ГЛАВА I

КИНЕМАТИКА

§ 1. Пространство и время

1. Как уже было сказано во введении, в механике *движением* называют изменение положения тела в пространстве с течением времени. Под положением здесь понимается *относительное положение,* т.е. положение тела относительно других тел. Понятие абсолютного положения, т.е. положения тела в каком-то "абсолютном пространстве" безотносительно к другим телам, лишено содержания.

Тело или система тел, относительно которых определяется положение остальных тел, называется *пространственной системой отсчета.*

Утверждение, что два различных не одновременных события произошли в одном и том же месте пространства, лишено содержания, пока не указана система отсчета, в которой события рассматриваются. Пассажир в движущемся железнодорожном вагоне взял из своего чемодана какую-то вещь и спустя некоторое время положил ее обратно. Можно сказать, что он взял и положил эту вещь в одном и том же месте, если за систему отсчета принять движущийся вагон. Но те же два события будут происходить в различных местах, если их рассматривать в системе отсчета, связанной с полотном железной дороги. Например, одно событие внутри вагона могло произойти в Москве, а другое – в Ленинграде.

2. В качестве пространственной системы отсчета можно взять произвольное твердое тело и связать с ним *координатные оси,* например, декартовой прямоугольной системы координат, реализованные в виде трех взаимно перпендикулярных твердых стержней. Положение каждой точки в избранной пространственной системе отсчета можно задавать тремя числами – *координатами точки* x, y, z, представляющими собой расстояния этой точки до координатных плоскостей YZ, ZX, XY соответственно (рис. 1). Три координаты x, y, z можно объединить в один *направленный отрезок,* называемый *радиусом-вектором* $\boldsymbol{r}$, проведенный из начала координат в рассматриваемую точку. Координаты x, y, z являются его проекциями на координатные оси, а потому

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \qquad (1.1)$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ – *координатные орты,* т.е. единичные векторы, направленные вдоль координатных осей X, Y, Z.

Существуют два вида координатных систем – *правая* и *левая* системы. Их различают с помощью *правила буравчика.* Будем ввинчивать буравчик с правой нарезкой, вращая его ручку в плоскости XY кратчайшим путем от положительного конца оси X к положительному концу оси Y. В правой системе координат (рис. 1) поступательное перемещение буравчика будет происходить в положительном, а левой (рис. 2) – в отрицательном направлении оси Z. Правая система никакими вращениями не может быть совмещена с левой. Обе системы отличаются друг от друга примерно так же, как правая рука отличается от левой. Но правая система переходит в левую, если положительное направление одной из координатных осей изменить на противоположное. То же самое произойдет, если изменить на противоположные положительные направления всех трех осей. Последняя операция называется *инверсией координатных осей* или *отражением в начале координат.* Например, изображением правой системы в плоском зеркале будет левая система, и наоборот. В физике применяется исключительно правая система.

3. Координаты x, y, z, которыми определяется положение точки в избранной системе отсчета, являются числами. *Количественное определение этих координат, равно как и количественное определение всякой физической величины, сводится в конце концов к указанию принципиального способа их измерения.* При этом имеются в виду *именно принципиальные, а не практические* способы измерения. Эти измерения должны лишь разъяснить смысл, точнее, принципиальный способ получения x, y, z, равно как и всяких чисел, с помощью которых количественно характеризуются все физические величины. Поэтому мы можем предполагать, что такие способы измерения являются *идеальными,* а самые измерения вы-

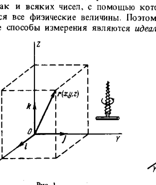


Рис. 1

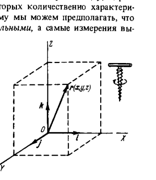


Рис. 2

§ 2. Кинематическое описание движения. Материальная точка

1. *Кинематика* занимается описанием движения, отвлекаясь от его причин. Для описания движения можно выбирать различные системы отсчета. В различных системах отсчета движение одного и того же тела выглядит по-разному. В кинематике при выборе системы отсчета руководствуются лишь соображениями целесообразности, определяющимися конкретными условиями. Так, при рассмотрении движения тел на Земле естественно связать систему отсчета с Землей, что мы и будем делать. При рассмотрении движения самой Земли систему отсчета удобнее связывать с Солнцем и т.п. Никаких принципиальных преимуществ одной системы отсчета по сравнению с другой в кинематике указать нельзя. Все системы отсчета *кинематически эквивалентны.* Только в *динамике,* изучающей движение в связи с силами, действующими на движущиеся тела, выявляются принципиальные преимущества определенной системы отсчета или, точнее, определенного класса системы отсчета.

2. Простейшим объектом, движение которого изучает классическая механика, является материальная точка. *Материальной точкой* называется макроскопическое тело, размеры которого настолько малы, что в рассматриваемом движении их можно не принимать во внимание и считать, что все вещество тела как бы сосредоточено в одной геометрической точке. Материальных точек в природе не существует. Материальная точка есть абстракция, идеализированный образ реально существующих тел. Можно или нельзя то или иное тело при изучении какого-либо движения принять за материальную точку – это зависит не столько от самого тела, сколько от характера движения, а также от содержания вопросов, на которые мы хотим получить ответ. Абсолютные размеры тела при этом не играют роли. Важны *относительные размеры,* т.е. отношения размеров тела к некоторым расстояниям, характерным для рассматриваемого движения. Например, Землю при рассмотрении ее орбитального движения вокруг Солнца с большой точностью можно принять за материальную точку. Характерной длиной здесь является радиус земной орбиты $R \approx 1{,}5 \cdot 10^8$ км. Он очень велик по сравнению с радиусом Земли $r \approx 6{,}4 \cdot 10^3$ км. Благодаря этому при орбитальном движении Земли все ее точки можно считать движущимися практически одинаково. Поэтому достаточно рассмотреть движение только одной точки, например центра Земли, и считать, что все вещество Земли как бы сосредоточено в этой геометрической точке. Такая идеализация сильно упрощает задачу об орбитальном движении Земли, сохраняя, однако, все существенные черты этого движения. Но эта идеализация не годится при рассмотрении вращения Земли вокруг собственной оси, ибо бессмысленно говорить о вращении геометрической точки вокруг оси, проходящей через эту точку.

В определение материальной точки мы включили условие, что она должна быть *макроскопическим телом.* Это сделано для того, чтобы к ее движению можно было принять классическую механику. Однако в ряде случаев и движение микрочастиц может рассматриваться на основе классической механики. Сюда относится, например, движение электронов, протонов или ионов в ускорителях и электронно-ионных приборах. В этих случаях микрочастицы можно рассматривать как материальные точки классической механики.

3. Механика одной материальной точки или, короче, *механика точки* в классической физике является основой для изучения механики вообще. С классической точки зрения произвольное макроскопическое тело или систему тел можно мысленно разбить на малые макроскопические части, взаимодействующие между собой. Каждую из таких частей можно принять за материальную точку. Тем самым изучение движения произвольной системы тел сводится к изучению системы взаимодействующих материальных точек. Естественно поэтому начать изучение классической механики с механики одной материальной точки, а затем перейти к изучению системы материальных точек.

Выберем какую-либо произвольную систему отсчета и будем относить к ней движение материальной точки. Движение точки будет описано полностью, если будет известно ее положение в любой момент времени относительно выбранной системы отсчета. Положение точки мы условимся характеризовать ее прямоугольными координатами x, y, z, являющимися проекциями ее радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ на координатные оси. Полное описание движения сводится поэтому к нахождению трех координат x, y, z как функций времени t,

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \qquad (2.1)$$

или к нахождению одной векторной функции

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t). \qquad (2.2)$$

Однако для формулировки основных законов механики, с помощью которых теоретически могут быть найдены рассматриваемые функции, существенны два новых понятия – понятие *скорости* и в особенности понятие *ускорения.* К установлению этих понятий мы и перейдем.

§ 3. Скорость и ускорение при прямолинейном движении. Угловая скорость и угловое ускорение

1. Рассмотрим сначала частный случай, когда материальная точка движется вдоль прямой линии. Примем эту прямую за координатную ось X, поместив начало координат O в какой-то произвольной точке ее (рис. 5). Положение материальной точки в рассматриваемом случае определяется

ваясь в этот вопрос, ограничимся замечанием, что, по-видимому, нет существенных нарушений геометрии Евклида в областях порядка размеров нашей *Галактики* (10^{21} м) и даже *Метагалактики,* т.е. части Вселенной, доступной исследованию с помощью современных наиболее мощных оптических и радиотелескопов (10^{26} м). Точно так же нет оснований ожидать существенных нарушений геометрии Евклида и в субатомных областях размером, скажем, порядка 10^{-15} м.

Световые лучи при определении положения удаленных тел выполняют и другую важную функцию. Они служат теми материальными объектами, с помощью которых конструируется сама система отсчета. Действительно, твердые стержни не могут быть неограниченно длинными, а потому они не пригодны в качестве координатных осей во всем пространстве. Эту роль берут на себя световые лучи, являющиеся продолжениями в нужных направлениях координатных осей, превоначально реализованных твердыми стержнями.

5. В связи с изложенным целесообразно сделать одно замечание о связи физики с математикой. Математика играет исключительно важную роль в физике. Без нее современная физика немыслима. Однако необходимо правильно представлять себе истинную роль математики в физике, и к этому вопросу мы еще будем неоднократно возвращаться. Чистая математика имеет дело с абстрактными объектами и понятиями, подчиняющимися определенной системе аксиом. Единственное требование, предъявляемое в чистой математике к ее понятиям и аксиомам, сводится к их *логической непротиворечивости.* Все свои результаты чистая математика получает из этих аксиом путем логических рассуждений, основанных на правилах формальной логики. Содержание этих результатов, очевидно, не может выйти за пределы логических связей между различными объектами и понятиями чистой математики. В этом смысле чистая математика является логически *замкнутой дисциплиной.* Такая замкнутость и логическая согласованность придают чистой математике эстетическую привлекательность и доставляют чувство глубокого удовлетворения всякому уму, воспитанному в духе математической строгости.

Надо, однако, заметить, что строго замкнутая сама в себе математика оторвана от реальной действительности и не может быть использована в других науках и практической деятельности человека. Чтобы математика стала мощным средством при описании и изучении явлений природы, каким она в действительности является, необходимо установить связи между абстрактными метаматическими объектами и понятиями, с одной стороны, и реальными объектами и явлениями природы – с другой. Математические понятия и объекты должны появляться не как чисто логические категории, а как *абстракции каких-то реальных объектов или процессов природы.* Так, точка является абстракцией физического тела достаточно малых размеров, прямая линия – абстракцией достаточ-

но тонкого прямого твердого стержня или светового пучка в однородной среде. Вопрос о справедливости математики сводится к справедливости ее аксиом. Справедливость же самих аксиом может быть установлена опытным и только опытным путем.

Правда, опыт с математическими объектами нельзя осуществить в чистом виде, поскольку эти объекты являются идеализациями и не встречаются в природе. Всякий опыт выполняется с реальными телами. Математическую строгость, которой, и не без оснований, так гордятся математики, надо понимать в смысле логической согласованности ее выводов, но не в смысле обоснования математических аксиом.

Одной математической строгости недостаточно для физики, как и для всякой другой опытной науки, имеющей дело с реальными объектами и явлениями природы. *Всякое теоретическое исследование, даже выполненное математически строго, никогда не может считаться и физически строгим.* Во-первых, такие исследования всегда основываются на определенных законах, справедливость которых в конце концов доказывается опытным путем, а опыты и физические измерения неизбежно сопровождаются погрешностями, т.е. выполняются с ограниченной точностью. Вне пределов этой точности физический закон может оказаться неверным. Во-вторых, всякий реальный физический объект характеризуется бесконечным разнообразием свойств. Учесть все эти свойства невозможно не только потому, что большинство из них нам просто неизвестно, но и потому, что это практически неосуществимо. *При построении теории физика заменяет реальные объекты их идеализированными моделями, приблизительно правильно передающими не все свойства реальных объектов, а только те из них, которые существенны в рассматриваемом круге вопросов. Какие свойства реальных объектов существенны, а какие не играют заметной роли – на этот вопрос в конце концов может ответить только опыт, которому принадлежит решающее слово в вопросе о правильности всякой физической теории и пределах ее применимости.* Если физический закон применен вне области, где он справедлив, а идеализированная модель правильно передает не все свойства реальных объектов, существенные для рассматриваемого круга явлений, то возникающие вследствие этого пороки теории, понятно, не могут быть исправлены никакой строгостью математических рассуждений и расчетов.

Последнее замечание имеет и практическую ценность. Конечно, после того как идеализированная модель построена, не будет ошибкой производить все дальнейшие расчеты математически абсолютно точно, хотя бы при этом и использовались физические законы, верные только приближенно. Однако сплошь и рядом такие расчеты очень громоздки и даже практически неосуществимы из-за их сложности. Между тем точность уже обесценена неточностью физических законов и несовершенствами идеализированной модели, положенной в основу расчета. Можно и нужно перейти к прибли-

П р и м е р 2. $x = Bt + C$, где B и C – постоянные коэффициенты. В этом случае говорят, что координата x является *линейной функцией времени* t. Очевидно,

$$x + \Delta x = B(t + \Delta t) + C = (Bt + C) + B\Delta t,$$

$$\Delta x = B\Delta t, \quad v_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = B.$$

Средняя скорость постоянна и равна B. Поэтому истинная скорость также постоянная и равна средней скорости:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_{\text{ср}} = B.$$

Движение с постоянной скоростью называется *равномерным.* Обозначим посредством x_0 значение координаты x в начальный момент времени $t = 0$. Величина x_0 называется *начальной координатой* и, очевидно, $x_0 = C$. Пройденный путь s определяется приращением координаты, $s = x - x_0 = Bt$, или

$$s = vt.$$

П р и м е р 3. $x = At^2 + Bt + C$, где A, B и C – постоянные коэффициенты. В этом случае говорят, что координата x является *квадратичной функцией времени* t. Очевидно,

$$x + \Delta x = A(t + \Delta t)^2 + B(t + \Delta t) + C =$$
$$= (At^2 + Bt + C) + (2At + B)\Delta t + A(\Delta t)^2,$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = (2At + B) + A\Delta t.$$

Здесь $v_{\text{ср}}$ зависит не только от t, но и от Δt. В пределе, когда $\Delta t \to 0$, член $A\Delta t$ обращается в нуль, и мы получаем следующее выражение для истинной скорости:

$$v = 2At + B.$$

Истинная скорость является линейной функцией времени t, а потому, дифференцируя ее, получаем постоянное значение для ускорения:

$$a = \frac{dv}{dt} = 2A.$$

Движение с постоянным ускорением называется *равноускоренным.* Постоянная A равна половине ускорения: $A = a/2$. Выясним теперь физический смысл постоянных B и C. При $t = 0$ наши формулы дают $v = B$. Скорость в момент времени $t = 0$ называется *начальной скоростью* и обозначается

через v_0. Мы видим, что постоянная B равна начальной скорости: $B = v_0$. Аналогично доказывается, что постоянная C есть начальная координата движущейся точки: $C = x_0$. С введением этих величин можно написать

$$x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0, \quad v = at + v_0.$$

Пройденный путь равен $s = x - x_0$, т.е.

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0 t.$$

Примерами равноускоренного движения могут служить свободное падение тел и скатывание тела по наклонной плоскости без трения. С возрастанием высоты падения постоянство ускорения нарушается сопротивлением воздуха, а также неоднородностью поля тяготения.

3. По аналогии с *линейной* скоростью и ускорением вводятся *угловая скорость* и *угловое ускорение.* Эти понятия относятся к случаю движения материальной точки по окружности. Положение точки M на окружности можно задать углом α, который образует радиус-вектор OM с каким-либо

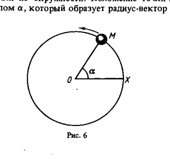


Рис. 6

неизменным направлением OX (рис. 6). Производная этого угла по времени

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$$

называется *угловой скоростью.* Вращение называется *равномерным,* если угловая скорость ω постоянна. В этом случае $\alpha = \omega t + \text{const}$. При равномерном вращении величину ω называют также *угловой частотой вращения.* Величина $\nu = \omega/2\pi$ дает число оборотов в единицу времени и называется

женным расчетам. Такие расчеты столь же хороши, что и "точные", если их погрешности не превосходят погрешностей, обусловленных неточностью применяемых физических законов и несовершенствами идеализированных моделей.

Многие понятия и открытия, которыми по справедливости так гордится математика, не имеют никакого смысла, когда речь заходит о применении этих понятий к реальным объектам. Сюда относится, например, понятие иррационального числа. Лишено содержания утверждение, что физическая величина имеет иррациональное значение. Такое утверждение не может быть проверено. Одних только рациональных чисел достаточно, чтобы представить результаты измерений, выполненных со сколь угодно высокой степенью точности. Кроме того, понятие физической величины может утратить смысл, если к ее измерению предъявить требования неоправданно высокой точности. Так, например, совсем не ясно, о чем идет речь, если поставить задачу об измерении длины твердого стержня с погрешностью до размеров электрона или даже атома. Принципиально неограниченная точность измерения длин имеет смысл для абстрактных прямолинейных отрезков геометрии, а не для реальных тел, имеющих атомистическую структуру.

6. Перейдем к вопросу об измерении *времени.* Как и всякая физическая величина, время количественно характеризуется некоторыми числами. Задача прежде всего состоит в том, чтобы выяснить, с помощью каких принципиальных измерительных операций эти числа могут быть получены. Тем самым устанавливается и точный смысл самих этих чисел.

Под временем в количественном смысле этого слова мы будем понимать показания каких-то часов. Точнее, надо говорить не о самом времени, а о *промежутке времени* между двумя событиями или моментами времени. Он характеризуется *разностью* показаний часов в рассматриваемые моменты времени. Когда говорят просто о времени, не указывая оба момента, являющихся границами рассматриваемого промежутка времени, то предполагают, что один из этих моментов фиксирован и условно принят за начальный. От него и ведется отсчет времени. Часы здесь понимаются в более широком смысле слова, чем в обыденной жизни. *Под часами понимают любое тело или систему тел, в которых совершается периодический процесс, служащий для измерения времени.* Примерами таких процессов могут служить колебания маятника с постоянной амплитудой, вращение Земли вокруг собственной оси относительно Солнца или звезд, колебания атома в кристаллической решетке, колебания электромагнитного поля, представляемого достаточно узкой спектральной линией, и пр. Так, если между двумя событиями Земля при вращении относительно звезд сделала один оборот, то говорят, что промежуток времени между этими двумя событиями составляет *звездные сутки.* Если при этом она совершила 10 оборотов, то соответствующий промежуток времени – 10 звездных суток, и т.д. Если в течение звездных суток маятник совершил приблизительно

86 164 колебания, то говорят, что период одного колебания составляет *одну секунду,* и т.д. От звездных суток следует отличать *солнечные сутки.* Так называется промежуток времени, в течение которого Земля делает один оборот при вращении вокруг собственной оси относительно Солнца. Ввиду того что Земля движется вокруг Солнца не по круговой, а по эллиптической орбите, это ее движение не совсем равномерно (см. § 55). Это значит, что солнечные сутки изо дня в день несколько изменяются в течение года. Поэтому при измерении времени пользуются так называемыми *средними солнечными сутками.* Они составляют 24 ч = 1440 мин = = 86 400 с.

К часам предъявляют требования, чтобы они шли "равномерно". Но что значит – часы идут равномерно? Говорят, что это – периодический процесс, служащий для отсчета времени; он должен повторяться через строго одинаковые промежутки времени. Однако это не есть ответ на вопрос, так как убедиться в одинаковости следующих друг за другом промежутков времени можно только в том случае, когда мы уже располагаем равномерно идущими часами. Выйти из этого логического круга можно только путем определения, так как никакого априорного представления о равномерном течении времени не существует. Надо условиться считать какие-то часы *по определению* равномерно идущими. Такие часы должны рассматриваться как *эталонные* или основные часы, по которым должны градуироваться все остальные.

