
$f_\xi(x)$	—	плотность распределения случайной величины ξ;
$R[a,\,b]$	—	равномерное распределение с параметрами a и b (на отрезке $[a,\,b]$);
$N(a,\,\sigma^2)$	—	нормальное распределение с параметрами a и σ^2;
$N(0,\,1)$	—	стандартное нормальное распределение;
$\Phi(x)$	—	функция распределения стандартного нормального закона;
$\varphi(x)$	—	плотность стандартного нормального распределения;
$\Phi_{a,\,\sigma^2}(x)$	—	функция распределения нормального закона с параметрами a и σ^2;
$\varphi_{a,\,\sigma^2}(x)$	—	плотность нормального распределения с параметрами a и σ^2;
$exp(\lambda)$	—	показательное (экспоненциальное) распределение с параметром λ;
$K(a,\,\sigma)$	—	распределение Коши с параметрами a и σ;
$\mathsf{E}\xi$	—	математическое ожидание случайной величины ξ;

$\int_a^b f(x)\,du(x)$	—	интеграл Стилтьеса от функции $f(x)$ по функции $u(x)$ на отрезке $[a,\, b]$;
$\mathbb{R}^n$	—	n-мерное евклидово пространство;
$\mathsf{D}\xi$	—	дисперсия случайной величины ξ;
$\operatorname{cov}(\xi,\, \eta)$	—	ковариация случайных величин ξ и η;
$\rho(\xi,\, \eta)$	—	коэффициент корреляции случайных величин ξ и η;
$\mathsf{E}\xi^k$	—	момент порядка k случайной величины ξ;
$\mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi)^k$	—	центральный момент порядка k случайной величины ξ;
$\mathsf{E}\lvert\xi\rvert^k$	—	абсолютный момент порядка k случайной величины ξ;
$\mathsf{E}\lvert\xi - \mathsf{E}\xi\rvert^k$	—	центральный абсолютный момент порядка k случайной величины ξ;
$\mathsf{E}\xi^{[k]}$	—	факториальный момент порядка k случайной величины ξ;
$\varphi_\xi(t)$	—	характеристическая функция случайной величины ξ;
$\psi_\xi(z)$	—	производящая функция случайной величины ξ;
$H * G$	—	свертка функций H и G;
$F^{(s)}(x)$	—	симметризация функции распределения $F(x)$;
$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$	—	сходимость случайных величин $\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots$ к случайной величине ξ почти наверное (с вероятностью единица);
$\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$	—	сходимость случайных величин $\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots$ к случайной величине ξ по вероятности;
$\xi_n \xrightarrow{(r)} \xi$	—	сходимость случайных величин $\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots$ к случайной величине ξ в среднем порядка r;
$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$	—	сходимость случайных величин $\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots$ к случайной величине ξ по распределению;
$\xi_n \Longrightarrow \xi$	—	слабая сходимость случайных величин $\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots$ к случайной величине ξ;
$F_n \Longrightarrow F$	—	слабая сходимость функций распределения $F_1,\, F_2,\, \ldots$ к функции распределения F.

§ 1. Классическое определение вероятности

ЗАНЯТИЕ 1

(!) ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Пространство элементарных исходов или событий — это любое множество* Ω *взаимоисключающих исходов эксперимента такое, что каждый интересующий нас результат эксперимента может быть однозначно описан с помощью элементов этого множества.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Если перед определением стоит знак "(!)", то это означает, что определение является устаревшим. Современная форма определения будет дана позже.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Определение 1.1 является скорее философским описанием пространства элементарных событий, содержащим алгоритм построения данного объекта. Само понятие пространства элементарных событий является базовым для теории вероятностей, и, как следствие, неформализуемым (также, как неформализуемо понятие точки в геометрии). Как мы увидим в § 6, для построения аксиом теории вероятностей достаточно определить Ω как *произвольное непустое множество.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Природа пространства элементарных исходов, как правило, нас интересовать не будет, поскольку математическое описание Ω не всегда возможно. Тем не менее, в задачах, связанных с элементарной теорией вероятностей, построение Ω бывает полезным, а иногда и необходимым, занятием, без которого правильное решение задачи вообще невозможно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Элементарным исходом или элементарным событием называется элемент пространства элементарных исходов. Гово-*

рят, что элементарное событие произошло, если рассматриваемый эксперимент закончился соответствующим данному элементарному событию результатом.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Везде далее, если не оговорено противное, мы будем обозначать элементарные исходы через ω, а пространство элементарных исходов — через Ω.

ЗАДАЧА 1.1. Рассматривается эксперимент, заключающийся в двукратном подбрасывании монеты. Описать пространство элементарных исходов Ω, соответствующее эксперименту.

РЕШЕНИЕ. Воспользуемся определением 1.1 для построения Ω. Эксперимент состоит из двух подбрасываний монеты, поэтому исход "выпадет герб" не будет описывать результат эксперимента. Однако, с помощью исхода "в первом подбрасывании выпадет герб, во втором подбрасывании выпадет герб" уже можно описать один из возможных результатов эксперимента. Закодируем выпадение герба и выпадение решетки соответственно буквами "г" и "р". Тогда пространство элементарных исходов

$$\Omega = \{\text{гг, гр, рг, рр}\},$$

очевидно, удовлетворяет определению 1.1, а следовательно, является ответом задачи. □

ЗАДАЧА 1.2. Рассматривается следующий эксперимент. Монета подбрасывается до тех пор, пока впервые не выпадет герб. Описать пространство элементарных исходов Ω, соответствующее эксперименту.

РЕШЕНИЕ. Понятно, что данный эксперимент, чисто теоретически, может продолжаться бесконечно долго. Рассмотрим соответствующие элементарные исходы. В случае выпадения герба в первом подбрасывании эксперимент прекращается. Если в первом подбрасывании выпала решетка, то эксперимент продолжается. После второго подбрасывания эксперимент прекращается только в том случае, если выпадает герб. И так далее. Таким образом, воспользовавшись обозначениями задачи 1.1, получаем, что пространство элементарных событий имеет вид

$$\Omega = \{\text{г, рг, ррг}, \ldots, \text{рр}\ldots\text{рг}, \ldots\}. \ \square$$

Мы рассмотрели два эксперимента. В первом эксперименте пространство элементарных исходов описывается конечным множеством, во втором — счетным множеством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. *Пространство элементарных исходов называется дискретным, если оно является не более, чем счетным.*

(!) ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. *Событием или случайным событием называется любое подмножество пространства* Ω.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Говорят, что *событие* A *произошло*, если произошло любое элементарное событие $\omega \in A$, называемое в этом случае *благоприятствующим* событию A.

ЗАДАЧА 1.3. Рассматривается эксперимент, заключающийся в двукратном подбрасывании монеты. Описать с помощью элементарных событий, определенных в задаче 1.1, события $A = \{$во втором подбрасывании выпадет герб$\}$ и $B = \{$решетка не выпадет два раза подряд$\}$.

РЕШЕНИЕ. Очевидно, что событию A благоприятствуют лишь элементарные события "гг" и "рг", а событию B — все элементарные события, за исключением "рр". Таким образом, $A = \{$гг, рг$\}$ и $B = \{$гг, гр, рг$\}$. Первоначально считалось, что любая совокупность элементарных событий может соответствовать некоторому случайному событию. Именно по этой причине предполагалось, что событием является любое подмножество Ω. Как мы увидим в дальнейшем, множество всех подмножеств Ω не всегда является удобным объектом, описывающим класс всех возможных событий. Уже в § 5 нам будет удобно рассматривать множество, состоящее из четырех возможных событий, притом, что множество всех подмножеств может иметь сколь угодно большую мощность. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. *Суммой событий* A *и* B *называется событие, состоящее из элементарных событий, принадлежащих событию* A *или событию* B. *Обозначение:* $A \cup B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. *Произведением событий* A *и* B *называется событие, состоящее из элементарных событий, одновременно принадлежащих событию* A *и событию* B. *Обозначение:* AB, $A \cap B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. *Разность событий* A *и* B *состоит из элементарных событий, принадлежащих событию* A, *но не принадлежащих событию* B. *Обозначение:* $A \backslash B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. *Событие* Ω *называется достоверным событием. Событие* $\emptyset = \Omega \backslash \Omega$ *называется невозможным событием.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. Для любого пространства элементарных исходов всегда определены достоверное и невозможное событие, поскольку для любого множества Ω справедливы включения $\Omega \subset \Omega$ и $\emptyset \subset \Omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. *Событие* $\overline{A} = \Omega \backslash A$ *называется дополнительным событием к событию* A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10. *События* A *и* B *называются несовместными, если* $AB = \emptyset$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.7. Несложно заметить, что между операциями над событиями и операциями над множествами существует прямая аналогия. Так, например, сумма двух событий A и B в теории множеств называется объединением A и B (обозначения при этом совпадают). Однако, исторически сложилось так, что теория вероятностей использует свою терминологию при работе с множествами-событиями, поэтому грамотнее называть перечисленные операции именно так, как они были определены. Тем не менее, не стоит забывать, что по своей сути событие есть не что иное, как множество, поэтому при работе с событиями бывает полезно активно пользоваться приемами теории множеств, а также рисовать иллюстрации, помогающие оценить, чем будет являться то или иное событие. На рисунках 1.1-1.3 изображены (заштрихованы) соответственно сумма, произведение и разность событий A и B.

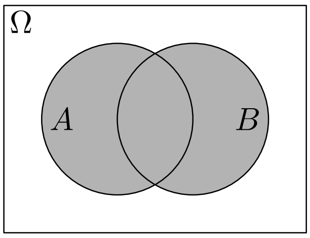

Рисунок 1.1

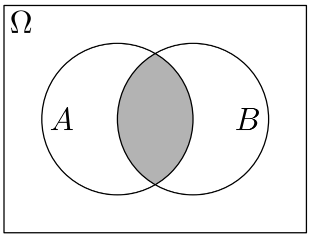

Рисунок 1.2

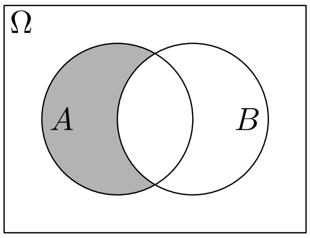

Рисунок 1.3

(!) ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11. *Говорят, что заданы вероятности элементарных исходов, если на* Ω *задана неотрицательная функция* P *такая, что*

$$\sum_{\omega\in\Omega} \mathsf{P}(\omega) = 1. \tag{1.1}$$

При этом говорят, что функция P *задает на* Ω *распределение вероятностей.*

(!) ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12. *Вероятностью события* A *называется число*

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathsf{P}(\omega). \tag{1.2}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.8. Определение 1.11 является классическим для элементарной теории вероятностей, его можно найти во всех учебниках по этой дисциплине. При этом именно оно во многом обуславливает непонимание того, чем именно является вероятность. Заметим, что в определении 1.11 вероятность определяется как функция элементарного события, а в определении 1.12 — как функция события, то есть некоторого множества элементарных событий. Что же является областью определения вероятности? В быту мы привыкли ассоциировать вероятность именно со случайным событием. В теории вероятностей данный подход остается справедливым, то есть вероятность *всегда* есть функция, определенная на множестве случайных, а не элементарных, событий. Для того, чтобы в дальнейшем не приходить к парадоксальным выводам, касающимся области определения вероятности, договоримся определять элементарные вероятности не на элементах Ω, а на одноточечных подмножествах Ω. Соотношения (1.1) и (1.2) правильнее записывать в виде

$$\sum_{\omega\in\Omega} \mathsf{P}(\{\omega\}) = 1$$

и

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathsf{P}(\{\omega\})$$

соответственно.

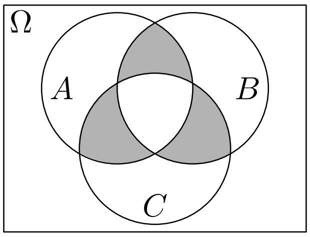

Рисунок 1.4

ЗАМЕЧАНИЕ 1.9. Уже здесь следует оговориться, что вероятность также называют *вероятностной мерой*. Из жизненной практики и уроков физики нам известно, что мерами также являются длина, площадь, объем, масса. Вероятность, по сути, ничем не отличается от перечисленных функций множеств, если не считать свойства *нормированности* (условие (1.1)), которое гласит, что вероятность достоверного события всегда равняется единице. Поэтому при подсчете вероятности сложного события, состоящего из сумм, произведений и разностей более простых событий, бывает полезно относиться к вероятности как, например, к площади. На рисунке 1.4 заштриховано событие D, которое формально имеет довольно сложное выражение

$$D = (A\cup B\cup C)\backslash(A\backslash(B\cup C))\backslash(B\backslash(A\cup C))\backslash(C\backslash(A\cup B))\backslash ABC,$$

но из рисунка видно, что для вычисления $\mathsf{P}(D)$ достаточно знать вероятности событий ABC, AB, AC и BC, причем

$$\mathsf{P}(D) = \mathsf{P}(AB) + \mathsf{P}(AC) + \mathsf{P}(BC) - 3\mathsf{P}(ABC). \tag{1.3}$$

Данный подход не дает строгого математического решения задачи, однако, он полезен тем, что позволяет понять, что требуется найти. А как известно, понять задачу — значит на половину решить ее.

Следующие три свойства являются основными свойствами вероятности.

1) $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$, $\mathsf{P}(\Omega) = 1$;

2) $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB)$;

3) $\mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$.

ЗАДАЧА 1.4. Найти вероятность появления хотя бы одного герба при двукратном подбрасывании монеты в рамках условия задачи 1.1.

РЕШЕНИЕ. Пусть A — событие, вероятность которого требуется найти. Для того, чтобы вычислить $\mathsf{P}(A)$ необходимо задать вероятности на одноточечных подмножествах Ω. Определим их следующим образом: $\mathsf{P}(\{\text{гг}\}) = 0.1$, $\mathsf{P}(\{\text{гр}\}) = 0.2$, $\mathsf{P}(\{\text{рг}\}) = 0.3$, $\mathsf{P}(\{\text{рр}\}) = 0.4$. Так определенная функция P удовлетворяет определению 1.11, то есть является вероятностью. Заметим, что $A = \{\text{гг, гр, рг}\}$. Следовательно, $\mathsf{P}(A) = 0.1 + 0.2 + 0.3 = 0.6$. □

ВОПРОС. Мы знаем, что вероятность появления герба при однократном подбрасывании монеты равняется вероятности появления решетки. Почему все вероятности в решении задачи 1.4 различны?

ОТВЕТ. На самом деле, вопрос следует поставить шире: каким образом можно определить вероятности событий? До начала XX века преобладал классический подход к определению вероятностей событий. Сам этот подход был основан на двух принципах: априорном и статистическом. Во-первых, мы можем положить вероятности нескольких событий равными между собой, если не существует повода считать какое-то событие более ”предпочтительным“, нежели другие. Это априорных подход. В статистическом подходе проводится достаточно большое количество экспериментов, и вероятность события полагают равной пределу относительной частоты появления события.

В случае с правильной идеальной монетой мы не можем априори отдать предпочтение ни одной из сторон монеты, поэтому логично положить вероятность выпадения герба равной вероятности выпадения решетки. Для того, чтобы проверить правильность таких рассуждений статистически можно провести серию опытов и выяснить, как ведет себя относительная частота появления, скажем, герба. Так во второй половине XVIII века Ж. Л. Бюффон провел 4040 подбрасываний монеты, при этом герб выпал 2048 раз (относительная частота равняется 0.508); позже, уже в конце XIX века, К. Пирсон провел 24000 подбрасываний, герб выпал 12012 раз (относительная частота равняется 0.5005). Действительно, как мы видим, частота появления герба приближается к $1/2$ при увеличении числа испытаний. Именно это обстоятельство послужило поводом к определению вероятности события A как предела отношения числа n_A появлений события A в n экспериментах и числа экспериментов:

$$\mathsf{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}. \tag{1.4}$$

Р. Мизесом была предпринята довольно успешная попытка построения системы аксиом, основанных на соотношении (1.4). Самым слабым местом школы Мизеса является невозможность проведения бесконечно большого числа экспериментов для выявления всех членов последовательности $\{n_A/n\}_{n\geq 1}$ для нахождения предела (1.4). С появлением системы аксиом А. Н. Колмогорова мизесовская частотная школа постепенно окончательно потеряла вес в науке. Однако, справедливости ради, стоит заметить, что многие известные математики, писавшие свои самые известные работы в рамках колмогоровской аксиоматики, были, тем не менее, приверженцами мизесовского подхода.

Стоит также заметить, что до сих пор принято считать, что понятие случайности (или стохастичности) можно применять только к тем экспериментам, которые наряду со свойствами недетерминированности и возможности повторения при неизменных условиях обладают также свойством устойчивости относительных частот. Что же касается задачи 1.4, то в ней мы не задавались целью построить модель, отражающую действительный эксперимент. Нас интересовало лишь формальное определение вероятности.

Итак, теперь будет понятно, какими предпосылками руководствовались математики, давая следующее классическое определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.13. *Пусть Ω состоит из n элементов $\omega_1, \ldots, \omega_n$, причем все исходы равновероятны, то есть $\mathsf{P}(\{\omega_i\}) = 1/n$, $i = 1, \ldots, n$. В этом случае вероятность любого события A определяется формулой*

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{\textit{число элементов}}\, A}{n}.$$

Здесь символом $|A|$ обозначается мощность множества A. При этом говорят, что функция P задает классическое распределение вероятности или равномерное дискретное распределение.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10. В формулировках многих задач встречается слово "наудачу". Если не оговорено противное, то мы будем предполагать, что при этом мы имеем дело с классическим распределением или равномерным распределением (см. § 2) вероятности.

ЗАДАЧА 1.5. Из колоды карт (36 карт) наудачу вынимают три карты. Найти вероятность того, что среди них окажется точно один туз.

РЕШЕНИЕ. Мощность множества элементарных исходов, то есть количество способов вынуть три карты из 36, равняется C_{36}^3. Пусть A — рассматриваемое событие. Найдем его мощность. Среди трех карт находится один туз и две карты, которые не являются тузами. Туз может быть выбран из четырех тузов C_4^1 способами, а две остальные карты из 32 "нетузов" — C_{32}^2 способами. Таким образом, $|A| = C_4^1 C_{32}^2$. Ответ: $\mathsf{P}(A) = C_4^1 C_{32}^2 / C_{36}^3 \approx 0.2779$. □

ЗАДАЧА 1.6. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что среди трех карт окажется хотя бы один туз.

РЕШЕНИЕ. Заметим, что рассматриваемое событие A имеет дополнительное событие, вероятность которого найти очень легко. Количество элементарных исходов в $\overline{A}$ равняется количеству способов выбрать три "нетуза" из 32 "нетузов", то есть C_{32}^3. Данный метод решения позволяет вычислять вероятность события через вероятность дополнительного события. С другой стороны, можно разбить событие A на три несовместных события A_1, A_2 и A_3, каждое из которых соответствует количеству тузов, в точности находящихся среди трех вынутых карт. Такой метод решения обусловлен тем, что вероятность суммы несовместных событий равняется сумме соответствующих вероятностей. Мощности этих событий равны соответственно $C_4^1 C_{32}^2$, $C_4^2 C_{32}^1$ и $C_4^3 C_{32}^0$. Ответ:

$$\mathsf{P}(A) = 1 - \frac{C_{32}^3}{C_{36}^3} = \frac{C_4^1 C_{32}^2}{C_{36}^3} + \frac{C_4^2 C_{32}^1}{C_{36}^3} + \frac{C_4^3}{C_{36}^3} \approx 0.3053. \ \square$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

ЗАДАЧА 1.7. Строго доказать соотношение (1.3).

ЗАДАЧА 1.8. Показать графически и строго доказать основные свойства вероятности.

ЗАДАЧА 1.9 (спортлото "6 из 49"). В урне находятся 49 шаров, занумерованных первыми натуральными числами. Из урны извлекаются наудачу 6 шаров, и называются их номера. Если играющий в лотерею угадал 4, 5 или 6 из этих номеров, то его билет считается выигрышным. Найти вероятность того, что играющий выиграет, угадав а) 4 номера; б) 5 номеров; в) 6 номеров.

ЗАДАЧА 1.10. Какое событие более вероятно: {при четырех бросаниях игральной кости хотя бы раз выпадет шесть очков} или {при двадцати четырех бросаниях двух игральных костей хотя бы раз одновременно выпадут шесть и шесть очков}?

ЗАДАЧА 1.11. Два игрока начали игру, состоящую из нескольких партий. Каждая партия непременно выигрывается одним из игроков. Тот из игроков, кто выигрывает первым 6 партий забирает обе равные ставки, внесенные в начале игры. Но игроки согласились прекратить игру, не окончив ее, при счете 3:2. Как нужно разделить ставки, чтобы игра была безобидной?

ЗАМЕЧАНИЕ 1.11. Задачи 1.10 и 1.11 были поставлены кавалером де Мере в первой половине XVII века. Обсуждению этих задач была посвещана переписка Б. Паскаля и П. Ферма, относящаяся к 1654 году. В настоящее время принято считать, что решение именно этих задач положило начало теории вероятностей как отдельной ветви математики.

ЗАДАЧА 1.12. На восьми одинаковых карточках написаны соответственно числа 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12 и 13. Наудачу берутся две карточки. Определить вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь будет сократима.

ЗАДАЧА 1.13. Бросается n игральных костей. Найти вероятность события, состоящего в том, что на всех костях выпадет одинаковое число очков.

ЗАДАЧА 1.14. Из полного набора 28 костей домино наудачу берутся 5 костей. Найти вероятность того, что среди них будет хотя бы одна кость с шестью очками.

ЗАДАЧА 1.15. В ряд или за круглый стол в случайном порядке рассаживаются n лиц. Найти в том и другом случае вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом.

ЗАДАЧА 1.16. По N ящикам размещаются n различимых шаров. Найти вероятность того, что ящики с номерами $1, \ldots, N$ будут содержать $n_1, \ldots, n_N$ шаров соответственно $(n_1 + \ldots + n_N = n)$.

ЗАДАЧА 1.17. В урне K красных, L белых и M черных шаров. Из урны с возвращением (без возвращения) извлекаются n шаров. Найти вероятности того, что будет извлечено k красных, l белых и m черных шаров.

ЗАДАЧА 1.18. В зале, насчитывающем $n + k$ мест, случайным образом занимают места n человек. Определить вероятность того, что будут заняты определенные $m \leq n$ мест.

ЗАДАЧА 1.19. Несколько раз бросается игральная кость. Какое событие более вероятно: $\{$сумма выпавших очков будет четна$\}$ или $\{$сумма выпавших очков будет нечетна$\}$?

ЗАДАЧА 1.20. Сорок участников турнира разбиваются на четыре равные группы. Найти вероятность того, что четыре сильнейших участника окажутся в разных группах.

§ 2. Геометрические вероятности

ЗАНЯТИЕ 2

Недостаток классического определения вероятности очевиден. Еще в самом начале развития теории вероятностей исследователи сталкивались с экспериментами, в которых число возможных элементарных исходов является бесконечным и, более того, несчетным. Общая задача, которая привела к обобщению понятия вероятности, ставилась следующим образом. Пусть имеется, например на плоскости, некоторая область G, а в ней область g с квадрируемой границей. Случайным образом (наудачу) в область G бросается точка. Требуется найти вероятность попадания точки в область g. (Условие квадрируемости требуется для определения вероятности попадания точки на границу области.) Предполагалось, что брошенная точка может попасть в любую точку области G. При этом, ввиду действовавшего долгое время стереотипа "равномерности", вероятность попадания в область g естественно принималась прямо пропорциональной площади (в общем случае мере) области g и обратно пропорциональной площади (в общем случае мере) области G, то есть

$$p = \frac{mes\, g}{mes\, G}. \tag{2.1}$$

Здесь символом "mes" обозначается геометрическая мера множества. Так определенная вероятность называется *геометрической вероятностью.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. При определении вероятности с помощью формулы (2.1) говорят, что p задает *равномерное* в области G распределение вероятностей, или что случайным образом брошенная точка распределена в области G *равномерно.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Уже из определения геометрической вероятности следует основной, по мнению автора, философский тезис теории вероятностей, а именно: если вероятность события равняется нулю, то это не означает, что данное событие является невозможным. Действительно, при бросании точки в область G мы неизбежно попадем в некоторую одноточечную область g, причем из формулы (2.1) следует, что вероятность попадания в эту область равняется нулю. Если некоторое событие обладает нулевой вероятностью, то это означает лишь, что при многократном повторении эксперимента относительная частота появления данного события будет близка к нулю (см. комментарии § 1, касающиеся аксиоматики Мизеса). С другой стороны, из определения вероятности следует, что вероятность невозможного события всегда равна нулю.

Самой известной задачей на геометрическую вероятность, пожалуй, является следующая.

ЗАДАЧА 2.1 (парадокс Бертрана). Выберем наудачу хорду AB в круге. Требуется найти вероятность того, что длина хорды будет превосходить длину стороны вписанного равностороннего треугольника.

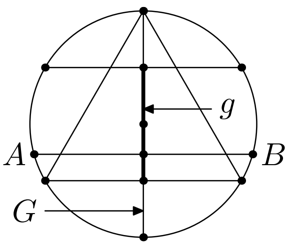

Рисунок 2.1

РЕШЕНИЕ 1. По соображениям симметрии можно заранее задать направление хорды. Проведем диаметр, перпендикулярный к этому направлению. Очевидно, что длина хорды будет больше длины стороны треугольника тогда и только тогда, когда центр хорды окажется на интервале g (см. рис. 2.1). Поскольку в данном случае областью G является рассматриваемый диаметр, формула (2.1) дает ответ $1/2$ (здесь в качестве меры используется длина).

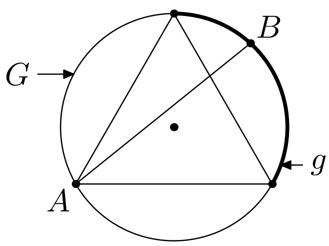

Рисунок 2.2

РЕШЕНИЕ 2. По соображениям симметрии можно заранее зафиксировать один конец хорды (точка A) на окружности. Очевидно, что длина хорды будет больше длины стороны треугольника тогда и только тогда, когда второй конец хорды (точка B) окажется на дуге g (см. рис. 2.2). Поскольку в данном случае областью G является вся окружность, формула (2.1) дает ответ $1/3$ (здесь в качестве меры используется длина).

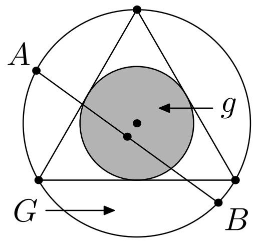

Рисунок 2.3

РЕШЕНИЕ 3. Для того, чтобы определить положение хорды, достаточно задать ее середину. Очевидно, что длина хорды будет больше длины стороны треугольника тогда и только тогда, когда ее центр будет лежать в круге g (см. рис. 2.3). Поскольку в данном случае областью G является весь круг, формула (2.1) дает ответ $1/4$ (здесь в качестве меры используется площадь). $\square$

ВОПРОС. Какой из ответов задачи 2.1 является правильным?

ОТВЕТ. Правильными являются все ответы. Более того, можно показать, что любое число из отрезка $[0,\, 1]$ является *правильным* ответом к этой задаче. Давайте разберемся, чем вызвана некорректность условия. Как мы видели в § 1, "случайность" определяется пространством элементарных исходов Ω. Более того, нельзя определить вероятность события, не зная пространства элементарных исходов, поскольку событие всегда есть подмножество Ω. В решениях 1-3 пространства элементарных событий различны; ими являются области G (диаметр, окружность и круг соответственно). В математических задачах всегда требуется формальное описание объекта исследования. В элементарной теории вероятностей таким объектом является пространство элементарных исходов. Поэтому в §§ 1-5 полезно начинать решение задачи с описания Ω.

Следующие две задачи также считаются классическими задачами на геометрическую вероятность.

ЗАДАЧА 2.2 (задача о встрече). Два лица X и Y условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет другого в течение 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность того, что лица X и Y встретятся, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти наудачу и моменты прихода независимы (то есть момент прихода одного лица не влияет на момент прихода другого).

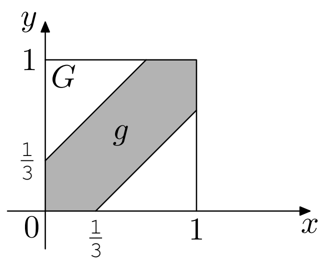

Рисунок 2.4

РЕШЕНИЕ. В этой задачи мы имеем дело с "двумерной случайностью", поэтому имеет смысл рассмотреть двумерное пространство элементарных событий G. Обозначим моменты прихода лиц X и Y через x и y соответственно. Тогда на координатной плоскости с началом координат в точке "12 часов" и единицей измерения в 1 час область G представима в виде квадрата $G = \{(x,\, y) |\, x,\, y \in [0,\, 1]\}$. Два лица встретятся тогда и только тогда, когда моменты их приходов удовлетворяют неравенству $|x-y| \le 1/3$, $x,\ y \in [0,\ 1]$. Область g элементарных исходов, благоприятствующих встрече, выделена на рисунке 2.4. Искомая вероятность является отношением площадей областей g и G. Ответ: 5/9. □

ЗАДАЧА 2.3 (игла Бюффона). Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстояние $2a$. На плоскость наудачу бросается игла длины $2l < 2a$. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

РЕШЕНИЕ. Очевидно, что положение иглы однозначно (с точностью до параллельного переноса) определяется расстоянием x от центра иглы до ближайшей из прямых и углом φ между направлением иглы и одной из прямых (см. рис. 2.5). Таким образом, пространство элементарных исходов G представляет собой прямоугольник $\{(x,\ \varphi) |\, x \in [0,\ a],\ \varphi \in [0,\ \pi]\}$. Заметим, что пересечение иглы с прямой возможно тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $x \le l \sin\varphi$. На рисунке 2.6 изображены область G и область благоприятствующих пересечению исходов g. Искомая вероятность p находится по формуле

$$p = \frac{mes\, g}{mes\, G} = \frac{1}{a\pi}\int\limits_0^{\pi} l\sin\varphi\, d\varphi = \frac{2l}{a\pi}. \ \square$$

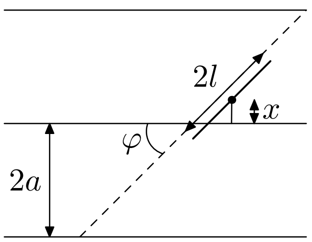

Рисунок 2.5

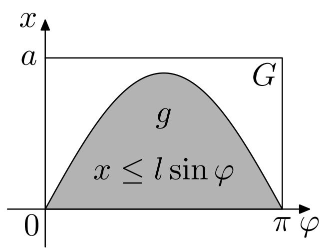

Рисунок 2.6

ЗАДАЧА 2.4. На плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстояние $2a$, наудачу брошен выпуклый контур, диаметр (максимальное расстояние между двумя точками контура) которого меньше $2a$, а периметр равен S. Найти вероятность того, что контур пересечет одну из параллельных прямых.

РЕШЕНИЕ. Будем считать, что контур бросается на плоскость следующим образом. К контуру жестко привязывается отрезок и бросается на плоскость как игла Бюффона (см. задачу 2.3). Сначала решим поставленную задачу для выпуклого n-угольника W с вершинами $W_1, \ldots, W_n$ и сторонами $w_1, \ldots, w_n$, длины которых равны $2l_1, \ldots, 2l_n$ соответственно. Обозначим событие, вероятность которого требуется найти, через A.

Пересечение W с прямой возможно одним и только одним из следующих способов. Точки пересечения

1) являются двумя вершинами, принадлежащими различным сторонам;

2) являются двумя вершинами, принадлежащими одной из сторон, — в этом случае одна из сторон W целиком лежит на прямой;

3) совпадают и являются одной из вершин W;

4) лежат на различных сторонах, причем лишь одна является вершиной;

5) лежат на различных сторонах и являются внутренними точками сторон.