В принципе любые часы могут быть приняты за эталонные. Однако так поступать не целесообразно. Эталонные часы должны быть достаточно "хорошими" и прежде всего обладать *высокой воспроизводимостью.* Это означает, что если изготовить с возможной тщательностью много "одинаковых" эталонных часов, то они с большой точностью должны идти одинаково, независимо от того, изготовлены ли они одновременно или между моментами их изготовления прошло длительное время. Например, песочные часы дают несравненно худшую воспроизводимость, чем маятниковые часы.

Не так давно за основные или эталонные часы принимались *астрономические часы.* Долгое время основными часами служила Земля, вращающаяся вокруг собственной оси относительно звезд, а основной единицей времени – *сутки.* Недавно вместо осевого вращения Земли стали пользоваться ее орбитальным движением вокруг Солнца, принимая за основную единицу времени *тропический год,* т.е. промежуток времени между двумя последовательными прохождениями центра Солнца через *точку весеннего равноденствия.* При измерении времени таким путем достигалась лучшая воспроизводимость. Но еще лучшая воспроизводимость была достигнута после изобретения *кварцевых, молекулярных* и *атомных часов.*

Все эти часы представляют довольно сложные радиотехнические устройства. Здесь нет необходимости останавливаться на принципах действия и

годографу скорости. Можно сказать, что *ускорение есть скорость движения скоростной точки по годографу.* Следовательно, *все соотношения и теоремы, полученные для скорости, остаются справедливыми и для ускорения, если в них произвести замену величин и терминов согласно следующей таблице:*

Материальная точка	→Скоростная точка
Радиус-вектор	→Вектор скорости
Траектория	→Годограф
Скорость	→Ускорение

3. В качестве простейшего примера найдем ускорение точки, равномерно вращающейся по окружности радиуса r (рис. 9*а*). Скорость $\mathbf{v}$ направлена по касательной к окружности, ее модуль определяется выражением

$$v = \omega r = \frac{2\pi r}{T}. \qquad (4.5)$$

Годографом будет окружность радиуса v (рис. 9*б*). Когда материальная точка M вращается по окружности радиуса r, соответствующая ей скоростная точка A вращается в том же направлении по окружности радиуса v, описывая эту окружность за то же время T. Положениям материальной точки на траектории M_1, M_2, M_3, M_4 соответствуют на годографе положения скоростной точки A_1, A_2, A_3, A_4. Ускорение $\boldsymbol{a}$ направлено по касательной к окружности – годографу и притом, как видно из рисунка, к центру O траектории вращающейся точки M. По аналогии с формулой (4.5) для модуля ускорения можно написать

$$a = \omega v = \frac{2\pi v}{T} = \frac{v^2}{r}. \qquad (4.6)$$

Это известная формула для *центростремительного ускорения.* Ее можно записать в векторной форме:

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2 \boldsymbol{r}. \qquad (4.7)$$

Знак минус указывает на то, что направления векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{r}$ взаимно противоположны, т.е. ускорение $\boldsymbol{a}$ направлено к центру круговой траектории, по которой вращается материальная точка. Можно также написать для любого положения движущейся точки

$$\boldsymbol{a} = \frac{v^2}{r}\boldsymbol{n}, \qquad (4.8)$$

где $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор нормали к круговой траектории движущейся точки, направленный к центру O (см. рис. 9*а*).

Имея в виду дальнейшие обобщения, представим вектор скорости в виде $\mathbf{v} = v\boldsymbol{s}$, где $\boldsymbol{s}$ – единичный вектор касательной к окружности. Первый

Рис. 9

множитель v есть модуль вектора скорости, второй множитель $\boldsymbol{s}$ указывает направление. При равномерном вращении модуль вектора скорости v остается неизменным, меняется только направление скорости, т.е. единичный вектор $\boldsymbol{s}$. Дифференцированию подлежит только этот вектор, а потому $\boldsymbol{a} = v\dfrac{d\boldsymbol{s}}{dt}$. Сравнивая это выражение с (4.8), получим

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{dt} = \frac{v}{r}\boldsymbol{n}. \qquad (4.9)$$

Обозначим через ds длину пути, проходимого материальной точкой за время dt при ее вращении по окружности. Эта положительная величина равна $ds = v\,dt$. Поэтому предыдущую формулу можно переписать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{ds} = \frac{1}{r}\boldsymbol{n}. \qquad (4.10)$$

В этом виде формула не содержит никаких кинематических величин. В нее входят только геометрические величины, характеризующие окружность. Поэтому она может быть получена чисто геометрически без привлечения кинематических понятий. Она определяет производную единичного вектора касательной $\boldsymbol{s}$ по длине дуги окружности. Взаимная перпендикулярность векторов $\boldsymbol{s}$ и $\dfrac{d\boldsymbol{s}}{ds}$ $\left(\text{или } \dfrac{d\boldsymbol{s}}{dt}\right)$ объясняется тем, что длина вектора $\boldsymbol{s}$ постоянна, меняется только направление этого вектора. Треуголь-

находятся в точке A, а другие – в точке B. Но часы 1 и 2 должны быть заранее синхронизованы. Получился заколдованный круг. Поэтому способ синхронизации путем переноса часов не годится.

Остается *синхронизация часов с помощью сигналов.* Можно, например, поступить следующим образом. В произвольный момент времени t_A по часам A послать какой-то сигнал к часам B. В момент прихода сигнала часы B поставить так, чтобы они показывали время $t_B = t_A + \tau_{AB}$, где τ_{AB} – время, затрачиваемое сигналом на прохождение расстояния от A до B. Тогда часы A и B будут синхронизованы между собой. Однако для осуществления такой синхронизации надо знать время τ_{AB}. Но это время можно измерить только после того, как часы A и B уже синхронизованы. Получился опять заколдованный круг. Эйнштейн указал, что выйти из этого круга можно *только путем определения* понятия одновременности. Дорелятивистская физика считала, что одновременность событий абсолютна и является чем-то само собой разумеющимся. Эйнштейн указал, что это заблуждение. Смысл одновременности событий не требует разъяснения только тогда, когда эти события происходят в одном и том же месте пространства. Если же события происходят в различных местах пространства, то надо условиться, какие события называть одновременными. Очевидно, вопрос об одновременности пространственно разделенных событий эквивалентен вопросу о синхронизации пространственно разделенных часов.

Решение всякого вопроса, сводящегося к определению, содержит некоторый произвол. Это полностью относится и к вопросу об определении одновременности пространственно разделенных событий. Объективное содержание законов природы, разумеется, не может зависеть ни от каких произвольных определений. Определения могут влиять только на форму законов. Надо стремиться вводить такие определения, чтобы форма законов была наиболее проста и легко обозрима. Это требование почти однозначно вынуждает принять определение одновременности, предложенное Эйнштейном в теории относительности.

Эйнштейн пользуется для синхронизации часов световыми сигналами в вакууме. Время, затрачиваемое сигналом на пути от A до B и обратно, очевидно, равно $\tau = \tau_{AB} + \tau_{BA}$, где τ_{BA} – время, которое он затрачивает на прохождение от B к A. Для измерения времени τ достаточны только одни часы A, и никакой предварительной синхронизации не требуется. Но время τ_{AB} и τ_{BA} можно измерить лишь после того, как часы A и B синхронизованы. Пока они еще не синхронизованы, можно потребовать, чтобы между τ_{AB} и τ_{BA} соблюдалось какое-то соотношение. Тогда из этого соотношения и соотношения $\tau = \tau_{AB} + \tau_{BA}$ найдутся времена τ_{AB} и τ_{BA} в отдельности. Тем самым часы A и B будут синхронизованы и установлено понятие одновременности пространственно разделенных событий. *Эйнштейн полагает по определению, что* $\tau_{AB} = \tau_{BA}$, *т.е. что свет*

в направлениях от A к B и от B к A распространяется с одной и той же скоростью. Тогда $\tau_{AB} = \tau_{BA} = \tau/2$, и следовательно, $t_B = t_A + \tau/2$. Для бесконечно быстрых сигналов $\tau = 0$, а потому $t_A = t_B$. Одновременность, устанавливаемая с помощью таких сигналов, была бы абсолютной. Однако бесконечно быстрых сигналов не существует.

Синхронизация часов по Эйнштейну не требует предварительного измерения скорости света. Ее можно осуществить также следующим способом. Пусть C – точка, находящаяся на середине отрезка между точками A и B (неподвижными друг относительно друга). Произведем в C световую вспышку. *По определению* свет от нее достигнет точек A и B одновременно. Если в момент прихода света к часам A и B их показания сделать одинаковыми, то они будут синхронизованы между собой.

Необходимо подчеркнуть, что в основе обоих способов синхронизации часов (иначе определения одновременности) лежит предположение об *однородности* и *изотропии пространства* и об *однородности времени.* Однородность пространства означает, что в нем все пространственные точки эквивалентны, т.е. ничем не выделены одна от другой. Однородность времени означает то же самое по отношению к любым моментам времени. Наконец, изотропия пространства характеризуется отсутствием в нем выделенных направлений – все направления в пространстве эквивалентны. Поэтому-то при определении одновременности и использовались световые сигналы в вакууме и притом в отсутствие гравитационного поля, так как наличие последнего уже нарушает указанную однородность и изотропию пространства.

Теперь нетрудно убедиться в эквивалентности приведенных выше двух способов синхронизации часов. Сформулируем прежде всего основной постулат, являющийся следствием однородности и изотропии пространства и однородности времени. На прохождение отрезков равной длины свет затрачивает в вакууме одно и то же время, независимо от того, где эти отрезки расположены, как они ориентированы и в какое время в них распространяется свет. Следствием этого постулата является утверждение, что свет затрачивает в вакууме одно и то же время на прохождение отрезка в прямом и противоположном направлении.

Приведем теперь доказательство эквивалентности обоих способов определения одновременности, хотя оно почти и самоочевидно. По-прежнему будем предполагать такое же расположение точек A, B, C. Допустим сначала, что применяется первый способ синхронизации часов. Тогда $\overrightarrow{\tau}_{AB} = \overleftarrow{\tau}_{BA}$, или $\overrightarrow{\tau}_{AC} + \overrightarrow{\tau}_{CB} = \overleftarrow{\tau}_{BC} + \overleftarrow{\tau}_{CA}$. Для наглядности над временами поставлены стрелки, указывающие направление (слева направо и справа налево) распространения светового сигнала. Так как $AB = BC$, то на основании основного постулата $\overrightarrow{\tau}_{AC} = \overleftarrow{\tau}_{BC}$. Поэтому $\overleftarrow{\tau}_{CA} = \overrightarrow{\tau}_{CB}$. Но это есть второй способ синхронизации часов.

есть вектор, направленный по касательной к траектории. Этот вектор называется *касательным* или *тангенциальным ускорением.* Второе слагаемое

$$\boldsymbol{a}_n = \frac{v^2}{r}\boldsymbol{n} \qquad (4.13)$$

есть вектор, направленный вдоль главной нормали в сторону вогнутости траектории. Он называется *нормальным ускорением.* Таким образом, в общем случае *ускорение* $\boldsymbol{a}$ *можно представить в виде геометрической суммы тангенциального и нормального ускорений:*

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n. \qquad (4.14)$$

Тангенциальное ускорение меняет скорость только по модулю, нормальное ускорение меняет ее только по направлению.

Рисунок 11 поясняет разложение полного ускорения на тангенциальное и нормальное. Пусть $\mathbf{v}$ – скорость материальной точки в момент времени t, когда она находилась в положении M. Обозначим через $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ скорость той же точки в момент $t + \Delta t$, когда она переместилась в положение M_1 (не обозначенное на рисунке). Отложим оба вектора $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_1$ из одной и той же точки M и разложим приращение $\Delta\mathbf{v}$ скорости на две составляющие: составляющую $\Delta\mathbf{v}_t$ вдоль вектора $\mathbf{v}$ и составляющую $\Delta\mathbf{v}_n$, перпендикулярную к этому вектору. При уменьшении Δt оба отношения $\dfrac{\Delta \boldsymbol{v}_t}{\Delta t}$ и $\dfrac{\Delta \boldsymbol{v}_n}{\Delta t}$ будут стремиться к определенным пределам. Первый из них есть тангенциальное, а второй – нормальное ускорение.

При вычислении скорости точки бесконечно малую дугу траектории можно аппроксимировать бесконечно коротким прямолинейным отрезком,

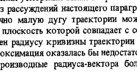


Рис. 11

направление которого совпадает с направлением касательной к траектории. При определении ускорения такая аппроксимация уже не годится. Однако, как видно из рассуждений настоящего параграфа, при вычислении ускорения бесконечно малую дугу траектории можно аппроксимировать дугой окружности, плоскость которой совпадает с соприкасающейся плоскостью, а радиус равен радиусу кривизны траектории в рассматриваемой точке. Но и такая аппроксимация оказалась бы недостаточной, если бы потребовалось вычислить производные радиуса-вектора более высокого порядка: $\dddot{\boldsymbol{r}}$, $\ddddot{\boldsymbol{r}}$ и т.д.

ЗАДАЧИ

1. Шарик, которому сообщена горизонтальная скорость v, падает на горизонтальную плиту с высоты h. При каждом ударе о плиту теряется часть скорости (отношение вертикальной составляющей скорости после удара к ее значению до удара постоянна и равна α).

Определить, на каком расстоянии x от места бросания отскоки шарика прекратятся. Считать, что трение отсутствует, так что горизонтальная составляющая скорости шарика v не меняется.

О т в е т: $x = v\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\,\dfrac{1 + \alpha}{1 - \alpha}$.

2. Точка движется в плоскости, причем ее прямоугольные координаты определяются уравнениями

$$x = A\cos\omega t, \quad y = B\sin\omega t, \qquad (4.15)$$

где A, B, ω – постоянные. По какой траектории движется точка? Вычислить ее ускорение.

Р е ш е н и е. Исключая время t из уравнений (4.15), находим

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Точка движется по эллипсу. Ее радиус-вектор $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$, а ускорение $\boldsymbol{a} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j}$. Дифференцирование дает

$$\dot{x} = -\omega A\sin\omega t, \quad \ddot{x} = -\omega^2 A\cos\omega t = -\omega^2 x,$$
$$\dot{y} = \omega B\cos\omega t, \quad \ddot{y} = -\omega^2 B\sin\omega t = -\omega^2 y.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = -\omega^2\boldsymbol{r}. \qquad (4.16)$$

Ускорение направлено к центру эллипса и пропорционально r. В частном случае $A = B$ – эллипс вырождается в круг, а формула (4.16) переходит в известную формулу для центростремительного ускорения при равномерном вращении по кругу.

3. Точка с постоянной по модулю скоростью v движется по эллипсу с полуосями A и B. Найти ее ускорение в вершинах эллипса.

Р е ш е н и е. В вершинах эллипса ускорение только нормальное. Его можно найти по общей формуле (4.13) и притом в любой точке эллипса. Однако в вершинах эллипса поучительно получить решение, воспользовавшись тем обстоятельством, что эллипс может быть получен однородным растяжением или сжатием круга. Возьмем круг радиуса $r = B$ и равномерно растянем его параллельно оси X (рис. 11а) в A/B раз. Получится эллипс с полуосью A, параллельной оси X. Бесконечно малая дуга CED круга перейдет в дугу $C'E'D'$ эллипса. Время движения точки вдоль этих дуг будет одно и то же. Одинаковы будут и скорости точки в положениях E и E'. Однако нормальное смещение FE перейдет в $F'E'$, т.е. увеличится в A/B раз. В такое же число раз увеличится нормальное ускорение. В точке E' оно будет $a = (v^2/r)A/B = Av^2/B^2$. Сжимая круг радиуса A вдоль оси Y, таким же путем получаем ускорение в точке пересечения эллипса с малой осью. Оно равно $a = Bv^2/A^2$.

4. Установить связь между звездными и средними солнечными сутками. *Звездный год,* т.е. промежуток времени, в течение которого Солнце совершает свой видимый путь по небесной сфере относительно звезд, составляет 365, 2564 средних солнечных одной координатой:

$$x = x(t). \tag{3.1}$$

Пусть в какой-то фиксированный момент времени t материальная точка находится в положении A_1. В этот момент ее координата равна $x_1 = x(t)$. В более поздний момент времени $t + \Delta t$ материальная точка переместится в положение A_2 с координатой $x_2 = x(t + \Delta t)$. За время Δt материальная точка проходит путь $\Delta x = x_2 - x_1 = x(t + \Delta t) - x(t)$. Он считается положительным, если перемещение совершается вправо, и отрицательным, если оно происходит влево. Отношение пройденного пути Δx

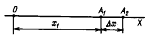


Рис. 5

к промежутку времени Δt называется *средней скоростью материальной точки за время* Δt, или, точнее, *за время между* t *и* $t + \Delta t$. Таким образом, по определению средняя скорость равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \tag{3.2}$$

Такое определение средней скорости имеет смысл для любых значений Δt. Надо исключить только значение $\Delta t = 0$, так как в этом случае для средней скорости мы получили бы выражение $\frac{0}{0}$, которое само по себе не имеет никакого смысла. Однако ничто не мешает брать промежуток времени Δt как угодно малым, но отличным от нуля. Вообще говоря, средняя скорость зависит не только от t, но и от Δt. Будем теперь, оставляя момент времени t неизменным, брать промежуток времени Δt все меньше и меньше, устремляя его к нулю. Тогда будет стремиться к нулю и проходимый путь Δx. Отношение же $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ при этом, как показывает опыт, будет стремиться к вполне определенному пределу, который может зависеть только от t, но уже не будет зависеть от Δt. Этот предел называется *истинной* или *мгновенной скоростью материальной точки в момент времени* t:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \tag{3.3}$$

Пределы типа (3.3) встречаются в самых разнообразных вопросах математики и ее приложениях. В математике предел, определяемый формулой (3.3), называется *производной* функции $x(t)$ по аргументу t. Производная по времени обозначается символом $\dot{x}(t)$ или $\frac{dx}{dt}$. Таким образом, по определению

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{3.4}$$

Понятие производной является основным понятием *дифференциального исчисления*. Используя это понятие, можно сказать, что *истинная* или *мгновенная скорость* v есть производная координаты x по времени, или производная пройденного пути s по времени:

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}. \tag{3.5}$$

Скорость материальной точки, вообще говоря, является функцией времени: $v = v(t)$. Производная скорости по времени называется *ускорением материальной точки*. Ускорение мы обозначаем через a. Таким образом, по определению ускорения

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}(t), \tag{3.6}$$

или

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}. \tag{3.7}$$

Производная (3.6) называется также *второй производной* координаты x по времени и обозначается символами

$$a = \ddot{x} \equiv \frac{d^2 x}{dt^2}. \tag{3.8}$$

В существовании первой и второй производных координаты по времени в механике, как и во всех аналогичных вопросах физики, мы убеждаемся не путем логических рассуждений, а опытным путем.

2. Рассмотрим простейшие примеры.

Пример 1. $x = \text{const}$, т.е. координата x остается постоянной во времени. В этом случае материальная точка неподвижна, приращение координаты Δx равно нулю. Равны нулю также средняя и истинная скорости точки: $v = \dot{x} = 0$. Вообще, производная всякой постоянной величины равна нулю.

полняются абсолютно точно. Координаты x, y, z являются длинами, а потому их нахождение сводится к измерению длин, т.е. к определению тех чисел, с помощью которых характеризуются длины. Когда мы говорим об измерении длин, то имеем в виду следующую измерительную операцию. Некоторый твердый стержень условно принимается за эталон, а его длина – за единицу длины. При измерении длины тела в каком-либо направлении определяется число, показывающее, сколько раз в этом направлении в теле укладывается выбранный эталон. Это число и называется длиной тела в рассматриваемом направлении. Если оно не целое, то предварительно длину эталона следует разделить на более мелкие части: десятые, сотые и пр. Используя их наряду с самим эталоном, можно представить длину всякого тела в виде десятичной дроби или целого числа с десятичной дробью.