Обозначим перечисленные события через A_i, $i = 1, \ldots, 5$, соответственно. Заметим, что, поскольку события A_i являются несовместными и в сумме дают A, справедлива формула $\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{5} \mathsf{P}(A_i)$. Заметим также, что события A_1, A_3 и A_4 соответствуют пересечению прямой с иглой Бюффона w_j в точке W_k (для некоторых j и k), являющейся концом иглы. Такое пересечение возможно в терминах задачи 2.3 лишь в случае, когда $x = l_j \sin\varphi$ (см. рис. 2.5 и 2.6), но такие точки (x, φ) лежат на кривой, отношение площади которой к площади области G равняется нулю. Следовательно, вероятности событий A_1, A_3 и A_4 равняются нулю. Аналогично получаем $\mathsf{P}(A_2) = 0$, поскольку событию A_2 благоприятствуют лишь такие исходы (x, φ), для которых $x = 0$.

Найдем вероятность события A_5. Обозначим через A_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, события, заключающихся в том, что пересечение произошло по внутренним точкам сторон w_i и w_j соответственно. Как мы выяснили, $\mathsf{P}(A_{ii}) = 0$ для всех i. Имеем

$$A_5 = (A_{12} + \ldots + A_{1n}) + (A_{23} + \ldots + A_{2n}) + \ldots + A_{n-1,n}. \qquad (2.2)$$

Поскольку все события, стоящие в правой части (2.2), являются несовместными, получаем

$$\mathsf{P}(A_5) = (\mathsf{P}(A_{12}) + \ldots + \mathsf{P}(A_{1n})) + (\mathsf{P}(A_{23}) + \ldots + \mathsf{P}(A_{2n})) + \ldots + \mathsf{P}(A_{n-1,n}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\mathsf{P}(A_{11}) + \ldots + \mathsf{P}(A_{1n})) + \ldots + (\mathsf{P}(A_{n1}) + \ldots + \mathsf{P}(A_{nn}))\right].$$

Но каждая сумма вида $\mathsf{P}(A_{i1}) + \ldots + \mathsf{P}(A_{in})$ есть не что иное, как вероятность пересечения стороны w_i с прямой. В задаче 2.3 мы показали, что эта вероятность равняется $2l_i/(a\pi)$. Таким образом,

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A_5) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{2l_i}{a\pi} = \frac{S}{2a\pi}.$$

Как мы видим, вероятность $\mathsf{P}(A)$ не зависит от количества сторон n-угольника. Поскольку любой выпуклый контур можно сколь угодно точно приблизить некоторым выпуклым n-угольником, искомая в задаче вероятность будет неотличимо близка числу $\mathsf{P}(A)$. Ответ: $S/(2a\pi)$. □

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

ЗАДАЧА 2.5. Показать, что в условиях задачи 2.1 ответом может являться любое число из отрезка $[0, 1]$.

ЗАДАЧА 2.6. Две точки выбираются наудачу из отрезка $[-1, 1]$. Пусть p и q — координаты этих точек. Найти вероятность того, что квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ будет иметь вещественные корни.

ЗАДАЧА 2.7. На отрезок наудачу одну за другой бросают три точки. Какова вероятность того, что третья по счету точка попадет между двумя первыми?

ЗАДАЧА 2.8. В круг вписан квадрат. Точка наудачу бросается в круг. Найти вероятность того, что она попадет в квадрат.

ЗАДАЧА 2.9. Какова вероятность того, что сумма двух наудачу взятых положительных чисел, каждое из которых не больше единицы, не превзойдет единицы, а их произведение будет не больше $2/9$?

ЗАДАЧА 2.10. На окружности наудачу выбраны три точки A, B и C. Найти вероятность того, что треугольник ABC будет остроугольным.

ЗАДАЧА 2.11. В квадрат наудачу брошены две точки A и B. Найти вероятность того, что квадрат, диагональю которого является отрезок AB, будет целиком содержаться в исходном квадрате.

ЗАДАЧА 2.12. В квадрат наудачу брошены две точки A и B. Найти вероятность того, что круг, диаметром которого является отрезок AB, будет целиком содержаться в исходном квадрате.

ЗАДАЧА 2.13. На отрезок $[0, 1]$ наудачу брошена точка. Точка делит отрезок на две части. Пусть ξ — длина большей части, а η — длина меньшей части. Найти $\mathsf{P}(\xi < x)$ и $\mathsf{P}(\eta < x)$ при любом x.

ЗАДАЧА 2.14. В единичный квадрат наудачу брошена точка A. Найти вероятность того, что расстояние от точки A до фиксированной стороны квадрата будет меньше x (для любого x).

ЗАДАЧА 2.15. В единичный квадрат наудачу брошена точка A. Найти вероятность того, что расстояние от точки A до ближайшей стороны квадрата будет меньше x (для любого x).

ЗАДАЧА 2.16. В единичный квадрат наудачу брошена точка A. Найти вероятность того, что расстояние от точки A до центра квадрата будет меньше x (для любого x).

ЗАДАЧА 2.17. В единичный квадрат наудачу брошена точка A. Найти вероятность того, что расстояние от точки A до фиксированной вершины квадрата будет меньше x (для любого x).

ЗАДАЧА 2.18. В прямоугольник со сторонами длины 1 и 2 наудачу брошена точка A. Найти вероятность того, что расстояние от точки A до ближайшей стороны прямоугольника будет меньше x (для любого x).

ЗАДАЧА 2.19. В прямоугольник со сторонами длины 1 и 2 наудачу брошена точка A. Найти вероятность того, что расстояние от точки A до любой стороны прямоугольника будет меньше x (для любого x).

ЗАДАЧА 2.20. В прямоугольник со сторонами длины 1 и 2 наудачу брошена точка A. Найти вероятность того, что расстояние от точки A до диагоналей прямоугольника будет меньше x (для любого x).

§ 3. Условные вероятности и независимость событий

ЗАНЯТИЕ 3

Рассмотрим двукратное подбрасывание правильной идеальной монеты. Требуется найти вероятность того, что два раза подряд выпадет герб при условии, что известно, что герб выпадет хотя бы один раз. Обозначим $A = \{$герб выпадет два раза подряд$\}$ и $B = \{$герб выпадет хотя бы один раз$\}$. Для нахождения вероятности события A, согласно определению 1.12, требуется найти отношение количества исходов, благоприятствующих событию A, и общего числа элементарных событий. Дополнительная информация, предоставляемая событием B, ведет к "сужению" пространства элементарных исходов, то есть нам теперь требуется найти вероятность p, выбирая из исходов, благоприятствующих B, исходы, благоприятствующие A. Таким образом, $p = 1/3$. Заметим, что

$$p = \frac{1}{3} = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(B)},$$

поскольку событие A целиком содержится в событии B.

Рассмотрим более общий случай. Предположим, что пространство элементарных исходов включает n элементов. Пусть событие A включает k элементов, событие B — l элементов, событие AB — m элементов. Известно, что произойдет событие B, то есть произойдет одно из l элементарных событий. Требуется найти (в рамках классического распределения) вероятность того, что произойдет событие A. Из l элементарных исходов нам будут благоприятствовать лишь m исходов (событие AB). Таким образом, искомая вероятность p равняется m/l. Заметим, что

$$p = \frac{m}{l} = \frac{m/n}{l/n} = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Вышеописанные примеры обосновывают следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Пусть A и B — некоторые события, причем* $\mathsf{P}(B) > 0$. *Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B называется число*

$$\mathsf{P}(A|\,B) = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Теперь рассмотрим два произвольных независимых события A и B. Пусть, например, $A = \{$сегодня пойдет дождь$\}$ и $B = \{$вчера изменился курс рубля$\}$. Чему равняется вероятность события A, если известно, что произошло событие B? Очевидно, что вероятность события A остается неизменной, независимо от того, произошло событие B или нет. То есть справедливо равенство $\mathsf{P}(A|\,B) = \mathsf{P}(A)$. Из определения 3.1 в свою очередь следует (при условии $\mathsf{P}(B) > 0$), что $\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. *События A и B называются независимыми, если*

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B). \tag{3.1}$$

Не следует путать понятия "несовместности" (определение 1.10) и "независимости" событий.

ЗАДАЧА 3.1. Пусть $\mathsf{P}(A) > 0$ и $\mathsf{P}(B) > 0$. Могут ли независимые события A и B быть несовместными? Могут ли несовместные события A и B быть независимыми?

РЕШЕНИЕ. Пусть A и B некоторые независимые события ненулевой вероятности. Из (3.1) следует, что $\mathsf{P}(AB) > 0$. Таким образом, независимые события положительной вероятности не могут быть несовместными. Рассмотрим два несовместных события A и B положительной вероятности. Очевидно, что равенство (3.1) в этом случае не выполняется. Таким образом, несовместные события положительной вероятности не могут быть независимыми. $\square$

Независимые события обладают следующими свойствами:

1) если $\mathsf{P}(B) > 0$, то независимость событий A и B эквивалентна равенству $\mathsf{P}(A|\,B) = \mathsf{P}(A)$;

2) если события A и B независимы, то $\overline{A}$ и B также независимы;

3) если события A и B_1 независимы и события A и B_2 независимы, причем $B_1B_2 = \emptyset$, то события A и $B_1 \cup B_2$ независимы.

ЗАДАЧА 3.2. Рассматривается двукратное подбрасывание правильной идеальной монеты. Показать, что события $A = \{$в первом подбрасывании выпадет герб$\}$ и $B = \{$во втором подбрасывании выпадет решетка$\}$ являются независимыми.

РЕШЕНИЕ. Обычно, независимость событий доказывается непосредственной проверкой равенства (3.1). В данном случае имеем

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(\{\text{гр}\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B). \ \square$$

ЗАДАЧА 3.3. Пусть $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) | \, \omega_1, \omega_2 \in [0, 1]\}$. Пусть

$$A = \{(\omega_1, \omega_2) | \, 0 \le \omega_1 \le 1, \, 0 < a \le \omega_2 \le 1\},$$

$$B = \{(\omega_1, \omega_2) | \, 0 < b \le \omega_1 \le 1, \, 0 \le \omega_2 \le 1\},$$

$$C = \{(\omega_1, \omega_2) | \, \omega_2 \le (\omega_1 - b)/(1 - b), \, \omega_1, \omega_2 \in [0, 1]\}$$

(см. рис. 3.1). Рассматривается геометрическая вероятность событий (§ 2). Будут ли события A и B независимыми? Будут ли события A и C независимыми?

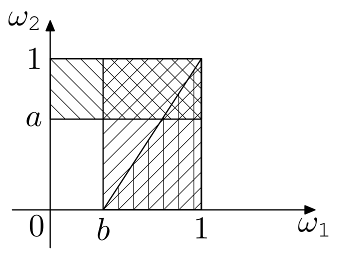

Рисунок 3.1

РЕШЕНИЕ. Проверим равенство (3.1) в обоих случаях. Имеем $\mathsf{P}(AB) = (1-a)(1-b) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$, то есть A и B — независимы. Далее, $\mathsf{P}(AC) = (1-b)(1-a)^2/2 \ne (1-a)\cdot(1-b)/2 = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(C)$. Таким образом, с помощью равенства (3.1) мы показали отсутствие независимости A и C. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. *События $B_1, \ldots, B_n$ называются независимыми в совокупности, если для любых $1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n$, $r = 2, \ldots, n$,*

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{r} B_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{r} \mathsf{P}(B_{i_k}). \tag{3.2}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Другими словами, события являются независимыми в совокупности, если для любого подмножества этих событий вероятность произведения событий равняется произведению соответствующих вероятностей. Из независимости событий в совокупности элементарно следует *попарная независимость* событий (случай $r = 2$ в (3.2)).

ЗАДАЧА 3.4. Показать, что из попарной независимости событий не следует независимость событий в совокупности.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим однократное подбрасывание правильного идеального тетраэдра, одна грань которого окрашена в красный цвет, вторая — в желтый, третья — в зеленый, а на четвертую грань нанесены все три цвета. Введем следующие события: К = { тетраэдр упадет на грань, содержащую красный цвет}, Ж = { тетраэдр упадет на грань, содержащую желтый цвет}, З = { тетраэдр упадет на грань, содержащую зеленый цвет}. Очевидно, что любые два из этих трех событий являются независимыми, поскольку, например, $\mathsf{P}(\text{КЖ}) = 1/4 = 1/2 \cdot 1/2 = \mathsf{P}(\text{К})\mathsf{P}(\text{Ж})$. Однако,

$$\mathsf{P}(\text{КЖЗ}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathsf{P}(\text{К})\mathsf{P}(\text{Ж})\mathsf{P}(\text{З}),$$

из чего следует, что данные события не являются независимыми в совокупности. Приведенный пример называется примером С. Н. Бернштейна, который также, как и А. Н. Колмогоров, предлагал в начале XX века свою аксиоматику теории вероятностей.

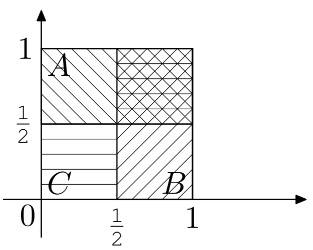

Рисунок 3.2

Можно привести еще один пример, иллюстрирующий утверждение задачи, который по сути является графической интерпретацией примера Бернштейна. Рассмотрим $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) |\ 0 \le \omega_1, \omega_2 \le 1\}$. События A, B и C показаны на рисунке 3.2 (заштрихованы разными стилями). Рассматривается геометрическая вероятность событий. Очевидно, что данные события независимы попарно, но не являются независимыми в совокупности. □

ЗАДАЧА 3.5. Доказать, что

$$\mathsf{P}(A_1 \ldots A_n) = \mathsf{P}(A_1) \cdot \mathsf{P}(A_2 |\, A_1) \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}(A_n |\, A_1 \ldots A_{n-1}), \qquad (3.3)$$

если все входящие в правую часть равенства условные вероятности определены.

РЕШЕНИЕ задачи состоит в непосредственном применении определения 3.1. Действительно,

$$\mathsf{P}(A_1) \cdot \mathsf{P}(A_2 |\, A_1) \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}(A_n |\, A_1 \ldots A_{n-1}) =$$

$$= \mathsf{P}(A_1) \cdot \frac{\mathsf{P}(A_1 A_2)}{\mathsf{P}(A_1)} \cdot \frac{\mathsf{P}(A_1 A_2 A_3)}{\mathsf{P}(A_1 A_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{\mathsf{P}(A_1 \ldots A_{n-1} A_n)}{\mathsf{P}(A_1 \ldots A_{n-1})} =$$

$$= \mathsf{P}(A_1 \ldots A_n). \ \square$$

ЗАДАЧА 3.6. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, по схеме случайного выбора без возвращения последовательно извлекаются шары.

Найти вероятность p_k, $k = 1, \ldots, 4$, того, что черный шар впервые появится при k-ом испытании.

РЕШЕНИЕ. Обозначим через C_i событие, состоящее в том, что в i-м испытании появится черный шар. Пусть $B_k = \{$ впервые черный шар появится при k-ом испытании$\}$. Требуется найти $p_k = \mathsf{P}(B_k)$. События B_k можно выразить через C_i и $\overline{C}_i$ следующим образом:

$$B_1 = C_1, \quad B_2 = \overline{C}_1 C_2, \quad B_3 = \overline{C}_1 \overline{C}_2 C_3, \quad B_4 = \overline{C}_1 \overline{C}_2 \overline{C}_3 C_4.$$

По формуле (3.3) получаем

$$\mathsf{P}(B_1) = \mathsf{P}(C_1), \quad \mathsf{P}(B_2) = \mathsf{P}(\overline{C}_1)\mathsf{P}(C_2 |\, \overline{C}_1),$$

$$\mathsf{P}(B_3) = \mathsf{P}(\overline{C}_1)\mathsf{P}(\overline{C}_2 |\, \overline{C}_1)\mathsf{P}(C_3 |\, \overline{C}_1\overline{C}_2),$$

$$\mathsf{P}(B_4) = \mathsf{P}(\overline{C}_1)\mathsf{P}(\overline{C}_2 |\, \overline{C}_1)\mathsf{P}(\overline{C}_3 |\, \overline{C}_1\overline{C}_2)\mathsf{P}(C_4 |\, \overline{C}_1\overline{C}_2\overline{C}_3).$$

По классическому определению 1.13 вероятности имеем

$$\mathsf{P}(C_1) = \frac{2}{5}, \quad \mathsf{P}(\overline{C}_1) = \frac{3}{5}, \quad \mathsf{P}(\overline{C}_{i+1} |\, \overline{C}_1 \ldots \overline{C}_i) = \frac{3-i}{5-i},$$

$$\mathsf{P}(C_{i+1} |\, \overline{C}_1 \ldots \overline{C}_i) = \frac{2}{5-i}, \quad i = 1,\, 2,\, 3.$$

В результате получаем $p_1 = 0.4$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.2$ и $p_4 = 0.1$. □

ЗАДАЧА 3.7. Разрыв электрической цепи происходит в том случае, когда выходит из строя хотя бы один из трех последовательно соединенных элементов. Определить вероятность того, что не будет разрыва цепи, если элементы выходят из строя независимо друг от друга соответственно с вероятностями 0.3, 0.4 и 0.6. Как изменится искомая вероятность, если известно, что первый элемент не выйдет из строя?

РЕШЕНИЕ. Искомая вероятность p равна вероятности того, что не выйдут из строя все три элемента. Обозначим $A_k = \{k$-й элемент не выйдет из строя$\}$, $k = 1,\, 2,\, 3$. Тогда $p = \mathsf{P}(A_1A_2A_3)$. Так как события A_i являются независимыми, имеем

$$p = \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)\mathsf{P}(A_3) = (1-0.3)\cdot(1-0.4)\cdot(1-0.6) = 0.168.$$

Если известно, что первый элемент не выйдет из строя, то

$$p = \mathsf{P}(A_1A_2A_3 |\, A_1) = \mathsf{P}(A_2)\mathsf{P}(A_3) = 0.24. \ \square$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

ЗАДАЧА 3.8. Решить задачу 3.1, если хотя бы одна из вероятностей $\mathsf{P}(A)$ или $\mathsf{P}(B)$ равняется нулю.

ЗАДАЧА 3.9. Доказать свойства независимых событий, пользуясь определением 1.12 вероятности.

ЗАДАЧА 3.10. Пусть события A, B и C независимы в совокупности, причем каждое из этих событий имеет вероятность, отличную от нуля и единицы. Могут ли события AB, BC и AC быть попарно независимыми и независимыми в совокупности? Изменится ли ответ, если хотя бы одно из событий A, B и C имеет вероятность нуль или единица?

ЗАДАЧА 3.11. В единичный квадрат наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что точка будет удалена от центра квадрата на расстояние меньшее, чем $1/3$, если известно, что от каждой из сторон квадрата она удалена больше, чем на $1/6$?

ЗАДАЧА 3.12. Пусть события A и B независимы и A и C независимы. Показать, что A и $B \cup C$ могут не быть независимыми.

ЗАДАЧА 3.13. Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей хотя бы на одной выпадет шесть очков, при условии, что на всех костях выпадут грани с четным числом очков.

ЗАДАЧА 3.14. Следует ли попарная независимость событий A_1, A_2 и A_3 из равенства $\mathsf{P}(A_1A_2A_3) = \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)\mathsf{P}(A_3)$?

ЗАДАЧА 3.15. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — независимые в совокупности события. Доказать, что $\mathsf{P}\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\overline{A}_i)$.

ЗАДАЧА 3.16. Верно ли равенство $\mathsf{P}(A|\,B) + \mathsf{P}(A|\,\overline{B}) = 1$?

ЗАДАЧА 3.17. Пусть $\mathsf{P}(A|\,B) > \mathsf{P}(B|\,A)$, $\mathsf{P}(A) > 0$ и $\mathsf{P}(B) > 0$. Верно ли, что $\mathsf{P}(A) > \mathsf{P}(B)$?

ЗАДАЧА 3.18. Наудачу брошено две игральные кости. Найти условную вероятность того, что выпадут две ”пятерки“, если известно, что сумма выпавших очков делится на пять.

ЗАДАЧА 3.19. По цели производится n независимых выстрелов. Вероятность попадания при i-ом выстреле равна p_i, $i = 1, \ldots, n$. Найти вероятность того, что при n выстрелах будет не менее двух попаданий.

ЗАДАЧА 3.20. Из колоды карт (36 карт) наудачу последовательно вынуты две карты. Найти а) безусловную вероятность того, что вторая карта окажется тузом (не известно, какая карта была вынута вначале); б) условную вероятность того, что вторая карта будет тузом, если первоначально был вынут туз.

§ 4. Формула полной вероятности и формула Байеса

ЗАНЯТИЕ 4

ТЕОРЕМА 4.1 (формула полной вероятности). *Пусть A — некоторое событие, $B_1, \ldots, B_n$ суть попарно несовместные события, имеющие положительные вероятности, такие, что $A \subset \cup_{i=1}^{n} B_i$. Тогда имеет место формула полной вероятности:*

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(B_i)\mathsf{P}(A|\, B_i). \tag{4.1}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Если события $B_1, \ldots, B_n$ удовлетворяют условиям теоремы 4.1 и свойству $\cup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$, то говорят, что они образуют *полную группу событий*.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Формула полной вероятности остается справедливой и в случае, когда рассматриваемая совокупность событий B_i является бесконечной, при этом верхний предел суммирования n заменяется на ∞.

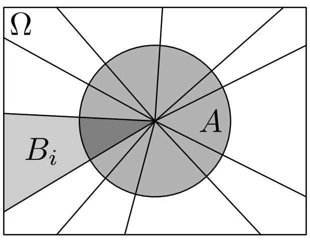

Рисунок 4.1

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Соотношение (4.1) эквивалентно равенству

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(AB_i).$$

Таким образом, формула полной вероятности имеет простой геометрический смысл: площадь фигуры равняется сумме площадей фигур, на которые она "разрезана" (см. рис. 4.1).

ТЕОРЕМА 4.2 (формула Байеса). *Пусть выполнены условия теоремы 4.1. Предположим дополнительно, что* $\mathsf{P}(A) > 0$. *Тогда справедлива формула Байеса*

$$\mathsf{P}(B_k|\,A) = \frac{\mathsf{P}(B_k)\mathsf{P}(A|\,B_k)}{\sum_{i=1}^n \mathsf{P}(B_i)\mathsf{P}(A|\,B_i)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Теорема 4.2 является элементарным следствием теоремы 4.1 и ассоциируется с именем Т. Байеса с легкой руки П. Лапласа. Сам Байес занимался другими задачами, подробнее см., например, (Майстров 1967).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. События B_k в формулировке теоремы 4.2 принято называть *гипотезами*. Заметим, что понятие "гипотеза" имеет совершенно иной смысл в математической статистике. Вообще говоря, гипотеза есть предположение, а не событие. По этой причине мы не будем употреблять исторически сложившуюся терминология, применительно к событиям B_k.

ЗАДАЧА 4.1. В ящик, содержащий 8 исправных изделий, добавлено 2 изделия, взятых со склада. Известно, что доля бракованных изделий на складе равна 5%. Найти вероятность того, что взятое наудачу из пополненного ящика изделие не будет бракованным.

РЕШЕНИЕ. В данной задаче невозможно определить априори, сколько бракованных изделий добавлено в ящик. При этом легко перечислить все возможные варианты выбора изделий со склада: мы можем взять в точности нуль, одно или два бракованных изделия — иного не дано. Таким образом, мы разбиваем все пространство элементарных исходов на полную группу событий $B_k = \{$из двух изделий, взятых со склада, ровно k будут бракованными$\}$, $k = 0,\ 1,\ 2$, поскольку $B_0 \cup B_1 \cup B_2 = \Omega$ и $B_k B_l = \emptyset$, $k \neq l$. Возникновение полной группы событий в формулировке задачи является верным признаком того, что при решении нам придется воспользоваться формулой полной вероятности или формулой Байеса. Пусть $A = \{$изделие, взятое из пополненного ящика, будет не бракованным$\}$. Требуется найти $\mathsf{P}(A)$. Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B_0)\mathsf{P}(A|\,B_0) + \mathsf{P}(B_1)\mathsf{P}(A|\,B_1) + \mathsf{P}(B_2)\mathsf{P}(A|\,B_2).$$

Очевидно, что

$$\mathsf{P}(A|\,B_k) = \frac{10-k}{10}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,$$

поскольку, если произойдет событие B_k, то в ящике будет $10-k$ исправных изделий. Предполагая, что на складе имеется бесконечно много изделий, мы получаем, что вероятность взять одно бракованное изделие со склада равняется 0.05, причем эта вероятность не изменится, когда мы будем брать второе изделие. Считая, что каждое добавленное изделие может быть бракованным независимо от другого, получаем

$$\mathsf{P}(B_0) = 0.95^2, \quad \mathsf{P}(B_1) = 0.05 \cdot 0.95 + 0.95 \cdot 0.05, \quad \mathsf{P}(B_2) = 0.05^2.$$

Следовательно, $\mathsf{P}(A) = 0.99$. □

ЗАДАЧА 4.2. Из урны, содержащей 4 белых и 2 черных шара, по схеме выбора без возвращения отобрали 2 шара. Шар, взятый наудачу из этих двух, оказался белым. Какова вероятность того, что второй шар тоже белый?

РЕШЕНИЕ. Здесь, как и в предыдущей задаче, мы имеем дело с полной группой событий $B_k = \{$среди двух отобранных из урны шаров ровно k белых$\}$, $k = 0, 1, 2$. Пусть $A = \{$шар, взятый наудачу из двух отобранных, белый$\}$. Требуется найти условную вероятность $\mathsf{P}(B_2|\, A)$. По формуле Байеса имеем

$$\mathsf{P}(B_2|\, A) = \frac{\mathsf{P}(B_2)\mathsf{P}(A|\, B_2)}{\mathsf{P}(B_0)\mathsf{P}(A|\, B_0) + \mathsf{P}(B_1)\mathsf{P}(A|\, B_1) + \mathsf{P}(B_2)\mathsf{P}(A|\, B_2)}.$$

Пользуясь рассуждениями, приведенными в решении задачи 1.5, получаем

$$\mathsf{P}(B_0) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}, \quad \mathsf{P}(B_1) = \frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}, \quad \mathsf{P}(B_2) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15}.$$

Из двух отобранных шаров белый шар можно извлечь с вероятностями

$$\mathsf{P}(A|\, B_0) = 0, \quad \mathsf{P}(A|\, B_1) = 0.5, \quad \mathsf{P}(A|\, B_2) = 1.$$

Следовательно, $\mathsf{P}(B_2|\, A) = 0.6$. □

ЗАДАЧА 4.3. Телеграфное сообщение состоит из сигналов "точка" и "тире". Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений "точка" и 1/3 сообщений "тире". Известно, что среди передаваемых сигналов "точка" и "тире" встречаются в отношении 5 : 3. Определить вероятность того, что будет принят передаваемый сигнал, если а) будет принят сигнал "точка"; б) будет принят сигнал "тире".

РЕШЕНИЕ. Пусть $A = \{$будет принят сигнал "точка"$\}$ и $B = \{$будет принят сигнал "тире"$\}$. События $C_1 = \{$будет передан сигнал "точка"$\}$ и $C_2 = \{$будет передан сигнал "тире"$\}$ образуют полную группу. По условию $\mathsf{P}(C_1) : \mathsf{P}(C_2) = 5 : 3$, следовательно, $\mathsf{P}(C_1) = 5/8$ и $\mathsf{P}(C_2) = 3/8$. Поскольку

$$\mathsf{P}(A|\, C_1) = \frac{3}{5}, \quad \mathsf{P}(A|\, C_2) = \frac{1}{3},$$

$$\mathsf{P}(B|\, C_1) = \frac{2}{5}, \quad \mathsf{P}(B|\, C_2) = \frac{2}{3},$$

по формуле Байеса имеем

$$\mathsf{P}(C_1|\, A) = \frac{\mathsf{P}(C_1)\mathsf{P}(A|\, C_1)}{\mathsf{P}(C_1)\mathsf{P}(A|\, C_1) + \mathsf{P}(C_2)\mathsf{P}(A|\, C_2)} = \frac{3}{4},$$

$$\mathsf{P}(C_2|\, B) = \frac{\mathsf{P}(C_2)\mathsf{P}(B|\, C_2)}{\mathsf{P}(C_1)\mathsf{P}(B|\, C_1) + \mathsf{P}(C_2)\mathsf{P}(B|\, C_2)} = \frac{1}{2}. \ \square$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

ЗАДАЧА 4.4. Доказать теоремы 4.1 и 4.2.

ЗАДАЧА 4.5. Имеются три урны. В первой урне находится N_1 белых и M_1 черных, во второй — N_2 белых и M_2 черных, в третьей — N_3 белых и M_3 черных шаров. Наудачу выбирается одна из урн и из нее выбираются без возвращения два шара. Один из них оказался белым, другой — черным. Найти вероятность того, что выбор производился из первой (второй, третьей) урны.

ЗАДАЧА 4.6. В первой урне N_1 белых и M_1 черных шаров, во второй — N_2 белых и M_2 черных шаров. Из первой урны во вторую перекладывают шар. После этого из второй урны извлекают один шар. Какова вероятность того, что он окажется белым?

ЗАДАЧА 4.7. Два стрелка стреляют по мишени. Один из них попадает в цель в среднем в 5 случаях, а второй — в 8 случаях из 10. Перед выстрелом они бросают правильную монету для определения очередности. Посторонний наблюдатель видит, что стрелок попал в цель, но не знает, кто в данный момент стрелял. Какова вероятность того, что стрелял первый стрелок?

ЗАДАЧА 4.8. В первой урне N_1 белых и M_1 черных, во второй — N_2 белых и M_2 черных шаров. Из первой урны без возвращения извлекаются n_1 шаров, а из второй — n_2 шаров. Все извлеченные шары кладутся в третью урну, из которой наудачу извлекается один шар. Какова вероятность того, что он окажется белым?

ЗАДАЧА 4.9. В урне первоначально находилось N белых и M черных шаров. Один шар потерян, и цвет его неизвестен. Из урны без возвращения извлечены два шара, и оба оказались белыми. Определить вероятность того, что потерян белый шар.

ЗАДАЧА 4.10. Вероятность того, что в справочное бюро в течение часа обратятся k человек, равна $\lambda^k \exp\{-\lambda\}/k!$ при некотором $\lambda > 0$. Для каждого человека вероятность отказа равна p. Найти вероятность того, что в течение часа s человек не получат ответ на свой вопрос.

ЗАДАЧА 4.11. В первой урне находится N_1 белых и M_1 черных, во второй — N_2 белых и M_2 черных, в третьей — N_3 белых и M_3 черных шаров. Из первой урны наудачу извлекают один шар и перекладывают во вторую урну. Затем перекладывают один шар из второй урны в третью и, наконец, из третьей в первую. С какой вероятностью состав шаров в первой урне останется прежним?

ЗАДАЧА 4.12. В урне 7 белых и 3 черных шара. Без возвращения извлекаются 3 шара. Известно, что среди них есть черный шар. Какова вероятность того, что другие два шара окажутся белыми?

ЗАДАЧА 4.13. Урна содержит один шар, про который известно, что он либо белый, либо черный с одинаковыми вероятностями. В урну кладут один белый шар и затем наудачу извлекают один шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что оставшийся в урне шар будет белым?

ЗАДАЧА 4.14. Группа студентов, сдающая экзамен, состоит из 5 отличников, 10 хороших студентов и 15 слабых студентов; отличник всегда получает оценку "отлично", хороший студент — "отлично" и "хорошо" с равными вероятностями, слабый студент — "хорошо", "удовлетворительно" и "неудовлетворительно" с равными вероятностями. Какова вероятность того, что наугад вызванный студент получит оценку а) "отлично"; б) "хорошо"; в) "удовлетворительно"?

ЗАДАЧА 4.15. В первой урне находятся 1 белый и 9 черных шаров, а во второй — 1 черный и 5 белых шаров. Из каждой урны по схеме случайного выбора без возвращения удалили по одному шару, а оставшиеся шары положили в третью урну. Найти вероятность того, что шар, вынутый из третьей урны, окажется белым.

ЗАДАЧА 4.16. В первой урне лежит 1 белый шар и 4 красных, а во второй — 1 белый и 7 красных. В первую урну добавляют два шара, наудачу выбранных из второй урны. Найти вероятность того, что шар, выбранный из пополненной первой урны, будет белым.

ЗАДАЧА 4.17. Пусть в условиях задачи 4.16 из пополненной первой урны по схеме случайного выбора с возвращением извлекают k шаров. Найти вероятность того, что все они будут белыми.

ЗАДАЧА 4.18. В одной урне содержится 1 белый и 2 черных шара, а в другой урне — 2 белых и 3 черных шара. В третью урну кладут два шара, наудачу выбранных из первой урны, и два шара, наудачу выбранных из второй урны. Какова вероятность того, что шар, извлеченный из третьей урны, будет белым?

ЗАДАЧА 4.19. В условиях задачи 4.18 найти вероятность того, что при выборе с возвращением из третьей урны двух шаров один из них будет белым, а другой — черным.

ЗАДАЧА 4.20. Решить задачу 4.19 для схемы выбора без возвращения.

§ 5. Схема Бернулли

ЗАНЯТИЕ 5

Поставим некоторому эксперименту (испытанию) в соответствие пространство элементарных исходов Ω_1. Предположим, что множество возможных событий кроме достоверного и невозможного событий содержит лишь два элемента A и $\overline{A}$ (здесь мы впервые рассматриваем множество возможных событий не как множество всех подмножеств Ω_1). Назовем событие A "успехом", а событие $\overline{A}$ — "неуспехом". Пусть вероятность "успеха" известна и равняется p. Рассмотрим теперь новый эксперимент, состоящий из серии n испытаний, описываемых пространством Ω_1. Пусть событие A_i есть "успех" в i-ом испытании. Предположим, что все испытания независимы, то есть

$$\mathsf{P}\left(A_1^{\delta_1}, \ldots, A_n^{\delta_n}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}\left(A_i^{\delta_i}\right) \tag{5.1}$$

для всех наборов $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$, $\delta_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$, где событие $A_i^{\delta_i}$ есть "успех" в i-ом испытании, если $\delta_i = 1$, и "неуспех", если $\delta_i = 0$. Другими словами, для любой цепочки длины n, состоящей из "успехов" и "неуспехов", вероятность произведения этих событий равняется произведению вероятностей событий, то есть данная цепочка состоит из независимых событий. Легко показать, что выполнение равенства (5.1) влечет независимость событий $A_1^{\delta_1}, \ldots, A_n^{\delta_n}$ в совокупности. Построенную модель называют схемой независимых испытаний Бернулли.

Пусть пространство элементарных событий Ω описывает схему n испытаний Бернулли, то есть каждому элементарному исходу $\omega \in \Omega$ ставится во взаимно однозначное соответствие некоторая цепочка $A_1^{\delta_1}, \ldots, A_n^{\delta_n}$ или, что то же самое, некоторый двоичный набор $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$. Основываясь на равенстве (5.1), определим на каждом одноточечном множестве $\{\omega\}$ вероятность следующим образом:

$$\mathsf{P}(\{\omega\}) = p^k(1-p)^{n-k}, \tag{5.2}$$

где k есть количество "успехов" в n испытаниях Бернулли или, другими словами, количество единиц в наборе $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$. Пусть (случайная) величина ξ_n равняется количеству "успехов" в n испытаниях. Тогда для вероятности $P(n, k)$ появления ровно k "успехов" в n испытаниях Бернулли справедливо равенство

$$P(n, k) = \mathsf{P}(\xi_n = k) = \sum_{\omega:\, \delta_1+\ldots+\delta_n=k} \mathsf{P}(\{\omega\}) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \tag{5.3}$$

поскольку число сочетаний C_n^k есть количество всех двоичных наборов длины n, содержащих в точности k единиц. Как мы увидим в § 7, числа $P(n, k)$ определяют так называемое *биномиальное распределение* или *распределение Бернулли* случайной величины ξ_n. Заметим, что довольно часто под распределением Бернулли подразумевают биномиальное распределение при $n = 1$.

ЗАДАЧА 5.1. Найти вероятность $R(n, k)$ появления не менее k "успехов" в схеме n независимых испытаний Бернулли ($k = 0, \ldots, n$).

РЕШЕНИЕ. Очевидно, что искомая вероятность вычисляется по формуле

$$R(n, k) = \sum_{i=k}^{n} P(n, i) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} P(n, i). \tag{5.4}$$

Особый интерес представляет значение вероятности $R(n, 1)$ появления хотя бы одного "успеха" в n испытаниях, которая вычисляется через вероятность дополнительного события по формуле

$$R(n, 1) = 1 - (1-p)^n. \ \square$$

ЗАДАЧА 5.2. Что вероятнее выиграть у равносильного противника (ничейный исход партии исключен): а) три партии из четырех или пять партий из восьми; б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?

РЕШЕНИЕ. Так как противники равносильные, то вероятность "успеха" (выигрыша) в каждом испытании (партии) равна 1/2. Для того, чтобы ответить на вопросы задачи, достаточно найти вероятности $P(4, 3)$, $P(8, 5)$, $R(4, 3)$ и $R(8, 5)$. По формулам (5.3) и (5.4) получаем

$$P(4, 3) = C_4^3 \frac{1}{2^4} = \frac{1}{4} > \frac{7}{32} = C_8^3 \frac{1}{2^8} = P(8, 3),$$

$$R(4,\,3) = \sum_{i=3}^{4} P(4,\,i) = \frac{5}{16} < \frac{93}{256} = \sum_{i=5}^{8} P(8,\,i) = R(8,\,5).\ \square$$

ЗАДАЧА 5.3. В партии из $n = 200$ изделий каждое изделие независимо от остальных может быть бракованным с вероятностью $p = 0.01$. Найти вероятность того, что число бракованных изделий в этой партии будет равно трем.

РЕШЕНИЕ. Будем понимать под "успехом" событие, состоящее в том, что изделие является бракованным. Испытание Бернулли состоит в проверке изделия на брак. Требуется найти вероятность $P(200,\,3)$. По формуле (5.3) имеем

$$P(200,\,3) = C_{200}^{3}(0.01)^3(0.99)^{197}.$$

Вычислить вручную правую часть последнего равенства представляется достаточно трудной задачей. Однако, имея калькулятор, можно получить ответ: $P(200,\,3) \approx 0.18136$. $\square$

ЗАДАЧА 5.4. В партии из $n = 22500$ изделий каждое изделие независимо от других может быть бракованным с вероятностью $p = 0.2$. Найти вероятность того, что число ξ_n бракованных изделий будет заключено между 4380 и 4560.

РЕШЕНИЕ. Так же, как и в задаче 5.3, будем понимать под "успехом" событие, состоящее в том, что изделие является бракованным. Очевидно, что искомая вероятность P находится по формуле

$$P = \sum_{k=4380}^{4560} P(22500,\,k) = \sum_{k=4380}^{4560} C_{22500}^{k}(0.2)^k(0.8)^{22500-k}.$$

Для того, чтобы довести до числа правую часть последнего равенства, уже не достаточно мощного калькулятора — требуется написать программу на компьютере. $\square$

Как мы видим, нахождение вероятностей $P(n,\,k)$ может быть сопряжено с большими вычислительными сложностями. Однако, существуют способы быстро и достаточно точно *оценить* эти вероятности. Методы таких оценок дают две нижеследующие теоремы.

Доопределим числа $P(n,\,k)$ следующим образом:

$$P(n,\,k) = \begin{cases} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} & \text{при } k = 0,\,\ldots,\,n; \\ 0 & \text{при } k = n+1,\,n+2,\,\ldots. \end{cases}$$

Предположим, что вероятность "успеха" в одном испытании для схемы, состоящей из n испытаний, зависит от n, и обозначим ее через p_n. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.1 (теорема Пуассона). *Предположим, что* $p_n \longrightarrow 0$ *при* $n \to \infty$ *так, что* $p_n n \longrightarrow \lambda$ *при* $n \to \infty$, *где* λ — *некоторое положительное число. Тогда для всех* $k = 0, 1, \ldots$ *при* $n \to \infty$ *имеет место асимптотика*

$$P(n, k) \longrightarrow \pi_k,$$

где числа π_k *определяются соотношением*

$$\pi_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}. \tag{5.5}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. При практическом применении теоремы 5.1 предполагают, что $p_n = p$ — фиксированная вероятность "успеха" в схеме с заданным числом испытаний n, число λ полагают равным np. В этом случае справедлива аппроксимация

$$P(n, k) \approx \pi_k.$$

В § 7 будет показана связь чисел π_k с так называемым *пуассоновским законом* распределения вероятностей.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Теорема Пуассона дает хорошее приближение, если величина p достаточно мала, относительно общего числа испытаний n. Мы будем считать, что это условие выполнено, если $np^2 < 0.1$.

ТЕОРЕМА 5.2 (интегральная теорема Муавра-Лапласа). *Пусть* $p =$ *const,* ξ_n — *количество успехов в* n *испытаниях Бернулли. Тогда при* $n \to \infty$ *имеет место асимптотика*

$$\mathsf{P}\left(x_1 \le \frac{\xi_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x_2\right) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \tag{5.6}$$

равномерно по x_1 *и* x_2 $(-\infty \le x_1 \le x_2 \le +\infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. При вычислении правой части соотношения (5.6) используются функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \quad \text{и} \quad \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du,$$

значения которых при заданных x можно найти в таблицах. В § 7 будет показана связь данных функций с так называемым *нормальным законом* распределения вероятностей.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Теорема 5.2 дает хорошее приближение в случае, когда величина $np(1-p)$ достаточно велика. Мы будем считать, что это условие выполнено, если $np(1-p) > 20$.

Для того, чтобы убедиться в действенности применения теорем 5.1 и 5.2, решим задачи 5.3 и 5.4, незначительно изменив их условия.

ЗАДАЧА 5.5. В партии из $n = 200$ изделий каждое изделие независимо от остальных может быть бракованным с вероятностью $p = 0.01$. *Оценить* вероятность того, что число бракованных изделий в этой партии будет равно трем.

РЕШЕНИЕ. Оценим вероятность $P(200,\,3)$ с помощью теоремы Пуассона. Действительно, теорема 5.1 дает хорошее приближение, поскольку величина $np^2 = 0.02$ достаточно мала. Имеем $\lambda = np = 2$,

$$P(200,\,3) \approx e^{-2}\frac{2^3}{3!} \approx 0.1805.$$

Если сравнить полученный результат с ответом задачи 5.3, мы увидим, что относительная погрешность составляет всего 0.5%. □

ЗАДАЧА 5.6. В партии из $n = 22500$ изделий каждое изделие независимо от других может быть бракованным с вероятностью $p = 0.2$. *Оценить* вероятность того, что число ξ_n бракованных изделий будет заключено между 4380 и 4560.

РЕШЕНИЕ. Оценим искомое значение вероятности P при помощи теоремы 5.2, поскольку величина $np(1-p) = 3600$ достаточно велика. Имеем $np = 22500 \cdot 0.2 = 4500$, $np(1-p) = 22500 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 3600$,

$$P = \mathsf{P}(4380 \le \xi_n \le 4560) = \mathsf{P}\left(\frac{4380-4500}{60} \le \frac{\xi_n - 4500}{60} \le \frac{4560-4500}{60}\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(-2 \le \frac{\xi_n - 4500}{60} \le 1\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-2}^{1} e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx = \Phi(1) - \Phi(-2).$$

Значения функции $\Phi(x)$ в точках -2 и 1 равны соответственно 0.0228 и 0.8413 (эти значения можно найти в статистических таблицах). Ответ: $P \approx 0.8185$. □

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

ЗАДАЧА 5.7. Показать, что выполнение равенства (5.1) влечет независимость событий $A_1^{\delta_1}, \ldots, A_n^{\delta_n}$ в совокупности.

ЗАДАЧА 5.8. Показать, что соотношение (5.2) задает на Ω распределение вероятностей.

ЗАДАЧА 5.9. Показать, что числа π_k из соотношения (5.5) задают распределение вероятностей на множестве целых неотрицательных чисел.

ЗАДАЧА 5.10. Отрезок длины $a+b$ поделен на две части длины a и b соответственно. На отрезок наудачу последовательно бросаются n точек. Найти вероятность того, что ровно m из n точек попадут на часть отрезка длины a.

ЗАДАЧА 5.11. Проведено 20 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании трех правильных идеальных монет. Найти вероятность того, что хотя бы в одном испытании появятся три герба.

ЗАДАЧА 5.12. Две правильные идеальные монеты подбрасывают 4800 раз. Найти приближенное значение вероятности того, что событие {герб, герб} появится меньше 1140 раз.

ЗАДАЧА 5.13. Испытание заключается в бросании трех игральных костей. Найти вероятность того, что в пяти независимых испытаниях ровно два раза выпадет по три "единицы".

ЗАДАЧА 5.14. Из урны, содержащей 1 белый и 4 черных шара, по схеме случайного выбора с возвращением проводят 2500 извлечений шаров. Найти приближенное значение вероятности того, что число появлений белого шара будет заключено между 480 и 540.

ЗАДАЧА 5.15. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0.1. Какова вероятность того, что сообщение из 10 знаков а) не будет искажено; б) будет содержать ровно три искажения; в) будет содержать не более трех искажений?

ЗАДАЧА 5.16. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.01. Найти приближенное значение вероятности того, что при 100 выстрелах будет не более трех попаданий.

ЗАДАЧА 5.17. Каждую секунду с вероятностью p независимо от других моментов времени по дороге проезжает автомобиль. Пешеходу для перехода дороги необходимо 3 секунды. Какова вероятность того, что подошедший к дороге пешеход будет ожидать возможности перехода а) 3 секунды; б) 4 секунды; в) 5 секунд?

ЗАДАЧА 5.18. В поселке 2500 жителей. Каждый из них примерно 6 раз в месяц ездит на поезде в город, выбирая дни поездок по случайным мотивам независимо от остальных. Какой наименьшей вместимостью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней (поезд ходит раз в сутки).

ЗАДАЧА 5.19. На одной странице 2400 знаков. При типографском наборе вероятность искажения одного знака равна 1/800. Найти приближенное значение вероятности того, что на странице будет не менее двух опечаток.

ЗАДАЧА 5.20. Движением частицы по целым точкам прямой управляет схема Бернулли с вероятностью p "успеха": если в данном испытании схемы Бернулли произошел "успех", то частица из своего положения переходит в правую соседнюю точку, а в противном случае — в левую. Найти вероятность того, что за n шагов частица из точки 0 перейдет в точку m.

§ 6. Вероятностное пространство

ЗАНЯТИЕ 6

В этом параграфе мы рассмотрим общепринятые в настоящее время аксиомы теории вероятностей, но прежде приведем ряд понятий, которые будут необходимы нам в дальнейшем. В §§ 1-5 мы предполагали, как само собой разумеющееся, что суммы и произведения событий являются событиями. Настало время "узаконить" эти предположения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. *Пространством элементарных исходов или событий называется любое непустое множество* Ω.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. *Алгеброй* $\mathcal{A}$ *называется класс (множество) подмножеств* Ω*, обладающий следующими свойствами (аксиомами):*

1) $\Omega \in \mathcal{A}$;

2) если $A \in \mathcal{A}$ *и* $B \in \mathcal{A}$*, то* $A \cup B \in \mathcal{A}$ *и* $A \cap B \in \mathcal{A}$;

3) если $A \in \mathcal{A}$*, то* $\overline{A} \in \mathcal{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3. σ*-алгеброй* $\mathcal{F}$ *называется класс (множество) подмножеств* Ω*, обладающий следующими свойствами (аксиомами):*

1) $\Omega \in \mathcal{F}$;

2) если $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$*, то* $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ *и* $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$;

3) если $A \in \mathcal{F}$*, то* $\overline{A} \in \mathcal{F}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4. *Событием или случайным событием называется элемент алгебры* $\mathcal{A}$ *или, в более общем случае,* σ*-алгебры* $\mathcal{F}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Любая σ-алгебра является алгеброй, обратное неверно.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Вообще говоря, алгебра есть множество, замкнутое относительно некоторых операций. В данном случае такими операциями являются теоретико-множественные операции сложения, умножения и взятия дополнения. Заметим, что приведенные аксиомы избыточны. Так, например, в аксиомах 2 алгебры и σ-алгебры достаточно лишь потребовать, чтобы произведение (сумма) событий являлось событием, поскольку $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$ и $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\cap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}}$ ($A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ и $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\cup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}}$). Более того, если алгебра или σ-алгебра является непустым множеством, то аксиома 1 также избыточна, поскольку $\Omega = A \cup \overline{A}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. Как мы могли убедиться в предыдущих параграфах, исторически было принято считать, что сумма событий, произведение событий и дополнительное событие также являются событиями. В простейшем случае, когда множество событий являлось множеством всех подмножеств Ω, такое предположение не вызывало никаких затруднений, однако, с течением времени, появились задачи (см. комментарии в § 7, касающиеся теоремы Улама), показывающие, что множество всех подмножеств не всегда является удобной базой исследований, а иногда даже наоборот. Поэтому появилась необходимость сузить класс допустимых событий, сохранив при этом устоявшиеся свойства его элементов. Идеальным объектом, позволяющим проделать вышеописанную процедуру и является алгебра, которая с течением времени была вытеснена σ-алгеброй как своим обобщением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.5. *σ-алгебра подмножеств Ω называется минимальной, если она содержится в любой σ-алгебре подмножеств Ω. σ-алгебра подмножеств Ω называется максимальной, если она содержит любую σ-алгебру подмножеств Ω.*

ЗАДАЧА 6.1. Построить минимальную и максимальную σ-алгебру подмножеств Ω.

РЕШЕНИЕ. Заметим, что согласно аксиомам 1 и 3 определения 6.3 множество $\{\Omega, \emptyset\}$ содержится в любой σ-алгебре. Легко проверить, что оно удовлетворяет аксиоме 2, то есть и является минимальной σ-алгеброй. В свою очередь, очевидно, что множество всех подмножеств Ω, будучи σ-алгеброй, содержит любой класс подмножеств Ω, то есть является максимальной σ-алгеброй. $\square$

Рассмотрим еще одну, возможно наиболее важную, σ-алгебру.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.6. *Борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}$ называется σ-алгебра, порожденная множеством всех открытых интервалов.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.7. *Наименьшая σ-алгебра, содержащая множество B, называется σ-алгеброй, порожденной B. Обозначение: $\sigma(B)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4. Под *наименьшей σ-алгеброй* (*алгеброй*), содержащей множество B, понимают σ-алгебру (алгебру), являющуюся пересечением всех σ-алгебр (алгебр), содержащих B.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.8. *Элементы борелевской σ-алгебры называются борелевскими множествами.*

ЗАДАЧА 6.2. Доказать, что множества $\{a\}$ и $[a,\, b)$, $a,\, b \in \mathbb{R}$, являются борелевскими.

РЕШЕНИЕ. Доказательство сводится к применению аксиомы 2 σ-алгебры. Из определения 6.6 следует, что все интервалы вида $(a,\, b)$ принадлежат борелевской σ-алгебре. Соотношения

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n},\, a + \frac{1}{n}\right) \quad \text{и} \quad [a,\, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n},\, b\right)$$

завершают доказательство. □

ЗАДАЧА 6.3. Пусть $\Omega = [0,\, 1]$. Описать σ-алгебру $\sigma(B)$ подмножеств Ω, порожденную множеством $B = \{(0,\, 1/3),\, (1/3,\, 1)\}$.

РЕШЕНИЕ. Решение сводится к применению аксиом σ-алгебры. Из аксиомы 1 и определения 6.7 следует, что $\Omega \in \sigma(B)$, $(0,\, 1/3) \in \sigma(B)$ и $(1/3,\, 1) \in \sigma(B)$. Из аксиомы 2 следует, что $(0,\, 1/3) \cup (1/3,\, 1) \in \sigma(B)$ и $\emptyset \in \sigma(B)$. Наконец, из аксиомы 3 следует, что $\{0,\, 1/3,\, 1\} \in \sigma(B)$, $\{0\} \cup [1/3,\, 1] \in \sigma(B)$ и $[0,\, 1/3] \cup \{1\} \in \sigma(B)$. Таким образом, наименьшая σ-алгебра, содержащая B, имеет вид:

$$\sigma(B) = \{\Omega,\, \emptyset,\, (0,\, 1/3),\, (1/3,\, 1),\, (0,\, 1/3) \cup (1/3,\, 1),$$

$$\{0,\, 1/3,\, 1\},\, \{0\} \cup [1/3,\, 1],\, [0,\, 1/3] \cup \{1\}\}. \ \square$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.5. Заметим, что множество $\sigma(B)$ из задачи 6.3 включает $8 = 2^3$ элементов. Если σ-алгебра имеет конечную мощность, то количество ее элементов всегда есть некоторая степень двойки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.9. *Пары $(\Omega,\, \mathcal{A})$ и $(\Omega,\, \mathcal{F})$ называются измеримыми пространствами. Элементы алгебры $\mathcal{A}$ и σ-алгебры $\mathcal{F}$ называются измеримыми множествами.*

В определении 6.9 определяются объекты, в названиях которых фигурирует слово "мера". Как уже было сказано в § 1, вероятность является *мерой*, то есть функцией множеств, обладающей свойством *аддитивности* (см. определение 6.10). Связь вероятности с измеримыми пространствами и измеримыми множествами (теми множествами, которые можно "измерить") задается следующим определением.

(!) ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.10. *Вероятностью или вероятностной мерой называется действительная функция случайного события* $\mathsf{P} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, *удовлетворяющая следующим аксиомам:*

1) *неотрицательность:* $\mathsf{P}(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$;

2) *нормированность:* $\mathsf{P}(\Omega) = 1$;

3) *(конечная) аддитивность: если* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, $A_i A_j = \emptyset$, $i \neq j$, *то*

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i).$$

Современное определение вероятности обобщает определение 6.10 на случай, когда областью определения вероятностной меры является некоторая σ-алгебра, следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.11. *Вероятностью или вероятностной мерой называется действительная функция случайного события* $\mathsf{P} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$, *удовлетворяющая следующим аксиомам:*

1) *неотрицательность:* $\mathsf{P}(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{F}$;

2) *нормированность:* $\mathsf{P}(\Omega) = 1$;

3) σ-*аддитивность (или счетная аддитивность): если* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, $A_i A_j = \emptyset$, $i \neq j$, *то*

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i).$$

Обобщение понятия "вероятность", которое дается в определении 6.11, потребовалось в первую очередь потому, что конечно аддитивные меры не обладают вполне естественным свойством непрерывности, которое для функций множеств имеет следующий вид.

АКСИОМА НЕПРЕРЫВНОСТИ. *Пусть последовательность* $\{B_n\}$ *событий такова, что* $B_{n+1} \subset B_n$ *и* $B = \cap_{n=1}^{\infty} B_n$. *Тогда* $\mathsf{P}(B_n) \longrightarrow \mathsf{P}(B)$ *при* $n \to \infty$.

ТЕОРЕМА 6.1. *Требование аксиомы непрерывности и конечной аддитивности вероятности эквивалентно* σ-*аддитивности вероятности.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.12. *Тройка* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$ *называется вероятностным пространством. Тройка* $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathsf{P})$ *называется вероятностным пространством в широком смысле. Вероятность* P *также называется распределением вероятностей на* Ω *(на* $(\Omega,\ \mathcal{F})$*).*

ВОПРОС. Что является элементом вероятностного пространства?

ОТВЕТ. Действительно, под пространством обычно понимают множество, у которого заданы взаимосвязи (отношения) между его элементами. Вероятностное пространство не есть пространство в геометрическом или топологическом смысле этого слова. Это модель, в которой определение каждого следующего элемента тройки базируется на предыдущих. Само слово "пространство" в определении 6.12 появилось под влиянием англо-американской школы. Сам А. Н. Колмогоров, формулируя аксиомы теории вероятностей в книге (Колмогоров 1936), называл тройку $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$ *полем вероятностей.* Однако понятие "поле", также как и понятие "пространство", не отражает сути описываемого объекта, которое не является множеством, а следовательно, не содержит никаких элементов. Аналогичное замечание относится к понятию "измеримое пространство".

При построении измеримых и вероятностных пространств необходимо учитывать, что σ-алгебра должна содержать все возможные интересующие нас случайные события, а вероятность, которую можно задать на пространстве событий неоднозначно, должна удовлетворять свойству устойчивости частот (см. § 1). В большинстве случаев нас не будет интересовать природа базового вероятностного пространства, однако для построения модельных примеров мы будем часто пользоваться вероятностным пространством вида $([0,\ 1],\ \mathcal{B}_{[0,\,1]},\ \lambda)$, где $\mathcal{B}_{[0,\,1]}$ — борелевская σ-алгебра подмножеств отрезка $[0,\ 1]$, а λ — мера Лебега , к определению которой мы сейчас и перейдем.

ТЕОРЕМА 6.2 (теорема Каратеодори). *Пусть* $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathsf{P})$ — *вероятностное пространство в широком смысле. Тогда существует, и притом единственная, вероятностная мера* Q*, определенная на* $\sigma(\mathcal{A})$ *такая, что*

$$\mathsf{Q}(A) = \mathsf{P}(A), \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.13. *Мера* Q *из формулировки теоремы 6.2 называется продолжением меры* P *на* σ*-алгебру* $\sigma(\mathcal{A})$.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Каждое вероятностное пространство в широком смысле $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathsf{P})$ автоматически определяет вероятностное пространство $(\Omega,\ \sigma(\mathcal{A}),\ \mathsf{Q})$.

СЛЕДСТВИЕ 6.2. Для определения вероятности на измеримых пространствах $(\mathbb{R},\ \mathcal{B})$ и $([0,\ 1],\ \mathcal{B}_{[0,\,1]})$ достаточно определить вероятности на интервалах.

Как известно, для каждого открытого интервала можно определить понятие длины. Очевидно, что данное понятие можно определить и для любого множества, являющегося пересечением или объединением конечного числа интервалов. Таким образом, понятие длины как меры применимо к любому элементу алгебры, порожденной всеми открытыми интервалами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.14. *Мерой Лебега называется мера, являющаяся продолжением длины с наименьшей алгебры, содержащей множество всех открытых интервалов, на борелевскую σ-алгебру.*

ЗАМЕЧАНИЕ 6.6. Мера Лебега на измеримом пространстве $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$ является вероятностной, поскольку в данном случае обладает свойством нормированности.

Основными свойствами вероятности являются следующие:

1) $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$;

2) $\mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$;

3) если $A \subset B$, то $\mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B)$;

4) $\mathsf{P}(A) \leq 1$, $\forall A \in \mathcal{F}$;

5) $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB)$;

6) $\mathsf{P}(A \cup B) \leq \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$;

7) $\mathsf{P}\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n)$.

В заключение данного параграфа сделаем несколько замечаний, касающихся терминологии, связанной с мерами.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.7. Везде далее, если это не будет вызывать разночтений, мы будем писать $\mathsf{P}\{\omega|\ \ldots\}$, вместо $\mathsf{P}(\{\omega|\ \ldots\})$, опуская лишние скобки в записи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.15. *Говорят, что некоторое свойство выполняется почти всюду, если оно выполняется везде за исключением, быть может, некоторого множества, мера которого равняется нулю. Говорят, что некоторое свойство выполняется почти наверное, если оно выполняется на множестве, вероятность которого равняется единице.*

ЗАМЕЧАНИЕ 6.8. Если мера обладает свойством нормированности, то есть является вероятностной, то формулировки "почти наверное" и "почти всюду" являются эквивалентными.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

ЗАДАЧА 6.4. Доказать, что множества $(a,\, b]$, $[a,\, b]$ и $(-\infty,\, b]$, $a,\, b \in \mathbb{R}$, являются борелевскими.

ЗАДАЧА 6.5. Доказать, что множество иррациональных чисел является борелевским.

ЗАДАЧА 6.6. Показать, что пересечение всех σ-алгебр, содержащих множество B, является σ-алгеброй.

ЗАДАЧА 6.7. Доказать утверждения замечаний 6.1 и 6.5.

ЗАДАЧА 6.8. Пусть $\Omega = [0,\, 1]$. Описать σ-алгебру $\sigma(B)$ подмножеств Ω, порожденную множеством B, если

1) $B = \{\Omega\}$;

2) $B = \Omega$;

3) $B = \{\emptyset\}$;

4) $B = \{[0,\, 2/3],\, [1/3,\, 1]\}$;

5) $B = \{[0,\, 1/2],\, [1/2,\, 1]\}$;

6) $B = \{\{0\},\, \{1\}\}$;

7) $B = \{[1/3,\, 1/2]\}$.

ЗАДАЧА 6.9. Доказать теорему 6.1.

ЗАДАЧА 6.10. Показать, что $\mathcal{B} \cap [0,\, 1]$ есть борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}_{[0,\, 1]}$ подмножеств отрезка $[0,\, 1]$.

ЗАДАЧА 6.11. Доказать основные свойства вероятности.

ЗАДАЧА 6.12. Доказать свойства независимых событий (§ 3), пользуясь определением 6.11 вероятности.

ЗАДАЧА 6.13. Правильная идеальная монета подбрасывается до тех пор, пока она два раза подряд не выпадет одной стороной. Построить вероятностное пространство, описывающее данный опыт. Найти вероятность того, что число подбрасываний будет четным. Найти вероятность того, что число подбрасываний не превосходит 5.

ЗАДАЧА 6.14. Может ли число всех событий какого-либо вероятностного пространства быть равным 130, 129, 128?

ЗАДАЧА 6.15. Описать σ-алгебру, порожденную событиями нулевой вероятности. Описать σ-алгебру, порожденную событиями вероятности единица.

ЗАДАЧА 6.16. Число элементарных событий некоторого вероятностного пространства равно n. Указать минимальное и максимальное возможные значения для числа событий.

ЗАДАЧА 6.17. Может ли быть а) число элементарных событий конечно, а число событий бесконечно; б) число событий конечно, а число элементарных событий бесконечно?

ЗАДАЧА 6.18. Пусть $\mathcal{F}$ — σ-алгебра подмножеств Ω. Доказать, что если $\mathcal{F}$ бесконечно, то существует счетная последовательность непустых непересекающихся элементов $\mathcal{F}$.

ЗАДАЧА 6.19. Пусть A_1, A_2, ... — последовательность непересекающихся подмножеств Ω. Определить мощность σ-алгебры, порожденной этой последовательностью.

ЗАДАЧА 6.20. Доказать, что для любого пространства Ω никакая σ-алгебра его подмножеств не может иметь счетную мощность.

§ 7. Случайные величины и их распределения

ЗАНЯТИЕ 7

Пусть задано некоторое вероятностное пространство $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. *Случайной величиной называется действительная функция элементарного события* $\xi\,:\,\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, *обладающая свойством измеримости:*

$$\xi^{-1}(B) \equiv \{\omega|\,\xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F} \tag{7.1}$$

для любого $B \in \mathcal{B}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Обозначение $\xi^{-1}(B)$ читается "*полный прообраз* B".

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Везде далее мы будем обозначать случайные величины строчными греческими буквами, а *частные значения* случайных величин (то есть значения случайных величин при фиксированных ω) строчными латинскими буквами.

Рассмотрим определение 7.1 более подробно. Во-первых, заметим, что, поскольку пространство элементарных исходов может иметь абсолютно произвольную структуру, изучение его математическими методами, вообще говоря, не представляется возможным. Поэтому нам необходим некоторый вспомогательный объект, который "оцифровывал" бы элементарные исходы. Таким объектом, очевидно, является действительная функция с областью определения Ω. Во-вторых, для того, чтобы понять свойство измеримости, рассмотрим следующий пример.