4. Измерение длины непосредственным прикладыванием эталона или его частей называется *прямым измерением*. Прямые измерения не всегда возможны. Так, они невозможны при измерении расстояний до удаленных тел, например планет, звезд и других небесных объектов. Они невозможны и при измерении очень малых длин, например таких, с которыми имеет дело физика атома, атомного ядра или элементарных частиц. Во всех этих случаях используют *косвенные методы*. Правильность таких методов должна контролироваться прямыми методами (разумеется, в тех случаях, когда последние применимы). За пределами же применимости прямых методов остаются одни только косвенные методы. Здесь прямые измерительные операции, с помощью которых первоначально

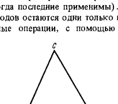


Рис. 3

было введено количественное понятие длины, становятся чисто умозрительными, а косвенные методы фактически играют роль основных принципиальных измерительных операций, которыми раскрывается смысл самих длин, или, точнее, тех чисел, которыми длины характеризуются.

Примером косвенного метода может служить *триангуляция*, применяемая для измерения расстояний до удаленных предметов. Прямым методом измеряют длину "базы" AB (рис. 3), с концов которой делают "засечки" удаленного объекта C, т.е. измеряют углы α и β между ба-

зой AB и прямыми AC и BC. По этим данным искомое расстояние до объекта C может быть найдено геометрическим построением или вычислено по формулам геометрии. Если база AB настолько велика, что ее длина не может быть найдена прямым измерением, то можно выбрать более короткую базу и затем найти длину базы AB описанным косвенным методом. Принципиально это ничего не меняет. Более существенно уяснить теоретическую основу метода. В методе предполагается, что сторонами треугольника ABC являются *прямые линии, подчиняющиеся аксиомам геометрии Евклида*. Но какими материальными объектами реализуются эти стороны? Такими объектами являются световые лучи, приходящие от объекта C к точкам A и B. Следовательно, в основе рассматриваемого способа лежит гипотеза, что световые лучи прямолинейны, т.е. подчиняются тем же аксиомам геометрии Евклида, что и геометрические прямые линии. Но эта гипотеза не очевидна. Доказать или опровергнуть ее можно только опытным путем. При этом имеются в виду световые лучи в вакууме, а не лучи в атмосфере, где они действительно искривляются из-за изменения показателя преломления от точки к точке. Такое искривление лучей может быть учтено и действительно учитывается, когда точность измерений этого требует.

Как можно убедиться в применимости или неприменимости геометрии Евклида к реальному миру в указанном выше смысле? Прямой метод состоит в том, что надо подвергнуть экспериментальной проверке следствия, выводимые из аксиом геометрии Евклида. Одним из таких следствий является, например, теорема, утверждающая, что сумма внутренних углов треугольника равняется 180°. Великий немецкий математик, астроном и физик Карл Гаусс (1777–1855) измерял в 1821–1823 гг. со всей возможной тщательностью внутренние углы треугольника, образованного тремя удаленными горными вершинами. Длины сторон треугольника были порядка 100 км. Он нашел, что в пределах ошибок измерений не наблюдалось нарушений указанной теоремы. Этот метод не годится в масштабах Солнечной системы и бо́льших, так как все измерения производятся с Земли, и мы не можем непосредственно измерить все три внутренних угла треугольника, вершинами которого помимо Земли являются, например, какие-либо две планеты или звезды. Здесь мы судим о применимости геометрии Евклида на основании косвенных данных – по согласованности различных результатов, полученных с использованием такой геометрии. Так, можно предвычислить движение планет Солнечной системы на много лет вперед и проверить полученные предсказания. Если бы они не оправдались, то одной из причин могла бы быть неприменимость геометрии Евклида к областям пространства порядка размеров Солнечной системы. Наоборот, согласие с опытом (что на самом деле имеет место) указывает на то, что сомневаться в применимости геометрии Евклида в областях такого размера нет оснований. Не вда-

частотой обращения. Величина $T = 1/\nu$ есть продолжительность одного обращения и называется *периодом вращения*.

Первая производная угловой скорости ω или вторая производная угла α по времени называется *угловым ускорением:*

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Если s означает длину дуги окружности XM, то ее производные $v = \frac{ds}{dt}$ и $a = \frac{d^2 s}{dt^2}$ дают линейную скорость и линейное ускорение при движении точки по окружности. Если r – радиус окружности, то $s = r\alpha$. Дифференцируя это соотношение по времени, находим

$$v = \omega r, \quad a = \dot{\omega} r.$$

§ 4. Скорость и ускорение при криволинейном движении

1. Понятия скорости и ускорения естественным образом обобщаются на случай движения материальной точки по *криволинейной траектории*. Положение движущейся точки на траектории мы будем задавать радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$, проведенным в эту точку из какой-либо неподвижной точки O, условно принимаемой за начало координат (рис. 7). Пусть в момент времени t материальная точка находится в положении M с радиусом-вектором $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Спустя короткое время Δt она переместится в положение M_1 с радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}(t + \Delta t)$. Радиус-вектор материальной точки получит приращение, определяемое геометрической разностью $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}$.

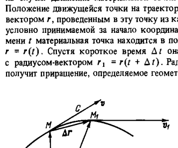


Рис. 7

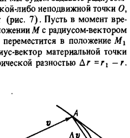


Рис. 8

Величина

$$\mathbf{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \tag{4.1}$$

называется *средней скоростью движения за время* Δt или, точнее, *за время между* t *и* $t + \Delta t$. Она является величиной *векторной*, так как получается делением вектора $\Delta \boldsymbol{r}$ на скаляр Δt. Направление средней скорости $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ совпадает с направлением хорды MM_1, т.е. с $\Delta \boldsymbol{r}$.

Предел средней скорости при $\Delta t \to 0$, т.е. производная радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ по времени

$$\mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{4.2}$$

называется *истинной* или *мгновенной скоростью материальной точки. Истинная скорость есть вектор, направленный по касательной к траектории движущейся точки.*

Совершенно аналогично определяется ускорение при криволинейном движении. *Ускорением* $\boldsymbol{a}$ *называется вектор, равный первой производной вектора скорости* $\mathbf{v}$ *или второй производной радиуса-вектора* $\boldsymbol{r}$ *по времени*:

$$\boldsymbol{a} = \dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}, \tag{4.3}$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2}. \tag{4.4}$$

2. Отметим следующую формальную аналогию между скоростью и ускорением. Из произвольной неподвижной точки O_1 будем откладывать вектор скорости $\mathbf{v}$ движущейся точки во всевозможные моменты времени (рис. 8). Конец вектора $\mathbf{v}$ назовем *скоростной точкой*. Геометрическое место скоростных точек есть кривая, называемая *годографом скорости*. Когда материальная точка описывает траекторию, соответствующая ей скоростная точка движется по годографу. Рис. 8 отличается от рис. 7 только обозначениями. Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ заменен на вектор скорости $\mathbf{v}$, материальная точка – на скоростную точку, траектория – на годограф. Математические операции над вектором $\boldsymbol{r}$ при нахождении скорости и над вектором $\mathbf{v}$ при нахождении ускорения совершенно тождественны. Для математики безразлично, какой физический смысл имеют величины, над которыми выполняются математические операции. Не имеет значения также, какими символами эти величины обозначены. Для нахождения скорости $\mathbf{v}$ надо дифференцировать радиус-вектор $\boldsymbol{r}$, для нахождения ускорения надо дифференцировать вектор скорости $\mathbf{v}$. Скорость $\mathbf{v}$ направлена по касательной к траектории. Поэтому *ускорение* $\boldsymbol{a}$ *будет направлено по касательной к*

женным расчетам. Такие расчеты столь же хороши, что и "точные", если их погрешности не превосходят погрешностей, обусловленных неточностью применяемых физических законов и несовершенствами идеализированных моделей.

Многие понятия и открытия, которыми по справедливости так гордится математика, не имеют никакого смысла, когда речь заходит о применении этих понятий к реальным объектам. Сюда относится, например, понятие иррационального числа. Лишено содержания утверждение, что физическая величина имеет иррациональное значение. Такое утверждение не может быть проверено. Одних только рациональных чисел достаточно, чтобы представить результаты измерений, выполненных со сколь угодно высокой степенью точности. Кроме того, понятие физической величины может утратить смысл, если к ее измерению предъявить требования неоправданно высокой точности. Так, например, совсем не ясно, о чем идет речь, если поставить задачу об измерении длины твердого стержня с погрешностью до размеров электрона или даже атома. Принципиально неограниченная точность измерения длин имеет смысл для абстрактных прямолинейных отрезков геометрии, а не для реальных тел, имеющих атомистическую структуру.

6. Перейдем к вопросу об измерении *времени*. Как и всякая физическая величина, время количественно характеризуется некоторыми числами. Задача прежде всего состоит в том, чтобы выяснить, с помощью каких принципиальных измерительных операций эти числа могут быть получены. Тем самым устанавливается и точный смысл самих этих чисел.

Под временем в количественном смысле этого слова мы будем понимать показания каких-то часов. Точнее, надо говорить не о самом времени, а о *промежутке времени* между двумя событиями или моментами времени. Он характеризуется *разностью* показаний часов в рассматриваемые моменты времени. Когда говорят просто о времени, не указывая оба момента, являющихся границами рассматриваемого промежутка времени, то предполагают, что один из этих моментов фиксирован и условно принят за начальный. От него и ведется отсчет времени. Часы здесь понимаются в более широком смысле слова, чем в обыденной жизни. *Под часами понимают любое тело или систему тел, в которых совершается периодический процесс, служащий для измерения времени.* Примерами таких процессов могут служить колебания маятника с постоянной амплитудой, вращение Земли вокруг собственной оси относительно Солнца или звезд, колебания атома в кристаллической решетке, колебания электромагнитного поля, представляемого достаточно узкой спектральной линией, и пр. Так, если между двумя событиями Земля при вращении относительно звезд сделала один оборот, то говорят, что промежуток времени между этими двумя событиями составляет *звездные сутки*. Если при этом она совершила 10 оборотов, то соответствующий промежуток времени – 10 звездных суток, и т.д. Если в течение звездных суток маятник совершил приблизительно

86 164 колебания, то говорят, что период одного колебания составляет *одну секунду*, и т.д. От звездных суток следует отличать *солнечные сутки*. Так называется промежуток времени, в течение которого Земля делает один оборот при вращении вокруг собственной оси относительно Солнца. Ввиду того что Земля движется вокруг Солнца не по круговой, а по эллиптической орбите, это ее движение не совсем равномерно (см. § 55). Это значит, что солнечные сутки изо дня в день несколько изменяются в течение года. Поэтому при измерении времени пользуются так называемыми *средними солнечными сутками*. Они составляют 24 ч = 1440 мин = = 86 400 с.

К часам предъявляют требования, чтобы они шли "равномерно". Но что значит – часы идут равномерно? Говорят, что это – периодический процесс, служащий для отсчета времени; он должен повторяться через строго одинаковые промежутки времени. Однако это не есть ответ на вопрос, так как убедиться в одинаковости следующих друг за другом промежутков времени можно только в том случае, когда мы уже располагаем равномерно идущими часами. Выйти из этого логического круга можно только путем определения, так как никакого априорного представления о равномерном течении времени не существует. Надо условиться считать какие-то часы *по определению* равномерно идущими. Такие часы должны рассматриваться как *эталонные* или основные часы, по которым должны градуироваться все остальные.

В принципе любые часы могут быть приняты за эталонные. Однако так поступать не целесообразно. Эталонные часы должны быть достаточно "хорошими" и прежде всего обладать *высокой воспроизводимостью*. Это означает, что если изготовить с возможной тщательностью много "одинаковых" эталонных часов, то они с большой точностью должны идти одинаково, независимо от того, изготовлены ли они одновременно или между моментами их изготовления прошло длительное время. Например, песочные часы дают несравненно худшую воспроизводимость, чем маятниковые часы.

Не так давно за основные или эталонные часы принимались *астрономические часы*. Долгое время основными часами служила Земля, вращающаяся вокруг собственной оси относительно звезд, а основной единицей времени – *сутки*. Недавно вместо осевого вращения Земли стали пользоваться ее орбитальным движением вокруг Солнца, принимая за основную единицу времени *тропический год*, т.е. промежуток времени между двумя последовательными прохождениями центра Солнца через *точку весеннего равноденствия*. При измерении времени таким путем достигалась лучшая воспроизводимость. Но еще лучшая воспроизводимость была достигнута после изобретения *кварцевых, молекулярных* и *атомных часов*.

Все эти часы представляют довольно сложные радиотехнические устройства. Здесь нет необходимости останавливаться на принципах действия и

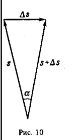


Рис. 10

ник, составленный из векторов $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s} + \Delta \boldsymbol{s}$ и $\Delta \boldsymbol{s}$ (рис. 10), – равнобедренный. При стремлении элемента дуги Δs к нулю стремится к нулю угол α при его вершине. Поэтому направление вектора $\frac{\Delta \boldsymbol{s}}{\Delta s}$ в пределе оказывается перпендикулярным к вектору $\boldsymbol{s}$. Отмеченное свойство, разумеется, не является специфическим свойством единичного вектора $\boldsymbol{s}$. Производная любого вектора $\boldsymbol{A}$ постоянной длины по любому скалярному аргументу есть вектор, перпендикулярный к вектору $\boldsymbol{A}$.

4. Формула (4.10) допускает обобщение на случай произвольной гладкой кривой. Обозначим по-прежнему через $\boldsymbol{s}$ единичный вектор касательной к кривой, а через ds – длину элемента дуги этой кривой. Производная $\frac{d\boldsymbol{s}}{ds}$ есть вектор, направленный нормально к кривой в сторону ее вогнутости. Эту производную можно поэтому представить в виде (4.10), рассматривая величину $1/r$ как коэффициент пропорциональности между векторами $\frac{d\boldsymbol{s}}{ds}$ и $\boldsymbol{n}$. Фактическое содержание этой формулы сводится к тому, что производная $\frac{d\boldsymbol{s}}{ds}$ есть вектор, нормальный к кривой. В остальном на нее надо смотреть как на определение двух новых понятий: величины $1/r$ и единичного вектора $\boldsymbol{n}$. Величина $1/r$ называется *кривизной кривой*, r – *радиусом кривизны*, а $\boldsymbol{n}$ – *единичным вектором главной нормали* к кривой. При этом кривизна $1/r$ считается существенно положительной, а потому единичный вектор $\boldsymbol{n}$ всегда направлен в сторону вогнутости кривой. Оправданием такой терминологии служит интуитивное представление, что при рассмотрении кривизны малый элемент кривой приближенно можно рассматривать как дугу окружности. Это приближение тем точнее, чем меньше длина дуги Δs. В случае окружности кривизна $1/r$ постоянна на протяжении всей кривой. В общем случае произвольной гладкой кривой кривизна непрерывно меняется от точки к точке. Непрерывно меняется и направление единичного вектора главной нормали $\boldsymbol{n}$. Кинематическая формула (4.9) также справедлива для движения вдоль произвольной кривой и притом независимо от того, постоянна величина v или меняется с течением времени. Действительно, формула (4.10) получается из формулы (4.9) с помощью соотношения $ds = v\,dt$.

Все геометрические кривые разделяются на плоские и кривые двоякой кривизны. *Плоской кривой* называется кривая, все точки которой лежат

в одной плоскости. Примерами плоских кривых являются окружность, эллипс, гипербола, парабола, синусоида и пр. *Кривыми двоякой кривизны* называются такие кривые, которые не могут быть уложены в одной плоскости. Примером подобной кривой может служить винтовая линия – спираль. Плоскость, в которой лежат касательная и главная нормаль к кривой, называется *соприкасающейся плоскостью*. Для плоской кривой соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью, в которой лежит кривая. К понятию соприкасающейся плоскости приводит следующее интуитивное представление. Произвольную конечную дугу кривой двоякой кривизны, разумеется, нельзя уложить в плоскость. Но чем короче дуга кривой, тем точнее она приближается к элементу плоской кривой, тем с меньшей ошибкой ее можно уложить в плоскости. Такая плоскость приближенно и воспроизводит соприкасающуюся плоскость. Это интуитивное представление можно превратить в точное определение с помощью предельного перехода. Пусть M (см. рис. 7) – произвольная точка на кривой. Проведем в ней касательную MC и хорду MM_1. Этими двумя прямыми, вообще говоря, определится некоторая плоскость CMM_1. Будем неограниченно приближать точку M_1 к точке M. Тогда указанная плоскость, вообще говоря, будет стремиться к некоторому определенному предельному положению. Это предельное положение и называется соприкасающейся плоскостью. Перпендикуляр к соприкасающейся плоскости в точке M называется *бинормалью к кривой*.

5. При равномерном вращении точки по окружности ускорение направлено к ее центру, т.е. перпендикулярно к траектории. Ускорение перпендикулярно к траектории и при движении по любой кривой, если только скорость движущейся точки не меняется по модулю. Не так будет, когда меняется также и модуль скорости. Чтобы разобраться в этом вопросе, представим вектор скорости в виде $\mathbf{v} = v\boldsymbol{s}$. Применяя к этому выражению правило дифференцирования произведения, получим

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{s}) = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{s} + v\frac{d\boldsymbol{s}}{dt},$$

или ввиду формулы (4.9)

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{s} + \frac{v^2}{r}\boldsymbol{n}. \tag{4.11}$$

Отсюда следует, что *вектор ускорения* $\boldsymbol{a}$ *лежит в плоскости векторов* $\boldsymbol{s}$ *и* $\boldsymbol{n}$, *т.е. в соприкасающейся плоскости*; *вектор* $\boldsymbol{a}$ *не имеет составляющей по бинормали к траектории*. В общем случае ускорение $\boldsymbol{a}$ направлено под углом к траектории. Первое слагаемое в формуле (4.11)

$$\boldsymbol{a}_t = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{s} \tag{4.12}$$

деталях устройства таких часов. Достаточно заметить, что роль маятника или балансира, регулирующих ход часов, выполняют в кварцевых часах колебания кристаллической решетки кварца, в молекулярных часах – колебания атомов в молекулах, в атомных часах – колебания электромагнитного поля в узких спектральных линиях атомов некоторых изотопов химических элементов, находящихся в точно определенных и строго контролируемых внешних условиях. Особой стабильностью обладают последние из отмеченных колебаний. Поэтому период именно таких колебаний в настоящее время и принимается в качестве основной единицы времени, с помощью которой воспроизводится секунда. Конкретно, *секунда – это промежуток времени, в течение которого совершается 9 192 631 770 колебаний электромагнитного излучения, соответствующего переходу между двумя определенными сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133 в отсутствие внешних полей.*

С помощью кварцевых, молекулярных и атомных часов было показано, что Земля вокруг своей оси вращается "неравномерно".

7. С единицей длины дело обстоит так же, как с единицей времени. Идеально твердых тел не существует. Первоначальный эталон метра, реализованный в виде стержня из сплава платины и иридия, недостаточно надежен. Он подвержен внешним влияниям, его внутреннее молекулярное строение может измениться. Наконец, он может быть утерян или испорчен. Предпочтительнее в качестве основной единицы взять какую-либо естественную, точно воспроизводимую длину. В качестве такой длины до недавнего времени принималась длина световой волны определенной узкой спектральной линии, получаемой при определенных, строго контролируемых внешних условиях. С помощью такой естественной длины и воспроизводилась практическая единица длины – метр. В октябре 1983 г. Генеральная ассамблея мер и весов приняла новое определение метра:

Метр есть длина пути, проходимая светом в вакууме в течение временного интервала 1/299792458 секунды. Отсюда следует, что *скорость света по определению принимается равной 299 792 458 м/с* (*точно*).

Такое изменение эталона метра вызвано тем, что экспериментальная погрешность определения скорости света в вакууме в настоящее время составляет примерно 0,3 м/с, что превышает относительную погрешность воспроизведения метра по предыдущему определению, которая равна примерно $\pm 4 \cdot 10^{-9}$. Относительная точность измерения расстояний будет непрерывно повышаться со временем, по крайней мере до достижения величины 10^{-12}, требующейся для астрономических измерений. Чтобы каждый раз не менять определение метра, поступили более естественным способом – зафиксировали значение скорости света.

Возможно, что современные эталоны времени и длины перестанут удовлетворять более жестким требованиям, которые будут предъявляться в будущем к точности измерений и воспроизводимости результатов.

В таком случае старые эталоны будут заменены новыми, более стабильными. Принципиально это ничего не меняет.