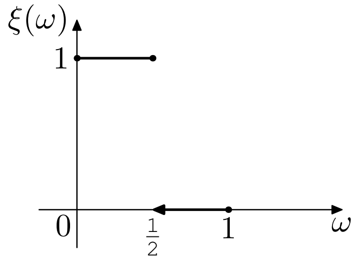

Рисунок 7.1

ЗАДАЧА 7.1. Пусть задано измеримое пространство $(\Omega = [0,\, 1],\, \mathcal{F} = \{\emptyset,\, \Omega\})$. Пусть функция $\xi(\omega)$ определена так, как показано на рисунке 7.1. Требуется найти вероятность $\mathsf{P}(\xi < 1/2)$.

РЕШЕНИЕ. Заметим, что

$$\mathsf{P}\left(\xi < \frac{1}{2}\right) = \mathsf{P}\{\omega |\, \xi(\omega) = 0\} = \mathsf{P}\Big\{\omega \in \left(\frac{1}{2},\, 1\right]\Big\}.$$

Из последнего равенства многие делают вывод, что искомая вероятность равна $1/2$, поскольку длина интервала $(1/2,\, 1]$ в два раза меньше, чем длина отрезка $[0,\, 1]$. Но заметим, что на данном измеримом пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F})$ вероятность P можно задать единственным образом: $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$, $\mathsf{P}(\Omega) = 1$. Чему же будет равна искомая вероятность: нулю или единице?

Вместо ответа на этот вопрос, давайте проверим, будет ли являться функция $\xi(\omega)$ измеримой в данном случае. Очевидно, нет, поскольку полный прообраз $\xi^{-1}((-\infty, 1/2)) = (1/2,\, 1]$ не является элементом σ-алгебры $\mathcal{F}$. Таким образом, на рисунке 7.1 изображена функция, для которой поставленная задача не имеет смысла. Ответ: задача поставлена некорректно. □

ВОПРОС. Можно ли изменить условие задачи 7.1 таким образом, чтобы она имела решение?

ОТВЕТ. Для этого дополним σ-алгебру $\mathcal{F}$ элементами $[0,\, 1/2]$ и $(1/2,\, 1]$ и определим вероятности $\mathsf{P}([0,\, 1/2]) = 0.1$ и $\mathsf{P}((1/2,\, 1]) = 0.9$. В этом случае искомая вероятность будет равняться 0.9. Если определить $\mathcal{F}$ как борелевскую σ-алгебру подмножеств отрезка $[0,\, 1]$, а вероятность определить как меру Лебега, то мы получим более естественный ответ — одна вторая.

ЗАДАЧА 7.2. Нарисовать случайную величину.

РЕШЕНИЕ. Задача, поставленная таким образом, может вызвать недоумение у человека, привыкшего отождествлять случайность с неопределенностью. Как можно нарисовать то, что не определено? Однако "математическая случайность" имеет природу, отличную от бытовой. Случайная величина является вполне определенной функцией элементарного исхода (здесь, однако, следует оговориться, что пространство элементарных исходов не всегда интересует нас как таковое, поскольку его математическое описание не всегда возможно).

Для решения этой задачи определим измеримое пространство $(\Omega,\ \mathcal{F})$ как пару $([0,\, 1],\, \mathcal{B}_{[0,\,1]})$ и рассмотрим функцию $\xi(\omega)$, изображенную на рисунке 7.1. Данная функция является одним из возможных решений задачи. □

ВОПРОС. В определении случайной величины не фигурирует вероятность (мера). Почему свойство (7.1) называется "измеримостью"?

ОТВЕТ. На самом деле, вероятностная мера незримо присутствует в определении случайной величины. В параграфах 1-5 мы сталкивались с ситуацией, когда некоторый ("случайный") объект ξ попадал в некоторое заданное множество B. Такими объектами могли быть случайным образом брошенная точка, выпавшие на игральных костях очки, количество успехов в схеме Бернулли, а соответствующими множествами — отрезок или геометрическая область, одноточечное множество, содержащее заданное число очков, наперед заданное количество успехов (одноточечное множество или подмножество натуральных чисел). При этом нас каждый раз интересовала *вероятность события* $\{\xi \in B\}$. Но, как мы знаем, событие есть не что иное как элемент σ-алгебры $\mathcal{F}$, которая является областью определения вероятностной меры. Именно поэтому нам необходимо условие (7.1), именно поэтому оно носит название "измеримость" и именно поэтому элементы σ-алгебры также называются измеримыми множествами (то есть множествами, которые можно "измерить").

ВОПРОС. Почему в определении случайной величины используется борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}$, ведь гораздо удобнее использовать в качестве $\mathcal{B}$, например, множество всех подмножеств $\mathbb{R}$?

ОТВЕТ. Борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}$ появилась в определении случайной величины по большей части исторически, поскольку до развития теории вероятностей в самостоятельную науку достаточно было уметь вычислять вероятность попадания случайной величины в некоторый интервал. Класс $\mathcal{B}$ является довольно широким. Построение неборелевского множества представляет собой достаточно трудоемкую задачу (см., например, (Колмогоров и Фомин 1981), стр. 264). Кроме того, в 1930 году С. М. Уламом (см. (Окстоби 1974)) была доказана теорема, которая гласит, что *конечная мера, определенная на всех подмножествах множества мощности континуум, равна нулю тождественно, если она равна нулю для каждого одноточечного подмножества*. Как мы уже говорили в § 2, мера одноточечного множества равняется нулю, если в качестве меры рассматривать, например, геометрическую вероятность. Ниже будет показано, что таким же свойством обладают все так называемые абсолютно непрерывные распределения. Однако, вероятность не может равняться нулю тождественно, поскольку вероятность достоверного события всегда равняется единице. Таким образом, множество всех подмножеств $\mathbb{R}$ сильно уступает борелевской σ-алгебре при определении распределения случайной величины (см. определение 7.2). Более того, борелевская σ-алгебра подмножеств действительной прямой является исключительно удобным объектом, поскольку ее элементы легко измерить с помощью меры Лебега (длины), а для определения борелевской σ-алгебры на *любом* пространстве достаточно задать на этом пространстве метрику или топологию (которые и определяют открытые множества). В случае, когда в определении 7.1 фигурирует произвольное измеримое пространство $(S,\, \mathcal{H})$ вместо измеримого пространства $(\mathbb{R},\, \mathcal{B})$, измеримое отображение ξ называют *случайным элементом.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. *Распределением случайной величины ξ называется функция $\mathsf{P}_\xi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$, определенная для любого $B \in \mathcal{B}$ по правилу*

$$\mathsf{P}_\xi(B) = \mathsf{P}(\xi \in B). \tag{7.2}$$

Если случайная величина имеет распределение P_ξ, то говорят также, что случайная величина распределена по закону P_ξ.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.3. Если $\mathsf{P}_\xi(\mathcal{Z}) = 1$, где $\mathcal{Z}$ есть множество целых чисел, то случайная величина называется *целочисленной.*

ЗАМЕЧАНИЕ 7.4. На фиксированном вероятностном пространстве случайная величина однозначно определяет свое распределение, но по заданному распределению нельзя однозначно восстановить случайную величину.

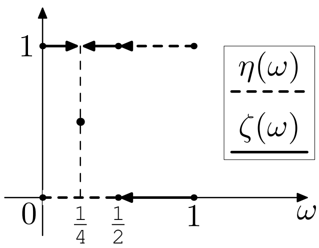

Рисунок 7.2

Если первое утверждение замечания достаточно очевидно ввиду однозначной определенности правой части (7.2), то второе требует некоторого пояснения. Рассмотрим пример. Пусть задано вероятностное пространство $([0,\, 1],\, \mathcal{B}_{[0,\,1]},\, \lambda)$, где λ — мера Лебега. Рассмотрим две функции $\eta(\omega)$ и $\zeta(\omega)$, определенные так, как показано на рисунке 7.2.

Докажем, что распределения случайных величин η и ζ совпадают. Для этого разобьем σ-алгебру $\mathcal{B}$ на четыре класса. Пусть класс $\mathcal{B}_1$ включает все борелевские множества, включающие точки 0 и 1, класс $\mathcal{B}_2$ включает все борелевские множества, не включающие 0 и 1, класс $\mathcal{B}_3$ включает все борелевские множества, включающие 0 и не включающие 1, класс $\mathcal{B}_4$ включает все борелевские множества, не включающие 0 и включающие 1. Очевидно, что $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{B}_4$ и $\mathcal{B}_i \mathcal{B}_j = \emptyset$, $i \neq j$. Для любого множества $B_1 \in \mathcal{B}_1$ справедливо равенство

$$\mathsf{P}\{\omega |\, \zeta(\omega) \in B_1\} = \lambda([0,\, 1] \backslash \{1/4\}) = \lambda([0,\, 1]) = \mathsf{P}(\eta \in B_1) = 1.$$

Аналогично, для $B_i \in \mathcal{B}_i$, $i = 2,\, 3,\, 4$, имеем

$$\mathsf{P}(\zeta \in B_2) = \lambda(\{1/4\}) = \lambda(\emptyset) = \mathsf{P}(\eta \in B_2) = 0$$

и

$$\mathsf{P}(\zeta \in B_3) = \mathsf{P}(\zeta \in B_4) = \mathsf{P}(\eta \in B_3) = \mathsf{P}(\eta \in B_4) = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, мы показали, что для любого борелевского множества B значения распределений $\mathsf{P}_\eta(B)$ и $\mathsf{P}_\zeta(B)$ совпадают, но при этом, как видно из рисунка, сами случайные величины не совпадают ни в одной точке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3. *Между случайными величинами могут иметь место следующие основные знаки равенства.*

1) *Тождественное равенство. Говорят, что случайная величина ξ тождественно равна случайной величине η, если $\xi(\omega) = \eta(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$. Обозначение: $\xi \equiv \eta$.*

2) *Равенство почти наверное. Говорят, что случайная величина ξ равняется почти наверное или эквивалентна случайной величине η, если $\mathsf{P}\{\omega |\, \xi(\omega) = \eta(\omega)\} = 1$. Обозначение: $\xi \overset{п.н.}{=} \eta$.*

3) *Равенство по распределению. Говорят, что случайная величина ξ равняется случайной величине η по распределению, если $\mathsf{P}_\xi(B) = \mathsf{P}_\eta(B)$ для любого борелевского множества B. Обозначение: $\xi \overset{d}{=} \eta$.*

Очевидно, что равенство 1 из определения 7.3 является самым сильным, а равенство 3 — самым слабым. Так все три случайные величины ξ, η и ζ (см. рис. 7.1 и 7.2) равны по распределению, случайные величины ξ и ζ равны почти наверное, и никакие две из этих трех случайных величин не равны тождественно.

Заметим, что распределение случайной величины является не слишком удобным объектом изучения, поскольку его область определения есть σ-алгебра борелевских множеств $\mathcal{B}$, а большинство методов математического и функционального анализа разработаны для функций, определенных на действительной прямой. Для того, чтобы упростить задачу исследователя вводится следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.4. *Функцией распределения случайной величины ξ называется отображение $F_\xi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное по правилу*

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi < x) \quad \text{или} \quad F_\xi(x) = \mathsf{P}_\xi((-\infty, x))$$

для всех $x \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 7.1. *Функция распределения случайной величины взаимно однозначно определяет распределение случайной величины.*

Определение 7.4 и теорема 7.1 дают возможность работать с распределениями случайных величин посредством более привычного объекта —

действительной функции действительного переменного. Функция распределения обладает следующими основными свойствами:

1) неубывание: если $x_1 \le x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$;

2) непрерывность слева: $\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$;

3) ограниченная вариация: $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

ТЕОРЕМА 7.2. *Если функция $F(x)$ обладает свойствами 1-3, то существует вероятностное пространство $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$ и случайная величина ξ на нем такая, что $F(x) = \mathsf{P}(\xi < x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.*

Таким образом, функция, обладающая вышеперечисленными свойствами, всегда является функцией распределения некоторой случайной величины. На рисунках 7.3-7.5 показаны некоторые возможные виды функций распределения.

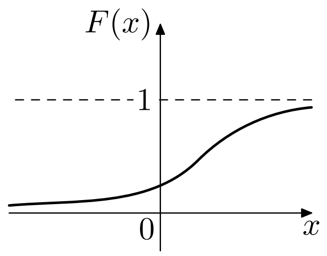

Рисунок 7.3

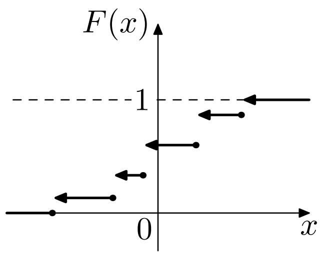

Рисунок 7.4

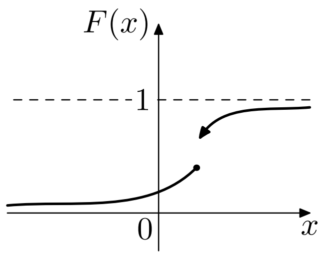

Рисунок 7.5

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

ЗАДАЧА 7.3. Показать, какая функция $\xi(\omega)$ является измеримой на любом измеримом пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F})$. Показать, на каком измеримом пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F})$ измерима любая функция $\xi(\omega)$.

ЗАДАЧА 7.4. Доказать, что функция распределения может иметь не более, чем счетное число точек разрыва.

ЗАДАЧА 7.5. Пусть $g(x)$ и $\xi(\omega)$ — некоторые функции, причем $g(x)$ неизмерима, а $\xi(\omega)$ измерима (на некоторых измеримых пространствах). Может ли функция $g(\xi(\omega))$ являться измеримой (неизмеримой)?

ЗАДАЧА 7.6. Пусть $g(x)$ и $\xi(\omega)$ — некоторые неизмеримые функции (на некоторых измеримых пространствах). Может ли функция $g(\xi(\omega))$ являться измеримой (неизмеримой)?

ЗАДАЧА 7.7. Пусть $g(x)$ и $\xi(\omega)$ — некоторые функции, причем $g(x)$ измерима, а $\xi(\omega)$ неизмерима (на некоторых измеримых пространствах). Может ли функция $g(\xi(\omega))$ являться измеримой (неизмеримой)?

ЗАДАЧА 7.8. Пусть $g(x)$ — борелевская функция (то есть действительная измеримая функция действительного переменного, см. определение 8.3), а $\xi(\omega)$ — случайная величина, определенная на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$. Доказать, что $g(\xi(\omega))$ является случайной величиной на $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$.

ЗАДАЧА 7.9. Случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x)$. Найти функции распределения случайных величин $a\xi$, $\xi+b$, $a,\ b \in \mathbb{R}$, и $1/2(\xi + |\xi|)$.

ЗАДАЧА 7.10. Обязана ли функция ξ быть случайной величиной, если случайной величиной является функция а) ξ^2; б) $|\xi|$; в) $\cos\xi$; г) $\exp\{\xi\}$?

ЗАДАЧА 7.11. Может ли множество точек разрыва функции распределения быть всюду плотным на прямой?

ЗАДАЧА 7.12. Доказать, что если функция распределения непрерывна в каждой точке прямой, то она равномерно непрерывна на всей прямой.

ЗАДАЧА 7.13. Доказать, что функция распределения не может являться периодической.

ЗАДАЧА 7.14. Доказать основные свойства функции распределения.

ЗАДАЧА 7.15. Показать, что целочисленная случайная величина имеет *ступенчатую* функцию распределения (см. рисунок 7.4).

ЗАДАЧА 7.16. Построить функцию распределения случайной величины ξ (см. рис. 7.1), определенной на вероятностном пространстве $([0,\ 1],\ \mathcal{B}_{[0,\,1]},\ \lambda)$, где λ — мера Лебега.

ЗАДАЧА 7.17. Построить функцию распределения случайной величины ξ (см. рис. 7.1), определенной на вероятностном пространстве $([0,\ 1],\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$, где $\mathcal{F} = \{\Omega,\ \emptyset,\ [0,\ 1/2],\ (1/2,\ 1]\}$, $\mathsf{P}([0,\ 1/2]) = 0.1$ и $\mathsf{P}((1/2,\ 1]) = 0.9$.

ЗАДАЧА 7.18. Показать, что если случайная величина ξ имеет функцию распределения, изображенную на рисунке 7.3, то $\mathsf{P}(\xi = x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

ЗАДАЧА 7.19. Показать, что если случайная величина ξ имеет функцию распределения, изображенную на рисунке 7.5, то $\mathsf{P}(\xi = x) = 0$ для почти всех (по мере Лебега) $x \in \mathbb{R}$, но существует такое x, что $\mathsf{P}(\xi = x) \neq 0$.

ЗАДАЧА 7.20. Показать, что для любой случайной величины ξ имеет место равенство $\mathsf{P}(\xi = x) = 0$ для почти всех (по мере Лебега) $x \in \mathbb{R}$.

ЗАНЯТИЕ 8

Пусть задано некоторое вероятностное пространство $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.5. *Случайная величина ξ называется дискретной, если существует не более, чем счетное множество B такое, что* $\mathsf{P}_\xi(B) = 1$. *Распределение, соответствующее дискретной случайной величине, также называется дискретным.*

ЗАМЕЧАНИЕ 7.5. Иногда говорят, что случайная величина имеет дискретное распределение, если она принимает с ненулевыми вероятностями не более, чем счетное число значений. Однако, заметим, что такое определение не является вполне корректным, поскольку ему удовлетворяет любая случайная величина, так как если $\mathsf{P}(\xi = x) > 0$, то функция распределения F_ξ имеет в точке x разрыв. Но функция распределения не может иметь более, чем счетное число точек разрыва (см. задачу 7.4).

Распределение дискретной случайной величины удобно представлять с помощью так называемого *ряда распределения* :

x_1	x_2	x_3	...	x_n	...
p_1	p_2	p_3	...	p_n	...

Таблица 7.1

Здесь числа x_i — это возможные частные значения случайной величины ξ ($x_i \neq x_j$, для $i \neq j$), а для чисел p_i справедливы равенства

$$p_i = \mathsf{P}(\xi = x_i) > 0, \qquad \sum_i p_i = 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.6. В дальнейшем при работе с дискретными распределениями нам зачастую будет удобна интерпретация вероятности как массы. Ряд распределения, фактически, определяет систему точек на прямой, имеющих координаты x_i, в которых сосредоточены массы p_i.

ЗАДАЧА 7.21. Показать, что ряд распределения взаимно однозначно определяет дискретное распределение.

РЕШЕНИЕ. Пусть задан некоторый ряд распределения. Не ограничивая общности рассуждений, предположим, что случайная величина может принимать только два значения: 0 и 1 (обычно так говорят в случае, когда $\mathsf{P}(\xi = 0) > 0$, $\mathsf{P}(\xi = 1) > 0$ и $\mathsf{P}(\xi \in \{0, 1\}) = 1$; вообще говоря, областью значений случайной величины является вся действительная прямая). Разобьем борелевскую σ-алгебру $\mathcal{B}$ на четыре класса $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$

и $\mathcal{B}_4$, как это было сделано в обосновании замечания 7.4. Заметим, что для любого борелевского множества $B_i \in \mathcal{B}_i$ вероятность $\mathsf{P}(\xi \in B_i)$ однозначно определяется по правилу: $\mathsf{P}(\xi \in B_1) = \mathsf{P}(\Omega)$, $\mathsf{P}(\xi \in B_2) = \mathsf{P}(\emptyset)$, $\mathsf{P}(\xi \in B_3) = \mathsf{P}(\xi = 0)$, $\mathsf{P}(\xi \in B_4) = \mathsf{P}(\xi = 1)$. Таким образом, ряд распределения однозначно определяет распределение. Обратное утверждение очевидно, поскольку $p_i = \mathsf{P}(\xi \in \{x_i\})$, а одноточечные множества, как уже говорилось выше, являются борелевскими. □

ЗАДАЧА 7.22. Пусть задан ряд распределения (см. таблицу 7.1). Построить соответствующую функцию распределения.

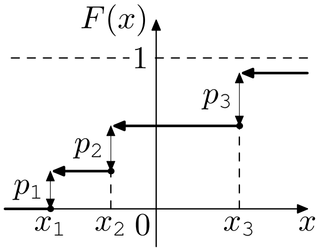

Рисунок 7.6

РЕШЕНИЕ. Не ограничивая общности рассуждений, предположим, что числа x_i образуют возрастающую последовательность. Зафиксируем некоторое число x. Очевидно, что

$$F(x) = \mathsf{P}(\xi < x) = \sum_{i:\, x_i < x} \mathsf{P}(\xi = x_i) = \sum_{i:\, x_i < x} p_i.$$

Таким образом, график дискретной функции распределения имеет вид, показанный на рисунке 7.6.

Заметим, что дискретная функция распределения является ступенчатой, то есть имеет разрыв в каждой точке x, для которой $\mathsf{P}(\xi = x) > 0$, причем $F(x+0) - F(x) = \mathsf{P}(\xi = x)$, а в остальных точках является кусочно постоянной. Отсюда, в частности, следует, что мера Лебега $\lambda\{F'(x) \neq 0\} = \lambda\{x \,|\, \mathsf{P}(\xi = x) > 0\} = 0$. □

ЗАМЕЧАНИЕ 7.7. Для того, чтобы определить распределение случайной величины достаточно задать некоторую характеристику, которая однозначно определяет рассматриваемое распределение. В случае дискретных распределений такими характеристиками могут быть ряд распределения и функция распределения. Позже мы познакомимся с такими характеристиками, как плотность, производящая и характеристическая функции.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся виды дискретных случайных величин и распределений. С большинством из них мы уже встречались в предыдущих параграфах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.6. *Случайная величина ξ называется вырожденной (в точке a), если $\mathsf{P}(\xi = a) = 1$. Соответствующее распределение также называется вырожденным. Обозначение: $\xi \overset{\text{п.н.}}{=} a$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.7. *Случайная величина ξ имеет классическое или равномерное дискретное распределение, если $\mathsf{P}(\xi = x_i) = 1/n$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.8. *Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $p \in (0, 1)$, если $\mathsf{P}(\xi = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$, $k = 0, \ldots, n$. Обозначение: $\xi \sim Bi(n, p)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 7.8. Биномиальное распределение также называется *распределением Бернулли*, но чаще под распределением Бернулли подразумевают распределение $Bi(1, p)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.9. Обычно говорят, что случайная величина ξ, имеющая биномиальное распределение с параметрами n и p, соответствует схеме n независимых испытаний Бернулли с вероятностью "успеха" p. При этом имеется ввиду, что распределение ξ совпадает с распределением случайной величины, равной количеству "успехов" в схеме Бернулли. Аналогично случайная величина η, имеющая биномиальное распределение с параметрами 1 и p, описывает одно испытание Бернулли. При этом предполагается, что $\eta = 1$ тогда и только тогда, когда в одном испытании произошел "успех".

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.9. *Случайная величина ξ имеет пуассоновское распределение или распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если*

$$\mathsf{P}(\xi = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},$$

где $k = 0, 1, \ldots$. Обозначение: $\xi \sim Pois(\lambda)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.10. *Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0, 1)$, если $\mathsf{P}(\xi = k) = (1 - p)p^k$, $k = 0, 1, \ldots$. Обозначение: $\xi \sim \mathcal{G}(p)$.*

ЗАДАЧА 7.23. Изобразить функции распределения, соответствующие вырожденному, классическому (для $n = 3$) и биномиальному (с параметрами 1 и p) распределениям.

РЕШЕНИЕ. На рисунках 7.7-7.9 изображены соответствующие функции распределения. □

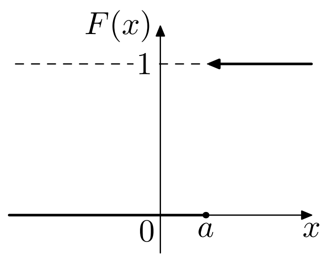

Рисунок 7.7

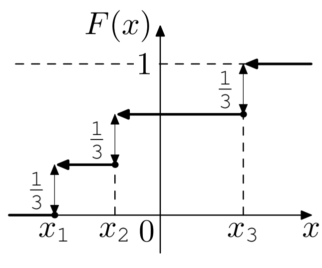

Рисунок 7.8

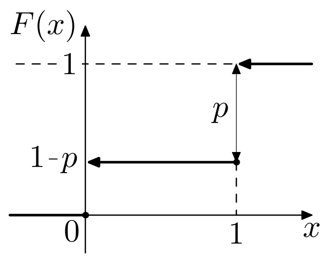

Рисунок 7.9

ЗАДАЧА 7.24. Изобразить графически частные значения вероятностей, соответствующие пуассоновскому и геометрическому распределениям.

РЕШЕНИЕ. На рисунках 7.10 и 7.11 изображены соответствующие графики. □

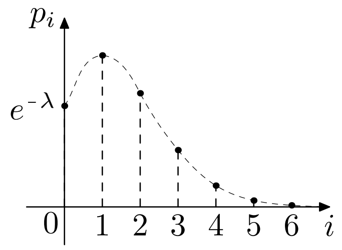

Рисунок 7.10

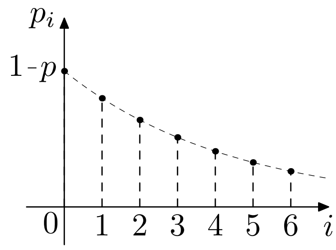

Рисунок 7.11

ЗАДАЧА 7.25. Распределение дискретной случайной величины ξ определяется формулами $\mathsf{P}(\xi = i) = 0.2$, $i = -2, -1, 0, 1, 2$. Найти распределения случайных величин $\eta = -\xi$ и $\zeta = |\xi|$.

РЕШЕНИЕ. Когда речь идет о дискретных случайных величинах, проще всего, согласно задаче 7.21, искать распределение через частные значения вероятностей $\mathsf{P}(\xi = x_i)$. Для случайной величины η имеем $\mathsf{P}(\eta = i) = \mathsf{P}(\xi = -i) = 0.2$, $i = -2, -1, 0, 1, 2$. Для случайной величины ζ имеем $\mathsf{P}(\zeta = i) = \mathsf{P}(\{\xi = i\} \cup \{\xi = -i\}) = 0.4$, $i = 1, 2$, и $\mathsf{P}(\zeta = 0) = \mathsf{P}(\xi = 0) = 0.2$. Здесь мы воспользовались аксиомой аддитивности вероятности и тем, что вероятности эквивалентных событий совпадают, то есть $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B)$, если $A = B$. □

ЗАДАЧА 7.26. Случайная величина ξ принимает значения 0 и 1, а случайная величина η — значения -1, 0 и 1. Вероятности $\mathsf{P}(\xi = i, \eta = j)$, $i = 0, 1$, $j = -1, 0, 1$, задаются следующей таблицей:

$\mathsf{P}(\cdot, \cdot)$	$\eta = -1$	$\eta = 0$	$\eta = 1$
$\xi = 0$	1/16	1/4	1/16
$\xi = 1$	1/16	1/4	5/16

Таблица 7.2

Найти распределение случайной величины $\zeta = \xi\eta$.

РЕШЕНИЕ. Дискретная случайная величина ζ принимает с ненулевыми вероятностями лишь значения -1, 0 и 1. Найдем частные значения вероятностей $\mathsf{P}(\zeta = k)$, $k = -1, 0, 1$. Имеем

$$\mathsf{P}(\zeta = -1) = \mathsf{P}(\eta = -1, \xi = 1) = \frac{1}{16},$$

$$\mathsf{P}(\zeta = 0) = \mathsf{P}(\{\eta = 0,\, \xi = 0\} \cup \{\eta = 0,\, \xi = 1\} \cup$$
$$\cup \{\eta = -1,\, \xi = 0\} \cup \{\eta = 1,\, \xi = 0\}) = \frac{5}{8},$$
$$\mathsf{P}(\zeta = 1) = \mathsf{P}(\eta = 1,\, \xi = 1) = \frac{5}{16}.$$

Здесь мы опять воспользовались аддитивностью вероятности. □

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

ЗАДАЧА 7.27. Пусть ξ и η — дискретные случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве. Доказать, что функции $\xi + \eta$, $\xi - \eta$, $\max\{\xi,\, \eta\}$, $\min\{\xi,\, \eta\}$, $\xi\eta$ и $|\xi|$ являются случайными величинами.

ЗАДАЧА 7.28. Случайная величина ξ принимает значения 0 и 1, а случайная величина η — значения -1, 0 и 1. Вероятности $\mathsf{P}(\xi = i,\, \eta = j)$, $i = 0,\, 1$, $j = -1,\, 0,\, 1$, задаются таблицей 7.2. Найти распределение случайной величины а) $\zeta_1 = \xi + \eta$; б) $\zeta_2 = \xi - \eta$.

ЗАДАЧА 7.29. Случайная величина ξ принимает значения 0 и 1, а случайная величина η — значения -1, 0 и 1. Вероятности $\mathsf{P}(\xi = i,\, \eta = j)$, $i = 0,\, 1$, $j = -1,\, 0,\, 1$, задаются таблицей 7.2. Найти распределения случайных величин ξ и η.

ЗАДАЧА 7.30. Найти совместное распределение $\mathsf{P}(\zeta_1 = i,\, \zeta_2 = j)$ случайных величин ζ_1 и ζ_2, определенных в задаче 7.28.

ЗАДАЧА 7.31. Изобразить графически частные значения вероятностей и функцию распределения, соответствующие распределению $Pois(1.5)$.

ЗАДАЧА 7.32. Изобразить графически частные значения вероятностей и функцию распределения, соответствующие распределению $Bi(3,\, 1/3)$.

ЗАДАЧА 7.33. Изобразить графически частные значения вероятностей и функцию распределения, соответствующие распределению $\mathcal{G}(1/3)$.

ЗАДАЧА 7.34. Распределение случайной величины ξ определяется формулами $\mathsf{P}(\xi = k) = C/[k(k+1)]$, $k = 1,\, 2,\, \ldots$. Найти а) постоянную C; б) $\mathsf{P}(\xi \le 3)$; в) $\mathsf{P}(n_1 \le \xi \le n_2)$, $n_1,\, n_2 \in \mathbb{N}$.

ЗАДАЧА 7.35. Распределение случайной величины ξ определяется формулами $\mathsf{P}(\xi = k) = C/[k(k+1)(k+2)]$, $k = 1,\, 2,\, \ldots$. Найти а) постоянную C; б) $\mathsf{P}(\xi \ge 3)$; в) $\mathsf{P}(n_1 \le \xi \le n_2)$, $n_1,\, n_2 \in \mathbb{N}$.

ЗАДАЧА 7.36. Случайная величина ξ принимает значения -1 и 1, а случайная величина η — значения -1, 0 и 1. Вероятности $\mathsf{P}(\xi = i,\, \eta = j)$, $i = -1,\, 1$, $j = -1,\, 0,\, 1$, задаются следующей таблицей:

$\mathsf{P}(\cdot,\cdot)$	$\eta=-1$	$\eta=0$	$\eta=1$
$\xi=-1$	1/8	1/12	7/24
$\xi=1$	5/24	1/6	1/8

Таблица 7.3

Найти распределения случайных величин ξ и η.

ЗАДАЧА 7.37. Случайная величина ξ принимает значения -1 и 1, а случайная величина η — значения -1, 0 и 1. Вероятности $\mathsf{P}(\xi=i, \eta=j)$, $i=-1, 1$, $j=-1, 0, 1$, задаются таблицей 7.3. Найти распределения случайных величин $\zeta_1=\xi+\eta$ и $\zeta_2=\xi\eta$.

ЗАДАЧА 7.38. Найти совместное распределение $\mathsf{P}(\zeta_1=i, \zeta_2=j)$ случайных величин ζ_1 и ζ_2, определенных в задаче 7.37.

ЗАДАЧА 7.39. Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$ описывают результаты $n+1$ испытаний Бернулли с вероятностью "успеха" p, и случайная величина η_n равна числу таких i ($i=1, \ldots, n$), что $\xi_i=\xi_{i+1}=1$. Найти распределение случайной величины η_n.

ЗАДАЧА 7.40. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, описывающих соответственно испытания с номерами 1, 2, … в схеме независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха 0.5. Найти распределение случайной величины

$$\eta=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{2^k}.$$

ЗАНЯТИЕ 9

Прежде, чем приступить к изложению понятия абсолютной непрерывности, которому посвящено данное занятие, скажем несколько слов о важном обобщении понятия интеграла, а именно, об интеграле Лебега.

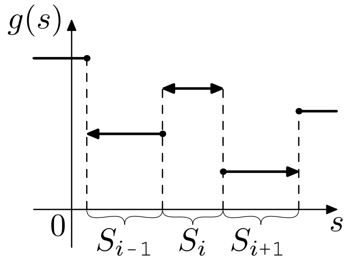

Рисунок 7.12

Пусть задано некоторое измеримое пространство $(S, \mathcal{H})$ и полная неотрицательная счетно аддитивная мера μ на нем. Мера называется *полной*, если все подмножества множества нулевой меры являются элементами $\mathcal{H}$. Мера μ, фактически, отличается от вероятностной меры P лишь отсутствием аксиомы нормированности. Пусть $\mu(S) < \infty$. Рассмотрим *простую функцию* $g : S \longrightarrow \mathbb{R}$, то есть функцию, принимающую не более счетного числа значений: $g(s) = y_n$, $y_n \neq y_k$ при $n \neq k$, если $s \in S_n$, где $S_n \in \mathcal{H}$, причем $\cup_{n=1}^{\infty} S_n = S$ (см. рис. 7.12). Фактически, функция g есть дискретная случайная величина на измеримом пространстве $(S, \mathcal{H})$. Говорят, что функция g является *суммируемой по Лебегу*, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu(S_n)$$

сходится *абсолютно*; сумма этого ряда называется *интегралом Лебега* и обозначается

$$\int\limits_S g\, d\mu \quad \text{или} \quad \int\limits_S g(s)\, \mu(ds). \tag{7.3}$$

Функция $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ называется *суммируемой по Лебегу* на S, если существует равномерно сходящаяся к f последовательность простых суммируемых функций g_n и предел

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_S g_n\, d\mu = I$$

конечен. Число I называется *интегралом Лебега* и обозначается аналогично (7.3). Более подробно об интеграле Лебега и его свойствах можно прочитать, например, в (Халмош 1953).

ЗАМЕЧАНИЕ 7.10. Не редко можно встретить определение простой функции как функции, принимающей конечное число значений. Интеграл

Лебега можно также определить при помощи конечнозначных простых функций, но нам в дальнейшем будет удобнее пользоваться именно вышеизложенным определением.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.11. Простая функция может иметь и более сложный вид, нежели показано на рисунке 7.12. Например, функция Дирихле, равная единице в рациональных и нулю в иррациональных точках, также является простой на измеримом пространстве $(S, \mathcal{H})$, где $S = \mathbb{R}$, а $\mathcal{H} = \{\mathbb{R},$ $\emptyset$, множество рациональных чисел, множество иррациональных чисел$\}$, а также на измеримом пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, причем ее интеграл по мере Лебега на всей прямой, очевидно, равен нулю.

Пусть задано некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.11. *Распределение P_ξ случайной величины ξ называется абсолютно непрерывным, если существует такая неотрицательная функция $f(x)$, что для любого борелевского множества B справедливо равенство*

$$\mathsf{P}_\xi(B) = \int\limits_B f(x)\,dx. \tag{7.4}$$

При этом функция $f(x)$ называется плотностью распределения случайной величины ξ.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.12 (основное свойство плотности). Если плотность $f(x)$ распределения существует, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.13. Поскольку при переопределении подынтегральной функции в одной точке значение интеграла в (7.4) не изменится, плотность распределения определена неоднозначно. Более того, плотность "безболезненно" можно переопределить на счетном множестве точек, а также на любом множестве точек лебеговой меры нуль, поскольку в данном случае римановский интеграл и интеграл Лебега по мере Лебега λ совпадают:

$$\int\limits_B f(x)\,dx = \int\limits_B f(x)\,\lambda(dx). \tag{7.5}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.14. Плотность распределения однозначно определяет распределение (что следует напрямую из определения 7.11), обратное неверно (что следует из замечания 7.13).

ЗАМЕЧАНИЕ 7.15. Из определения 7.4 следует, что соотношение (7.4) эквивалентно соотношению

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(u)\,du, \tag{7.6}$$

откуда следует, что в точках, в которых функция $F_\xi(x)$ дифференцируема, плотность можно искать по формуле

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \tag{7.7}$$

В остальных точках плотность можно положить равной любому неотрицательному числу.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.16. Из соотношения (7.6) следует, что функция распределения абсолютно непрерывного закона является непрерывной на $\mathbb{R}$.

ВОПРОС. Почему распределение, определенное в (7.4) и (7.6), называется *абсолютно* непрерывным?

ОТВЕТ. Во-первых, мера P называется *абсолютно непрерывной*, относительно меры λ, если $\mathsf{P}(B) = 0$ для любого множества B, для которого $\lambda(B) = 0$. Данное условие очевидно следует из (7.4) и (7.5), поскольку, если "длина" интервала B равняется нулю, то интеграл по этому интервалу тоже равен нулю.

Во-вторых, функция $F(x)$ называется *абсолютно непрерывной* на $\mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы попарно непересекающихся интервалов $(a_k,\, b_k) \subset \mathbb{R}$, $k = 1,\, \ldots,\, n$, для которой

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta,$$

справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon.$$

Можно показать, что абсолютно непрерывная на $\mathbb{R}$ функция имеет ограниченную вариацию и почти в каждой (относительно меры Лебега) точке конечную производную $F'(x)$, интегрируемую на $\mathbb{R}$, причем

$$F(x) = F(-\infty) + \int\limits_{-\infty}^{x} F'(u)\,du.$$

Заметим, что функция распределения, соответствующая абсолютно непрерывному закону, удовлетворяет перечисленным свойствам, что и объясняет само название закона.

ЗАДАЧА 7.41. Выписать плотность пуассоновского закона распределения.

РЕШЕНИЕ. Данная задача подразумевает два правильных ответа. С одной стороны, исходя из классического определения 7.11 плотности, можно сказать, что задача поставлена некорректно, поскольку плотность определена только для абсолютно непрерывных распределений, а распределение Пуассона является дискретным. С другой стороны, существует более общее определение плотности распределения, относительно доминирующей меры, которое дается в теореме Радона-Никодима (см., например, (Халмош 1953), стр. 128). *Доминирующей мерой* называется мера λ, относительно которой абсолютно непрерывна мера P (см. ответ на предыдущий вопрос). В соотношении (7.4) доминирующей мерой является мера Лебега. Если мы рассмотрим *считающую меру* μ, значение которой на каждом множестве равняется числу целых точек, попавших в данное множество, то функция $f(x)$, для которой

$$\mathsf{P}_\xi(B) = \int\limits_B f(x)\,\mu(dx),$$

будет иметь вид

$$f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

для всех целых неотрицательных точек x и $f(x) = 0$ в остальных точках.

Кроме того, из теоремы Радона-Никодима следует, что плотность определена однозначно с точностью до множества доминирующей меры нуль. Таким образом, множество, на котором не выполняется равенство (7.7), имеет меру Лебега нуль; функция распределения абсолютно непрерывного закона является дифференцируемой почти во всех (по мере Лебега) точках; плотность распределения можно считать по формуле (7.7), доопределяя ее в точках, где не существует производной $F'(x)$, любым образом, сохраняя ее неотрицательность. □

ВОПРОС. Почему в определении 7.11 требуется, чтобы плотность была неотрицательной?

ОТВЕТ. Конечно, если мы переопределим функцию $f(x)$ в (7.4) так, чтобы она принимала отрицательное значение в одной точке, то интеграл в (7.4) от этого не изменит своего значения. Математических предпосылок для неотрицательности плотности, по существу, нет. Однако, если мы вспомним, что вероятность — это такая же мера, как масса, то мы заметим, что плотность в определении 7.11 имеет смысл плотности, знакомой нам по школьным урокам физики. Действительно, если предположить, что в бесконечном стержне распределена единичная масса, причем в каждом сечении стержня плотность определяется функцией $f(x)$, то для подсчета массы части стержня длины B нам понадобится именно формула (7.4). Таким образом, неотрицательность плотности вызвана историческими и физическими предпосылками.

Теперь рассмотрим несколько наиболее часто встречающихся абсолютно непрерывных распределений. В нижеследующих определениях мы будем приводить плотность распределения (в классическом ее виде), характеризующую соответствующий закон. При этом, не составляет труда выписать функцию распределения, используя соотношение (7.6).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.12. *Случайная величина ξ имеет равномерное распределение с параметрами $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ или равномерно распределена на отрезке $[a, b]$, если соответствующая плотность распределения имеет вид*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } x \in [a, b]; \\ 0 & \text{при } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Обозначение: $\xi \sim R[a, b]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.17. Плотность и функция распределения, соответствующие равномерному закону, изображены на рисунках 7.13 и 7.14 соответственно.

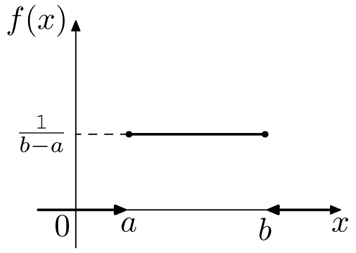

Рисунок 7.13

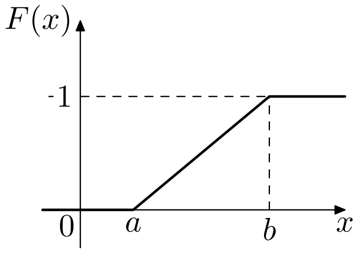

Рисунок 7.14

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.13. *Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a \in \mathbb{R}$ и $\sigma^2 > 0$, если соответствующая плотность распределения имеет вид*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Обозначение: $\xi \sim N(a, \sigma^2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.18. Плотность и функция распределения, соответствующие нормальному закону, изображены на рисунках 7.15 и 7.16 соответственно.

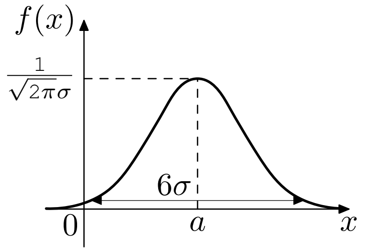

Рисунок 7.15

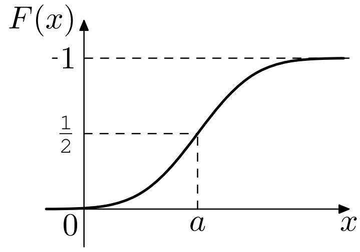

Рисунок 7.16

ЗАМЕЧАНИЕ 7.19. Нормальное распределение с параметрами 0 и 1 называют *стандартным нормальным распределением* и обозначают через $N(0,\,1)$. Функцию распределения стандартного нормального закона принято обозначать через $\Phi(x)$, а плотность — через $\varphi(x)$, соответствующие характеристики нормального закона с параметрами a и σ^2 обозначают через $\Phi_{a,\sigma^2}(x)$ и $\varphi_{a,\sigma^2}(x)$. При этом справедливо равенство

$$\Phi_{a,\sigma^2}(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \tag{7.8}$$

Значения функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

можно найти в таблицах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.14. *Случайная величина ξ имеет показательное или экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$, если соответствующая плотность распределения имеет вид*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \textit{при } x \geq 0; \\ 0 & \textit{при } x < 0. \end{cases}$$

Обозначение: $\xi \sim exp(\lambda)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.20. Плотность и функция распределения, соответствующие показательному закону, изображены на рисунках 7.17 и 7.18 соответственно.

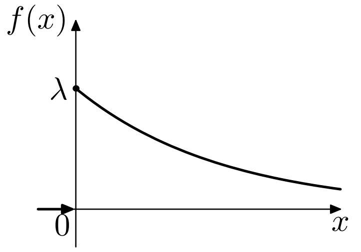

Рисунок 7.17

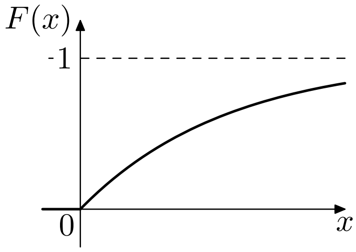

Рисунок 7.18

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.15. *Случайная величина ξ имеет распределение Коши с параметрами $a \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$, если*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sigma}{\sigma^2 + (x-a)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Обозначение: $\xi \sim K(a, \sigma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.21. Плотность и функция распределения, соответствующие закону Коши, изображены на рисунках 7.19 и 7.20 соответственно.

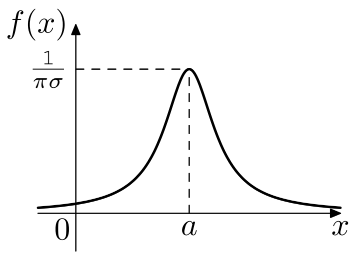

Рисунок 7.19

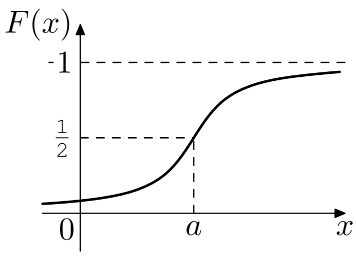

Рисунок 7.20

Заметим, что не всякое базовое пространство допускает возможность построить на нем случайную величину с заданным распределением.

ЗАДАЧА 7.42. Показать, что не на всяком вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$ можно построить случайную величину ξ с равномерным на отрезке $[0,\ 1]$ распределением.

РЕШЕНИЕ. Пусть $\Omega = [0,\ 1]$, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра, порожденная всеми одноточечными множествами отрезка $[0,\ 1]$, а P — вероятностная мера на $\mathcal{F}$. Поскольку $\mathsf{P}(\Omega) = 1$, для всех точек ω отрезка $[0,\ 1]$ имеем $\mathsf{P}\{\omega\} = 0$. Следовательно, вероятность P принимает на всех элементах $\mathcal{F}$ только значения 0 и 1. Однако, для любого интервала $B = (a,\ b)$, $0 < a < b < 1$, по определению 7.12 имеем

$$0 < \mathsf{P}_\xi(B) = b - a < 1.$$

Таким образом, на заданном вероятностном пространстве нельзя построить равномерное распределение. □

Существует три основных класса распределений. С двумя из них (дискретными и абсолютно непрерывными распределениями) мы уже познакомились. Теперь перейдем к рассмотрению третьего класса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.16. *Распределение* P_ξ *называется распределением сингулярного типа, если соответствующая функция распределения является непрерывной, но множество точек роста данной функции имеет меру Лебега нуль.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.17. *Точка* x *называется точкой роста функции* $F(x)$*, если для любого достаточно малого* $\varepsilon > 0$ *в некоторой окрестности (радиуса, большего, чем* ε*) точки* x *выполнено неравенство*

$$F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) > 0.$$

Функция распределения сингулярного типа обладает следующими свойствами:

1) $F_\xi(x)$ — непрерывная функция;

2) $dF(x)/dx = 0$ почти всюду (по мере Лебега);

3) $F(+\infty) - F(-\infty) = 1$.

ЗАДАЧА 7.43. Построить функцию распределения сингулярного типа.

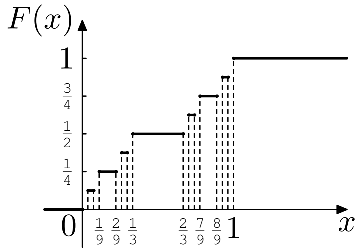

Рисунок 7.21

РЕШЕНИЕ. Пусть $F(x) = 0$ при $x < 0$ и $F(x) = 1$ при $x > 1$. Разобьем отрезок $[0,\,1]$ на три равные сегмента $[0,\,1/3]$, $[1/3,\,2/3]$ и $[2/3,\,1]$. Определим функцию $F(x)$ на отрезке $[1/3,\,2/3]$ равной $1/2$. С каждым из оставшихся отрезков проделаем аналогичную процедуру, определив $F(x) = 1/4$ при $x \in [1/9,\,2/9]$ и $F(x) = 3/4$ при $x \in [7/9,\ 8/9]$, и так далее. Данный процесс проиллюстрирован на рисунке 7.21. В точках множества

$$K = [0,\,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{n} \left[\frac{3k-2}{3^n},\ \frac{3k-1}{3^n}\right]$$

определим функцию по непрерывности.

Очевидно, что мера Лебега множества K равняется нулю. Можно показать, что множество K имеет мощность континуум (см., например, (Колмогоров и Фомин 1981), стр. 63). Таким образом, построенная функция (называемая *кривой Кантора* или *функцией Кантора*) удовлетворяет определению 7.16, а множество K (называемое *канторовым множеством*) является примером неконечного и несчетного множества, имеющего меру Лебега нуль. □

ВОПРОС. Почему основными классами распределений считаются именно дискретный, абсолютно непрерывный и сингулярный классы?

ОТВЕТ на этот вопрос дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7.3 (теорема Лебега). *Любая функция распределения $F(x)$ может быть представлена в виде*

$$F(x) = p_1F_1(x) + p_2F_2(x) + p_3F_3(x),$$

где $p_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, $p_1+p_2+p_3 = 1$, а функции $F_i(x)$ являются функциями распределения дискретного, абсолютно непрерывного и сингулярного законов соответственно. Если все числа p_i отличны от нуля, то это представление единственно.

ЗАДАЧА 7.44. Пусть точка $A = (u, v)$ равномерно распределена в квадрате $\Omega = \{(u, v) | u, v \in [0, 1]\}$ (здесь равномерное распределение определяется с помощью геометрической вероятности, см. замечание 2.1). Положим $\xi_1 = \xi_1(u, v) = u$,

$$\xi_2 = \xi_2(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{при } u \geq v; \\ -1 & \text{при } u < v. \end{cases}$$

Найти а) функцию распределения и плотность случайной величины ξ_1; б) функцию распределения и частные значения вероятности для случайной величины ξ_2.

РЕШЕНИЕ. Пусть $x > 1$, тогда

$$\mathsf{P}(\xi_1 < x) = \mathsf{P}\{(u, v) | u < x, (u, v) \in \Omega\} = \mathsf{P}(\Omega) = 1.$$

Пусть $x \leq 0$, тогда

$$\mathsf{P}(\xi_1 < x) = \mathsf{P}\{(u, v) | u < x, (u, v) \in \Omega\} = \mathsf{P}(\emptyset) = 0.$$

Если $0 < x \leq 1$, то событие

$$A(x) = \{(u, v) | u < x, (u, v) \in \Omega\}$$

образует прямоугольник со сторонами, равными 1 и x (см. рисунок 7.22). По определению геометрической вероятности имеем

$$\mathsf{P}(\xi_1 < x) = \frac{mes\, A(x)}{mes\, \Omega} = x.$$

Заметим, что полученная функция распределения совпадает с функцией распределения равномерного закона с параметрами 0 и 1 (см. рисунок 7.14). Воспользовавшись определением 7.12 или продифференцировав уже полученную функцию распределения, получаем выражение для плотности ξ_1:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0,\, 1]; \\ 0 & \text{при } x \notin [0,\, 1]. \end{cases}$$

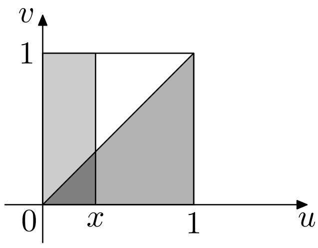

Рисунок 7.22

Аналогично получаем функцию распределения случайной величины ξ_2:

$$\mathsf{P}(\xi_2 < x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -1; \\ 1/2 & \text{при } -1 < x \le 1; \\ 1 & \text{при } x > 1, \end{cases}$$

поскольку $\{\xi_2 < x\} = \{\xi_2 = -1\} = \{(u,\, v)|\ u < v,\, (u,\, v) \in \Omega\}$ при $-1 < x \le 1$ (см. рисунок 7.22). Напомним, что функция распределения дискретного закона имеет скачки в точках, соответствующих частным значениям случайной величины, а величины скачков равняются частным значениям вероятности, откуда получаем, что $\mathsf{P}(\xi_2 = -1) = \mathsf{P}(\xi_2 = 1) = 1/2$. Распределение случайной величины ξ_2 называется *симметричным биномиальным распределением.*

В случае, когда дискретная случайная величина принимает "обозримое" число значений, ее распределение принято записывать с помощью ряда распределения в столбец. Так, например, распределение симметричной биномиальной случайной величины записывается следующим образом:

$$\xi_2 = \begin{cases} -1, & 1/2; \\ 1, & 1/2. \ \square \end{cases}$$

ЗАДАЧА 7.45. Найти распределение случайной величины $\eta = \xi_1^2$, где случайная величина ξ_1 определена в задаче 7.44.

РЕШЕНИЕ. Очевидно, что функция распределения случайной величины η принимает значения 0 и 1 на интервалах $(-\infty,\, 0]$ и $(1,\, +\infty)$ соответственно. Найдем $\mathsf{P}(\eta < x)$ при $0 < x \le 1$. Имеем

$$\mathsf{P}(\eta < x) = \mathsf{P}(\xi_1^2 < x) = \mathsf{P}(-\sqrt{x} < \xi_1 < \sqrt{x}) = \mathsf{P}(\xi_1 < \sqrt{x}) = \sqrt{x}.$$

Поскольку функция распределения взаимно однозначно определяет закон распределения, мы ответили на поставленный вопрос. $\square$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

ЗАДАЧА 7.46. Доказать равенство (7.8).

ЗАДАЧА 7.47. Пусть ξ имеет нормальную функцию распределения $\Phi_{a,\sigma^2}(x)$. Найти распределение случайной величины $\Phi_{a,\sigma^2}(\xi)$.

ЗАДАЧА 7.48. Выписать в явном виде функции распределения равномерного и экспоненциального законов.

ЗАДАЧА 7.49. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром 1. Найти распределение случайной величины $e^{-\xi}$.

ЗАДАЧА 7.50. Случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение. Найти распределение случайных величин ξ^2 и $\operatorname{sign}\xi$.

ЗАДАЧА 7.51. Случайная величина ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром 1. Найти распределение случайной величины $\eta = [\xi]^2$, где $[x]$ — целая часть числа x.

ЗАДАЧА 7.52. Доказать, что если случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, то случайная величина $|\xi|$ также имеет абсолютно непрерывное распределение. Верно ли обратное утверждение?

ЗАДАЧА 7.53. Плотность распределения для некоторого $k > 0$ задается формулой

$$f(x) = \begin{cases} ax^2e^{-kx} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Найти коэффициент a и соответствующую функцию распределения.

ЗАДАЧА 7.54. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром λ. Найти плотности распределения случайных величин $\sqrt{\xi}$ и ξ^2.

ЗАДАЧА 7.55. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром λ. Найти плотности распределения случайных величин $1 - \exp\{-\lambda\xi\}$ и $\lambda^{-1}\ln\xi$.

ЗАДАЧА 7.56. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найти плотности распределений случайных величин $2\xi + 1$ и $-\ln(1 - \xi)$.

ЗАДАЧА 7.57. Случайная величина ξ имеет распределение Коши с параметрами 0 и 1. Найти плотности распределения случайных величин $\xi^2/(1+\xi^2)$ и $1/(1+\xi^2)$.

ЗАДАЧА 7.58. Случайная величина ξ имеет распределение Коши с параметрами 0 и 1. Найти плотности распределения случайных величин $2\xi/(1-\xi^2)$ и $1/\xi$.

ЗАДАЧА 7.59. Плотность распределения для некоторого $C > 0$ задается формулой

$$f(x) = \begin{cases} C/x^4 & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \leq 1. \end{cases}$$

Найти коэффициент C и соответствующую функцию распределения.

ЗАДАЧА 7.60. Плотность распределения случайной величины ξ определена в задаче 7.59. Найти плотность случайной величины $1/\xi$.

§ 8. Математическое ожидание, дисперсия и моменты случайных величин

ЗАНЯТИЕ 10

Пусть задано некоторое вероятностное пространство $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$ и случайная величина ξ на нем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. *Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число*

$$\mathsf{E}\xi = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega). \tag{8.1}$$

Если интеграл (8.1) расходится, то говорят, что математического ожидания не существует.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. Математическое ожидание, если оно существует, определено однозначно ввиду условия абсолютной сходимости в определении интеграла Лебега (см. § 7).

Нахождение математического ожидания случайной величины при помощи интеграла Лебега не всегда является достаточно удобным. Для того, чтобы дать более удобное с аналитической точки зрения определение математического ожидания, эквивалентное (8.1), нам потребуется определить еще одно обобщение интеграла Римана.

Пусть функции $f(x)$ и $u(x)$ определены и ограничены на $[a,\,b]$ и $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Сумму вида

$$\sigma = f(y_1)[u(x_1) - u(x_0)] + \ldots + f(y_n)[u(x_n) - u(x_{n-1})],$$

где $x_{i-1} \le y_i \le x_i$, $i = 1, \ldots, n$, называют *интегральной суммой Стилтьеса.* Если существует конечный предел при $\max_i\{x_i - x_{i-1}\} \to 0$ интегральных сумм σ, равный числу I, то I называется *интегралом Стилтьеса* от функции $f(x)$ по функции $u(x)$ и обозначается

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,du(x).$$

При этом говорят, что *функция $f(x)$ интегрируема по функции $u(x)$* на отрезке $[a, b]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.2. *Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число*

$$\mathsf{E}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dF_\xi(x), \tag{8.2}$$

где $F_\xi(x)$ — функция распределения случайной величины ξ. Если интеграл (8.2) расходится, то говорят, что математического ожидания не существует.

Использование определения 8.2 для нахождения математического ожидания является в большинстве случаев более удобным, нежели использование определение 8.1 математического ожидания через интеграл Лебега. Определения 8.1 и 8.2 являются эквивалентными.

Как известно, римановский интеграл имеет смысл площади под кривой, являющейся графиком подынтегральной функции. Такой же очевидный геометрический смысл имеет интеграл, стоящий в правой части соотношения (8.2). Действительно, построим интегральную сумму для интеграла (8.2). Имеем

$$\sigma = y_1[u(x_1) - u(x_0)] + \ldots + y_n[u(x_n) - u(x_{n-1})],$$

где $x_{i-1} \le y_i \le x_i$, $i = 1, \ldots, n$. На рисунке 8.1 изображена сумма σ для некоторой функции распределения. При переходе к пределу при $\max_i\{x_i - x_{i-1}\} \to 0$, учитывая, что при отрицательных x слагаемые $y_i[u(x_i) - u(x_{i-1})]$ являются отрицательными, получаем, что $\mathsf{E}\xi = S_1 - S_2$, где S_1 есть площадь между графиками функций $y = 1$ и $y = F_\xi(x)$ при $x \ge 0$, а S_2 — площадь под графиком функции $y = F_\xi(x)$ при $x < 0$ (см. рис. 8.2). Таким образом, интеграл Стилтьеса (8.2) связан с интегралом Римана соотношением

$$\int x\,dF_\xi(x) = -\int\limits_{-\infty}^{0} F_\xi(x)\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} (1 - F_\xi(x))\,dx. \tag{8.3}$$

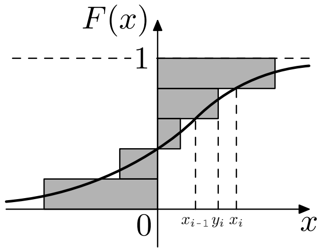

Рисунок 8.1

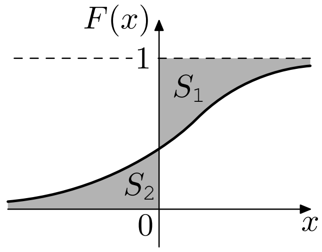

Рисунок 8.2

ЗАМЕЧАНИЕ 8.2. В левой части соотношения (8.3) мы не указали пределы интегрирования. Такая ситуация является обычной для литературы по теории вероятностей. Если пределы интегрирования не указываются, то это означает, что речь идет не о неопределенном интеграле, а об интеграле по всей области возможных значений подынтегрального параметра. В данном случае записи

$$\int x\,dF_\xi(x) \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dF_\xi(x)$$

являются эквивалентными.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.3. Математическое ожидание является характеристикой распределения случайной величины, а не самой случайной величины, то есть $\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\eta$, если $\xi \stackrel{d}{=} \eta$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.4. Если $\mathsf{E}\xi$ существует, и случайная величина ξ имеет дискретное распределение и принимает значения x_1, x_2, ... с вероятностями p_1, p_2, ... соответственно, то

$$\mathsf{E}\xi = \sum_i x_i p_i. \tag{8.4}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.5. Если $\mathsf{E}\xi$ существует, и случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f(x)$, то

$$\mathsf{E}\xi = \int x f(x)\,dx. \tag{8.5}$$

Мы рассмотрели геометрический смысл математического ожидания. Перейдем теперь к рассмотрению его физического смысла. Как известно из школьного курса физики, координата центра масс системы, состоящей из n точек на прямой, имеет вид

$$x_{\text{ц.м.}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \tag{8.6}$$

где x_i суть координаты точек, в которых сосредоточены массы m_i соответственно. Если же требуется найти координату центра масс бесконечного тонкого стержня, плотность в котором определяется функцией $m(x)$, то в этом случае используется формула

$$x_{\text{ц.м.}} = \frac{\int x m(x)\, dx}{\int m(x)\, dx}. \tag{8.7}$$

Вспомним теперь, что вероятность является такой же мерой, как и масса, с той лишь разницей, что масса-вероятность всей системы точек (или всего стержня) равняется единице. При этом условии знаменатели обеих дробей в (8.6) и (8.7) становятся равными единице. Если теперь сравнить соотношения (8.4) и (8.5) с соотношениями (8.6) и (8.7) соответственно, то становится ясно, что математическое ожидание есть не что иное, как координата центра масс системы, в которой единичная масса распределена в соответствии с законом распределения вероятностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.3. *Борелевской функцией называется действительная функция* $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, *обладающая свойством измеримости относительно борелевской* σ*-алгебры* $\mathcal{B}_n$*:*

$$g^{-1}(B) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n |\, g(x) \in B\} \in \mathcal{B}_n$$

для любого $B \in \mathcal{B}$*.*

ЗАМЕЧАНИЕ 8.6. Борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}_n$ есть σ-алгебра, порожденная всеми открытыми множествами пространства $\mathbb{R}^n$. Можно показать, что данная σ-алгебра является наименьшей σ-алгеброй, содержащей все множества вида $B_1 \times \ldots \times B_n$, где $B_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, \ldots, n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.7. Борелевская функция является случайной величиной на измеримом пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$.

ТЕОРЕМА 8.1. *Пусть* ξ *есть некоторая случайная величина, а* $g(x)$ *— борелевская функция. Тогда*

$$\mathsf{E} g(\xi) \equiv \int x\, dF_{g(\xi)}(x) = \int g(x)\, dF_\xi(x).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.4. *Условной функцией распределения случайной величины* ξ *при условии, что произошло событие* B *(*$\mathsf{P}(B) > 0$*), называется функция действительного аргумента* x

$$F(x|\, B) = \mathsf{P}(\xi < x|\, B).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.5. *Условным математическим ожиданием случайной величины ξ при условии, что произошло событие B ($\mathsf{P}(B) > 0$), называется число*

$$\mathsf{E}(\xi|\, B) = \int x\, dF(x|\, B),$$

где $F(x|\, B)$ есть условная функция распределения случайной величины ξ.