8. Для описания движения, а также любых физических явлений, протекающих во времени, пространственных систем отсчета недостаточно. Надо превратить их в *пространственно-временные* системы отсчета. Принципиально это означает, что в системе отсчета должны быть достаточно часто расставлены неподвижные часы, обладающие одинаковой скоростью хода. Тогда каждое событие можно характеризовать местом, где оно произошло, и временем, когда оно произошло, т.е. показаниями часов, помещенных в этом месте. Однако таким путем будет определено только *местное время*, т.е. время в каждой точке пространства. Показания часов, находящихся в различных точках пространства, еще никак не связаны между собой. Для описания физических процессов такая связь, в принципе, не обязательна. Можно было бы довольствоваться местным временем в каждой точке пространства, введя столько различных времен, сколько существует различных точек. Однако такое описание было бы крайне запутанным и абсолютно необозримым. Чтобы описание было простым и обозримым, необходимо пользоваться временем, *единым для всей пространственно-временной системы* отсчета. Для этой цели надо "*синхронизовать*" часы, расставленные в различных местах пространства, т.е. установить их так, чтобы они показывали "одинаковое" время.

Если часы неподвижны в рассматриваемой системе отсчета и показывают одно и то же время, то про такие часы говорят, что в этой системе отсчета они идут *синхронно*. Установление же "стрелок" часов так, чтобы часы всегда показывали одно и то же время, называется их *синхронизацией*. Синхронизация часов не вызывает затруднений, если часы расположены в одном и том же месте пространства. Но как синхронизовать часы, если они находятся в удаленных точках пространства? Более того: что вообще значит, что пространственно разделенные часы синхронизованы, т.е. всегда показывают "одинаковое" время? До теории относительности такой вопрос физика даже не ставила, считая ответ на него само собой разумеющимся. Между тем без постановки этого вопроса и ответа на него невозможно ясное понимание самой теории относительности. Это впервые (в 1905 г.) с полной ясностью было понято Эйнштейном.

На первый взгляд, в вопросе о синхронизации пространственно разделенных часов нет никаких трудностей. Поместим, например, двое одинаковых часов сначала в точку A, поставим их стрелки одинаково, а затем одни из часов перенесем в точку B. Тогда часы в A и часы в B будут синхронизованы между собой. Однако такой способ синхронизации только тогда имел бы смысл, когда показание переносимых часов не зависело от способа переноса их из начальной точки A в конечную точку B. Чтобы убедиться в этом, надо сравнить показания переносимых часов в этих двух точках с показаниями каких-то двух неподвижных часов 1 и 2, из которых одни

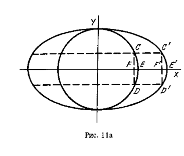


Рис. 11а

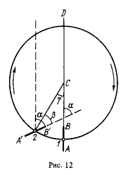


Рис. 12

суток. (Звездный год следует отличать от *тропического года*, который соответствует периоду смены времен года и составляет 365,2422 средних солнечных суток.)

Решение. Пусть в положении *1* (рис. 12) плоскость земного меридиана AB проходит через центр Солнца C и какую-либо (бесконечно удаленную) звезду D. Когда Земля в своем орбитальном движении перейдет в положение *2*, плоскость того же меридиана повернется относительно направления на звезду на угол α, а относительно направления на центр Солнца – на угол β. Углы α и β могут превышать 2π, но они всегда связаны соотношением $\alpha = \beta + \gamma$, где γ – угол между направлениями на центр Солнца в положениях *1* и *2*. Спустя звездный год, когда Земля вернется в исходную плоскость *1 CD*, угол γ примет значение 2π, а потому в этом положении $\alpha = \beta + 2\pi$. За это время пройдет $N_{\text{зв}} = \alpha/2\pi$ звездных и $N_{\text{сол}} = \beta/2\pi$ средних солнечных суток. Поэтому $N_{\text{зв}} = N_{\text{сол}} + 1$. Если $T_{\text{зв}}$ и $T_{\text{сол}}$ – продолжительность звездных средних солнечных суток, то очевидно, что $N_{\text{зв}} T_{\text{зв}} = N_{\text{сол}} T_{\text{сол}}$, так как оба эти выражения представляют одно и то же время – звездный год. Используя соотношения $N_{\text{зв}} = N_{\text{сол}} + 1$, находим

$$T_{\text{зв}} = \frac{N_{\text{сол}}}{N_{\text{сол}} + 1} T_{\text{сол}},$$

$$T_{\text{сол}} - T_{\text{зв}} = \frac{1}{N_{\text{сол}} + 1} T_{\text{сол}}.$$

Подставив сюда $T_{\text{сол}} = 24 \cdot 60 \cdot 60 = 86\,400$ с, $N_{\text{сол}} = 365{,}2564$, получим

$$T_{\text{сол}} - T_{\text{зв}} = 235{,}9003 \text{ с} \approx 236 \text{ с}, \quad T_{\text{зв}} \approx 86\,164 \text{ с}.$$

Заметим, что при решении мы не вводили предположения, что Земля по своей орбите движется равномерно.

5. Определить скорость, с которой движется тень Луны по земной поверхности во время полного солнечного затмения.

Решение. Для простоты примем, что затмение наблюдается на экваторе и что земная ось перпендикулярна к плоскостям солнечной и лунной орбит. Скорость света будем считать бесконечно большой по сравнению со всеми остальными скоростями, входящими в задачу. Пусть в рассматриваемый момент времени прямая Солнце – Луна перпендикулярна к земной поверхности в точке наблюдения A (рис. 13). Поверхность Земли в окрестности той же точки можно считать плоской. При решении выберем сначала систему отсчета, в которой Земля покоится. Пусть $\omega_{\text{С}}$ и $\omega_{\text{Л}}$ – угловые скорости вращения Солнца и Луны вокруг центра Земли, $R_{\text{С}}$ и $R_{\text{Л}}$ – расстояния их от того же центра, r – радиус Земли. За 1 с Солнце и Луна переместятся с востока на запад на расстояния $CC' = \omega_{\text{С}} R_{\text{С}}$ и $ЛЛ' = \omega_{\text{Л}} R_{\text{Л}}$. Соединив новые положения Солнца и Луны прямой линией, найдем, что за 1 с граница лунной тени переместится по земной поверхности с запада на восток на расстояние $v = AA'$.

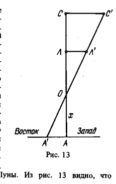


Рис. 13

Это расстояние и есть скорость движения тени Луны. Из рис. 13 видно, что

$$\frac{v}{\omega_{\text{С}} R_{\text{С}}} = \frac{x}{OC} \approx \frac{x}{R_{\text{С}}},$$

так как расстояние до Луны пренебрежимо мало по сравнению с расстоянием до Солнца, и можно принять $OC = R_{\text{С}}$. Таким образом, $v = \omega_{\text{С}} x$. Для нахождения x составляем пропорцию

$$\frac{\omega_{\text{С}} R_{\text{С}}}{\omega_{\text{Л}} R_{\text{Л}}} = \frac{CC'}{ЛЛ'} = \frac{OC}{OЛ}.$$

Полагая в ней $OC = R_{\text{С}}$, $OЛ = R_{\text{Л}} - x - r$, получим уравнение для нахождения x. Оно дает

$$x = \frac{\omega_{\text{С}} - \omega_{\text{Л}}}{\omega_{\text{С}}} R_{\text{Л}} - r.$$

Следовательно, скорость движения лунной тени с запада на восток будет

$$v = \omega_{\text{С}} x = (\omega_{\text{С}} - \omega_{\text{Л}}) R_{\text{Л}} - \omega_{\text{С}} r.$$

Здесь $\omega_{\text{С}} = 2\pi/T_{\text{сут}}$, $\omega_{\text{С}} - \omega_{\text{Л}} = 2\pi/T_{\text{мес}}$, где $T_{\text{сут}} = 86\,400$ с – продолжительность солнечных суток, а $T_{\text{мес}} = 29{,}6\; T_{\text{сут}}$ – продолжительность месяца. Используя эти соотношения и подставляя числовые значения $R_{\text{Л}} = 3{,}8 \cdot 10^5$ км, $r = 6400$ км, получим

$$v = \frac{2\pi R_{\text{Л}}}{T_{\text{мес}}} - \frac{2\pi r}{T_{\text{сут}}} \approx 0{,}47 \text{ км/с}. \tag{4.17}$$

Смысл последней формулы легко уяснить, перейдя в систему отсчета, в которой Солнце покоится. Считая Солнце бесконечно удаленным, можно отвлечься от движения центра Земли, приняв во внимание лишь вращение Земли вокруг своей оси, а также движение Луны по ее орбите вокруг Земли. Луна движется по орбите с запада на восток со скоростью $v_{\text{Л}} = 2\pi R_{\text{Л}}/T_{\text{мес}}$. Если бы Земля не вращалась, то с той же ско-

Допустим теперь, что синхронизация устанавливается вторым способом так что $\overleftarrow{\tau}_{CA} = \overrightarrow{\tau}_{CB}$. По основному постулату $\overrightarrow{\tau}_{CB} = \overleftarrow{\tau}_{CA}$. Сложив это с предыдущим равенством и снова применив основной результат, получим $\overrightarrow{\tau}_{AC} + \overrightarrow{\tau}_{CB} = \overleftarrow{\tau}_{BC} + \overleftarrow{\tau}_{CA}$, или $\overrightarrow{\tau}_{AB} = \overleftarrow{\tau}_{BA}$, т.е. первый способ синхронизации.

Подчеркнем еще раз, что эйнштейновский способ синхронизации часов предполагает отсутствие поля тяготения. При наличии последнего скорость света перестает быть универсальной постоянной. Этот вопрос был разработан Эйнштейном в его общей теории относительности.

Всякое определение должно быть непротиворечивым. Если синхронизовать между собой часы A и B, то с третьими часами C можно поступить двояко: синхронизовать их с часами A либо с часами B. Оба способа должны приводить к одному и тому же результату. Иначе получилось бы внутреннее противоречие. Прямой проверки такого рода непротиворечивости не производилось. Наша уверенность в непротиворечивости эйнштейновского определения одновременности основана на логической согласованности бесчисленного множества следствий, при выводе которых использовалось это определение.

9. *Одновременность пространственно разделенных событий в этом смысле, какой придается ей определением Эйнштейна, относительна.* Это значит, что два события, одновременные в одной системе отсчета, могут оказаться не одновременными, если их рассматривать в другой системе отсчета, движущейся относительно первой. Поясним это следующим примером. Пусть система отсчета S связана с твердым стержнем AB, а система S' – с твердым стержнем $A'B'$, движущимся относительно AB (рис. 4). В момент, когда середины стержней C и C' совпадают между собой, производится световая вспышка в точке, где происходит это совпадение.

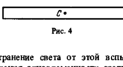


Рис. 4

Рассмотрим распространение света от этой вспышки сначала в системе отсчета S. Из определения одновременности следует, что сигнал достигнет одновременно концов стержня A и B. Значит, он достигнет раньше точки A' и позже – точки B', поскольку точка A' движется навстречу сигналу, а точка B' уходит от него. Итак, с точки зрения системы отсчета S световой сигнал приходит в точки A и B одновременно, а в точки A' и B' – не одновременно: в точку A' он приходит раньше, чем в B'. К другому заключению мы придем, если рассмотрим явление в системе отсчета S'. По

определению одновременными будут приходы сигнала в точки A' и B', а приходы в точки A и B – не одновременными: в точку B сигнал придет раньше, чем в точку A. Противоречия между обоими заключениями нет, поскольку "одновременность" понимается в них в разных смыслах. Этот пример и иллюстрирует относительность одновременности.

10. *Длина тела также относительна, т.е. зависит от того, в какой системе отсчета она измеряется.* Что такое длина движущегося стержня – такой вопрос дорелятивистская физика не ставила. Теория относительности показала, что надо строго различать *длину покоящегося стержня* l_0, т.е. длину, измеренную в системе отсчета, в которой стержень покоится, и *длину движущегося стержня* l, т.е. длину, измеренную в системе отсчета, относительно которой он движется. Эти длины становятся равными только в предельном случае бесконечно медленных движений. Величина l_0 получается путем откладывания вдоль стержня единичного масштаба, покоящегося относительно этого стержня. Величина l сводится к измерению расстояния между неподвижными точками путем следующей измерительной операции. Надо отметить какими-либо неподвижными точками A и B положения концов движущегося стержня в рассматриваемой системе отсчета в один и тот же момент времени. Расстоянием между этими неподвижными точками и будет, по определению, длина движущегося стержня l. Если взять другую систему отсчета, то ввиду относительности одновременности концы стержня пройдут в этой системе отсчета мимо точек A и B, вообще говоря, не одновременно. Роль A и B будут играть другие точки A' и B', неподвижные в новой системе отсчета. Расстояние между этими точками l', вообще говоря, не будет совпадать с l. Таким образом, *как и промежутки времени, длины отрезков также относительны.*

11. Дорелятивистская физика считала длины тел и промежутки времени абсолютными. С ее точки зрения можно было говорить об одновременности событий, не указывая, в какой системе отсчета эти события рассматриваются. Можно было говорить о длине тела, не указывая, покоится оно или движется в рассматриваемой системе отсчета. Основанием, правда, явно не формулировавшимся, для такой точки зрения было убеждение в существовании сколь угодно быстрых сигналов. Но при рассмотрении медленных движений скорости световых сигналов в вакууме может считаться практически бесконечно большой. В этом приближении исчезают все релятивистские эффекты. Мы приведем в дальнейшем некоторые результаты релятивистской механики ввиду их важности в ядерной физике и физике элементарных частиц. Однако систематическое изложение релятивистской механики будет дано после того, как мы познакомимся с учением об электрических и оптических явлениях. Там же будут подробно разобраны с количественной стороны и вопросы пространства и времени, которые здесь были только поставлены или затронуты качественно.

ростью и в том же направлении по ее поверхности бежала бы лунная тень. Но из-за вращения Земли экваториальные точки последней движутся с запада на восток со скоростью $v_3 = 2\pi r/T_{сут}$. Для нахождения скорости лунной тени эту величину надо вычесть из v_{II}, что и сделано в формуле (4.17).

§ 5. Границы применимости классического способа описания движения

В классической механике состояние движения частицы в любой момент времени характеризуется положением (координатой x при одномерном движении) *и скоростью* v. Вместо скорости можно пользоваться также *импульсом*, т.е. величиной $p = mv$, равной произведению *массы частицы* m на ее скорость *). Образом частицы является геометрическая точка, описывающая с течением времени непрерывную траекторию. В квантовой механике показано, что такой способ описания движения имеет принципиальные границы применимости. Здесь преждевременно вдаваться в подробное обсуждение этого вопроса. Достаточно ограничиться предварительным сообщением основного результата, не касаясь его обоснования.

Согласно квантовой механике состояние частицы в каждый момент времени нельзя характеризовать точными значениями ее координаты и импульса в этот момент времени. Если в каком-либо состоянии координата известна с неопределенностью δx, а импульс – с неопределенностью δp, то обе эти величины одновременно не могут быть сделаны сколь угодно малыми. Они связаны соотношением

$$\delta x \cdot \delta p \gtrsim h, \tag{5.1}$$

где h – универсальная постоянная, называемая *постоянной Планка* в честь немецкого физика-теоретика Макса Планка (1858–1947). Она играет основную роль во всех квантовых явлениях. Ее числовое значение равно

$$h = 6{,}626171 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}.$$

Соотношение (5.1) называется *принципом неопределенностей Гейзенберга* по имени немецкого физика-теоретика Вернера Гайзенберга (1901–1976). Это соотношение определяет принципиальный предел точности одновременного измерения координаты и импульса частицы, который не может быть превзойден никаким усовершенствованием приборов и методов измерения. Дело здесь не в ошибках измерений. Такова уж природа реальных частиц, что мгновенные состояния их движения не могут быть охарактеризованы классически – точными значениями координаты и импульса. Частицы ведут себя более сложно, чем материальные точки классической механики. Классическая картина движения по непрерывным траекториям лишь приближенно соответствует законам природы. Границы

*) Понятия массы и импульса вводятся и подробно обсуждаются в § 10.

ее применимости определяются соотношением неопределенностей (5.1). Из него следует, что мгновенное состояние движения частицы нельзя также характеризовать абсолютно точными значениями координаты и скорости. Неопределенности этих величин должны удовлетворять условию

$$\delta x \cdot m\delta v \gtrsim h. \tag{5.3}$$

Для макроскопических тел практическая применимость классического способа описания движения не вызывает сомнений. Допустим, например, что речь идет о движении шарика с массой $m = 1$ г. Обычно положение шарика практически может быть определено с точностью до десятой или сотой доли миллиметра. Во всяком случае, вряд ли имеет смысл говорить о погрешности в определении положения шарика, меньшей размеров атома. Положим поэтому $\delta x = 10^{-8}$ см. Тогда из соотношения неопределенностей (5.1) найдем

$$\delta v \gtrsim \frac{6{,}63 \cdot 10^{-27}}{10^{-8}} \approx 10^{-18} \text{ см/с}.$$

Одновременная малость величин δx и δv и является доказательством практической применимости классического способа описания движения для макроскопических тел. Не так обстоит дело, когда речь идет об атомных явлениях – явлениях, происходящих с частицами очень малой массы в очень малых объемах пространства. Рассмотрим, например, движение электрона в атоме водорода. Масса электрона $m = 9{,}11 \cdot 10^{-28}$ г. Погрешность в положении электрона δx во всяком случае не должна превышать размеры атома, т.е. должна быть $\delta x < 10^{-8}$ см. Но тогда из соотношения неопределенностей получаем

$$\delta v > \frac{h}{m\delta x} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-27}}{9{,}11 \cdot 10^{-28} \cdot 10^{-8}} \approx 7 \cdot 10^{8} \text{ см/с}.$$

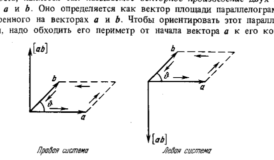
Эта величина не меньше, а даже больше самой скорости электрона в атоме, которая по порядку величины равна 10^8 см/с. При таком положении классическая картина движения теряет всякий смысл.

§ 6. О смысле производной и интеграла в приложениях к физическим вопросам

1. Процесс предельного перехода (3.4), с помощью которого определяется производная, называется *дифференцированием*. Понятие производной широко используется в механике и во всех других разделах физики. Именно задача об определении скорости произвольного движения привела к этому понятию Ньютона, который, наряду с Готфридом Лейбницем (1646–1716), является основоположником дифференциального и инте-

ный. Сумма такого рода не преобразовывалась бы по правилу преобразования полярного или аксиального вектора, а потому она не могла бы быть ни тем, ни другим.

11. Частным случаем вектора, представляющего площадку или поверхность, является так называемое *векторное произведение* двух векторов a и b. Оно определяется как вектор площади параллелограмма, построенного на векторах a и b. Чтобы ориентировать этот параллелограмм, надо обходить его периметр от начала вектора a к его концу,



Правая система Левая система

Рис. 18

затем от конца вектора a параллельно вектору b и т.д., пока при таком обходе мы не вернемся в исходную точку (рис. 18). Короче говоря, первый вектор a надо проходить в прямом, а второй вектор b – в обратном направлениях. В согласии с изложенным выше векторное произведение можно изобразить стрелкой, направленной перпендикулярно к плоскости параллелограмма и находящейся в нужном винтовом соотношении с направлением обхода периметра параллелограмма. Длина стрелки численно равна площади параллелограмма, т.е. $ab\sin\vartheta$, где ϑ – угол между векторами a и b. Векторное произведение мы будем обозначать символом $c = [ab]$, т.е. будем заключать векторы a и b в квадратные скобки. Часто употребляется также косой крест: $c = a \times b$. *Если векторы a и b – полярные, то векторное произведение их будет вектором аксиальным. Векторное произведение полярного вектора на аксиальный есть вектор полярный. Векторное произведение двух аксиальных векторов есть также аксиальный вектор.*

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что если a и b – два полярных или два аксиальных вектора, то в прямоугольных системах координат выражение $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ есть инвариант. (Это выражение называется *скалярным произведением* векторов a и b и обозначается символом (ab) или ab.)

Указание. Воспользоваться инвариантами $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$, $b_x^2 + b_y^2 + b_z^2$ и $(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2$.

2. Доказать, что скалярное произведение полярного вектора на аксиальный есть псевдоскаляр (псевдоинвариант).

3. Доказать, что скалярное произведение любых двух векторов a и b представляется выражением $(ab) = ab\cos\vartheta$, где ϑ – угол между этими векторами.

Доказательство. Направим ось X вдоль вектора a. Тогда $a_y = a_z = 0$, $b_x = b\cos\vartheta$. Так как скалярное произведение $(ab) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ есть инвариант, то $(ab) = a_x b_x = ab\cos\vartheta$.

4. Скалярное произведение вектора a на векторное произведение других двух векторов $[bc]$ называется смешанным произведением трех векторов a, b, c и обозначается $(a[bc])$. Показать, что оно является псевдоскаляром, если один из этих векторов или все три полярные. Если же полярных векторов два или совсем нет, то смешанное произведение будет скаляром (инвариантом). Показать, что смешанное произведение численно равно объему параллелепипеда, построенного на векторах a, b, c. Пользуясь этим, доказать, что

$$(a[bc]) = (b[ca]) = (c[ab]) = -(a[cb]) = -(b[ac]) = -(c[ba]), \tag{7.3}$$

т.е. *смешанное произведение не меняется при любой циклической перестановке перемножаемых векторов*, а при нарушении цикличности меняет знак.

5. Доказать формулу

$$[a[bc]] = (ac)b - (ab)c. \tag{7.4}$$

Доказательство. Представим вектор a в виде $a = a_\parallel + a_\perp$, где $a_\parallel$ – составляющая вектора a вдоль вектора $d = [bc]$, а $a_\perp$ – составляющая, перпендикулярная к d. Тогда

$$[a[bc]] = [ad] = [a_\perp d].$$

Три вектора $a_\perp$, b, c лежат в одной плоскости. Примем ее за плоскость рисунка (рис. 19). Вектор d перпендикулярен к этой плоскости, его длина равна $bc\sin\alpha$, если

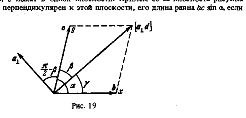


Рис. 19

α – угол между векторами b и c. Поэтому длина вектора $[a_\perp d]$ будет $a_\perp bc\sin\alpha$. Поскольку этот вектор лежит в плоскости рисунка, его можно разложить по векторам b и c, т.е. представить в виде

$$[a_\perp d] = xb + yc.$$

Неизвестные числа x и y найдутся с помощью теоремы синусов:

$$\frac{xb}{a_\perp bc\sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad \frac{yc}{a_\perp bc\sin\alpha} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

расстояние Δx. Неопределенность δx в измерении проходимого расстояния не должна превосходить Δx. Иначе вычисление средней скорости по формуле $v_{ср} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ потеряло бы всякий смысл. Таким образом, при $\Delta t \to 0$ должна стремиться к нулю и неопределенность в координате δx. Но тогда, согласно соотношению (5.1), неопределенность скорости δv будет стремиться к бесконечности. Это значит, что погрешность, возникающая при вычислении скорости v по формуле (3.3), сколь угодно велика по сравнению с самой скоростью v.

2. Изложенные выводы относятся не только к производной координаты, но и к производным всяких физических величин. Допустим, например, что требуется определить плотность вещества в какой-либо точке пространства. С этой целью можно поступить следующим образом. Окружим рассматриваемую точку замкнутой поверхностью, ограничивающей объем ΔV. Обозначим через Δm массу вещества, содержащегося в этом объеме. Отношение

$$\rho_{ср} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

называется *средней плотностью вещества в объеме* ΔV. Средняя плотность, вообще говоря, зависит от объема ΔV, внутри которого находится рассматриваемая точка, а также от его формы. Чтобы исключить эту зависимость, вводят понятие *истинной плотности* вещества, определяя ее путем предельного перехода $\Delta V \to 0$. Обычно говорят, что при этом средняя плотность $\rho_{ср}$ стремится к определенному пределу ρ, который и называется истинной плотностью вещества в рассматриваемой точке пространства:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \tag{6.1}$$

Истинная плотность определяется, таким образом, *как производная массы по объему*. Эта величина зависит только от положения точки, к которой она относится. Однако если в формуле (6.1) предельный переход понимать буквально в строго математическом смысле, то для реальных тел он выполнен быть не может из-за атомистической структуры вещества. При уменьшении объема в нем рано или поздно окажется лишь небольшое число молекул, например одна или даже ни одной молекулы. Кроме того, молекулы совершают беспорядочные тепловые движения, одни молекулы уходят из объема ΔV, другие вступают в него. Ввиду этого число молекул в фиксированном малом объеме ΔV весьма быстро и беспорядочно меняется во времени. При уменьшении ΔV отношение $\dfrac{\Delta m}{\Delta V}$ будет быстро и беспорядоч-

но меняться от нуля, когда внутри объема ΔV нет молекул, до очень больших значений, когда в него попадет одна или несколько молекул. При бесконечном уменьшении ΔV отношение $\dfrac{\Delta m}{\Delta V}$ не будет стремиться к определенному пределу. Ввиду этого при определении истинной плотности вещества нельзя брать величины Δm и ΔV сколь угодно малыми. Объем ΔV должен иметь макроскопические размеры, т.е. содержать еще очень большое число молекул. Но он должен быть и достаточно мал, чтобы содержащееся в нем вещество могло рассматриваться приближенно как макроскопически однородное. Если оба эти требования выполняются, то отношение $\dfrac{\Delta m}{\Delta V}$ будет иметь практически вполне определенное значение, не меняющееся при дальнейшем уменьшении макроскопического объема ΔV. Это отношение мы и принимаем в физике за производную массы m по объему V. Величины Δm и ΔV, удовлетворяющие указанным двум требованиям, в физике рассматриваются как *физически бесконечно малые*, и с ними физика обращается как с математическими дифференциалами. Математически это соответствует замена реального тела идеализированной моделью с непрерывным распределением масс.

3. Совершенно так же обстоит дело с понятием интеграла. В математике интеграл определяется предельным переходом

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \Sigma f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Числовой промежуток (a, b) разбивается на n частичных промежутков $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Длина каждого из них Δx_i умножается на значение функции $f(x)$ в произвольной точке, лежащей внутри рассматриваемого частичного промежутка. Затем составляется сумма $\Sigma f(x_i)\,\Delta x_i$ и выполняется переход к пределу $n \to \infty$ в предположении, что длина каждого из частичных промежутков стремится к нулю. В физике, однако, из-за погрешностей измерений или по принципиальным соображениям (например, из-за атомистической структуры вещества) деление промежутка (a, b) на частичные промежутки меньше определенной длины (значение которой зависит от конкретных условий) теряет смысл. Ввиду этого предельный переход $\Delta x_i \to 0$ не может быть выполнен до конца, а должен быть оборван в каком-то месте. Это означает, что *в физике интеграл выступает не как предел суммы, а как сумма большого числа достаточно малых слагаемых* $\Sigma f(x_i)\,\Delta x_i$.

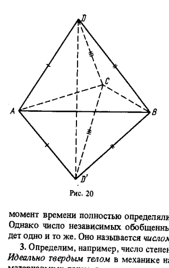


Рис. 20

полностью, если обобщенные координаты будут найдены как функции времени. Производные обобщенных координат по времени $\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_f$ называются *обобщенными скоростями*. Так, при вращении материальной точки по окружности ее положение можно задать значением центрального угла φ, который радиус-вектор вращающейся точки образует с положением его в некоторый определенный момент времени (например, в момент $t = 0$). Обобщенная скорость в этом случае $\omega = \dot\varphi$ имеет смысл угловой скорости вращающейся точки.

Обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_f$ могут быть выбраны как угодно, лишь бы они в любой момент времени полностью определяли положение механической системы. Однако число независимых обобщенных координат f во всех случаях будет одно и то же. Оно называется *числом степеней свободы системы*.

3. Определим, например, число степеней свободы *идеально твердого тела*. *Идеально твердым телом* в механике называют идеализированную систему материальных точек, все расстояния между которыми при движении системы не изменяются с течением времени. Докажем, что *идеально твердое тело, если на его движение не наложены никакие ограничения, обладает шестью степенями свободы*. Действительно, чтобы однозначно определить положение твердого тела, достаточно задать положение каких-либо трех его точек A, B, C, не лежащих на одной прямой (рис. 20). Для доказательства возьмем произвольную четвертую точку тела D. Расстояния AD, BD и CD для рассматриваемого твердого тела могут считаться известными, так как при любых движениях эти расстояния не изменяются. Кроме того, следует учесть, что при любых движениях твердого тела точка D все время должна находиться по одну и ту же сторону плоскости треугольника ABC, никогда не пересекая ее. Чтобы определить положение вершины D, построим по заданным длинам AC, AD, CD треугольник ADC. Его основание AC в пространстве фиксировано. Чтобы найти положение вершины D, будем вращать треугольник ADC вокруг основания AC, пока вершина D не окажется на заданном расстоянии от третьей точки B. Этому условию удовлетворяют две точки D и D'. Но вторая из них не удовлетворяет условиям задачи, так как она находится не с той стороны от плоскости треугольника ABC. Таким образом, зная положение трех точек A, B, C, можно

геометрическим построением найти положение любой другой точки твердого тела.

Положение трех точек A, B, C можно задать их прямоугольными координатами x_A, y_A, z_A; x_B, y_B, z_B; x_C, y_C, z_C. Эти девять координат, однако, не независимы, а связаны тремя соотношениями

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = AB^2 = \text{const},$$
$$(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 = BC^2 = \text{const},$$
$$(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 = CA^2 = \text{const},$$

поскольку длины AB, BC и CA не изменяются. Независимых координат остается только шесть – твердое тело имеет шесть степеней свободы.

При ограничении свободы движения число степеней свободы твердого тела уменьшается. Так, *твердое тело, одна из точек которого неподвижно закреплена, может только вращаться вокруг этой неподвижной точки и имеет три степени свободы. Твердое тело, которое может только вращаться вокруг закрепленной оси, имеет одну степень свободы. Если же твердое тело может скользить вдоль закрепленной оси и одновременно вращаться вокруг нее, то число степеней свободы становится равным двум и т.д.*

кой a. Возьмем какую-либо произвольную прямоугольную или косоугольную систему координат и спроецируем отрезок a на координатные оси X, Y, Z. Проецирование будем производить плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Например, чтобы получить проекцию на ось X, надо через концы отрезка a провести плоскости, параллельные координатной плоскости YZ. Эти плоскости и отсекут на оси X отрезок a_X, являющийся проекцией отрезка a на рассматриваемую ось. Аналогично получаются проекции a_y и a_z. Обычно рассматривают прямоугольные координатные системы. Тогда a_x, a_y, a_z будут *прямоугольными*, или *ортогональными*, проекциями отрезка a. Если проекции a_x, a_y, a_z известны в какой-либо системе координат S, то можно найти их и в любой другой координатной системе S', оси которой произвольным образом повернуты относительно системы S. Для этого по проекциям a_x, a_y, a_z в системе S надо восстановить отрезок a как диагональ параллелепипеда, построенного на отрезках a_x, a_y, a_z. Затем следует спроецировать этот отрезок на оси X', Y', Z' новой системы координат S'. Получится тройка чисел a_x', a_y', a_z', которые и являются проекциями отрезка a в новой системе координат. Теперь мы дадим следующее определение вектора.

Вектором a называется упорядоченная тройка чисел a_x, a_y, a_z, заданная в каждой системе координат. (Упорядочение состоит в том, что первое число a_x приводится в соответствие оси X, второе число a_y – оси Y, третье число a_z – оси Z.) Эти числа называются *проекциями вектора* a на соответствующие координатные оси. Их называют также *составляющими*, или *компонентами, вектора. При переносе начала и повороте координатных осей составляющие a_x, a_y, a_z преобразуются по правилу преобразования проекций геометрических отрезков.*

Короче, *вектором* называется упорядоченная тройка чисел, заданная в каждой системе координат, которые при переносе начала и повороте координатных осей преобразуются как разности координат концов направленного геометрического отрезка.

Отложим эти числа вдоль координатных осей X, Y, Z, мы отсечем на них три отрезка. Если на таких трех отрезках как на ребрах построить параллелепипед, то его диагональ можно рассматривать как направленный отрезок, служащий наглядным изображением вектора. Этот отрезок получится одним и тем же, какую бы систему координат мы ни использовали при его построении. В этом проявляется *инвариантный* характер вектора, т.е. независимость его от системы координат, использованной для его представления. Компоненты вектора a_x, a_y, a_z в разных системах координат разные, но самый вектор a один и тот же. Векторное равенство $a = b$, записанное в координатной форме, равносильно трем равенствам $a_i = b_i$ ($i = x, y, z$). При переходе к другой (штрихованной) системе координат обе части этих равенств преобразуются одинаково. Поэтому в новой системе

координат они сохраняют прежний вид, т.е. $a_i' = b_i'$ ($i' = x', y', z'$). Уравнения, обе части которых при переходе к другой системе координат преобразуются одинаково и благодаря этому сохраняют свой вид во всех координатных системах, называются *ковариантными* или *инвариантными* по отношению к рассматриваемому преобразованию координатных систем. Мы видим, что *векторное уравнение $a = b$ инвариантно по отношению к переносу начала и повороту координатных осей. Ввиду этой инвариантности уравнения, выражающие физические законы в векторной форме, не зависят от выбора осей координат.* С помощью векторов физические законы формулируются в простой и обозримой форме, которая не сохраняется, если выразить их через проекции векторов в какой-либо системе координат.

Заметим, что координатные оси X, Y, Z не обязательно должны поворачиваться вместе подобно повороту твердого тела. Определение предусматривает и такие случаи, когда оси X, Y, Z поворачиваются независимо. Путем поворотов такого типа может быть совершен переход от любой прямолинейной системы координат к другой прямолинейной системе – правой или левой, оси которой ориентированы совершенно произвольно. В частности, такими поворотами может быть осуществлена инверсия осей, т.е. одновременное изменение на противоположные положительных направлений всех трех осей.

Если обе координатные системы прямоугольные, то формулы преобразования проекций вектора имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} a_x' &= \alpha_{x'x} a_x + \alpha_{x'y} a_y + \alpha_{x'z} a_z, \\ a_y' &= \alpha_{y'x} a_x + \alpha_{y'y} a_y + \alpha_{y'z} a_z, \\ a_z' &= \alpha_{z'x} a_x + \alpha_{z'y} a_y + \alpha_{z'z} a_z, \end{aligned} \tag{7.1}$$

где $\alpha_{x'x}, \alpha_{x'y}, \ldots$ – косинусы углов между соответствующими координатными осями обеих систем координат. Например, $\alpha_{y'z}$ означает косинус угла между положительными направлениями осей Y' и Z.

4. Аналогично *скаляром* или *инвариантом* называется число, заданное в каждой системе координат, причем при переносе начала и повороте координатных осей это число остается неизменным. Таким образом, как и определение вектора, это определение предусматривает только перенос начала и поворот координатных осей. Оно предполагает, что обе координатные системы должны оставаться неподвижными одна относительно другой. Примерами скаляров являются время, масса, электрический заряд и пр. Абсцисса x неподвижной точки не является скаляром, так как ее числовое значение в разных системах координат разное. Скалярами можно образовывать из векторов. Например, скаляром является *длина вектора или ее квадрат, который в прямоугольной системе координат представляется выражением $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$. Скалярным произведением двух векторов a и b, т.е. величина $(ab) = ab\cos\vartheta$*, где ϑ – угол между этими векторами.

Иначе закон инерции потерял бы всякое содержание. Вполне удовлетворительного ответа на этот вопрос не существует. В отсутствии внешних воздействий мы убеждаемся по отсутствию растягивающих пружин или веревок, которые тянут тело, по отсутствию тел, которые давят на него, и т.д. Но тело может испытывать воздействия не только со стороны тел, с которыми оно соприкасается. Оно может подвергаться воздействиям также со стороны различного рода *силовых полей*, возбуждаемых другими телами. Поэтому вопрос сводится к тому, как убедиться в том, что воздействия со стороны силовых полей тело не подвергается.

Все силы, встречающиеся в природе, известные в настоящее время, сводятся к силам *гравитационного притяжения, электромагнитным силам, сильным* и *слабым взаимодействиям*. Сильные и слабые взаимодействия проявляются в атомных ядрах и в мире элементарных частиц. Они действуют на малых расстояниях: сильные – на расстояниях порядка 10^{-13} см, слабые – на расстояниях порядка 10^{-16} см. В макромире, который только и изучает классическая механика, от сильных и слабых взаимодействий можно отвлечься.

Электромагнитные и гравитационные силы, напротив, являются силами *дальнодействующими*. С расстоянием они убывают медленно. Если это статические силы, то они убывают обратно пропорционально квадрату расстояния. Если же они переменные (электромагнитные волны), то убывание происходит еще медленнее – обратно пропорционально расстоянию. Только благодаря электромагнитным волнам (свет, радиоизлучение, рентгеновское излучение), исходящим от планет, звезд, пульсаров, галактик и пр., мы и знаем о существовании этих небесных объектов. Поэтому нет оснований утверждать, что удаленные источники не возбуждают заметных электромагнитных и гравитационных полей в рассматриваемой нами области пространства. Однако в отсутствие электромагнитных полей всегда можно убедиться, так как они действуют по-разному на положительные и отрицательные заряды, из которых состоят тела. Под действием таких полей возможно бы некоторое разделение положительных и отрицательных зарядов, которое можно было бы обнаружить на опыте. Заряженный шарик, помещенный в одну и ту же точку пространства, двигался бы по-разному в зависимости от того, заряжен он положительно или отрицательно. Все имеющиеся факты не противоречат утверждению, что удаленные тела Вселенной не возбуждают сколько-нибудь заметных статических электромагнитных полей в малых областях пространства (порядка размеров Солнечной системы или Галактики).

О гравитационных полях этого нельзя сказать с той же уверенностью. Но если бы такие поля и существовали, то с ними можно было бы не считаться. Дело в том, что всем телам, независимо от их состава, одно и то же гравитационное поле сообщает в точности одинаковое ускорение. Статическое гравитационное поле удаленных тел Вселенной в малых областях

пространства можно считать практически однородным. Можно ввести систему отсчета, свободно падающую в таком однородном гравитационном поле. На явлениях, происходящих в такой системе отсчета, наличие этого однородного гравитационного поля никак не сказывается. Здесь все происходит в точности так же, как в кабине космического корабля, свободно движущегося в космическом пространстве. В такой кабине космонавты не чувствуют наличия поля тяготения (невесомость). Переменные же гравитационные поля (гравитационные волны) слишком слабы. Попытки их экспериментального обнаружения стали предприниматься лишь в последнее время. Однако из-за малости ожидаемых эффектов гравитационные волны еще не обнаружены экспериментально. Ограничимся здесь этими замечаниями, откладывая более подробный разбор вопроса до гл. IX.

2. В кинематике выбор системы отсчета не был существенным. Все системы отсчета *кинематически эквивалентны*. Не так обстоит дело в динамике. Уже закон инерции с особой остротой ставит вопрос о выборе системы отсчета. Одно и то же движение выглядит *по-разному* в разных системах отсчета. Если в какой-либо системе отсчета тело движется прямолинейно и равномерно, то в системе отсчета, движущейся относительно первой ускоренно, этого уже не будет. Отсюда следует, что закон инерции не может быть справедлив во всех системах отсчета. Без указания системы отсчета он просто теряет смысл. Классическая механика постулирует, что *существует система отсчета, в которой все свободные тела движутся прямолинейно и равномерно*. Такая система называется *инерциальной системой отсчета*. Содержание закона инерции, в сущности, сводится к утверждению, что существует по крайней мере одна инерциальная система отсчета.