Пусть $B_1, \ldots, B_n$ — полная группа событий и $F(x|\, B_1), \ldots, F(x|\, B_n)$ — соответствующие этим событиям условные функции распределения случайной величины ξ. Тогда по формуле полной вероятности для функции распределения $F(x)$ случайной величины ξ справедливо представление

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(B_i) F(x|\, B_i).$$

Из последнего равенства и определения 8.5 вытекает следующее представление математического ожидания случайной величины ξ:

$$\mathsf{E}\xi = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(B_i)\mathsf{E}(\xi|\, B_i). \tag{8.8}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.8. Равенство (8.8) называется *аналогом формулы полной вероятности для математического ожидания.* Эта формула остается справедливой и в случае, когда рассматриваемая совокупность событий B_i является бесконечной, при этом верхний предел суммирования n заменяется на ∞.

Сейчас мы дадим определение так называемых независимых случайных величин. Более подробно о независимых случайных величинах речь пойдет в §§ 10-12. Данное определение требуется нам для формулирования нескольких важных свойств математических ожиданий и дисперсий случайных величин.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.6. *Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются независимыми, если для любых $B_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, \ldots, n$,*

$$\mathsf{P}(\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_n \in B_n) = \mathsf{P}(\xi_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}(\xi_n \in B_n).$$

Математическое ожидание случайной величины обладает следующими основными свойствами:

1) $\mathsf{E}(a + b\xi) = a + b\mathsf{E}\xi$, где $a, b \in \mathbb{R}$;

2) $\mathsf{E}(\xi + \eta) = \mathsf{E}\xi + \mathsf{E}\eta$, если существуют любые два из участвующих в равенстве математических ожиданий;

3) если $\mathsf{P}(a \le \xi \le b) = 1$, то $a \le \mathsf{E}\xi \le b$, $a, b \in \mathbb{R}$;

4) $|\mathsf{E}\xi| \le \mathsf{E}|\xi|$;

5) если $\mathsf{P}(\xi \le \eta) = 1$, то $\mathsf{E}\xi \le \mathsf{E}\eta$;

6) если $\xi \ge 0$ и $\mathsf{E}\xi = 0$, то $\xi \overset{п.н.}{=} 0$;

7) $\mathsf{P}(A) = \mathsf{E}\mathbb{I}_\omega(A)$, где $\mathbb{I}_\omega(A) = 1$, если $\omega \in A$, и $\mathbb{I}_\omega(A) = 0$, если $\omega \notin A$;

8) пусть $g(x, y)$, $g_1(x)$, $g_2(y)$ суть борелевские функции такие, что $g(x, y) = g_1(x)g_2(y)$; если $\mathsf{P}(g_1(\xi) \ge 0) = 1$, $\mathsf{P}(g_2(\eta) \ge 0) = 1$ или если $\mathsf{E}g_1(\xi)$, $\mathsf{E}g_2(\eta)$ существуют, то $\mathsf{E}g(\xi, \eta) = \mathsf{E}g_1(\xi)\mathsf{E}g_2(\eta)$, причем для существования $\mathsf{E}g(\xi, \eta)$ необходимо и достаточно существование $\mathsf{E}g_1(\xi)$ и $\mathsf{E}g_2(\eta)$;

9) если ξ и η суть независимые случайные величины, то $\mathsf{E}\xi\eta = \mathsf{E}\xi\mathsf{E}\eta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.7. *Функция $\mathbb{I}_\omega(A)$ из свойства 7 математического ожидания называется индикаторной функцией или индикатором события A.*

ЗАДАЧА 8.1. Найти математические ожидания случайных величин ξ_2 и η, определенных в задачах 7.44 и 7.45 соответственно.

РЕШЕНИЕ. Распределения случайных величин ξ_2 и η были найдены при решении задач 7.44 и 7.45. Для решения поставленной задачи воспользуемся формулами (8.4) и (8.5). Имеем

$$\mathsf{E}\xi_2 = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Для того, чтобы найти математическое ожидание случайной величины η, требуется найти плотность $f_\eta(x)$. Продифференцировав функцию распределения $F_\eta(x)$, получаем $f_\eta(x) = 1/(2\sqrt{x})$ при $x \in [0, 1]$ и $f_\eta(x) = 0$ при $x \notin [0, 1]$. Таким образом,

$$\mathsf{E}\eta = \int\limits_0^1 x \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{3}. \ \square$$

ЗАДАЧА 8.2. Найти математическое ожидание случайной величины $\xi_2 + \eta$, где ξ_2 и η определенны в задачах 7.44 и 7.45 соответственно.

РЕШЕНИЕ. Для того, чтобы решить эту задачу, можно найти распределение суммы случайных величин ξ_2 и η. О методе нахождения распределения суммы независимых случайных величин мы поговорим в § 10. Подобного рода задачи в общем случае являются достаточно трудоемкими.

Но для решения этой задачи нам достаточно воспользоваться свойством 2 математического ожидания. Имеем $\mathsf{E}(\xi_2+\eta) = \mathsf{E}\xi_2 + \mathsf{E}\eta = 1/3$. □

ЗАДАЧА 8.3. Каждый студент группы, состоящей из 24 человек, перед очередным семинаром по теории вероятностей независимо от своих коллег делает домашнее задание с вероятностью 0.4, если стоит хорошая погода, и с вероятностью 0.8, если идет дождь или снег. Сколько в среднем студентов готовы к очередному семинару, если в семестре ненастных дней в среднем в два раза больше, чем погожих?

РЕШЕНИЕ. Обозначим через ξ количество студентов, готовых к занятиям, через A и B события, заключающиеся в том, что перед семинаром стояла хорошая погода и ненастная погода соответственно. По условию задачи $\mathsf{P}(B) = 2\mathsf{P}(A) = 2/3$. Поскольку студенты готовятся к занятиям независимо друг от друга, можно считать, что мы имеем дело со схемой Бернулли, в которой "успехом" является событие $\{$студент будет готов к семинару$\}$. Обозначим через ξ_n, $n = 1, \ldots, 24$, биномиальную случайную величину, соответствующую n-му испытанию Бернулли. Заметим, что

$$\xi = \sum_{n=1}^{24} \xi_n.$$

Найдем математическое ожидание ξ_n. По формуле (8.8), поскольку события A и B образуют полную группу, имеем

$$\mathsf{E}\xi_n = \mathsf{P}(A)\mathsf{E}(\xi_n|\, A) + \mathsf{P}(B)\mathsf{E}(\xi_n|\, B).$$

Если произошло событие A, то случайная величина ξ_n имеет биномиальное распределение с параметрами 1 и 0.4, а если произошло событие B, то вероятность "успеха" равняется 0.8. Следовательно,

$$\mathsf{E}\xi_n = \frac{1}{3}(0\cdot 0.6 + 1\cdot 0.4) + \frac{2}{3}(0\cdot 0.2 + 1\cdot 0.8) = \frac{2}{3}.$$

Для нахождения $\mathsf{E}\xi$ воспользуемся свойством 2 математического ожидания. Ответ: 16 студентов. □

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

ЗАДАЧА 8.4. Пользуясь определением математического ожидания, показать справедливость замечаний 8.4 и 8.5.

ЗАДАЧА 8.5. Доказать свойства 1-7 математического ожидания.

ЗАДАЧА 8.6. Пусть ξ — неотрицательная целочисленная случайная величина с конечным математическим ожиданием. Доказать, что

$$\mathsf{E}\xi = \mathsf{P}(\xi \ge 1) + \mathsf{P}(\xi \ge 2) + \ldots + \mathsf{P}(\xi \ge n) + \ldots.$$

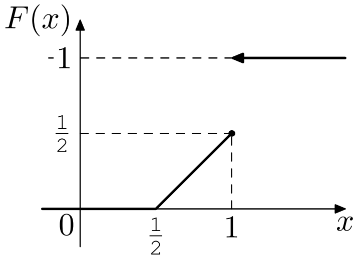

Рисунок 8.3

ЗАДАЧА 8.7. Найти математическое ожидание случайной величины, имеющей функцию распределения, изображенную на рисунке 8.3.

ЗАДАЧА 8.8. Пусть ξ и η — одинаково распределенные случайные величины. Верно ли, что $\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\eta$, $\mathsf{E}\xi/\eta = \mathsf{E}\eta/\xi$, $\mathsf{E}\xi/(\xi+\eta) = \mathsf{E}\eta/(\xi+\eta)$, $\mathsf{E}1/\xi = \mathsf{E}1/\eta$?

ЗАДАЧА 8.9. Пусть ξ и η — дискретные случайные величины. Доказать, что если существуют $\mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{E}\eta$, то существует $\mathsf{E}\max\{\xi, \eta\}$.

ЗАДАЧА 8.10. Пусть $\mathsf{E}\xi = 0$ и $\mathsf{E}|\xi| = 1$. Найти $\mathsf{E}\max\{0, \xi\}$ и $\mathsf{E}\min\{0, \xi\}$.

ЗАДАЧА 8.11. Написаны n писем, предназначенных разным адресатам. Имеется n конвертов с соответствующими адресами. Письма в случайном порядке вложены в конверты. Пусть ξ_n — число писем, которые посланы тем адресатам, которым они предназначены. Найти $\mathsf{E}\xi_n$.

ЗАДАЧА 8.12. Пусть ξ — *неотрицательная* случайная величина, то есть такая случайная величина, что $\mathsf{P}(\xi \geq 0) = 1$. Пусть $F(x)$ — ее функция распределения, и $\mathsf{E}\xi$ существует. Доказать, что $\mathsf{E}\xi = \int_0^{+\infty}(1-F(x))\,dx$.

ЗАДАЧА 8.13. Пусть ξ — случайная величина с симметричным (см. замечание 10.6) относительно нуля распределением. Доказать, что для любого вещественного a имеет место неравенство $\mathsf{E}|\xi + a| \geq \mathsf{E}|\xi|$.

ЗАДАЧА 8.14. Пусть ξ — случайная величина с конечным математическим ожиданием. Доказать, что для любого x выполняется неравенство $\max\{x, \mathsf{E}\xi\} \leq \mathsf{E}\max\{x, \xi\}$.

ЗАДАЧА 8.15. Пусть ξ имеет плотность, заданную в задаче 7.59. Найти $\mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{E}(1/\xi)$.

ЗАДАЧА 8.16. Найти математическое ожидание случайной величины ξ, распределение которой определено в задаче 7.35.

ЗАДАЧА 8.17. Найти математические ожидания случайных величин η и ζ, определенных в задаче 7.25.

ЗАДАЧА 8.18. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0, 2\pi]$; $\eta_1 = \cos\xi$; $\eta_2 = \sin\xi$. Найти $\mathsf{E}\xi$, $\mathsf{E}\eta_1$ и $\mathsf{E}\eta_2$. Являются ли η_1 и η_2 независимыми?

ЗАДАЧА 8.19. Пусть $\xi \sim K(0, 1)$. Показать, что $\mathsf{E}\xi$ не существует.

ЗАДАЧА 8.20. Придумать пример дискретного распределения случайной величины ξ такого, что сумма, стоящая в правой части (8.4) конечна, но $\mathsf{E}\xi$ не существует.

ЗАНЯТИЕ 11

Пусть задано некоторое вероятностное пространство $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$ и случайная величина ξ на нем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.8. *Дисперсией случайной величины ξ называется число*

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi)^2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.9. Дисперсия есть среднее квадратическое уклонение значений случайной величины от ее математического ожидания. Таким образом, дисперсия есть "мера разброса" распределения случайной величины.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.10. Дисперсию также можно определить как

$$\min_a \mathsf{E}(\xi - a)^2,$$

причем данный минимум достигается при $a = \mathsf{E}\xi$. Таким образом, число $\mathsf{E}\xi$ есть наилучшая оценка в среднеквадратичном случайной величины ξ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.9. *Величина $\sqrt{\mathsf{D}\xi}$ называется стандартным уклонением.*

Дисперсии случайных величин обладают следующими основными свойствами:

1) $\mathsf{D}\xi = \mathsf{E}\xi^2 - (\mathsf{E}\xi)^2$;

2) $\mathsf{D}\xi \geq 0$, причем $\mathsf{D}\xi = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi \overset{п.н.}{=} const$;

3) $\mathsf{D}(a + b\xi) = b^2\mathsf{D}\xi$, где $a,\ b \in \mathbb{R}$;

4) если ξ и η суть независимые случайные величины, то $\mathsf{D}(\xi + \eta) = \mathsf{D}\xi + \mathsf{D}\eta$.

ЗАДАЧА 8.21. Доказать свойство 4 дисперсии.

РЕШЕНИЕ. Действительно,

$$\mathsf{D}(\xi + \eta) = \mathsf{E}(\xi + \eta)^2 - (\mathsf{E}\xi + \mathsf{E}\eta)^2 =$$

$$= \mathsf{E}\xi^2 + 2\mathsf{E}\xi\eta + \mathsf{E}\eta^2 - (\mathsf{E}\xi)^2 - 2\mathsf{E}\xi\mathsf{E}\eta - (\mathsf{E}\eta)^2 =$$

$$= \mathsf{E}\xi^2 - (\mathsf{E}\xi)^2 + \mathsf{E}\eta^2 - (\mathsf{E}\eta)^2 = \mathsf{D}\xi + \mathsf{D}\eta.$$

Здесь мы воспользовались свойством 9 математического ожидания. Если же случайные величины не являются независимыми, мы получим

$$\mathsf{D}(\xi+\eta) = \mathsf{D}\xi + \mathsf{D}\eta + 2(\mathsf{E}\xi\eta - \mathsf{E}\xi\mathsf{E}\eta). \ \square$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.10. *Ковариацией случайных величин ξ и η называется число*

$$cov(\xi,\, \eta) = \mathsf{E}\xi\eta - \mathsf{E}\xi\mathsf{E}\eta = \mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi)(\eta - \mathsf{E}\eta).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.11. Ковариация также называется *центральным смешанным моментом* случайных величин ξ и η.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.11. *Коэффициентом корреляции двух невырожденных случайных величин, имеющих конечные дисперсии, называется число*

$$\rho(\xi,\, \eta) = \frac{cov(\xi,\, \eta)}{\sqrt{\mathsf{D}\xi}\sqrt{\mathsf{D}\eta}}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.12. *Случайные величины ξ и η называются некоррелированными, если $cov(\xi,\, \eta) = 0$ или $\rho(\xi,\, \eta) = 0$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 8.12. Из решения задачи 8.21. видно, что, во-первых, $\mathsf{D}(\xi+\eta) = \mathsf{D}\xi + \mathsf{D}\eta + 2\mathrm{cov}(\xi, \eta)$, и, во-вторых, ковариация (а следовательно, и коэффициент корреляции) двух независимых случайных величин всегда равняется нулю. В § 10 мы рассмотрим еще несколько свойств ковариации и коэффициента корреляции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.13. *Моментом порядка k случайной величины ξ называется число $\mathsf{E}\xi^k$. Центральным моментом порядка k случайной величины ξ называется число $\mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi)^k$. Абсолютным моментом порядка k случайной величины ξ называется число $\mathsf{E}|\xi|^k$. Центральным абсолютным моментом порядка k случайной величины ξ называется число $\mathsf{E}|\xi - \mathsf{E}\xi|^k$. Факториальным моментом порядка k случайной величины ξ называется число $\mathsf{E}\xi^{[k]} = \mathsf{E}\xi(\xi-1)\ldots(\xi-k+1)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 8.13. Уже из определения дисперсии видно, что ее не существует, если не существует математического ожидания. С другой стороны, если известно математическое ожидание, ничего о существовании дисперсии сказать нельзя. Данное правило распространяется на любые моменты случайных величин следующим образом. Если существует любой момент порядка r, то существует любой момент порядка $q \leq r$. Если существует момент порядка q, то это, вообще говоря, не означает, что существует момент порядка $r > q$.

В § 7 мы дали определения нескольких наиболее часто встречающихся распределений. В следующей таблице приводятся соответствующие этим распределениям математические ожидания и дисперсии.

P_ξ	$\mathsf{E}\xi$	$\mathsf{D}\xi$
$\xi \overset{п.н.}{=} a$	a	0
$Bi(n,\,p)$	np	$np(1-p)$
$Pois(\lambda)$	λ	λ
$\mathcal{G}(p)$	$\dfrac{p}{1-p}$	$\dfrac{p}{(1-p)^2}$
$R[a,\,b]$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(a-b)^2}{12}$
$N(a,\,\sigma^2)$	a	σ^2
$exp(\lambda)$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
$K(a,\,\sigma)$	$\infty-\infty$	—

Таблица 8.1

ЗАМЕЧАНИЕ 8.14. Самым примечательным в таблице 8.1 является отсутствие математического ожидания, а следовательно, и дисперсии, у распределения Коши. Это вызвано тем, что интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int \frac{\sigma x}{\sigma^2+(x-a)^2}\,dx$$

расходится. Таким образом, распределение Коши является одним из примеров распределений, для которых не существует моментов, начиная с первого.

В дальнейшем при решении задач мы часто будем использовать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 8.2 (неравенство Чебышéва). *Пусть случайная величина ξ имеет конечный второй момент. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

$$\mathsf{P}(|\xi-\mathsf{E}\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathsf{D}\xi}{\varepsilon^2}. \tag{8.9}$$

ЗАДАЧА 8.22. Найти дисперсии случайных величин ξ_2 и η, определенных в задачах 7.44 и 7.45 соответственно.

РЕШЕНИЕ. Решая задачу 8.1, мы нашли первые моменты случайных величин ξ_2 и η. Воспользуемся свойством 1 дисперсии для ее вычисления. Для нахождения второго момента случайной величины воспользуемся теоремой 8.1, положив $g(x) = x^2$. Случайная величина ξ_2 является вырожденной в единице. Следовательно, $\mathsf{D}\xi_2 = \mathsf{E}\xi_2^2 - (\mathsf{E}\xi_2)^2 = 1 - 0 = 1$. Вычисление дисперсии как разности второго момента и квадрата первого является в большинстве случаев удобным и для абсолютно непрерывных случайных величин. Имеем

$$\mathsf{D}\eta = \mathsf{E}\eta^2 - (\mathsf{E}\eta)^2 = \int\limits_0^1 x^2 \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx - \frac{1}{9} = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}. \ \square$$

ЗАДАЧА 8.23. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и одинаково распределены, причем $\mathsf{P}(\xi_1 = 1) = \mathsf{P}(\xi_1 = -1) = 1/4$, $\mathsf{P}(\xi_1 = 0) = 1/2$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

РЕШЕНИЕ. Найдем моменты случайной величины ξ_1. Имеем

$$\mathsf{E}\xi_1 = 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{4} = 0,$$

$$\mathsf{D}\xi_1 = \mathsf{E}\xi_1^2 = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

По свойству 2 математического ожидания, поскольку случайные величины ξ_i одинаково распределены,

$$\mathsf{E}S_n = \mathsf{E}\sum_{i=1}^n \xi_i = \sum_{i=1}^n \mathsf{E}\xi_i = n \cdot 0 = 0.$$

При переходе от дисперсии суммы к сумме дисперсий мы воспользуемся независимостью случайных величин ξ_i. По свойству 4 дисперсии получаем

$$\mathsf{D}S_n = \mathsf{D}\sum_{i=1}^n \xi_i = \sum_{i=1}^n \mathsf{D}\xi_i = n \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2}. \ \square$$

ЗАДАЧА 8.24. Случайные величины $\eta_1, \eta_2, \ldots$ независимы и имеют одинаковое $Bi(1, 1/2)$ распределение, а случайные величины ξ_i определяются равенствами $\xi_i = \eta_i - \eta_{i+2}$, $i = 1, 2, \ldots$. Показать, что случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ одинаково распределены, причем ξ_1 имеет такое же распределение, как и в задаче 8.23. Показать, что случайные величины ξ_i

и ξ_{i+j} независимы при $j \in \mathbb{N}$, $j \neq 2$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n \geq 2$.

РЕШЕНИЕ. Найдем $\mathsf{P}(\xi_1 = 1)$. Поскольку случайные величины η_i независимы, имеем

$$\mathsf{P}(\xi_1 = 1) = \mathsf{P}(\eta_1 - \eta_3 = 1) = \mathsf{P}(\eta_1 = 1,\, \eta_3 = 0) = \mathsf{P}(\eta_1 = 1)\mathsf{P}(\eta_3 = 0) = \frac{1}{4}.$$

Аналогично получаем $\mathsf{P}(\xi_1 = 0)$ и $\mathsf{P}(\xi_1 = -1)$.

Для проверки независимости дискретных случайных величин ζ_1 и ζ_2 достаточно показать, что $\mathsf{P}(\zeta_1 = x_1,\, \zeta_2 = x_2) = \mathsf{P}(\zeta_1 = x_1)\mathsf{P}(\zeta_2 = x_2)$ для всех x_1 и x_2. Это следует из рассуждений, аналогичных проведенным при решении задачи 7.21. В частности, для $j \neq 2$ имеем

$$\mathsf{P}(\xi_i = 1,\, \xi_{i+j} = -1) = \mathsf{P}(\eta_i = 1,\, \eta_{i+2} = 0,\, \eta_{i+j} = 0,\, \eta_{i+j+2} = -1) =$$

$$= \mathsf{P}(\eta_i = 1)\mathsf{P}(\eta_{i+2} = 0)\mathsf{P}(\eta_{i+j} = 0)\mathsf{P}(\eta_{i+j+2} = -1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= \mathsf{P}(\xi_i = 1)\mathsf{P}(\xi_{i+j} = -1).$$

Для остальных значений случайных величин ξ_i и ξ_{i+j} справедливы аналогичные равенства.

В решении задачи 8.23 мы показали, что $\mathsf{E}S_n = 0$. К сожалению, мы не можем воспользоваться свойством 4 дисперсии для нахождения $\mathsf{D}S_n$, поскольку, очевидно, случайные величины ξ_i и ξ_{i+2} не являются независимыми (это легко проверить, показав, например, что $\mathsf{P}(\xi_i = 1,\, \xi_{i+2} = 1) \neq \mathsf{P}(\xi_i = 1)\mathsf{P}(\xi_{i+2} = 1)$). Найдем $\mathsf{E}S_n^2 = \mathsf{D}S_n$. При этом будем учитывать, что случайные величины $\xi_i\xi_j$ суть ξ_i^2 при $i = j$ и равняются по распределению $\eta_1\eta_3 - \eta_3^2 - \eta_1\eta_5 + \eta_3\eta_5$ при $|i - j| = 2$. Имеем

$$\mathsf{E}S_n^2 = \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)^2 = \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \xi_j\right) =$$

$$= \mathsf{E}\left(\sum_{i,\,j:\, i=j} \xi_i\xi_j + \sum_{i,\,j:\,|i-j|=2} \xi_i\xi_j + \sum_{i,\,j:\,|i-j|\neq 0,\,2} \xi_i\xi_j\right) =$$

$$= n\mathsf{E}\xi_1^2 + 2(n-2)\mathsf{E}(\eta_1\eta_3 - \eta_3^2 - \eta_1\eta_5 + \eta_3\eta_5) + (n^2 - n - 2(n-2))\mathsf{E}\xi_1\mathsf{E}\xi_2 =$$

$$= n \cdot \frac{1}{2} + 2(n-2)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + (n^2 - 3n + 4) \cdot 0 = 1. \ \square$$

ЗАДАЧА 8.25. Пусть случайная величина η_n равна сумме очков, появившихся при n независимых бросаниях правильной игральной кости.

Используя неравенство Чебышева (8.9), оценить сверху для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\eta_n}{n} - 3.5\right| \geq \varepsilon\right).$$

РЕШЕНИЕ. Пусть ξ_i — количество очков, выпавшее при i-ом бросании. Воспользовавшись классическим определением вероятности, получаем, что при одном бросании игральной кости среднее число выпавших очков $\mathsf{E}\xi_i$ равняется 3.5. Поскольку

$$\mathsf{E}\frac{\eta_n}{n} = \mathsf{E}\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} = \frac{3.5n}{n} = 3.5,$$

и ввиду независимости случайных величин ξ_i, из которой следует

$$\mathsf{D}\frac{\eta_n}{n} = \mathsf{D}\frac{\sum_{i=1} \xi_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathsf{D}\xi_i}{n^2} = \frac{n(91/6 - (21/6)^2)}{n^2},$$

получаем

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\eta_n}{n} - 3.5\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{105}{36n\varepsilon^2}. \square$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

ЗАДАЧА 8.26. Показать справедливость замечания 8.10.

ЗАДАЧА 8.27. Доказать свойства 1-3 дисперсии.

ЗАДАЧА 8.28. Доказать результаты, приведенные в таблице 8.1.

ЗАДАЧА 8.29. Пусть ξ — случайная величина с конечной дисперсией такая, что $\mathsf{D}\xi \geq \mathsf{E}\xi^2$. Доказать, что $2\mathsf{E}|\xi| \leq \mathsf{D}\xi + 1$.

ЗАДАЧА 8.30. Пусть ξ — случайная величина такая, что $\mathsf{P}(0 < \xi < 1) = 1$. Доказать, что $\mathsf{D}\xi < \mathsf{E}\xi$.

ЗАДАЧА 8.31. Пусть ξ — почти наверное ограниченная случайная величина: $\mathsf{P}(|\xi| \leq c) = 1$. Доказать, что $\mathsf{D}\xi \leq c\mathsf{E}|\xi|$.

ЗАДАЧА 8.32. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi = \xi(\omega)$, определенной на вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$, где $\Omega = [0,\,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,\,1]}$, $\mathsf{P} = \lambda$ — мера Лебега, если а) $\xi = \omega^2$; б) $\xi = \omega - 1/2$; в) $\xi = \sin \pi\omega$; г) $\xi = \sin 2\pi\omega$.

ЗАДАЧА 8.33. Диаметр круга d измерен приближенно, и известно лишь, что $0 < a \leq d \leq b$. Считая d случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[a,\,b]$, найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

ЗАДАЧА 8.34. Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$ описывают результаты $n+1$ испытаний Бернулли с вероятностью "успеха" p и случайная величина η_n равна числу таких i ($i = 1, \ldots, n$), что $\xi_i = \xi_{i+1} = 1$. Используя неравенство Чебышева (8.9), оценить сверху $\mathsf{P}(|\eta_n/n - p^2| \geq \varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$.

ЗАДАЧА 8.35. Пусть ξ и η — независимые случайные величины с конечными дисперсиями. Доказать, что $\mathsf{D}\xi\eta \geq \mathsf{D}\xi \cdot \mathsf{D}\eta$.

ЗАДАЧА 8.36. Пусть ξ — случайная величина с конечным четвертым моментом. Сравнить $\mathsf{E}\xi^4$ и $(\mathsf{E}\xi)^4$.

ЗАДАЧА 8.37. Пусть случайные величины ξ и η независимы и $\mathsf{E}\xi = 1$, $\mathsf{E}\eta = 2$, $\mathsf{D}\xi = 1$ и $\mathsf{D}\eta = 4$. Найти математические ожидания случайных величин а) $\xi^2 + 2\eta^2 - \xi\eta - 4\xi + \eta + 4$; б) $(\xi + \eta + 1)^2$.

ЗАДАЧА 8.38. Доказать, что для любых случайных величин ξ и η, имеющих конечные дисперсии, справедливы неравенства

$$\left(\sqrt{\mathsf{D}\xi} - \sqrt{\mathsf{D}\eta}\right)^2 \leq \mathsf{D}(\xi + \eta) \leq \left(\sqrt{\mathsf{D}\xi} + \sqrt{\mathsf{D}\eta}\right)^2.$$

ЗАДАЧА 8.39. Доказать, что для любых случайных величин ξ и η, имеющих конечные вторые моменты, справедливо неравенство

$$\mathsf{E}|\xi\eta| \leq \sqrt{\mathsf{E}\xi^2} \cdot \sqrt{\mathsf{E}\eta^2}.$$

ЗАДАЧА 8.40. Показать, что для любой целочисленной случайной величины ξ, имеющей конечный второй момент, справедливо неравенство $\mathsf{E}\xi(1 - \mathsf{E}\xi) \leq \mathsf{D}\xi$.

§ 9. Характеристические и производящие функции

ЗАНЯТИЕ 12

Пусть задано некоторое вероятностное пространство $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$ и случайная величина ξ на нем. Наряду с вещественными случайными величинами также можно рассматривать комплекснозначные случайные величины, понимая под этим функцию $\xi_1(\omega) + i\xi_2(\omega)$, где $(\xi_1,\ \xi_2)$ — случайный вектор (подробнее о случайных векторах речь пойдет в § 10). При этом правила работы со случайными величинами остаются неизменными, а мнимая единица i рассматривается как обычная константа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. *Характеристической функцией случайной величины ξ называется комплекснозначная функция действительного переменного $\varphi_\xi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{C}$, определяемая для всех $t \in \mathbb{R}$ соотношением*

$$\varphi_\xi(t) = \mathsf{E}e^{it\xi} = \int e^{itx}\, dF_\xi(x). \tag{9.1}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1. Функция $\varphi_\xi(t)$, определяемая соотношением (9.1) называется также *преобразованием Фурье-Стилтьеса* функции $F_\xi(x)$. Если функция $F_\xi(x)$ имеет плотность $f_\xi(x)$, то характеристическая функция есть *преобразование Фурье* функции $f_\xi(x)$:

$$\varphi_\xi(t) = \int e^{itx} f_\xi(x)\, dx.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9.2. Характеристическая функция всегда существует, поскольку

$$|\varphi_\xi(t)| = \left|\int e^{itx}\, dF_\xi(x)\right| \le \int \left|e^{itx}\right|\, dF_\xi(x) = 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9.3. Из свойств комплексных чисел и определения 9.1 следует, что характеристическая функция также представима в виде

$$\varphi_\xi(t) = \mathsf{E}\cos(t\xi) + i\mathsf{E}\sin(t\xi). \tag{9.2}$$

Характеристическая функция обладает следующими основными свойствами:

1) для любой случайной величины ξ

$$\varphi_\xi(0) = 1 \quad \text{и} \quad |\varphi_\xi(t)| \le 1 \quad \text{для всех}\, t;$$

2) для любой случайной величины ξ и любых a, $b \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{itb}\varphi_\xi(at);$$

3) если ξ и η суть независимые случайные величины, то

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t);$$

4) характеристическая функция $\varphi_\xi(t)$ является равномерно непрерывной;

5) если $\mathsf{E}|\xi|^k < \infty$, $k \ge 1$, то существует непрерывная k-я производная функции $\varphi_\xi(t)$, причем

$$\varphi_\xi^{(k)}(t)\Big|_{t=0} = i^k\mathsf{E}\xi^k;$$

6) для комплексно сопряженной характеристической функции справедливо равенство

$$\overline{\varphi}_\xi(t) = \varphi_\xi(-t) = \varphi_{-\xi}(t).$$

ТЕОРЕМА 9.1 (теорема единственности). *Характеристическая функция случайной величины взаимно однозначно определяет ее распределение.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.2. *Производящей функцией последовательности действительных чисел* a_0, a_1, … *называется функция комплексного переменного* $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, *определенная для* $|z| \le 1$ *следующим образом:*

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.3. *Производящей функцией целочисленной случайной величины ξ, принимающей с положительными вероятностями лишь неотрицательные значения, называется функция комплексного переменного $\psi_\xi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, определенная для $|z| \le 1$ следующим образом:*

$$\psi_\xi(z) = \mathsf{E}\xi^z.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9.4. Для случайной величины, удовлетворяющей условиям определения 9.3 и принимающей значения 0, 1, ... с вероятностями p_0, p_1, ... соответственно, справедлива формула

$$\psi_\xi(z) = \mathsf{E}z^\xi = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n,$$

из которой следует, что производящая функция случайной величины есть не что иное, как производящая функция последовательности частных значений вероятности p_0, p_1, ... Именно по этой причине производящая функция определена лишь для целочисленных случайных величин.