Это утверждение является обобщением громадной совокупности опытных фактов. Точно так же, только опытным путем, можно установить, какие системы отсчета являются инерциальными, а какие – не инерциальными. Допустим, например, что речь идет о движении звезд и других астрономических объектов в доступной нашему наблюдению части Вселенной. Тогда можно утверждать, что система отсчета, в которой Земля принимается неподвижной (такую систему мы будем называть *земной*), не будет инерциальной. Действительно, в такой системе звезды совершают суточные вращения на небесном своде. Так как расстояния до звезд очень велики, то при этом развиваются очень большие центростремительные ускорения, направленные к Земле. Между тем каждая звезда, ввиду ее громадной удаленности от других небесных тел, практически является свободной. Свободное движение звезды в земной системе отсчета совершается по кругу, а не по прямой линии. Оно не подчиняется закону инерции, а потому земная система отсчета не будет инерциальной. Надо испытать на инерциальность другие системы отсчета. Попробуем взять *гелиоцентрическую систему отсчета*, иначе называемую *системой Коперника* (по имени польского астронома Николая Коперника (1473–1543)). Это есть координатная система,

правилу параллелограмма, т.е. совпадало с математическим сложением векторов. В релятивистской механике это уже не так. *Сложение скоростей во втором смысле не подчиняется правилу параллелограмма.* Это правило приближенно верно только в пределе, когда оба складываемые скорости очень малы по сравнению со скоростью света.

7. Каждому вектору $a(a_x, a_y, a_z)$ и скаляру λ можно аксиоматически сопоставить объект λa, задаваемый упорядоченной тройкой чисел λa_x, λa_y, λa_z. Легко убедиться, что такой объект будет вектором. Он называется *произведением скаляра λ на вектор a*. Бесконечно малое приращение вектора da само является вектором. Бесконечно малое приращение любого скаляра t есть также скаляр dt. Этим двум величинам можно сопоставить вектор $\dfrac{1}{dt}\,da = \dfrac{da}{dt}$, называемый *производной вектора a по скаляру t*.

8. Теперь мы в состоянии доказать векторную природу многих физических величин, с которыми имеет дело механика. Прежде всего, *смещение точки из какого-либо положения A в другое положение B вдоль соединяющего их прямолинейного отрезка AB есть вектор.* Это очевидно, так как по самому определению при смещении начала и повороте координатных осей компоненты вектора должны преобразовываться так же, как проекции направленного отрезка. Обозначим рассматриваемый отрезок через r. Продифференцируем этот отрезок по времени t в предположении, что начальная точка его закреплена. *Производная $\dfrac{dr}{dt}$ будет вектором*, так как время – скаляр. Но такая производная есть скорость точки v. Таким образом, *скорость* v также есть *вектор*. Дифференцируя v снова по t, найдем *другой вектор – ускорение точки $a = \dfrac{dv}{dt}$. Масса точки m является скаляром.* Умножая его на скорость v, получаем *вектор $p = mv$*, называемый *импульсом точки*. Дифференцируя его по времени, получаем силу $F = \dfrac{dp}{dt}$, действующую на точку. Таким образом, *сила есть вектор*.

9. Приведем несколько более сложные примеры векторов. Возьмем в пространстве какой-либо *ориентированный контур* L, т.е. не самопересекающуюся замкнутую кривую, проходимую в каком-то определенном направлении. Спроецируем этот контур на координатные плоскости прямоугольной системы координат XYZ. Получим три ориентированных плоских замкнутых контура L_x, L_y, L_z, лежащих в координатных плоскостях YZ, ZX, XY соответственно (на рис. 15 контур L не изображен, изображены только его проекции). Обозначим через S_x, S_y, S_z пло-

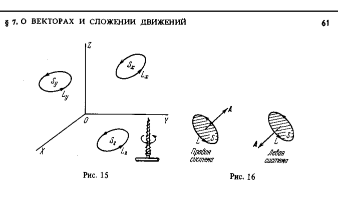


Рис. 15 Рис. 16

щади, ограниченные замкнутыми контурами L_x, L_y, L_z. Эти величины будем считать положительными, если контуры L_x, L_y, L_z обходятся в *положительных направлениях*, и отрицательными – в противоположном случае. Положительные направления обхода контуров L_x, L_y, L_z задаются по-разному в зависимости от того, какая используется система координат – правая или левая. В правой системе координат направления обхода контуров L_x, L_y, L_z считаются положительными, если они находятся в *правовинтовом соотношении* с положительными направлениями координатных осей X, Y, Z соответственно, а в левой системе – в *левовинтовом*. Это значит, например, что в правой системе координат вращение ручки буравчика с правой нарезкой в положительном направлении контура L_z приводит к поступательному перемещению буравчика в положительном направлении оси Z. В левой системе будет то же самое, если взять буравчик с левой нарезкой. При таком соглашении о знаках площадей S_x, S_y, S_z представляются интегралами

$$S_x = \oint_{L_x} y\,dz, \quad S_y = \oint_{L_y} z\,dx, \quad S_z = \oint_{L_z} x\,dy, \tag{7.2}$$

взятыми по контурам L_x, L_y, L_z, независимо от того, применяется ли правая или левая система координат.

Мы утверждаем, что тройка чисел S_x, S_y, S_z образует вектор, с одной оговоркой, о которой будет сказано ниже. Для доказательства рассмотрим сначала частный случай, когда контур L плоский. Возьмем нормали к плоскости контура отложим направленный отрезок A, длина которого численно равна площади S, ограниченной контуром L, а направление находится в правовинтовом соотношении с направлением обхода по контуру, если используется правая система координат, и в левовинтовом соотношении, если используется левая система (рис. 16).

Таким образом, по определению *отношение масс двух материальных точек равно взятому с противоположным знаком отношению приращений скоростей этих точек в результате взаимодействия между ними*. При этом предполагается, что рассматриваемые точки образуют изолированную систему и движутся с нерелятивистскими скоростями.

2. Чтобы от отношения масс перейти к самим массам, надо условиться массу какого-либо определенного тела считать равной единице. Такое тело называется *эталоном массы*. Тогда массы всех остальных тел определятся однозначно. В частности, все они окажутся *положительными*, так как такими всех масс одинаковы, а масса эталонного тела положительна. В физике в качестве основной единицы массы принят *килограмм*. Килограмм есть масса эталонной гири из сплава иридия с платиной, хранящейся в Севре (Франция) в Международном бюро мер и весов. Приближенно килограмм равен массе кубического дециметра чистой воды при температуре 4°С. Тысячная доля килограмма называется *граммом*. В отличие от длины и времени, для которых установлены *естественные единицы*, единица массы определена, таким образом, как масса некоторого случайно выбранного тела. И для массы было бы лучше установить естественную единицу. Можно было бы основным эталоном массы считать массу какой-либо элементарной частицы, например протона.

Отметим еще одно существенное обстоятельство, являющееся также результатом опыта. Отношение m_2/m_1 можно найти не только путем непосредственного сравнения масс m_2 и m_1, но и следующим косвенным способом. Сначала измеряются отношения масс обоих тел к массе третьего тела, а затем эти отношения делятся одно на другое. Результат не зависит от массы третьего тела и совпадает с отношением m_2/m_1, полученным непосредственным сравнением масс m_1 и m_2.

Если соотношение (10.1) поделить на время взаимодействия Δt, то получится

$$m_1 a_{1ср} = -m_2 a_{2ср}, \tag{10.2}$$

а после перехода к пределу

$$m_1 a_1 = -m_2 a_2. \tag{10.3}$$

Этими соотношениями нахождение отношения масс двух тел сводится к сравнению *средних* или *истинных ускорений*, развивающихся во время их взаимодействия.

3. Придадим соотношению (10.1) другую форму. Пусть v_1 и v_2 – скорости тел до взаимодействия, v_1' и v_2' – после взаимодействия. Тогда $\Delta v_1 = v_1' - v_1$, $\Delta v_2 = v_2' - v_2$. Подставляя эти выражения в (10.1), получим

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'. \tag{10.4}$$

Назовем *импульсом* или *количеством движения материальной точки* вектор, равный произведению массы точки на ее скорость:

$$p = mv. \tag{10.5}$$

Импульсом или *количеством движения системы материальных точек* назовем векторную сумму импульсов отдельных материальных точек, из которых эта система состоит. Для системы из двух материальных точек $p = p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$. Равенству (10.4) можно придать вид

$$p = p', \tag{10.6}$$

где $p = p_1 + p_2$, $p' = p_1' + p_2'$ – импульсы системы до и после взаимодействия. Таким образом, *импульс изолированной системы двух материальных точек сохраняется, т.е. остается постоянным во времени, каково бы ни было взаимодействие между ними*. Это положение называется *законом сохранения импульса*. Оно является результатом опыта и введенного выше определения массы. То обстоятельство, что для величины mv имеет место "закон сохранения", и делает целесообразным дать этой величине специальное название и ввести для нее особое обозначение. Таким свойством не обладает, например, величина $m^2 v$, а потому она не играет никакой роли в механике. В дальнейшем закон сохранения импульса будет распространен на изолированные системы, состоящие из какого угодно числа материальных точек.

4. Закон сохранения импульса в приведенной выше форме есть закон нерелятивистской механики. Он справедлив только для медленных движений. В релятивистской механике этот закон обобщается на случай быстрых движений. Это обобщение будет подробно рассмотрено при изложении теории относительности. Сейчас же ограничимся предварительным сообщением основного результата. В релятивистской механике импульс частицы также определяется выражением (10.5), однако масса m зависит от скорости согласно формуле

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{10.7}$$

Здесь m_0 – постоянная для данной частицы величина, называемая ее *массой покоя*. Она совпадает с массой, рассматриваемой в нерелятивистской механике. Величина m, определяемая выражением (10.7), называется *массой движения* или *релятивистской массой*. Таким образом, в релятивистской механике закон сохранения импульса изолированной системы, состоящей из двух взаимодействующих частиц с массами покоя m_{01} и m_{02}, матема-

Отсюда

$$x = a_\perp c \sin\beta = a_\perp c \cos(a_\perp, c) = (a_\perp c) = (ac),$$
$$y = a_\perp b \sin\gamma = -a_\perp b \cos(a_\perp, b) = -(a_\perp b) = -(ab).$$

6. Доказать формулу

$$([ab]\,[cd]) = (ac)(bd) - (ad)(bc).$$

7. Показать, что векторное произведение $[ab]$ можно записать в виде символического определителя

$$[ab] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \tag{7.5}$$

если условиться разлагать его по элементам первой строки, состоящей из единичных векторов i, j, k вдоль координатных осей прямоугольной системы координат. Запись справедлива и в правых, и в левых системах координат. Компоненты векторного произведения определяются одними и теми же формулами, независимо от того, какие (прямоугольные) системы координат используются. С этим и связано то обстоятельство, что векторное произведение – аксиальный вектор.

8. Доказать, что в прямоугольной системе координат

$$(A[BC]) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \tag{7.6}$$

9. Пусть e_1, e_2, e_3 – произвольные векторы, не лежащие в одной плоскости. Векторы

$$e_1^* = \frac{[e_2 e_3]}{(e_1[e_2 e_3])}, \quad e_2^* = \frac{[e_3 e_1]}{(e_1[e_2 e_3])}, \quad e_3^* = \frac{[e_1 e_2]}{(e_1[e_2 e_3])}. \tag{7.7}$$

называются по отношению к ним *взаимными*. Очевидно, что они также не лежат в одной плоскости. Показать, что

$$e_1 = \frac{[e_2^* e_3^*]}{(e_1^*[e_2^* e_3^*])}, \quad e_2 = \frac{[e_3^* e_1^*]}{(e_1^*[e_2^* e_3^*])}, \quad e_3 = \frac{[e_1^* e_2^*]}{(e_1^*[e_2^* e_3^*])}. \tag{7.8}$$

Показать, далее, что

$$(e_i e_k^*) = \delta_{ik}, \tag{7.9}$$

где δ_{ik} – символ Кронекера, т.е. $\delta_{ik} = 1$ при $i=k$ и $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$.

Пусть A и B – произвольные векторы. Представим их в виде

$$A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3, \quad B = B_1^* e_1^* + B_2^* e_2^* + B_3^* e_3^*.$$

Показать, что

$$(AB) = A_1 B_1^* + A_2 B_2^* + A_3 B_3^*. \tag{7.10}$$

§ 8. Степени свободы и обобщенные координаты

1. Положение точки в пространстве можно задать тремя прямоугольными координатами x, y, z. Но это можно сделать и иначе. Например, вместо прямоугольных можно взять *полярные* или какие-либо другие координаты. Существенно, однако, что при любом выборе число независимых координат, требующихся для однозначного определения положения точки, которая может перемещаться в пространстве как угодно, равно *трем*. Про такую точку говорят, что она обладает *тремя степенями свободы*.

Может случиться, что перемещение точки в заданных условиях не может быть каким угодно. Рассмотрим, например, маленький шарик, привязанный к концу нерастяжимой нити, другой конец которой закреплен (математический маятник). Если нить натянута, то шарик может перемещаться только по поверхности сферы с центром в точке закрепления. Можно привести много других примеров, в которых материальная точка все время вынуждена находиться на какой-либо заданной поверхности. В подобных случаях говорят, что на ее движение *наложены связи*. Координаты x, y, z такой точки должны удовлетворять соотношению вида $f(x, y, z) = 0$, которое является уравнением рассматриваемой поверхности. Ввиду этого независимыми остаются только две координаты, например x и y. Третья координата z может быть вычислена из уравнения связей $f(x, y, z) = 0$. В этих случаях говорят, что точка обладает *двумя степенями свободы*.

Если точка может перемещаться только вдоль какой-либо заданной кривой, то число независимых координат, требующихся для определения ее положения, снижается до одного. За координату можно принять, например, расстояние материальной точки от какой-либо точки рассматриваемой кривой, отсчитанное вдоль этой кривой. В таких случаях говорят, что точка обладает одной *степенью свободы*.

2. Все сказанное без труда обобщается на случай механической системы, состоящей из произвольного числа n материальных точек. Если эти точки могут перемещаться без всяких ограничений, то для определения мгновенного положения их надо задать $3n$ координат (по три координаты для каждой точки). В этом случае говорят, что система обладает $3n$ *степенями свободы*. В некоторых задачах, однако, свобода перемещения материальных точек ограничена. На $3n$ координат налагаются дополнительные условия, называемые *связями*. Для однозначного определения положения всех материальных точек системы достаточно знать меньшее число координат. Обозначим его через f. Остальные $3n - f$ координат могут быть вычислены из уравнений связи. Не обязательно в качестве независимых координат брать прямоугольные координаты. Для этой цели могут быть использованы любые f величин $q_1, q_2, \ldots, q_f$, заданием которых положение материальных точек системы определяется однозначно. Такие величины называются *обобщенными координатами*. Движение системы определится

грального исчислений. Обозначение $\dfrac{dx}{dt}$ для производной принадлежит Лейбницу. На символ $\dfrac{dx}{dt}$ в математике следует смотреть как на единое целое, а не как на отношение двух "бесконечно малых" приращений dx и dt. Смысл производной $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ точно определен соотношением (3.4). Сначала надо образовать отношение конечных приращений $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, предполагая, что Δt не равно нулю. Затем путем преобразований этого отношения или каким-либо иным способом следует совершить переход к пределу. Но ни в коем случае нельзя представлять себе, что сначала совершен какой-то предельный переход от Δx и Δt к "бесконечно малым" величинам dx и dt, называемым *дифференциалами* функции x и аргумента t, а затем взято отношение этих дифференциалов $\dfrac{dx}{dt}$. Такой взгляд на производную существовал в начальной стадии развития дифференциального исчисления. Однако он несовместим с требованием математической ясности понятий, да и вообще лишен смысла. Правда, можно так определить дифференциалы dx и dt, что их отношение сделается равным производной $\dot{x}$. В математике дифференциал dt определяется как произвольное приращение аргумента t, а дифференциал функции dx – с помощью соотношения $dx = \dot{x}dt$. Но теперь в утверждении, что производная есть отношение двух конечных величин dx и dt, нет ничего удивительного, это простая тавтология, иной способ выражения. Первичным по-прежнему является понятие производной, а не дифференциала.

Однако в приложениях математики к физике надо считаться с тем, что физические величины получаются в конце концов в результате конкретных измерений, а все измерения сопровождаются погрешностями и вносят искажения в естественный ход явлений. Это обстоятельство, строго говоря, делает невозможным предельный переход $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$, вводимый в математике при определении производной. Допустим, например, что измеряется скорость движущейся пули в воздухе. Задача сводится к измерению расстояния Δx и промежутка времени Δt, за который пуля проходит это расстояние. Если время Δt взять очень большим, то за это время скорость пули может заметно уменьшиться из-за сопротивления воздуха. Отношение $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ в этом случае может оказаться заметно меньше скорости пули в рассматриваемый момент времени. Уменьшая время Δt, мы заме-

тим, что начиная с определенного момента отношение $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ в пределах доступной точности измерения перестает изменяться, если отвлечься от случайных погрешностей, сопровождающих каждое измерение. Дальнейшее уменьшение Δt бессмысленно. Оно может только ухудшить дело, так как при дальнейшем уменьшении Δt отношение $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ начинает изменяться снова и притом все более и более нерегулярно. Оно принимает различные значения от очень больших до очень малых. Это обусловлено тем, что точность любого измерения тем меньше, чем меньше измеряемая величина. Не представляет, например, особо большого труда измерить длину в 1 м с погрешностью до 1 мм, т.е. с относительной точностью 1/1000. Но измерить с такой же относительной точностью длину в 1 мм значительно труднее. Чем меньше Δt, тем больше погрешность, с которой мы вычисляем отношение $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$. Если Δt уменьшать беспредельно, то вычисленные значения отношения $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ не будут стремиться ни к какому определенному пределу. Это показывает, что в рассматриваемом примере из-за погрешностей измерений предельный переход к $\Delta t \to 0$ не может быть осуществлен в строго математическом смысле. Вычислить истинную скорость или производную $v = \dot{x}$ из физических измерений можно лишь приближенно, отождествляя ее с отношением конечных приращений $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$. Оптимальное значение времени Δt, при котором точность вычисления истинной скорости максимальна, определяется конкретными условиями. Малые, но конечные приращения Δx и Δt, отношение которых с достаточной точностью аппроксимирует производную $\dot{x}$, физик называет *бесконечно малым* или, полнее, *физически бесконечно малыми величинами*. Он обозначает их через dx и dt и обращается с ними как с математическими дифференциалами. Таким образом, в *физике производная выступает как отношение конечных, но достаточно малых приращений функции и аргумента, а не как предел этого отношения.*

Однако не только погрешности измерений могут сделать невозможным практическое выполнение предельного перехода в строго математическом смысле. Такая невозможность может быть и принципиальной, обусловленной самой природой физических величин и физических законов. Так, точное выполнение предельного перехода невозможно из-за соотношения неопределенностей (5.1). Действительно, если промежуток времени Δt стремится к нулю, то при этом будет стремиться к нулю и проходимое

ГЛАВА II

ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

В этой главе излагаются основные законы *динамики* – той части классической механики, которая занимается изучением движения тел в связи с действующими на них силами. Сила, действующая на тело, является мерой взаимодействия его с окружающими материальными объектами (другими телами, полями). Более полное определение приводится несколько ниже.

Законы динамики были установлены Ньютоном и носят его имя. Как и другие принципы, лежащие в основе физики, они являются *обобщением опытных фактов*. На них следует смотреть не как на изолированные независимые утверждения, а как на *систему взаимосвязанных законов*. Опытной проверке подвергается не каждый закон в отдельности, а вся система в целом.

Ввиду исключительной роли, которую играют законы Ньютона в механике, приведем их в том виде, в каком они были сформулированы самим Ньютоном (перевод акад. А.Н.Крылова (1863–1945)). Формулировке основных законов Ньютон предпосылает восемь определений, из которых для нас здесь важны первые четыре.

Определение 1. *Количество материи (масса) есть мера таковой, устанавливаемая пропорционально плотности и объему ее.*

Определение 2. *Количество движения есть мера такового, устанавливаемая пропорционально скорости и массе.*

Определение 3. *Врожденная сила материи есть присущая ей способность сопротивления, по которой всякое отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено самому себе, удерживает свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.*

Определение 4. *Приложенная сила есть действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.*

Закон 1. *Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.*

Закон 2. *Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.*

Закон 3. *Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе – воздействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны.*

Понятие массы у Ньютона отличается неясностью, поскольку им не было дано определения плотности. Кроме того, представление массы как произведения объема тела на плотность содержащегося в нем вещества возможно только для макроскопических тел, но не для элементарных и атомных частиц. Поэтому ньютоново определение массы не удержалось в науке и было заменено другими определениями.

Аристотель (384–322 до н.э.) и его последователи рассматривали силу как причину движения. Они считали, что с прекращением действия силы прекращается и движение тела. Сила необходима для поддержания движения. Установление первого закона Ньютона означало, что такое представление о силе является неправильным, так как для поддержания (равномерного) движения никаких "сил" не требуется. Силу стали рассматривать как *причину изменения количества движения тела*. А так как это изменение вызывается другими телами, то можно дать следующее определение силы. *Сила есть мера интенсивности взаимодействия тел, проявляющаяся в изменении их количества движения.*

Ниже мы подробно разберем содержание законов Ньютона и связанных с ними понятий, хотя и не будем следовать той системе изложения, которая была принята самим Ньютоном.

§ 9. Закон инерции. Инерциальная система отсчета

1. *В качестве первого закона движения* Ньютон принял *закон инерции*, высказанный в частной форме еще Галилеем. Согласно этому закону *тело (материальная точка), не подверженное внешним воздействиям, либо находится в покое, либо движется прямолиейно и равномерно.* Такое тело называется *свободным*, а его движение – *свободным движением* или *движением по инерции*.

Свободных тел, строго говоря, не существует. Они являются физическими абстракциями. Однако можно поставить тело в такие условия, когда внешние воздействия на него по возможности устранены или практически компенсируют друг друга. Представив себе, что эти воздействия беспредельно уменьшаются, мы и приходим в пределе к представлению о свободном теле и свободном движении.

Здесь, однако, возникает следующая трудность. Как убедиться в том, что тело не подвержено внешним воздействиям? Об этом нельзя судить по отсутствию ускорений. Нужны какие-то другие независимые способы.

§ 7. О векторах и сложении движений

1. Понятие вектора и основные операции векторной алгебры мы считаем известными. Остановимся только на разъяснении некоторых принципиальных моментов, представляющих особый интерес в физике. Среди физических величин встречаются величины, не имеющие направления, и величины, которым можно приписать определенное направление. Величины первого рода называются *скалярами*. К ним относятся, например, масса, энергия, температура, электрический заряд и пр. Величины второго рода называются *векторами*. Примерами векторов являются скорость, ускорение, сила, напряженности электрического и магнитного полей и пр. Векторы принято изображать направленными отрезками или стрелками и обозначать буквами полужирного шрифта (**A**, **B**, **C**, . . .) или (реже) буквами, над которыми поставлены стрелки ($\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \ldots$).

В качестве дополнения к приведенному определению иногда указывают, что не всякие направленные величины являются векторами, а только такие, которые складываются *геометрически*, т.е. по *правилу параллелограмма*. Однако это указание остается расплывчатым и бессодержательным, пока не сказано, что следует понимать под сложением рассматриваемых физических величин. Смыс сложения физических величин еще не определяется их физической природой. Сначала надо указать, что мы понимаем под сложением двух физических величин, а затем уже находить правила, по которым должно производиться это сложение. Только тогда указание, о котором говорилось выше, приобретает определенное содержание. Нередко для решения вопроса, являются ли рассматриваемые физические величины векторами или нет, в их сложение вкладывают такой смысл, который к этому вопросу не имеет никакого отношения.

2. Например, сложение скоростей в механике понимают в следующем смысле. Пусть точка движется относительно системы отсчета S_1 со скоростью $\mathbf{v}_1$ (например, пассажир идет по палубе корабля). Пусть далее система отсчета S_1 сама движется со скоростью $\mathbf{v}_2$ относительно другой системы отсчета S_2, условно принимаемой за неподвижную (например, корабль движется относительно берега). Под сложением движений понимают операцию, с помощью которой по этим данным можно найти скорость $\mathbf{v}$ точки (пассажира) относительно неподвижной системы S_2 (берега). В релятивистской кинематике это определение должно быть дополнено указанием, что каждая из скоростей $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ измеряется с помощью линеек и часов в той системе отсчета, относительно которой рассматривается движение. В нерелятивистской кинематике такое указание излишне, так как длины и промежутки времени в ней имеют абсолютный смысл, т.е. не зависят от системы отсчета. И вот оказывается, что сложение движений в указанном смысле в нерелятивистской кинематике производится по правилу параллелограмма, а в релятивистской кинематике это правило не справед-

ливо. Тем не менее скорость точки считается вектором как в той, так и в другой кинематике. Это показывает, что правило параллелограмма скоростей для сложения движений в указанном смысле не имеет никакого отношения к вопросу о том, является скорость вектором или нет *).

Да и в самой нерелятивистской кинематике можно указать величины, которые считаются векторами, но тем не менее не всегда складываются по правилу параллелограмма, если в сложение этих величин вложить примерно такой же смысл, что и в сложение скоростей в вышеприведенном примере. К таким величинам относится, например, ускорение. Пусть точка движется относительно системы отсчета S_1 с ускорением $\boldsymbol{a}_1$, а система S_1 имеет ускорение $\boldsymbol{a}_2$ относительно "неподвижной" системы отсчета S_2. По этим данным можно найти ускорение $\boldsymbol{a}$ точки относительно системы S_2 только в том случае, когда складываемые движения поступательные. В этом случае вектор $\boldsymbol{a}$ находится по правилу параллелограмма. В остальных случаях для нахождения результирующего ускорения знания ускорений $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ недостаточно, и само нахождение вектора $\boldsymbol{a}$ производится по более сложному правилу, которое будет рассмотрено в § 64.

3. Приведенные примеры показывают, что определение вектора нуждается в уточнении. Необходимость этого диктуется также следующими соображениями. Не всегда очевидно, какое направление следует приписать той или иной физической величине. Например, в случае геометрического отрезка AB не возникает вопроса, что следует считать его направлением. За таковое можно принять либо направление от точки A к точке B, либо противоположное направление – от точки B в точке A. Не возникает вопроса, что следует считать направлением смещения, скорости или ускорения точки, а также направлением силы, на нее действующей. Однако не очевидно, что следует считать за направление угловой скорости или геометрической поверхности, в особенности когда последняя изогнута. Наконец, точное определение вектора необходимо дать для того, чтобы обобщить это понятие на случай *многомерных пространств*. Чтобы прийти к такому определению, рассмотрим сначала простейший вектор, а именно геометрический прямолинейный отрезок, на котором установлено определенное направление. Такой направленный отрезок будем изображать стрел-

*) Если бы все скорости измерялись в одной и той же "неподвижной" системе отсчета S_2, то правило параллелограмма сохраняло бы силу и в релятивистской кинематике. Однако при этом изменился бы смысл скорости $\mathbf{v}_1$. Под $\mathbf{v}_1$ следовало бы понимать скорость точки относительно движущейся системы отсчета S_1, *измеренную в "неподвижной" системе* S_2. При сложении же скоростей в том смысле, в каком оно понимается в тексте, $\mathbf{v}_1$ есть скорость точки относительно движущейся системы S_1, *измеренная в той же системе*. А это существенно иная величина. Только в предельном случае бесконечно медленных движений обе скорости совпадают. При изложении теории относительности затронутые вопросы будут разобраны подробно.

начало которой помещено в центре Солнца (точнее, в центре масс Солнечной системы), а координатные оси являются прямыми, направленными на три удаленные звезды и не лежащими в одной плоскости. Материальными объектами, с помощью которых реализуются эти оси, являются световые лучи, приходящие от звезд в Солнечную систему. Благодаря относительному движению звезд углы между координатными осями в системе Коперника не остаются постоянными, а медленно изменяются с течением времени. Однако ввиду колоссальности расстояний до звезд изменения направлений координатных осей происходят настолько медленно, что, как правило, их можно не принимать во внимание. Система Коперника практически является инерциальной системой, по крайней мере при изучении движений, происходящих в масштабе нашей планетной системы, а также всякой другой системы, размеры которой малы по сравнению с расстояниями до тех трех звезд, которые в системе Коперника выбраны в качестве опорных. Это доказывается опытами, большинство из которых являются косвенными. Некоторые прямые опыты (маятник Фуко и пр.) будут рассмотрены в гл. IX. Эти же опыты доказывают неинерциальность земной системы отсчета.

3. Неинерциальность земной системы отсчета объясняется тем, что Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца, т.е. *движется ускоренно относительно системы Коперника.* Впрочем, оба эти вращения происходят медленно *). Поэтому *по отношению к громадному кругу явлений земная система отсчета ведет себя практически как инерциальная система.* Обычные, сравнительно грубые наблюдения и опыты над движением тел не позволяют обнаружить отступления от инерциальности земной системы отсчета. Для этого требуются более точные и тонкие опыты. Вот почему при установлении основных законов динамики можно начать с изучения движения тел относительно Земли, отвлекаясь от ее вращения, т.е. принять Землю за *приблизительно инерциальную систему отсчета.*

4. Если три звезды, используемые в системе Коперника для фиксирования направлений координатных осей, принадлежат нашей Галактике, то, разумеется, такая система может играть роль инерциальной или, точнее, приблизительно инерциальной системы отсчета только тогда, когда речь идет о движении объектов, малых по сравнению с размерами Галактики, например, о движении Солнечной системы или ее частей. Но при рассмотрении движений всей Галактики или нескольких галактик это будет уже не так. Тогда для построения (приблизительно) инерциальной системы отсчета можно использовать какие-либо другие четыре астрономических объекта, расстояния между которыми весьма велики по сравнению с размерами области пространства, внутри которой совершается движение рассматри-

*) В каком смысле следует понимать медленность вращения выяснится в гл. IX.

ваемых тел. Центр одного из этих астрономических объектов можно принять за начало координат, а остальные три объекта использовать для фиксирования направлений координатных осей.

При изучении движения тел мы будем сначала предполагать, что движение отнесено к инерциальной системе отсчета. После этого в гл. IX мы изучим, как изменится форма законов движения, когда оно рассматривается относительно неинерциальных систем отсчета.

§ 10. Масса. Закон сохранения импульса

1. Всякое тело оказывает сопротивление при попытках привести его в движение или изменить модуль или направление его скорости. Это свойство тел называется *инертностью*. У разных тел оно проявляется в разной степени. Так, сообщить одно и то же ускорение большому камню значительно труднее, чем маленькому мячику. *Мера инертности тела называется массой.*

Для точного количественного определения массы введем понятие *изолированной* или *замкнутой системы*. Так называют систему тел, настолько удаленных от всех остальных тел, что они практически не оказывают никакого действия на рассматриваемую систему. Тела системы могут взаимодействовать только между собой. Рассмотрим теперь изолированную систему, состоящую из двух материальных точек. Скорости точек должны быть малы по сравнению со скоростью света. В результате взаимодействия материальных точек их скорости меняются. Пусть $\mathbf{v}_1$ – скорость точки *1*, $\mathbf{v}_2$ – скорость точки *2*, а $\Delta\mathbf{v}_1$ и $\Delta\mathbf{v}_2$ – приращения этих скоростей за один и тот же промежуток времени Δt. Векторы $\Delta\mathbf{v}_1$ и $\Delta\mathbf{v}_2$ имеют противоположные направления и связаны между собой соотношением

$$m_1 \Delta\mathbf{v}_1 = -m_2 \Delta\mathbf{v}_2, \tag{10.1}$$

где коэффициенты m_1 и m_2 постоянны и имеют одинаковые знаки. Они совершенно не зависят от характера взаимодействия между материальными точками *1* и *2*. Например, взаимодействие может происходить путем столкновения материальных точек между собой. Его можно осуществить, сообщив материальным точкам электрические заряды или поместив между ними маленькую пружинку и т.д. Продолжительность времени Δt можно менять произвольным образом. Векторы $\Delta\mathbf{v}_1$ и $\Delta\mathbf{v}_2$ при этом будут меняться. Однако коэффициенты m_1 и m_2, точнее, их отношение, останутся одними и теми же. Эти результаты надо рассматривать как *опытные факты*, подтвержденные бесчисленным множеством примеров. Коэффициенты m_1 и m_2 могут зависеть только от *самих материальных точек системы*. Они называются *массами* или, точнее, *инертными массами* материальных точек *1* и *2*.

В прямоугольной системе координат, как известно, скалярное произведение представляется выражением $(ab) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ (см. задачи 1 и 3 к этому параграфу).

5. На основании изложенного ясно, что для доказательства векторного характера той или иной направленной физической величины надо только установить, как определяются ее составляющие вдоль координатных осей и как они преобразуются при переходе от одной координатной системы к любой другой, оси которой повернуты относительно осей первоначальной системы. При этом имеются в виду координатные системы, неподвижные одна относительно другой.

Например, двум векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ с составляющими a_x, a_y, a_z и b_x, b_y, b_z можно сопоставить в каждой системе координат упорядоченную тройку чисел $c_x = a_x + b_x$, $c_y = a_y + b_y$, $c_z = a_z + b_z$. Легко видеть, что такая тройка чисел образует вектор, так как эти числа подчиняются тем же правилам преобразования, что и составляющие векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Вектор $\boldsymbol{c}(c_x, c_y, c_z)$ называется *суммой векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Легко доказать, что он может быть получен из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ геометрическим построением по правилу параллелограмма. Аналогично определяется и *вычитание векторов. Разность двух векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ есть вектор $\boldsymbol{d}$, определяемый упорядоченной тройкой чисел $d_x = a_x - b_x$, $d_y = a_y - b_y$, $d_z = a_z - b_z$. Для его построения надо изменить на противоположное направление вектора $\boldsymbol{b}$ (получаемый таким путем вектор обозначают $-\boldsymbol{b}$), а затем на векторах $\boldsymbol{a}$ и $-\boldsymbol{b}$ построить параллелограмм.

В таком смысле сложение и вычитание векторов вводится путем *математического определения*. Над векторами можно производить и другие операции, вводимые таким же путем, например умножение вектора на скаляр или скалярное и векторное перемножение двух векторов. Все операции такого типа мы называем *математическими*. Их свойства устанавливаются соответствующими математическими теоремами. Не имеет смысла ставить вопрос об опытной проверке результатов, получаемых с помощью таких математических операций. Например, о сложении векторов, как оно только что определено, мы будем говорить как о *математическом сложении* или *сложении в математическом смысле*. Но когда векторами изображают различные физические величины, часто в их сложение или вычитание вкладывается какой-то другой смысл. А именно для получения суммы или разности векторов над ними надо произвести какие-то (хотя бы мысленные) *физические операции*. Сложение и вычитание в таком смысле мы условимся называть *физическими*. Будет ли какое-либо конкретное физическое сложение совпадать с математическим (т.е. с правилом параллелограмма) и будет ли в результате такого сложения получаться вектор – это требует дополнительного исследования, в частности опытного.

6. Поставим, например, такой вопрос. Точка перешла из положения A в положение B вдоль прямолинейного отрезка $\overrightarrow{AB}$ (рис. 14). Затем из положения B она перешла в C вдоль отрезка $\overrightarrow{BC}$. Вдоль какого прямолинейного отрезка должна перемещаться точка, чтобы из A попасть в C? Ясно, что таким отрезком является отрезок $\overrightarrow{AC}$. Его можно рассматривать как геометрическую сумму отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Сложение перемещений в таком понимании производится по правилу параллелограмма, т.е. совпадает с математическим сложением векторов. Тому

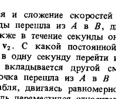


Рис. 14

же правилу подчиняется и сложение скоростей в следующем смысле. Точка в течение секунды перешла из A в B, двигаясь равномерно со скоростью $\mathbf{v}_1$. Затем также в течение секунды она перешла из B в C с постоянной скоростью $\mathbf{v}_2$. С какой постоянной скоростью v должна двигаться точка, чтобы в одну секунду перейти из A в C? Но в сложение скоростей обычно вкладывается другой смысл, разъяснимый на следующем примере. Точка перешла из A в B вдоль прямолинейного отрезка на палубе корабля, двигаясь равномерно со скоростью $\mathbf{v}_1$. За то же время сам корабль переместился относительно берега на отрезок BC, двигаясь с постоянной скоростью $\mathbf{v}_2$. С какой скоростью $\mathbf{v}$ двигалась точка относительно берега? Здесь сложение движений и их скоростей понимается в *другом смысле*. Оба движения рассматриваются в *разных* системах отсчета, движущихся одна относительно другой. Одной системой является корабль, и скорость $\mathbf{v}_1$ измеряется с помощью линеек и часов в этой системе. Другой системой является берег, и скорости $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}$ измеряются с помощью линеек и часов этой системы. На вопрос о результате сложения в таком смысле должен в конце концов ответить опыт. Дорелятивистская кинематика утверждала, что по своему результату сложение движений во втором смысле не может отличаться от сложения в первом смысле. Это происходит потому, что в дорелятивистской физике длины отрезков и промежутков времени не зависят от того, в какой системе отсчета они измеряются. Сложение скоростей и во втором смысле в дорелятивистской кинематике происходило по

тически формулируется следующим образом:

$$\frac{m_{01} v_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} + \frac{m_{02} v_2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = \frac{m_{01} v_1'}{\sqrt{1 - v_1'^2/c^2}} + \frac{m_{02} v_2'}{\sqrt{1 - v_2'^2/c^2}}. \tag{10.8}$$

Следует, однако, сделать оговорку, что эта формула относится к тому случаю, когда весь импульс сосредоточен только в *движущихся частицах*. Это было бы так, если бы частицы не взаимодействовали, а также в случае, когда взаимодействие между ними распространялось бы мгновенно. Но теория относительности отвергает мгновенные взаимодействия. Все взаимодействия осуществляются *полями* и распространяются с конечными скоростями, не превышающими скорость света в вакууме c. Поля же – это материальные объекты, обладающие импульсом и энергией. Поэтому в общем случае формулу (10.8) следует обобщить, включив в нее импульсы полей. Только в частном случае, когда изменениями импульсов полей можно пренебречь, можно пользоваться законом сохранения импульса в приближенной форме (10.8).

Для медленных движений, когда $v^2/c^2 \ll 1$, зависимостью массы от скорости можно пренебречь, полагая $m = m_0$. Тогда релятивистская механика переходит в нерелятивистскую как в свой предельный приближенный случай. Чтобы составить представление о погрешности, которая возникает при таком пренебрежении, рассмотрим космический корабль, движущийся со скоростью $v = 8$ км/с. В этом случае $(v/c)^2 = (8/300\,000)^2 \approx 7 \cdot 10^{-10}$. Если масса космического корабля $m = 5$ т $= 5 \cdot 10^6$ г, то релятивистская масса m будет превышать массу покоя всего на $m - m_0 = 3{,}5 \cdot 10^{-3}$ г. При всех расчетах движения космического корабля такой поправкой не только можно, но и нужно пренебречь, хотя бы потому, что входные данные, необходимые для расчетов, не могут быть измерены с такой высокой точностью.

§ 11. Второй закон Ньютона. Сила

1. Общие законы движения Ньютон сформулировал с использованием понятия *силы*. Представление о силе возникает в связи с ощущением мускульного усилия, которое у нас возникает при поднятии тяжелых тел или при приведении их в движение. Но всякое ощущение слишком неопределенно и субъективно. Оно может дать только интуитивное представление о силе, но не может служить основанием для точного определения этой величины, равно как и для всякого другого научного понятия. *Под силой в механике понимают всякую причину, изменяющую импульс движущегося тела.* Это определение также недостаточно, так как оно чисто качественное. Количественное определение можно дать на основе следующего факта, являющегося обобщением опытных фактов.