Производящая функция обладает следующими основными свойствами:

1) $\psi_\xi(e^{it}) = \varphi_\xi(t)$;

2) если ξ и η суть независимые случайные величины, то справедливо равенство $\psi_{\xi+\eta}(t) = \psi_\xi(t)\psi_\eta(t)$;

3) если $\mathsf{E}|\xi|^k < \infty$, $k \ge 1$, то $\psi_\xi^{(k)}(z)\Big|_{z=1} = \mathsf{E}\xi^{[k]}$.

ТЕОРЕМА 9.2. *Производящая функция, если она существует, взаимно однозначно определяет распределение случайной величины.*

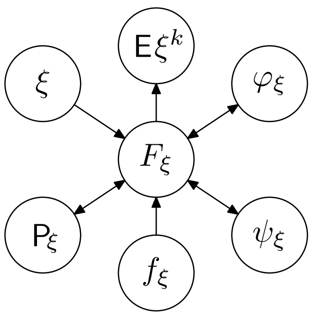

Рисунок 9.1

Итак, мы познакомились со всеми основными характеристиками случайных величин и их распределений. На рисунке 9.1 показана диаграмма импликаций для определенных нами характеристик случайных величин. Стрелки показывают, какие характеристики определяют другие однозначно, если существуют.

В следующей таблице приведены формулы для характеристических и производящих функций основных распределений.

P_ξ	$\varphi_\xi(t)$	$\psi_\xi(z)$
$\xi \overset{п.н.}{=} a$	e^{ita}	z^a
$Bi(n,\, p)$	$(1+p(e^{it}-1))^n$	$(1+p(z-1))^n$
$Pois(\lambda)$	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$	$e^{\lambda(z-1)}$
$\mathcal{G}(p)$	$\dfrac{1-p}{1-pe^{it}}$	$\dfrac{1-p}{1-pz}$
$R[a,\, b]$	$\dfrac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$	—
$R[-a,\, a]$	$\dfrac{\sin at}{at}$	—
$N(a,\, \sigma^2)$	$e^{ita-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$	—
$exp(\lambda)$	$\dfrac{\lambda}{\lambda-it}$	—
$K(a,\, \sigma)$	$e^{ita-b\lvert t\rvert}$	—

Таблица 9.1

ЗАМЕЧАНИЕ 9.5. Формально, производящая функция для вырожденной случайной величины не определена, если число a не является целым.

ЗАДАЧА 9.1. Доказать, что функция $\cos t$ является характеристической функцией некоторой случайной величины.

РЕШЕНИЕ. Построим распределение случайной величины такое, что его характеристической функцией является $\cos t$. Из соотношения (9.2) вытекает, что

$$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}\cdot e^{1\cdot it} + \frac{1}{2}\cdot e^{-1\cdot it}.$$

Заметим, что правая часть последнего равенства есть не что иное, как характеристическая функция симметричного биномиального распределения. □

ЗАДАЧА 9.2. Доказать, что функция $e^{-i|t|}$ не может быть характеристической функцией случайной величины.

РЕШЕНИЕ. Для доказательства утверждения задачи воспользуемся свойством 6 характеристической функции. Предположим, что $e^{-i|t|}$ есть характеристическая функция некоторой случайной величины ξ. Тогда

$$\varphi_{-\xi}(t) = \varphi_\xi(-t) = e^{-i|t|}, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

то есть распределения ξ и $-\xi$ совпадают (при этом говорят, что случайная величина ξ имеет *симметричное распределение*). Но тогда для комплексно сопряженной характеристической функции имеет место равенство

$$\overline{\varphi}_\xi(t) = \varphi_\xi(t).$$

Как известно, комплексно сопряженное число равно самому числу тогда и только тогда, когда комплексное число является действительным (это, в частности, следует из (9.2)). Следовательно, мы приходим к противоречию, поскольку функция $e^{-i|t|}$ не является действительной. □

ЗАДАЧА 9.3. Производящая функция некоторой целочисленной случайной величины ξ, принимающей с положительными вероятностями лишь неотрицательные значения, равна $\psi(z)$. Найти $\mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$.

РЕШЕНИЕ. Воспользуемся свойством 3 производящей функции. Имеем

$$\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\xi^{[1]} = \psi'(z)\Big|_{z=1},$$

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{E}\xi^2 - (\mathsf{E}\xi)^2 = \mathsf{E}\xi(\xi-1) + \mathsf{E}\xi - (\mathsf{E}\xi)^2 = \mathsf{E}\xi^{[2]} + \mathsf{E}\xi(1-\mathsf{E}\xi) =$$
$$= \psi^{(2)}(z)\Big|_{z=1} + \psi'(z)\Big|_{z=1}\left(1 - \psi'(z)\Big|_{z=1}\right). \ \square$$

ЗАДАЧА 9.4. Пусть $\xi \sim Pois(\lambda_1)$ и $\eta \sim Pois(\lambda_2)$ — независимые случайные величины. Найти распределение случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.

РЕШЕНИЕ. По теореме 9.1 достаточно найти вид характеристической функции $\varphi_\zeta(t)$. Найдем характеристическую функцию случайной величины ξ. По теореме 8.1 имеем

$$\varphi_\xi(t) = \mathsf{E}e^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!} = e^{-\lambda_1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda_1 e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda_1}e^{\lambda_1 e^{it}} = e^{\lambda_1(e^{it}-1)}.$$

По свойству 8 математического ожидания

$$\varphi_\zeta(t) = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}.$$

Заметим, что сумма независимых пуассоновских случайных величин имеет также пуассоновское распределение. □

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

ЗАДАЧА 9.5. Доказать результаты, приведенные в таблице 9.1.

ЗАДАЧА 9.6. Доказать, что функция $\psi(z) = |z|$ не может быть производящей функцией случайной величины.

ЗАДАЧА 9.7. Пусть ξ и η — случайные величины, причем ξ принимает значения 0 и 1 с вероятностями 1/2 каждое, а η — значения 0, 1, 2, 3 с вероятностями 1/8, 1/4, 1/2, 1/8 соответственно. Доказать, что не существует случайной величины ζ, не зависящей от ξ и такой, что $\xi + \zeta = \eta$.

ЗАДАЧА 9.8. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Доказать, что случайная величина $\xi^2 + \eta^2$ имеет показательное распределение с параметром 1/2.

ЗАДАЧА 9.9. Найти распределения которым соответствуют следующие характеристические функции: а) $\cos^2 t$; б) $\exp\{-t^2\}$.

ЗАДАЧА 9.10. Доказать основные свойства характеристической функции.

ЗАДАЧА 9.11. Доказать основные свойства производящей функции.

ЗАДАЧА 9.12. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причем $\xi + \eta$ принимает значения 0, 1 и 2 с вероятностями 1/3 каждое. Доказать, что одна из величин ξ или η имеет вырожденное распределение.

ЗАДАЧА 9.13. Найти распределения которым соответствуют следующие производящие функции: а) $(1+z)^2/4$; б) $p(1-(1-p)z)^{-1}$.

ЗАДАЧА 9.14. Доказать, что характеристическая функция четна тогда и только тогда, когда соответствующая функция распределения $F(x)$ удовлетворяет соотношению $F(x) = 1 - F(-x-0)$.

ЗАДАЧА 9.15. Доказать, что характеристическая функция вещественна тогда и только тогда, когда она четна.

ЗАДАЧА 9.16. Доказать, что четная характеристическая функция $\varphi(t)$ представима в виде

$$\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos tx \, dF(x),$$

где $F(x)$ — соответствующая функция распределения.

ЗАДАЧА 9.17. Пусть ξ и η — независимые одинаково распределенные случайные величины с характеристической функцией $\varphi(t)$. Найти характеристическую функцию случайной величины $\xi - \eta$.

ЗАДАЧА 9.18. Пусть $F(x)$ — функция распределения с характеристической функцией $\varphi(t)$. Доказать, что $\operatorname{Re}\varphi(t)$ является характеристической функцией, и найти соответствующую функцию распределения.

ЗАДАЧА 9.19. Пусть $F(x)$ — функция распределения с характеристической функцией $\varphi(t)$. Доказать, что $|\varphi(t)|^2$ является характеристической функцией, и найти соответствующую функцию распределения.

ЗАДАЧА 9.20. Пусть ξ и η — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие симметричное распределение, причем $\xi-\eta$ и $|\xi| - |\eta|$ одинаково распределены. Найти распределение ξ.

§ 10. Многомерные случайные величины

ЗАНЯТИЕ 13

Пусть задано некоторое вероятностное пространство $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$ и случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ на нем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1. *Вектор* $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ *называется* n*-мерной случайной величиной или случайным вектором со значениями в евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.2. *Функция*

$$\mathsf{P}(\xi \in B) = \mathsf{P}\{\omega |\, (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)) \in B\},$$

определенная для всех борелевских множеств $B \in \mathcal{B}_n$, *где* $\mathcal{B}_n$ *есть борелевская* σ*-алгебра подмножеств* $\mathbb{R}^n$, *называется распределением случайного вектора* ξ *или совместным распределением случайных величин* $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.3. *Определенная для всех вещественных* $x_1, \ldots, x_n$ *функция* $F(x_1, \ldots, x_n) = \mathsf{P}(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n)$ *называется функцией распределения случайного вектора* ξ *или совместной функцией распределения случайных величин* $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.4. *Если существует неотрицательная функция* $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, *такая, что для всех* $B \in \mathcal{B}_n$

$$\mathsf{P}(\xi \in B) = \int\limits_B f(x)\ dx \equiv \int \ldots \int\limits_B f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

то соответствующее распределение называется абсолютно непрерывным, а функция $f(x)$ — *плотностью распределения случайного вектора* ξ *или совместной плотностью случайных величин* $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.5. *Маргинальными или частными распределениями называются распределения случайных величин ξ_i, $i = 1, \ldots, n$, компонент вектора ξ.*

ЗАМЕЧАНИЕ 10.1. *Маргинальные* или *частные функции распределения* компонент случайного вектора ξ: $F_i(x) = \mathsf{P}(\xi_i < x)$ — вычисляются по совместной функции распределения $F(x_1, \ldots, x_n)$ следующим образом:

$$F_i(x_i) = F(+\infty, \ldots, +\infty, x_i, +\infty, \ldots, +\infty).$$

В § 8 было дано определение независимых случайных величин. Повторим это определение и приведем ряд утверждений для независимых случайных величин.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.6. *Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются (стохастически) независимыми, если для всех $B_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, \ldots, n$,*

$$\mathsf{P}(\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_n \in B_n) = \mathsf{P}(\xi_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}(\xi_n \in B_n). \tag{10.1}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10.2. Вырожденная случайная величина стохастически не зависит от любой случайной величины.

ЗАДАЧА 10.1. Построить последовательность невырожденных независимых случайных величин.

РЕШЕНИЕ. Пусть базовое вероятностное пространство есть тройка $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$, где λ — мера Лебега. Определим последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ следующим образом:

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A_n; \\ 0, & \text{если } \omega \in \overline{A}_n, \end{cases}$$

где

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} \left[\frac{2i-2}{2^n}, \frac{2i-1}{2^n}\right],$$

$n = 1, 2, \ldots$. На рисунках 10.1 и 10.2 изображены первые два члена этой последовательности.

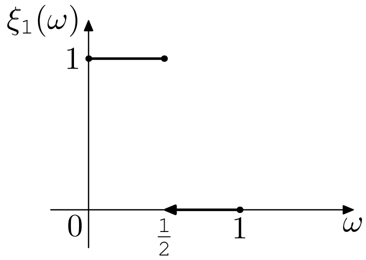

Рисунок 10.1

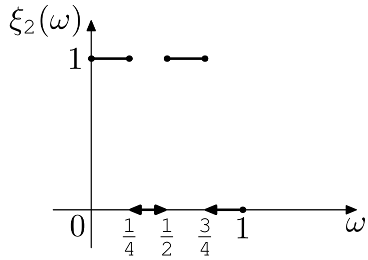

Рисунок 10.2

Пусть n — произвольное натуральное число. Для проверки независимости дискретных случайных величин достаточно показать справедливость равенства (10.1) только для всех одноточечных множеств $B_i = \{x_i\}$ (см. решение задачи 7.21). В частности, для $x_1 = \ldots = x_n = 1$ имеем

$$\mathsf{P}(\xi_1 = 1, \ldots, \xi_n = 1) = \mathsf{P}\left(\left[0, \frac{1}{2^n}\right]\right) = \frac{1}{2^n} = \mathsf{P}(\xi_1 = 1) \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}(\xi_n = 1).$$

Очевидно, что для остальных $x_1, \ldots, x_n$ равенство также выполняется. □

ТЕОРЕМА 10.1 (критерий независимости). *Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы тогда и только тогда, когда их совместная функция распределения представима в виде произведения маргинальных функций распределения для всех $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$:*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \ldots \cdot F_n(x_n).$$

СЛЕДСТВИЕ 10.1. Если распределение случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ является абсолютно непрерывным, то необходимым и достаточным условием независимости $\xi_1, \ldots, \xi_n$ является возможность представления для всех $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ совместной плотности как произведения *маргинальных плотностей*:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n).$$

Пусть ξ и η — независимые случайные величины с функциями распределения $H(x)$ и $G(x)$ соответственно. Найдем функцию распределения суммы этих случайных величин. По обобщенной формуле полной вероятности имеем

$$F(x) = \mathsf{P}(\xi + \eta < x) = \mathsf{P}(\xi < x - \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x - y)\, dG(y).$$

Заметим, что данная формула является симметричной, то есть

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - y)\, dH(y).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.7. *Сверткой функций распределения $H(x)$ и $G(x)$ называется функция*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x - y)\, dG(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - y)\, dH(y).$$

Обозначение: $F(x) = (H * G)(x) = (G * H)(x)$ *или* $F = H * G = G * H$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.3. Функция распределения суммы двух независимых случайных величин есть свертка функций распределения слагаемых.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.4. Если функция распределения $H(x)$ имеет плотность $h(x)$, то свертка $F(x) = (H * G)(x)$ также имеет плотность

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(x-y)\, dG(y). \tag{10.2}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.8. *Функция распределения $H(x)$ называется компонентой функции распределения $F(x)$, если существует функция распределения $G(x)$ такая, что $F = G * H$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.9. *Симметризацией функции распределения $F(x)$ называется функция распределения*

$$F^{(s)}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x+y)\, dF(y).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10.5. Симметризация функции распределения $F(x)$ есть функция распределения разности независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих функцию распределения $F(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.6. Симметризация функции распределения является функцией распределения случайной величины η, имеющей *симметричное распределение*, то есть

$$\mathsf{P}(\eta < x) = \mathsf{P}(\eta > x)$$

для всех $x \in \mathbb{R}$. Действительно, пусть $\eta \stackrel{d}{=} \xi - \xi_1$, где ξ и ξ_1 — независимые одинаково распределенные случайные величины. Тогда

$$\mathsf{P}(\eta < x) = \mathsf{P}(\xi - \xi_1 < x) = \mathsf{P}(\xi_1 - \xi < x) = \mathsf{P}(-\eta < x) = \mathsf{P}(\eta > x).$$

ЗАДАЧА 10.2. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие равномерное на отрезке $[0,\, 1]$ распределение. Найти распределение случайной величины $\xi + \eta$.

РЕШЕНИЕ. Пусть $h(x)$ — плотность случайных величин ξ и η. Найдем плотность $f(x)$ случайной величины $\xi + \eta$. Заметим, что

$$h(x-y) = \begin{cases} 1 & \text{при } x - y \in [0,\, 1]; \\ 0 & \text{при } x - y \notin [0,\, 1], \end{cases}$$

$$h(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y \in [0,\, 1]; \\ 0 & \text{при } y \notin [0,\, 1]. \end{cases}$$

Воспользуемся формулой (10.2). Имеем

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(x-y)h(y)\,dy.$$

При $x \notin [0,\,2]$ подынтегральная функция равняется нулю. При $x \in [0,\,2]$ подынтегральная функция равняется единице тогда и только тогда, когда $x-y$ и y принадлежат отрезку $[0,\,1]$ одновременно, то есть $x-1 \le y \le x$. Таким образом, при $x \in [0,\,1]$

$$f(x) = \int\limits_{0}^{x} h(x-y)h(y)\,dy = x,$$

а при $x \in [1,\,2]$

$$f(x) = \int\limits_{x-1}^{1} h(x-y)h(y)\,dy = 2-x.$$

В остальных точках $f(x) = 0$. □

В § 8 мы познакомились с понятиями "ковариация" и "коэффициент корреляции". Рассмотрим некоторые свойства этих объектов. Мы уже показали, что если случайные величины являются независимыми, то их ковариация равняется нулю. Верно ли обратное утверждение?

ЗАДАЧА 10.3. Показать, что из некоррелированности случайных величин ξ и η не следует, что ξ и η независимы.

РЕШЕНИЕ. Пусть ζ и ξ — независимые случайные величины, причем $\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\zeta = 0$. Положим $\eta = \xi\zeta$. Очевидно, что ξ и η не являются независимыми (за исключением тривиальных случаев, например, когда ξ — вырожденная случайная величина). При этом

$$\mathsf{E}\xi\eta = \mathsf{E}\xi^2\zeta = \mathsf{E}\xi^2\mathsf{E}\zeta = 0 = \mathsf{E}\xi\mathsf{E}\eta. \ \square$$

ЗАДАЧА 10.4. Показать, что коэффициент корреляции $\rho(\xi,\,\eta)$ любых невырожденных случайных величин ξ и η, имеющих конечные вторые моменты, обладает свойствами:

1) $\rho(\xi,\,\eta) = 0$, если ξ и η независимы;

2) $|\rho(\xi,\,\eta)| \le 1$;

3) $|\rho(\xi,\,\eta)| = 1$ тогда и только тогда, когда ξ и η почти наверное линейно связаны.

РЕШЕНИЕ. Первое свойство было обосновано в § 8. Пусть

$$\xi_1 = \frac{\xi - \mathsf{E}\xi}{\sqrt{\mathsf{D}\xi}} \quad \text{и} \quad \eta_1 = \frac{\eta - \mathsf{E}\eta}{\sqrt{\mathsf{D}\eta}}.$$

Заметим, что $\mathsf{E}\xi_1 = \mathsf{E}\eta_1 = 0$ и $\mathsf{D}\xi_1 = \mathsf{D}\eta_1 = 1$ (случайные величины, удовлетворяющие этим свойствам называются *центрированными* и *нормированными* соответственно). Справедлива следующая цепочка соотношений:

$$0 \le \mathsf{D}(\xi_1 \pm \eta_1) = \mathsf{E}(\xi_1 \pm \eta_1)^2 = \mathsf{E}\xi_1^2 + \mathsf{E}\eta_1^2 \pm 2\rho(\xi,\, \eta) = 2 \pm 2\rho(\xi,\, \eta),$$

которая и доказывает второе свойство коэффициента корреляции.

Пусть ξ и η почти наверное линейно связаны, то есть $\mathsf{P}(\eta = a + b\xi) = 1$ для некоторых действительных чисел a и $b \neq 0$. Имеем

$$\rho(\xi,\, \eta) = \mathsf{E}\frac{\xi - \mathsf{E}\xi}{\sqrt{\mathsf{D}\xi}} \cdot \frac{a + b\xi - a - b\mathsf{E}\xi}{|b|\sqrt{\mathsf{D}\xi}} = \operatorname{sign} b.$$

Предположим теперь, что $|\rho(\xi,\, \eta)| = 1$. Тогда

$$\mathsf{D}(\xi_1 \pm \eta_1) = 2 \pm 2\rho(\xi,\, \eta) = 0.$$

Но последнее равенство может иметь место лишь в случае, когда случайная величина $\xi_1 \pm \eta_1$ является вырожденной (в некоторой точке c). Следовательно,

$$\mathsf{P}\left(\xi = \mp\frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{\mathsf{D}\eta}}\eta \pm \frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{\mathsf{D}\eta}}\mathsf{E}\eta + c\sqrt{\mathsf{D}\xi} + \mathsf{E}\xi\right) = 1. \ \square$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

ЗАДАЧА 10.5. Показать справедливость замечания 10.2.

ЗАДАЧА 10.6. Построить последовательность независимых случайных величин, имеющих равномерное на отрезке $[0,\, 1]$ распределение.

ЗАДАЧА 10.7. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие равномерное на отрезке $[0,\, 1]$ распределение. Найти симметризацию их функции распределения.

ЗАДАЧА 10.8. Могут ли невырожденные случайные величины ξ и η быть стохастически независимыми, если они связаны функциональной зависимостью, например, $\xi^2 + \eta^2 = 1$?

ЗАДАЧА 10.9. Пусть ξ и η — случайные величины, $\mathsf{P}(\xi > 0) = \mathsf{P}(\eta > 0) = 3/4$, $\mathsf{P}(\xi + \eta > 0) = 1/2$. Доказать, что ξ и η не независимы.

ЗАДАЧА 10.10. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют пуассоновское распределение с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно, причем $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Доказать, что для любого $t \geq 0$ выполняется неравенство $\mathsf{P}(\xi_1 \leq t) \geq \mathsf{P}(\xi_2 \leq t)$.

ЗАДАЧА 10.11. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют пуассоновское распределение с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Найти $\mathsf{P}(\xi_1 = k |\, \xi_1 + \xi_2 = n)$, $k = 1, \ldots, n$.

ЗАДАЧА 10.12. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причем ξ имеет показательное распределение с параметром 1, а η равномерно распределена на отрезке $[0,\, 1]$. Найти плотность распределения $\xi + \eta$.

ЗАДАЧА 10.13. Пусть ξ и η — независимые случайные величины такие, что сумма $\xi + \eta$ имеет вырожденное распределение. Доказать, что каждая из случайных величин ξ и η имеет вырожденное распределение. Можно ли это утверждать, если ξ и η не являются независимыми?

ЗАДАЧА 10.14. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причем случайные величины $\xi + \eta$ и ξ одинаково распределены. Найти распределение случайной величины η.

ЗАДАЧА 10.15. Пусть ξ — случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Найти функцию распределения $F_2(x,\, y)$ случайного вектора $(\xi,\, \xi)$.

ЗАДАЧА 10.16. Пусть ξ — случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Найти функцию распределения $F_2(x,\, y)$ случайного вектора $(\xi,\, |\xi|)$.

ЗАДАЧА 10.17. Пусть ξ — случайная величина, имеющая равномерное на отрезке $[0,\, 1]$ распределение. Найти распределение случайной величины $-\lambda^{-1} \ln \xi$, $\lambda > 0$.

ЗАДАЧА 10.18. Пусть ξ — невырожденная случайная величина с симметричным распределением и конечной дисперсией. Найти коэффициент корреляции случайных величин ξ и $|\xi|$.

ЗАДАЧА 10.19. Пусть ξ — случайная величина, причем $\mathsf{P}(\xi > 0) = \alpha$, $\mathsf{P}(\xi < 0) = \beta$, $\mathsf{E}\xi = a$, $\mathsf{E}|\xi| = b$. Найти $\operatorname{cov}(\xi,\, \operatorname{sign} \xi)$.

ЗАДАЧА 10.20. Построить на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$ две некоррелированные случайные величины ξ и η, которые не являются независимыми.

§ 11. Виды сходимостей случайных величин

ЗАНЯТИЕ 14

Пусть задано некоторое вероятностное пространство $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$ и последовательность ξ, ξ_1, ξ_2, ... случайных величин на нем. В § 7 было показано, что равенство случайных величин можно определять различными способами. Также по-разному можно определять и сходимость случайных величин. Рассмотрим основные виды таких сходимостей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1. *Говорят, что последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин сходится почти наверное (с вероятностью единица) к случайной величине ξ, если при $n \to \infty$*

$$\mathsf{P}\left\{\omega \middle|\, \xi_n(\omega) \longrightarrow \xi(\omega)\right\} = 1.$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.2. *Говорят, что последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин сходится по вероятности к случайной величине ξ, если для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$*

$$\mathsf{P}(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \longrightarrow 0.$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.3. *Говорят, что последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин сходится в среднем порядка r (в среднем, если $r = 1$, в среднем квадратическом, если $r = 2$) к случайной величине ξ, если при $n \to \infty$*

$$\mathsf{E}|\xi_n - \xi|^r \longrightarrow 0.$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{(r)} \xi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.4. *Говорят, что последовательность* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *случайных величин сходится по распределению к случайной величине* ξ, *если при* $n \to \infty$ *последовательность соответствующих функций распределения* $F_{\xi_1}(x)$, $F_{\xi_2}(x)$, $\ldots$ *сходится к функции распределения* $F_\xi(x)$ *в каждой точке непрерывности последней. Обозначение:* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.5. *Говорят, что последовательность* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *случайных величин слабо сходится к случайной величине* ξ, *если для любой непрерывной ограниченной функции* $f(x)$ *при* $n \to \infty$

$$\mathsf{E} f(\xi_n) \longrightarrow \mathsf{E} f(\xi).$$

Обозначение: $\xi_n \Longrightarrow \xi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.6. *Говорят, что последовательность функций распределения* F_1, F_2, $\ldots$ *слабо сходится к функции распределения* F, *если для любой непрерывной ограниченной функции* $f(x)$ *при* $n \to \infty$

$$\int f(x)\, dF_n(x) \longrightarrow \int f(x)\, dF(x).$$

Обозначение: $F_n(x) \Longrightarrow F(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 11.1. Очевидно, что слабая сходимость функций распределения F_{ξ_1}, F_{ξ_2}, $\ldots$ к функции распределения F_ξ эквивалентна слабой сходимости случайных величин ξ_1, ξ_2, $\ldots$ к случайной величине ξ.

ЗАМЕЧАНИЕ 11.2. Поскольку в определениях 11.4 и 11.5 речь идет о распределениях случайных величин, а не о самих случайных величинах, требование единственности базового вероятностного пространства, на котором определены случайные величины ξ, ξ_1, ξ_2, $\ldots$, является в данном случае несущественным.

ТЕОРЕМА 11.1 (теорема непрерывности). *Слабая сходимость последовательности случайных величин* ξ_1, ξ_2, $\ldots$ *к случайной величине* ξ *эквивалентна сходимости последовательности соответствующих характеристических функций* $\varphi_{\xi_1}(t), \varphi_{\xi_2}(t), \ldots$ *к характеристической функции* $\varphi_\xi(t)$ *при* $n \to \infty$ *в каждой точке* $t \in \mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 11.3. Обычно, для доказательства слабой сходимости пользуются именно теоремой 11.1, поскольку доказывать поточечную сходимость функций гораздо проще, нежели сходимость интегралов от всех непрерывных ограниченных функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 11.4. Для различных видов сходимостей случайных величин и их распределений справедлива диаграмма импликаций, приведенная на рисунке 11.1.

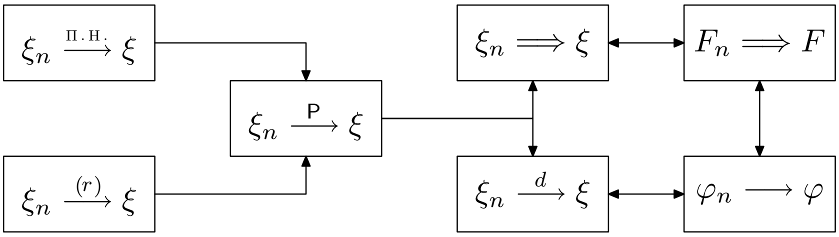

Рисунок 11.1

На практике исследователя могут интересовать различные виды сходимостей в зависимости от рассматриваемой задачи. Например, зачастую представляется невозможным вычислить распределение некоторой случайной величины ξ в точности, даже если известны все параметры модели. Однако, если при этом удается показать, что неизвестная функция распределения $F_{\xi,\theta}$ слабо стремится к известной функции распределения G при стремлении параметра θ к некоторому пределу, то можно воспользоваться аппроксимацией $F_{\xi,\theta}(x) \approx G(x)$ и искать интересующие нас характеристики функции распределения $F_{\xi,\theta}$ в терминах функции распределения G. С другой стороны, в теоретической статистике считается, что оценка $T_n(X)$ неизвестного параметра θ является "хорошей", если при $n \to \infty$ имеет место сходимость $T_n(X) \xrightarrow{\mathsf{P}} \theta$. Такие оценки называются *состоятельными* и находят широкое применение в математической статистике. Существует множество иных примеров применения различных видов сходимостей случайных величин как в теории, так и на практике. Нашей задачей в настоящее время не является углубленное изучение возможных постановок задач на сходимость. Заметим лишь, что большое количество определений сходимостей случайных величин является оправданным и крайне важным.

ЗАДАЧА 11.1. Показать, что из сходимости $\xi_n \xrightarrow{(r)} \xi$ следует сходимость $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$ $(n \to \infty)$.

РЕШЕНИЕ. Для доказательства утверждения задачи достаточно воспользоваться *обобщенным неравенством Чебышева*, справедливым для всех $\varepsilon > 0$ и $r > 0$:

$$\mathsf{P}(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathsf{E}|\xi_n - \xi|^r}{\varepsilon^r}. \square$$

ЗАДАЧА 11.2. Показать, что из сходимости $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$ не следует сходимость $\xi_n \xrightarrow{(r)} \xi$ $(n \to \infty)$.

РЕШЕНИЕ. Достаточно привести пример последовательности дискретных случайных величин, частные значения которых возрастают быстрее соответствующих частных значений вероятности, но сами случайные величины сходятся по вероятности. Рассмотрим вероятностное пространство $([0,\ 1], \mathcal{B}_{[0,\ 1]}, \lambda)$, где λ — мера Лебега. Пусть

$$\xi_n = \begin{cases} e^n, & \text{если } 0 \le \omega \le 1/n; \\ 0, & \text{если } 1/n < \omega \le 1. \end{cases}$$

Очевидно, что $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ (более того, $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$), но

$$\mathsf{E}|\xi_n|^r = \frac{e^{rn}}{n} \longrightarrow \infty$$

при $n \to \infty$ для любого $r > 0$. □

ЗАДАЧА 11.3. Показать, что из сходимости $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$ не следует сходимость $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ $(n \to \infty)$.

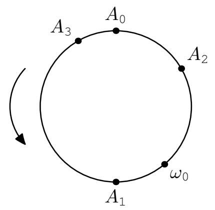

Рисунок 11.2

РЕШЕНИЕ. Пусть базовое вероятностное пространство $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$ имеет вид: Ω — окружность единичной длины, $\mathcal{F}$ — борелевская σ-алгебра подмножеств Ω, P — мера Лебега на элементах $\mathcal{F}$. Зафиксируем некоторую точку A_0 на окружности и произвольное направление. Отложим от точки A_0 в заданном направлении дугу длины $1/2$, обозначим второй конец дуги через A_1, затем от точки A_1 отложим в заданном направлении дугу длины $1/3$, второй конец дуги обозначим через A_2, от точки A_2 отложим дугу A_2A_3 длины $1/4$ и так далее. Данный процесс изображен на рисунке 11.2.

Построим случайную величину ξ_n $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ по правилу

$$\xi_n = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in \text{дуга } A_{n-1}A_n; \\ 0, & \text{если } \omega \notin \text{дуга } A_{n-1}A_n. \end{cases}$$

Поскольку длины дуг стремятся к нулю, имеем $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ при $n \to \infty$. Зафиксируем произвольную точку $\omega_0 \in \Omega$. Поскольку гармонический ряд расходится, данную точку покроет бесконечное множество дуг $A_{i-1}A_i$. Таким образом, в данной точке бесконечное множество элементов последовательности $\xi_1(\omega_0),\ \xi_2(\omega_0),\ \ldots$ будет равняться как нулю, так и единице, следовательно, данная последовательность расходится. Поскольку точка ω_0 выбрана произвольно, последовательность $\xi_1(\omega),\ \xi_2(\omega),\ \ldots$ расходится в каждой точке $\omega \in \Omega$, что и завершает решение задачи. □

ЗАДАЧА 11.4. Показать, что если $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$ и $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \eta$, то $\mathsf{P}(\xi = \eta) = 1$.

РЕШЕНИЕ. Достаточно показать, что $\mathsf{P}(|\xi - \eta| > \delta) < \varepsilon$ для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$. Из неравенства

$$\mathsf{P}\left(|X + Y| > x\right) \le \mathsf{P}\left(|X| > \frac{x}{2}\right) + \mathsf{P}\left(|Y| > \frac{x}{2}\right), \tag{11.1}$$

справедливого для всех $x > 0$ и любых случайных величин X и Y, следует, что

$$\mathsf{P}(|\xi - \eta| > \delta) = \mathsf{P}(|\xi_n - \xi - \xi_n + \eta| > \delta) \leq$$

$$\leq \mathsf{P}(|\xi_n - \xi| > \delta/2) + \mathsf{P}(|\xi_n - \eta| > \delta/2) < \varepsilon$$

для всех n больших некоторого n_0. Что и требовалось показать, поскольку левая часть неравенства не зависит от n. □

ЗАДАЧА 11.5. Показать, что из сходимости $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ не следует сходимость $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$ $(n \to \infty)$.

РЕШЕНИЕ. Пусть $\xi_n \equiv \eta \sim Bi(1, 1/2)$, $\xi = 1 \Leftrightarrow \eta = 0$ и $\xi = 0 \Leftrightarrow \eta = 1$. Очевидно, что $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, но $|\xi_n - \xi| \equiv 1$. □

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

ЗАДАЧА 11.6. Показать, что из сходимости $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$ следует сходимость $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$ $(n \to \infty)$.

ЗАДАЧА 11.7. Доказать неравенство (11.1).

ЗАДАЧА 11.8. Пусть $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$ и $\eta_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \eta$. Доказать

1) $a\xi_n + b\eta_n \xrightarrow{\mathsf{P}} a\xi + b\eta$, a, $b \in \mathbb{R}$;

2) $|\xi_n| \xrightarrow{\mathsf{P}} |\xi|$;

3) $\xi_n\eta_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi\eta$.

ЗАДАЧА 11.9. Пусть $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$ и $\eta_n \xrightarrow{п.н.} \eta$. Доказать

1) $a\xi_n + b\eta_n \xrightarrow{п.н.} a\xi + b\eta$, a, $b \in \mathbb{R}$;

2) $|\xi_n| \xrightarrow{п.н.} |\xi|$;

3) $\xi_n\eta_n \xrightarrow{п.н.} \xi\eta$.

ЗАДАЧА 11.10. Показать, что

1) если $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} a \neq 0$, то $1/\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 1/a$;

2) если $\xi_n \xrightarrow{п.н.} a \neq 0$, то $1/\xi_n \xrightarrow{п.н.} 1/a$.

ЗАДАЧА 11.11. Доказать, что если $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$, то $\xi_n \Longrightarrow \xi$.

ЗАДАЧА 11.12. Следует ли из сходимости $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ сходимость $\xi_n - \xi \xrightarrow{d} 0$?

ЗАДАЧА 11.13. Показать, что $\xi_n \Longrightarrow a$ тогда и только тогда, когда $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} a$.

ЗАДАЧА 11.14. Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ и $\eta_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$. Показать, что

1) $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{d} \xi$;

2) $\xi_n \eta_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$.

ЗАДАЧА 11.15. Доказать, что если $\xi_n - a_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ и $\xi_n - b_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ при $n \to \infty$, где $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ — две последовательности вещественных чисел, то $a_n - b_n \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$.

ЗАДАЧА 11.16. Пусть $(\xi_n - \xi)^2 \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\xi_n^2 \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi^2$ при $n \to \infty$.

ЗАДАЧА 11.17. Привести пример, показывающий, что из сходимости в среднем любого положительного порядка не следует сходимость почти наверное.

ЗАДАЧА 11.18. Привести пример последовательности случайных величин, сходящейся почти наверное, и такой, что никакая ее подпоследовательность не сходится в среднем порядка $r > 0$.

ЗАДАЧА 11.19. Доказать, что слабая сходимость функций распределения к непрерывной функции распределения эквивалентна поточечной сходимости и равномерной сходимости на $\mathbb{R}$.

ЗАДАЧА 11.20. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, причем $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$ при $n \to \infty$. Доказать, что ξ имеет вырожденное распределение.

§ 12. Предельные теоремы теории вероятностей

ЗАНЯТИЕ 15

Пусть задано некоторое вероятностное пространство $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$ и последовательность $\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots$ случайных величин на нем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.1. *Пусть $\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots$ — последовательность случайных величин с конечными математическими ожиданиями. Говорят, что для этой последовательности выполняется закон больших чисел (ЗБЧ), если при $n \to \infty$*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i - \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\xi_i}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 12.1. Требование существования математических ожиданий у случайных величин ξ_i, $i = 1,\, 2,\, \ldots$, является существенным, поскольку в противном случае о выполнении закона больших чисел вообще не может идти речи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.2. *Пусть $\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots$ — последовательность случайных величин с конечными математическими ожиданиями. Говорят, что для этой последовательности выполняется усиленный закон больших чисел (УЗБЧ), если при $n \to \infty$*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i - \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\xi_i}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

ТЕОРЕМА 12.1 (ЗБЧ в форме Чебышева). *Пусть $\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин,* *причем* $\mathsf{E}\xi_1 = a$ *и* $\mathsf{D}\xi_1 = \sigma^2 < \infty$. *Тогда для этой последовательности выполняется закон больших чисел, то есть для любого* $\varepsilon > 0$ *при* $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right) \longrightarrow 0.$$

ТЕОРЕМА 12.2 (ЗБЧ в форме Хинчина). *Если* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — *последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными математическими ожиданиями, то для этой последовательности выполняется закон больших чисел.*

ТЕОРЕМА 12.3 (УЗБЧ Колмогорова). *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — *последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Для выполнения усиленного закона больших чисел для этой последовательности необходимо и достаточно существование у случайной величины* ξ_1 *конечного математического ожидания.*

Несмотря на то, что теоремы 12.1-12.3 имеют очень похожую формулировку, между публикациями первой и последней теорем прошло немало времени и появилось большое количество новых методов изучения сумм случайных величин. Теорема 12.1 была опубликована П. Л. Чебышевым в 1867 году в работе (Чебышев 1867), а усиленный закон больших чисел А. Н. Колмогорова (без доказательства) увидел свет лишь в работе (Kolmogoroff 1933).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.3. *Говорят, что для последовательности случайных величин* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *выполняется центральная предельная теорема (ЦПТ), если последовательность случайных величин*

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - \mathsf{E}\sum_{i=1}^n \xi_i}{\sqrt{\mathsf{D}\sum_{i=1}^n \xi_i}}$$

слабо сходится при $n \to \infty$ *к стандартно нормально распределенной случайной величине.*

ТЕОРЕМА 12.4 (ЦПТ для независимых одинаково распределенных случайных величин). *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — *последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем* $\mathsf{E}\xi_1 = a$, $0 < \mathsf{D}\xi_1 = \sigma^2 < \infty$. *Тогда для этой последовательности выполняется центральная предельная теорема, то есть при* $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - na}{\sqrt{n\sigma^2}} < x\right) \Longrightarrow \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du. \tag{12.1}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 12.2. Во многих учебниках по теории вероятностей требование невырожденности слагаемых ξ_i в формулировке теоремы 12.4 не указывается явно, однако, очевидно, что условие $\sigma^2 > 0$ является существенным.

ЗАМЕЧАНИЕ 12.3. Слабая сходимость эквивалентна сходимости по распределению, то есть в теореме 12.4 утверждается сходимость функций распределения центрированных и нормированных сумм случайных величин к функции распределения $\Phi(x)$ в каждой точке непрерывности последней. Однако, функция $\Phi(x)$ является абсолютно непрерывной, следовательно слабая сходимость в (12.1) эквивалентна поточечной сходимости для любого действительного x. Более того, можно показать, что поскольку как допредельные, так и предельная функции являются функциями распределения, слабая сходимость в (12.1) эквивалентна равномерной по $x \in \mathbb{R}$ сходимости.

ЗАДАЧА 12.1. Доказать теорему 12.1.

РЕШЕНИЕ. Обычным методом при доказательстве закона больших чисел является применение неравенства Чебышева (8.9). Заметим, что $\mathsf{E}\sum_{i=1}^n \xi_i/n = a$, следовательно

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathsf{D}\sum_{i=1}^n \xi_i}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \longrightarrow 0$$

при $n \to \infty$. □

ЗАДАЧА 12.2. Проводятся независимые испытания Бернулли с вероятностью успеха p. Пусть случайная величина ξ_i принимает значение 1, если i-е и $(i+1)$-е испытания закончились успехом и 0 в противном случае. Выполняется ли для последовательности ξ_1, ξ_2, … закон больших чисел?

РЕШЕНИЕ. Пусть случайная величина η_i соответствует i-му испытанию Бернулли. Тогда $\{\xi_i = 1\} = \{\eta_i = 1,\, \eta_{i+1} = 1\}$. Заметим, что случайные величины ξ_i имеют распределение $Bi(1,\, p^2)$, но не являются независимыми. Найдем $\mathsf{D}\sum_{i=1}^n \xi_i$. Имеем

$$\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)^2 = \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i \cdot \sum_{j=1}^n \xi_j\right) = \mathsf{E}\left(\sum_{i=j} \xi_i\xi_j + \sum_{|j-i|=1} \xi_i\xi_j + \sum_{|j-i|>1} \xi_i\xi_j\right) =$$

$$= \mathsf{E}\left(\sum_{i=j} (\eta_i\eta_{i+1})^2 + 2\sum_{j=i+1} \eta_i\eta_{i+1}^2\eta_{i+2} + \sum_{|j-i|>1} \eta_i\eta_{i+1}\eta_j\eta_{j+1}\right) =$$

$$= np^2 + 2(n-1)p^3 + (n^2 - n - 2(n-1))p^4.$$

Таким образом,

$$\mathsf{D}\sum_{i=1}^n \xi_i = \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)^2 - \left(\mathsf{E}\sum_{i=1}^n \xi_i\right)^2 = np^2 + 2(n-1)p^3 + (2-3n)p^4.$$

Применив неравенство (8.9) к случайной величине $\sum_{i=1}^n \xi_i/n$, получаем, что закон больших чисел выполняется. □

ЗАДАЧА 12.3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины, причем

$$\xi_n = \begin{cases} \sqrt{n}, & \dfrac{1}{2n}; \\ 0, & 1 - \dfrac{1}{n}; \\ -\sqrt{n}, & \dfrac{1}{2n}. \end{cases}$$

Выполняется ли для последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ закон больших чисел?

РЕШЕНИЕ. Заметим, что $\mathsf{E}\sum_{i=1}^n \xi_i/n = 0$ и $\mathsf{D}\sum_{i=1}^n \xi_i/n = 1/n$. Применение неравенства (8.9) завершает решение задачи. □

ЗАДАЧА 12.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины, причем $\mathsf{P}(\xi_n = \pm 2^n) = 1/2$. Выполняется ли для последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ закон больших чисел?

РЕШЕНИЕ. Заметим, что $\mathsf{E}\sum_{i=1}^n \xi_i/n = 0$. Применение неравенства (8.9) к данной последовательности дает

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} - \mathsf{E}\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathsf{D}\sum_{i=1}^n \xi_i}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^n 2^i}{n^2\varepsilon^2} \longrightarrow \infty$$

при $n \to \infty$. Такой результат является первым, но не всегда верным, признаком того, что закон больших чисел не выполняется. Пусть $\varepsilon < 1$. Поскольку

$$\mathsf{P}\left(\xi_1 + \ldots + \xi_{n-2} \geq 2 - 2^{n-1}\right) = 1,$$

имеем

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \geq \mathsf{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}\right| \geq \varepsilon,\, \xi_n = 2^n,\, \xi_{n-1} = 2^{n-1}\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}\right| \geq \varepsilon \,\middle|\, \xi_n = 2^n,\, \xi_{n-1} = 2^{n-1}\right) \mathsf{P}\left(\xi_n = 2^n,\, \xi_{n-1} = 2^{n-1}\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(\xi_n = 2^n,\, \xi_{n-1} = 2^{n-1}\right) = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, в данном случае закон больших чисел действительно не выполняется. □

ЗАДАЧА 12.5. Пусть ξ_1, ξ_2, … — независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $0 < \mathsf{D}\xi_1 < \infty$. Доказать, что для любых конечных a, $b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(a \le \sum_{i=1}^{n} \xi_i \le b\right) = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Обозначим $m = \mathsf{E}\xi_1$ и $\sigma^2 = \mathsf{D}\xi_1$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(a \le \sum_{i=1}^{n} \xi_i \le b\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{a - mn}{\sqrt{\sigma^2 n}} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i - mn}{\sqrt{\sigma^2 n}} \le \frac{b - mn}{\sqrt{\sigma^2 n}}\right).$$

Применение замечания 12.3 о равномерной сходимости в теореме 12.4 доказывает требуемое утверждение. □

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

ЗАДАЧА 12.6. Показать справедливость замечания 12.3.

ЗАДАЧА 12.7. Доказать теорему 12.4.

ЗАДАЧА 12.8. Пусть ξ_1, ξ_2, … — независимые случайные величины, причем

$$\xi_n = \begin{cases} n, & \dfrac{1}{2n^2}; \\ 0, & 1 - \dfrac{1}{n^2}; \\ -n, & \dfrac{1}{2n^2}. \end{cases}$$

Выполняется ли для последовательности ξ_1, ξ_2, … закон больших чисел?

ЗАДАЧА 12.9. Пусть ξ_1, ξ_2, … — независимые случайные величины, причем

$$\xi_n = \begin{cases} 2^n, & 2^{-(2n+1)}; \\ 0, & 1 - 2^{-2n}; \\ -2^n, & 2^{-(2n+1)}. \end{cases}$$

Выполняется ли для последовательности ξ_1, ξ_2, … закон больших чисел?

ЗАДАЧА 12.10. Пусть μ_n — количество успехов в n независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p. Доказать, что $\mu_n/n \xrightarrow{п.н.} p$.

ЗАДАЧА 12.11. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $0 < \mathsf{D}\xi_1 < \infty$. Вычислить

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_n < x).$$

ЗАДАЧА 12.12. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины, причем

$$\xi_n = \begin{cases} n, & 1/4; \\ 0, & 1/2; \\ -n, & 1/4. \end{cases}$$

Выполняется ли для последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ закон больших чисел?

ЗАДАЧА 12.13. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины, причем $\mathsf{P}(\xi_n = \pm\sqrt{n}) = 1/2$. Выполняется ли для последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ закон больших чисел?

ЗАДАЧА 12.14. Доказать закон больших чисел в форме Бернулли (впервые опубликованный в книге (Bernoulli 1713)): пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем $\xi_1 \sim Bi(1, p)$, $p \in (0, 1)$. Тогда для этой последовательности выполняется закон больших чисел.

ЗАДАЧА 12.15. Доказать закон больших чисел в форме Пуассона (впервые опубликованный в книге (Poisson 1837)): пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин таких, что $\xi_i \sim Bi(1, p_i)$, $p_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда для этой последовательности выполняется закон больших чисел.

ЗАДАЧА 12.16. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Доказать, что если при $n \to \infty$

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} c,$$

где c — некоторое вещественное число, то $\mathsf{E}|\xi_1| < \infty$ и $\mathsf{E}\xi_1 = c$.

ЗАДАЧА 12.17. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных центрированных случайных величин с конечными дисперсиями. Найти $\mathsf{D}\xi_1$, если

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{\sqrt{n}} > 1\right) = \frac{1}{3}.$$

ЗАДАЧА 12.18. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих равномерное на отрезке $[0, 1]$ распределение. Найти последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \le a_n\sqrt{n}\right) = p,$$

где $0 \le p \le 1$.

ЗАДАЧА 12.19. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин, причем $\mathsf{E}\xi_1 = a$. Пусть

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}.$$

Доказать, что последовательность случайных величин $\zeta_n = \sqrt[n]{\eta_1 \cdot \ldots \cdot \eta_n}$ сходится почти наверное к a.

ЗАДАЧА 12.20. Найти приближенное значение для вероятности того, что число "успехов" S_n в схеме $n = 100$ независимых испытаний Бернулли с вероятностью "успеха" $p = 0.5$ лежит в пределах от 35 до 65 и от 47 до 53. При каких значениях n вероятность того, что $0.35 \le S_n/n \le 0.65$, будет больше 0.998?

Приложение: характеристики основных законов распределения

P_ξ	$f_\xi(x)$	$\mathsf{P}(\xi = k)$	$\mathsf{E}\xi$	$\mathsf{D}\xi$
$\xi \overset{п.н.}{=} a$	—	$1,\, k = a$	a	0
$Bi(n,\, p)$	—	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $n \in \mathbb{N},\ p \in (0,\, 1)$, $k = 0,\, \ldots,\, n$	np	$np(1-p)$
$Pois(\lambda)$	—	$e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, $\lambda > 0,\ k = 0,\, 1,\, \ldots$	λ	λ
$\mathcal{G}(p)$	—	$(1-p)p^k$, $p \in (0,\, 1),\ k = 0,\, 1,\, \ldots$	$\dfrac{p}{1-p}$	$\dfrac{p}{(1-p)^2}$
$R[a,\, b]$	$\dfrac{1}{b-a} \cdot \mathbb{I}_x([a,\, b])$, $a < b,\ a,\, b \in \mathbb{R}$	—	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(a-b)^2}{12}$
$N(a,\, \sigma^2)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $a \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0$	—	a	σ^2
$exp(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{I}_x\left([0,\, +\infty)\right)$, $\lambda > 0$	—	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
$K(a,\, \sigma)$	$\dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{\sigma}{\sigma^2 + (x-a)^2}$ $a \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$	—	—	—

P_ξ	$\varphi_\xi(t)$	$\psi_\xi(z)$
$\xi \overset{п.н.}{=} a$	e^{ita}	z^a
$Bi(n,p)$	$(1+p(e^{it}-1))^n$	$(1+p(z-1))^n$
$Pois(\lambda)$	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$	$e^{\lambda(z-1)}$
$\mathcal{G}(p)$	$\dfrac{1-p}{1-pe^{it}}$	$\dfrac{1-p}{1-pz}$
$R[a,\ b]$	$\dfrac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$	—
$R[-a,\ a]$	$\dfrac{\sin at}{at}$	—
$N(a,\sigma^2)$	$e^{ita-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$	—
$exp(\lambda)$	$\dfrac{\lambda}{\lambda-it}$	—
$K(a,\sigma)$	$e^{ita-b\|t\|}$	—

Рекомендуемая литература

Существует большое количество учебников и задачников по теории вероятностей. Нижеследующий список не претендует на полноту, в нем содержатся лишь ссылки на те книги, по которым автор учился и учится сам.

Учебники:	(Бернштейн 1927), (Бернштейн 1946), (Боев 1950), (Боровков 1999), (Гливенко 1937), (Гливенко 1939), (Гнеденко 1954), (Климов 1983), (Колмогоров 1936), (Крамер 1947), (Ламперти 1973), (Некрасов 1912), (Прохоров и Пономаренко 2004), (Прохоров и Розанов 1987), (Тутубалин 1972), (Феллер 1967), (Франк 1935), (Чебышев 1936), (Ширяев 1980);
Задачники:	(Вентцель и Овчаров 1973), (Володин и др. 1965), (Зубков и др. 1989), (Прохоров и др. 1986).

При подготовке пособия автор использовал следующие учебники и задачники в качестве источников практических упражнений.

Источник	Номера задач
(Боровков 1999):	1.1, 1.2, 1.9; 3.2, 3.3, 3.4; 6.2, 6.3, 6.4; 7.43; 8.19; 10.3, 10.4.
(Володин и др. 1965):	2.9; 3.7;

	4.3; 5.1, 5.2; 7.53.
(Гнеденко 1954):	1.5, 1.6; 2.1, 2.2, 2.3, 2.4; 3.20.
(Зубков и др. 1989):	2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17, 2.18, 2.19, 2.20; 3.6, 3.18, 3.19; 4.1, 4.2, 4.15, 4.16, 4.17, 4.18, 4.19, 4.20; 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.11, 5.12, 5.13, 5.14, 5.15, 5.16, 5.17, 5.18, 5.19, 5.20; 7.25, 7.26, 7.34, 7.35, 7.36, 7.37, 7.38, 7.44, 7.45, 7.51, 7.54, 7.55, 7.56, 7.57, 7.58, 7.59, 7.60; 8.1, 8.15, 8.16, 8.17, 8.18, 8.22, 8.23, 8.24, 8.25, 8.34; 9.3.
(Прохоров и др. 1986):	1.10, 1.12, 1.13, 1.14, 1.15, 1.16, 1.17, 1.18, 1.19, 1.20; 2.6, 2.7, 2.8, 2.10, 2.11, 2.12; 3.5, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16, 3.17; 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14; 5.10; 6.8, 6.13, 6.14, 6.15, 6.16, 6.18, 6.19, 6.20; 7.4, 7.8, 7.9, 7.10, 7.11, 7.12, 7.27, 7.40, 7.49, 7.52; 8.6, 8.8, 8.10, 8.11, 8.12, 8.13, 8.14, 8.29, 8.30, 8.31, 8.32, 8.33, 8.35, 8.37, 8.38, 8.39; 9.1, 9.2, 9.6, 9.7, 9.8, 9.9, 9.12, 9.13, 9.14, 9.15, 9.16, 9.17, 9.18, 9.19, 9.20; 10.9, 10.10, 10.11, 10.12, 10.13, 10.14, 10.15, 10.16, 10.17, 10.18, 10.19; 11.1, 11.2, 11.3, 11.4, 11.5, 11.6, 11.8, 11.9, 11.10, 11.11, 11.12, 11.13, 11.14, 11.15, 11.16, 11.17, 11.18, 11.19, 11.20; 12.1, 12.2, 12.3, 12.4, 12.5, 12.8, 12.9, 12.10, 12.11, 12.12, 12.13, 12.16, 12.17, 12.18, 12.19, 12.20.

Литература

[1] Бернштейн С. Н. (1927) *Теория вероятностей.* М.-Л.: Государственное издательство.

[2] Бернштейн С. Н. (1946) *Теория вероятностей.* 4-е изд. М.-Л.: ОГИЗ ИТТЛ.

[3] Боев Г. П. (1950) *Теория вероятностей.* М.-Л.: ИТТЛ.

[4] Боровков А. А. (1999) *Теория вероятностей.* 3-е изд. М.: УРСС, Новосибирск: Издательство института математики.

[5] Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. (1973) *Теория вероятностей.* 2-е изд. М.: Наука.

[6] Володин Б. Г., Ганин М. П., Динер И. Я., Комаров Л. Б., Свешников А. А., Старобин К. Б. (1965) *Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций.* Под общей ред. А. А. Свешникова. М.: Наука.

[7] Гливенко В. И. (1937) *Теория вероятностей.* М.: ГУПИ.

[8] Гливенко В. И. (1939) *Курс теории вероятностей.* М.-Л.: ОНТИ РТТЛ.

[9] Гнеденко Б. В. (1954) *Курс теории вероятностей.* 2-е изд. М.: ИТТЛ.

[10] Гнеденко Б. В. (2001) *Очерк по истории теории вероятностей.* М.: УРСС.

[11] Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. (1989) *Сборник задач по теории вероятностей.* М.: Наука.

[12] Климов Г. П. (1983) *Теория вероятностей и математическая статистика.* М.: Издательство МГУ.

[13] Колмогоров А. Н. (1936) *Основные понятия теории вероятностей.* М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР.

[14] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. (1981) *Элементы теории функций и функционального анализа.* 5-е изд. М.: Наука.

[15] Крамер Г. (1947) *Случайные величины и распределения вероятностей.* М.: Издательство иностранной литературы.

[16] Ламперти Дж. (1973) *Вероятность.* М.: Наука.

[17] Майстров Л. Е. (1967) *Теория вероятностей: Исторический очерк.* М.: Наука.

[18] Некрасов П. А. (1912) *Теория вероятностей.* С.-П.: Склад издания у К. Л. Риккера.

[19] Окстоби Д. (1974) *Мера и категория.* М.: Наука.

[20] Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г. (1986) *Задачи по теории вероятностей.* М.: Наука.

[21] Прохоров Ю. В., Пономаренко Л. С. (2004) *Лекции по теории вероятностей и математической статистике.* М.: МАКС Пресс.

[22] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. (1987) *Теория вероятностей.* М.: Наука.

[23] Тутубалин В. Н. (1972) *Теория вероятностей.* М.: Издательство МГУ.

[24] Феллер В. (1967) *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* 2-е изд., т. 1, 2. М.: Мир.

[25] Франк М. Л. (1935) *Элементы теории вероятностей.* М.-Л.: ОНТИ РОТЛ.

[26] Халмош П. (1953) *Теория меры.* М.: Издательство иностранной литературы.

[27] Чебышев П. Л. (1867) *О средних величинах.* Математический сборник, т. II.

[28] Чебышев П. Л. (1936) *Теория вероятностей.* М.-Л.: Издательство Академии наук СССР.

[29] Ширяев А. Н. (1980) *Вероятность.* М.: Наука.

[30] Bernoulli J. (1713) *Ars conjectandi*. Basillae.

[31] Kolmogoroff A. (1933) *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin: Springer.

[32] Poisson S. D. (1837) *Recherches sur la probabilité des jugements en matiére criminelle et en matiére civile*. Paris.

Предметный указатель

σ-аддитивность, 48
σ-алгебра, 45
σ-алгебра борелевская, 46, 49
σ-алгебра максимальная, 46
σ-алгебра минимальная, 46
σ-алгебра наименьшая, 47
σ-алгебра, порожденная множеством, 47

Аддитивность, 47, 48
Аддитивность конечная, 48
Аддитивность счетная, 48
Аксиома σ-аддитивности, 48
Аксиома аддитивности, 48
Аксиома неотрицательности, 48
Аксиома непрерывности, 48
Аксиома нормированности, 48
Аксиома счетной аддитивности, 48
Аксиомы σ-алгебры, 45
Аксиомы алгебры, 45
Аксиомы вероятности, 48
Алгебра, 45
Алгебра наименьшая, 47

Вероятность, 13, 48
Вероятность геометрическая, 19
Вероятность условная, 27

Гипотеза, 33

Дисперсия, 86, 88

Задача о встрече, 21
Закон больших чисел, 113
Закон больших чисел в форме Бернулли, 118
Закон больших чисел в форме Пуассона, 118
Закон больших чисел в форме Хинчина, 114
Закон больших чисел в форме Чебышева, 113
Закон больших чисел усиленный, 113
Закон больших чисел усиленный Колмогорова, 114

Игла Бюффона, 22
Измеримость, 53
Индикатор, 83
Интеграл Лебега, 66
Интеграл Стилтьеса, 79
Интегральная сумма Стилтьеса, 79
Испытания Бернулли, 38

Ковариация, 87
Коэффициент корреляции, 87
Кривая Кантора, 74
Критерий независимости, 102

Математическое ожидание, 78, 79, 88
Математическое ожидание условное, 82
Мера, 47
Мера Лебега, 49, 50
Мера абсолютно непрерывная, 68
Мера вероятностная, 14, 48

Мера геометрическая, 19
Мера доминирующая, 69
Мера полная, 66
Мера считающая, 69
Меры продолжение, 49
Множество борелевское, 47
Множество измеримое, 47, 55
Множество канторово, 74
Момент, 87
Момент абсолютный, 87
Момент факториальный, 87
Момент центральный, 87
Момент центральный абсолютный, 87
Момент центральный смешанный, 87

Неравенство Чебышева, 88
Неравенство Чебышева обобщенное, 109
Нормированность, 48

Парадокс Бертрана, 20
Плотность, 67
Плотность маргинальная, 102
Плотность совместная, 100
Поле вероятностей, 49
Полный прообраз, 53
Почти всюду, 50
Почти наверное, 50
Преобразование Фурье, 93
Преобразование Фурье-Стилтьеса, 93
Пример Бернштейна, 29
Производящая функция последовательности, 94
Производящая функция случайной величины, 95
Пространство вероятностное, 49
Пространство вероятностное в широком смысле, 49
Пространство измеримое, 47
Пространство элементарных исходов, 10, 45
Пространство элементарных исходов дискретное, 11
Пространство элементарных событий, 10, 45

Равенство по распределению, 57
Равенство почти наверное, 57
Равенство тождественное, 57
Распределение Бернулли, 39, 62
Распределение Коши, 72
Распределение Пуассона, 41, 62
Распределение абсолютно непрерывное, 67, 100
Распределение биномиальное, 39, 62
Распределение биномиальное симметричное, 75
Распределение вероятностей, 13, 49
Распределение вырожденное, 61
Распределение геометрическое, 62
Распределение дискретное, 60
Распределение классическое, 16, 61
Распределение маргинальное, 101
Распределение нормальное, 41, 70
Распределение показательное, 71
Распределение пуассоновское, 41, 62
Распределение равномерное, 19, 70
Распределение равномерное дискретное, 16, 61
Распределение симметричное, 97, 103
Распределение сингулярного типа, 73
Распределение случайного вектора, 100
Распределение случайной величины, 56

Распределение совместное, 100
Распределение стандартное нормальное, 71
Распределение частное, 101
Распределение экспоненциальное, 71
Распределения закон, 56
Распределения плотность, 67, 100
Распределения ряд, 60, 75

Свертка, 102
Свойства вероятности, 14, 50
Свойства дисперсии, 86
Свойства математического ожидания, 82
Свойства независимых событий, 27
Свойства плотности, 67
Свойства производящей функции, 95
Свойства функции распределения, 58
Свойства функции распределения сингулярного типа, 73
Свойства характеристической функции, 94
Случайная величина, 53
Случайная величина n-мерная, 100
Случайная величина вырожденная, 61
Случайная величина дискретная, 60
Случайная величина неотрицательная, 85
Случайная величина нормированная, 105
Случайная величина целочисленная, 56
Случайная величина центрированная, 105
Случайной величины частное значение, 53
Случайные величины независимые, 82, 101
Случайные величины некоррелированные, 87
Случайные величины эквивалентные, 57
Случайный вектор, 100
Случайный элемент, 56
Событие, 12, 45
Событие дополнительное, 12
Событие достоверное, 12
Событие невозможное, 12
Событие случайное, 12, 45
Событие элементарное, 10
Событий полная группа, 32
Событий произведение, 12
Событий разность, 12
Событий сумма, 12
События независимые, 27
События независимые в совокупности, 28
События независимые попарно, 28
События несовместные, 12
Состоятельная оценка, 109
Стандартное уклонение, 86
Схема Бернулли, 38
Сходимость в среднем, 107
Сходимость в среднем квадратическом, 107
Сходимость в среднем порядка r, 107
Сходимость по вероятности, 107
Сходимость по распределению, 108
Сходимость почти наверное, 107
Сходимость с вероятностью единица, 107
Сходимость слабая, 108

Теорема Каратеодори, 49
Теорема Лебега, 74

Теорема Муавра-Лапласа интегральная, 41
Теорема Пуассона, 41
Теорема Радона-Никодима, 69
Теорема Улама, 46, 55
Теорема единственности, 94
Теорема непрерывности, 108
Теорема центральная предельная, 114
Точка роста, 73

Формула Байеса, 33
Формула полной вероятности, 32
Функции распределения компонента, 103
Функции распределения симметризация, 103
Функция Дирихле, 67
Функция Кантора, 74
Функция абсолютно непрерывная, 68
Функция борелевская, 81
Функция индикаторная, 83
Функция простая, 66
Функция распределения, 57
Функция распределения маргинальная, 101
Функция распределения случайного вектора, 100
Функция распределения совместная, 100
Функция распределения условная, 81
Функция распределения частная, 101
Функция суммируемая по Лебегу, 66
Функция характеристическая, 93

Центральная предельная теорема, 114

Элементарный исход, 10