В инерциальной системе отсчета производная импульса $\boldsymbol{p}$ материальной точки по времени представляется уравнением

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \equiv \frac{t}{dt}(m\mathbf{v}) = \boldsymbol{F}, \tag{11.1}$$

или для медленных движений (когда массу m можно считать не зависящей от скорости $\mathbf{v}$)

$$m\dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{F}, \tag{11.2}$$

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}. \tag{11.3}$$

Здесь $\boldsymbol{F}$ однозначно определяется свойствами рассматриваемой материальной точки и окружающих ее тел, а также положением и скоростями этих тел относительно материальной точки. Величина $\boldsymbol{F}$ называется силой, действующей на рассматриваемую материальную точку. В частных случаях сила $\boldsymbol{F}$ может определятья одним только положением материальной точки или только одной ее скоростью, но по самому смыслу в механике Ньютона она не может явно зависеть от ускорения этой точки. Очевидно, *сила* $\boldsymbol{F}$ *есть вектор*, поскольку она равна производной вектора $\boldsymbol{p}$ по времени. Отсюда следует, что сложение сил подчиняется правилу параллелограмма.

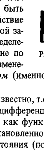


Рис. 21

Таким образом, в *инерциальной системе отсчета производная импульса материальной точки по времени равна действующей на нее силе.* Это утверждение называется *вторым законом Ньютона*, а соответствующие ему уравнения – *уравнениями движения материальной точки.* В случае системы материальных точек уравнения движения должны быть написаны для каждой из них и учтено их взаимодействие между собой. Следует, однако, иметь в виду, что второй закон Ньютона только тогда имеет смысл закона, а не определения понятия силы, когда в нем сила $\boldsymbol{F}$ определена не по сообщаемому ей действию (т.е. не по ускорению или изменению импульса тела), а другими *независимым способом* (именно, по расположению и движению окружающих тел).

Конечно, если движение тела (материальной точки) известно, т.е. известны ее координаты как функции времени t, то простым дифференцированием по t можно определить величину действующей силы как функцию того же времени. Однако природа силы может считаться установленной только тогда, когда будет выяснено, как эта сила зависит от состояния (положения и скоростей) окружающих тел.

2. Приведем простейший пример, ограничиваясь ради простоты одномерным движением материальной точки.

Подвесим тело на спиральной пружине (рис. 21). Когда система успокоится, немного оттянем тело вниз из положения равновесия, а затем

Сначала будем пользоваться системами координат только какого-либо определенного типа: либо только одними правыми, либо только одними левыми. Построенный нами отрезок A совершенно не зависит от выбора координатных осей, а потому является вектором. В самом деле, его проекции на координатные оси равны

$$A_x = A\cos(A, X), \quad A_y = A\cos(A, Y), \quad A_z = A\cos(A, Z).$$

С другой стороны, по известной геометрической теореме

$$S_x = S\cos(A, X), \quad S_y = S\cos(A, Y), \quad S_z = S\cos(A, Z).$$

Так как длину A мы выбрали численно равной S, то в любой системе координат $S_x = A_x$, $S_y = A_y$, $S_z = A_z$. Отсюда следует, что при вращении координатной системы S_x, S_y, S_z преобразуются так же, как компоненты вектора A. Поэтому S_x, S_y, S_z образуют вектор. Его мы будем обозначать $\boldsymbol{S}$ и называть *вектором площади*, ограниченной ориентированным контуром L. В этом смысле говорят, что площадь является вектором. Это утверждение доказано нами для плоских контуров и плоских площадей.

Обобщение на случай неплоских контуров и площадей не представляет затруднений. Пусть L – такой контур. Натянем на него совершенно произвольную поверхность и разобьем ее на достаточно большое

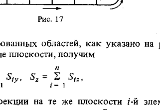


Рис. 17

число n малых ориентированных областей, как указано на рис. 17. Проецируя их на координатные плоскости, получим

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} S_{ix}, \quad S_y = \sum_{i=1}^{n} S_{iy}, \quad S_z = \sum_{i=1}^{n} S_{iz},$$

где S_{ix}, S_{iy}, S_{iz} – проекции на те же плоскости i-й элементарной области. Число n можно взять сколь угодно большим и рассматривать каждую малую область S_i как плоскую. Тогда на основании доказанного можно утверждать, что S_{ix}, S_{iy}, S_{iz} образуют вектор. Будет обра-

зовывать вектор и тройка чисел S_x, S_y, S_z, так как эти числа получаются путем сложения компонентов векторов $\boldsymbol{S}_i$.

10. В одном отношении, однако, тройка чисел S_x, S_y, S_z отличается от вектора. Эти числа преобразуются так же, как компоненты вектора при *вращении координатной системы как целого*, когда система координат все время остается либо правой, либо левой. Однако они ведут себя существенно иначе при *переходе от правой системы координат к левой или наоборот*, например при инверсии координатных осей. В этом случае для нахождения направления S надо перейти от одного винта к другому. Если в правой системе координат величину S изобразить стрелкой, то при переходе к левой направление стрелки надо изменить на противоположное. Величины такого типа называются *псевдовекторами*, или *аксиальными векторами*, в отличие от *полярных векторов*, которые мы рассматривали до сих пор. *При повороте координатной системы как целого аксиальные векторы ведут себя в точности так же, как и полярные векторы. При инверсии координатных осей компоненты полярных векторов меняют знаки, в то время как компоненты аксиальных векторов остаются неизменными.*

Можно было бы обойтись и без введения аксиальных векторов. Но тогда не все формулы имели бы один и тот же вид в правых и левых координатных системах. Например, если бы в правых системах координат мы определили тройку чисел S_x, S_y, S_z формулами (7.2), а в левых – теми же формулами, но с измененными знаками, то такая тройка чисел образовывала бы полярный вектор. Аксиальные векторы для того и вводятся, чтобы все формулы имели совершенно одинаковый вид в правых и левых системах координат.

Аналогично наряду с *истинными скалярами* вводятся так называемые *псевдоскаляры. Скаляр, или инвариант*, есть число, остающееся неизменным во всех системах координат, как правых, так и левых. *Псевдоскаляр, или псевдоинвариант, остается неизменным при переходах от правых систем координат к правым же или от левых к левым же. При переходе от правой системы к левой или наоборот псевдоскаляр меняет знак, оставаясь неизменным по абсолютной величине. Произведение псевдоскаляра на полярный вектор есть вектор аксиальный. Произведение псевдоскаляра на аксиальный вектор есть вектор полярный.* Если пользоваться одними только правыми или одними только левыми системами координат (а в физике, как уже упоминалось, применяется почти исключительно правая система), то отпадает необходимость разделения векторов на полярные и аксиальные, а скаляров – на истинные скаляры и псевдоскаляры.

Операция сложения двух векторов имеет смысл только тогда, когда складываемые векторы оба полярные или оба аксиальные. Сумма $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ не имеет смысла, если один из векторов полярный, а другой – аксиальотпустим. Возникнут колебания вверх и вниз. При подходящих параметрах системы они будут затухать слабо. Тело успеет совершить несколько десятков колебаний, прежде чем колебания заметно затухнут. Мгновенное положение тела можно характеризовать одной координатой x — смещением тела из положения равновесия. Для определения функции $x = x(t)$ можно через малые промежутки времени фотографировать тело на кинопленку, а затем обработать фотографию и построить график $x = x(t)$. Можно поступить и как-нибудь иначе. Для слабо затухающих колебаний график почти не отличается от синусоиды (рис. 22) и представляется уравнением

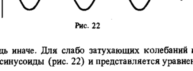


Рис. 22

$$x = A\cos\frac{2\pi t}{T}, \tag{11.4}$$

где A и T — постоянные, называемые *амплитудой* и *периодом колебаний*. Дважды дифференцируя это выражение, находим скорость и ускорение:

$$\dot{x} = -\frac{2\pi A}{T}\sin\frac{2\pi t}{T}, \qquad \ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A\cos\frac{2\pi t}{T}.$$

Сравнивая последнее выражение с (11.4), получаем

$$\ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x,$$

или после умножения на массу тела

$$m\ddot{x} = -kx, \tag{11.5}$$

где введено обозначение

$$k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 m. \tag{11.6}$$

Сравнивая (11.5) с (11.3), находим силу

$$F = -kx. \tag{11.7}$$

Мы видим, что величина F зависит только от удлинения пружины x — единственного переменного параметра, определяющего положение внеш-

них тел, оказывающих действие на рассматриваемое тело. Если к пружине подвесить тело другой массы, то изменится и период колебаний T. Однако опыт показывает, что отношение m/T^2, а с ним и коэффициент k остаются без изменения. Значит, сила F определяется только растяжением пружины и совершенно не зависит от того, каким телом это растяжение вызвано. Эти опытные факты могут служить подтверждением второго закона Ньютона. Следовательно, можно ожидать, что если, кроме пружины, на тело больше ничто не действует, то его ускорение всегда будет равно kx/m и направлено вдоль оси пружины в сторону, противоположную ее удлинению x. Оно совершенно не зависит от того, как движется тело: прямолинейно, по кругу или как-нибудь иначе. Это предположение также подтверждается опытами.

Одновременно мы видим, что *сила натяжения пружины F пропорциональна ее удлинению x*. Как показали более точные исследования, этот результат является приближенным. Им можно пользоваться, когда удлинение пружины не очень велико. Он называется *законом Гука* (по имени английского физика Роберта Гука (1635–1703)). Величина k называется жесткостью пружины (коэффициентом жесткости). Для конкретной пружины жесткость постоянна, но может меняться от пружины к пружине.

Необходимо сделать два замечания относительно приведенного примера. Во-первых, силу F можно было бы найти исключением времени из двух уравнений (11.4). Таким путем величина F была бы выражена как функция координаты x и скорости $\dot{x}$. Уравнение (11.2), конечно, было бы удовлетворено, но так найденное выражение для F содержало бы в качестве параметра также амплитуду A, и чтобы уравнение (11.2) удовлетворялось, амплитуда A должна иметь уже определенное значение. При той же пружине и массе m, но другой амплитуде A уравнение (11.2) не удовлетворялось бы. Это значит, что при заданных k и m и найденном значении F уравнение (11.2) описывало бы только *вполне определенный частный вид движения*. Между тем требуется получить такое выражение для F, которое *не содержало бы параметра A*. Тогда уравнение (11.2) будет описывать *все движения, возможные при заданных k и m* (т.е. движения с произвольной амплитудой A).

Во-вторых, каждой силе F соответствует определенное удлинение пружины. Получается проградуированная пружина, которую можно использовать для измерения сил в различных случаях. Описанный способ градуировки, основанный на втором законе Ньютона, принципиально возможен, но практически для градуировки пружины к ней подвешивают грузы различного веса и измеряют соответствующие удлинения. Нет необходимости описывать, как этим способом градуируются различные *динамометры* и как ими пользуются. Важно подчеркнуть, что при наличии динамометра можно независимо измерить силу и ускорение и проверить справедливость второго закона Ньютона.

излучающее тело A должно испытывать *отдачу*. Иначе процесс излучения света сопровождался бы нарушением закона сохранения импульса.

Эти рассуждения можно облечь в количественную форму и прийти к важным соотношениям. Допустим, что на полностью поглощающее тело B перпендикулярно к его поверхности падает параллельный пучок света. Опытами Лебедева было показано, что давление π, оказываемое светом на единицу площади тела B, равно объемной плотности энергии падающего пучка. Обозначим через l длину, а через S — площадь поперечного сечения падающего пучка. Тогда $\pi = \dfrac{\epsilon}{Sl}$, где ϵ — энергия пучка. Сила, действующая на тело B, равна $F = \pi S = \epsilon/l$. Она действует в течение времени $\tau = l/c$ (c — скорость света в вакууме), сообщая телу импульс $p = F\tau = \epsilon/c$ (см. § 18). Это и есть импульс света, поглощенного телом B. Итак, свет, распространяющийся в определенном направлении, обладает импульсом

$$p = \frac{\epsilon}{c}. \tag{13.1}$$

Поскольку распространение идет со скоростью c, целесообразно представить импульс в виде $p = mc$, рассматривая величину m как *массу света*. Она равна

$$m = \frac{\epsilon}{c^2}. \tag{13.2}$$

Соотношение (13.2) получено здесь для энергии света. Теория относительности показала, что оно справедливо для любых видов энергии. В таком расширенном понимании соотношение (13.2) выражает фундаментальный закон Эйнштейна о *взаимосвязи между массой и энергией*.

6. В механике нам не придется сталкиваться с явлениями, в которых проявляются импульсы полей. Мы ограничимся изучением только таких явлений, для которых третий закон Ньютона и закон сохранения импульса в их старом — ньютоновском — смысле выполняются.

§ 14. Роль начальных условий

1. Векторное уравнение движения материальной точки (11.3) можно записать в *координатной форме*:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z. \tag{14.1}$$

Одно векторное уравнение (11.3) эквивалентно трем числовым уравнениям (14.1). Все эти уравнения являются *дифференциальными*, а потому

их недостаточно для однозначного определения движения материальной точки. Каждое из них есть уравнение *второго порядка*. (Порядок дифференциального уравнения определяется производной высшего порядка, входящей в это уравнение). По этой причине для однозначного определения движения точки к уравнениям движения надо присоединить дополнительные данные, определяющие значения двух векторных или шести числовых постоянных. В качестве таковых обычно берут значения радиуса-вектора r и скорости v или каких-либо двух функций их в момент времени $t = 0$. Эти значения называются *начальными условиями*. Выясним этот вопрос на примере свободного движения материальной точки в поле тяжести Земли.

2. Галилеем было установлено, что *все тела в пустоте падают с одинаковым ускорением*. Для качественного подтверждения этого положения может служить стеклянная трубка длиной около одного метра, из которой можно откачивать воздух. В трубку помещаются различные тела, например дробинка, кусочек пробки, перышко, кусочек бумаги. Пока трубка не откачана, бумажки и перышко падают во много раз медленнее остальных тел, что объясняется сопротивлением воздуха. Но если воздух из трубки откачать, то все тела начнут падать одинаково быстро. Более точное доказательство дают наблюдения за качаниями маятника: опыт показывает, что период качаний маятника не зависит от материала, из которого он изготовлен. Ускорение свободного падения меняется с географической широтой: на полюсе оно максимально и составляет 9,83 м/с^2, на экваторе — минимально и равно 9,78 м/с^2. Ускорение g уменьшается с высотой над земной поверхностью: при поднятии на 1 м оно убывает приблизительно на $3\cdot10^{-6}$ м/с^2. Для средних широт можно принять, что вблизи земной поверхности $g = 9{,}80$ м/с^2. В расчетах, не требующих особой точности, ускорение свободного падения g может считаться одним и тем же для всей земной поверхности.

На тело в поле тяжести Земли действует сила $F = mg$, а потому уравнение движения (11.8) переходит в уравнение

$$\frac{d^2r}{dt^2} = g. \tag{14.2}$$

Мы пренебрегли всеми силами и учли только силу тяжести. Зависимостью g от географической широты и высоты над земной поверхностью также будем пренебрегать. Короче, ускорение g будем считать постоянным. Уравнение (14.2) эквивалентно двум уравнениям:

$$\frac{dv}{dt} = g, \quad \frac{dr}{dt} = v. \tag{14.3}$$

Простым дифференцированием нетрудно убедиться, что этим уравнени-

6. В заключение этого параграфа остановимся на вопросе о *сложении сил*. Как уже было сказано выше, *сила является вектором*. Этим мы хотим сказать только то, что при повороте координатных осей составляющие силы преобразуются как составляющие вектора. Как и для всякого вектора, для сил можно ввести операцию сложения в математическом смысле (см. § 7). По определению каждым двум силам F_1 и F_2 приводится в соответствие новый объект, изображающийся диагональю параллелограмма, построенного на векторах F_1 и F_2. Этот объект, как легко доказать, является вектором. Он называется *равнодействующей* или *результирующей* сил F_1 и F_2 или их *геометрической суммой*. Проверять на опыте результат такого сложения имеет столько же смысла, что и проверять на опыте правильность арифметического равенства 2 + 3 = 5. Результат верен *по самому определению* сложения векторов. Однако сложение сил понимают иногда и в другом (*физическом*) смысле. И именно о нем идет речь, когда в элементарной физике впервые говорят о сложении сил. При этом самый вопрос формулируется недостаточно ясно. Говорят, что на материальную точку одновременно действуют две силы F_1 и F_2. После этого спрашивают, какой одной силой F их можно заменить, чтобы получить тот же результат? Неясность заключается в том, что не указывается, в каком смысле следует понимать выражение: "На материальную точку одновременно действуют две силы". На всякую материальную точку в данных конкретных условиях действует всегда только одна сила, величина и направление которой определяется расположением этой точки относительно всех окружающих тел. Какой же смысл вкладывается в содержание поставленного вопроса? Разъясним это на двух примерах.

Допустим, что к некоторой материальной точке A прикреплена растянутая пружина, которая тянет ее с некоторой силой F_1. Уберем эту пружину и будем тянуть ту же материальную точку A другой растянутой пружиной с силой F_2. О направлении и модуле сил F_1 и F_2 мы судим по направлениям осей пружин и степени их растяжения. Прикрепим теперь к материальной точке A обе пружины вместе, направив и растянув их по-прежнему. Вопрос заключается в том, чтобы определить силу F, которая вызывает такое же движение точки, что и обе силы F_1 и F_2 вместе.

В качестве второго примера рассмотрим неподвижный точечный заряд q, помещенный в некоторой точке пространства A. Пусть в точках B и C находятся другие точечные заряды, q_1 и q_2. Пусть они вместе действуют на заряд q с силой F. Уберем второй из них и обозначим через F_1 силу, с которой на q будет действовать заряд q_1. Аналогично определится сила F_2, с которой заряд q_2 действует на q в отсутствие заряда q_1. Вопрос опять заключается в том, как по силам F_1 и F_2 найти силу F.

Пусть F_i означает силу, действующую на рассматриваемую материальную точку со стороны какого-то другого i-го тела (источника силы F_i), когда все остальные источники сил удалены ($i = 1, 2, \ldots, n$). Чему будет равна

действующая сила F, когда все n источников действуют одновременно? Это *физический вопрос*, на который нельзя дать ответ путем определения. Обычно говорят, что сила F равна геометрической сумме сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Однако такой ответ не является логическим следствием законов Ньютона или каких-либо других законов. Он может быть верным, но может быть и неверным. Это может решить только опыт. Опыт показывает, например, что для растянутых пружин или электрических сил, возбуждаемых точечными зарядами, ответ верен. Если это имеет место, то говорят, что силы $F_1, F_2, \ldots$ подчиняются *принципу суперпозиции*. В основе принципа суперпозиции лежит представление о *независимости действия сил*. Говорят, что силы действуют *независимо*, если каждая сила F_i сообщает рассматриваемому телу одно и то же ускорение a_i, независимо от того, действует ли только один i-й источник сил или все n источников одновременно. Так как ускорение является вектором, то результирующее ускорение найдется векторным сложением всех a_i. Поэтому и результирующая сила $F = ma$ также найдется векторным сложением независимо действующих сил $F_i = ma_i$. Следовательно, применимость правила параллелограмма для сложения сил в рассматриваемом физическом смысле эквивалентна предположению о независимости действия сил. Но когда тела, являющиеся источниками сил, влияют друг на друга и вследствие этого меняют свое состояние, то результат вычисления силы F по указанной схеме может оказаться неверным. Это получится, например, когда во втором примере вместо точечных зарядов q_1 и q_2 взять протяженные тела, заряженные электричеством. При сближении таких тел распределение электричества на них изменится из-за индукции, а это отразится на значении действующей силы. Но и в этом случае можно воспользоваться принципом суперпозиции, если заряды на телах в их окончательных положениях мысленно разделить на достаточно малые части. Считая такие части точечными зарядами, можно вычислить создаваемые ими электрические поля по *закону Кулона*, а затем воспользоваться принципом суперпозиции. Такое утверждение следует рассматривать как обобщение опытных фактов.

ЗАДАЧИ

1. Лифт движется с ускорением $a = \alpha g$, причем $|\alpha| < 1$. Зная вес покоящегося лифта P (вместе с нагрузкой), определить во время ускоренного движения натяжение троса T, на котором он подвешен.

Ответ. $T = P(1 - \alpha)$. Дробь α следует считать положительной, когда ускорение a направлено вниз, и отрицательной, когда оно направлено вверх.

2. К пружине прикреплено тело, которое может смещаться вдоль определенной прямой (например, вдоль стержня, на который оно надето). Эта система может служить *акселерометром*, т.е. прибором для измерения ускорения тела, на котором такой прибор установлен (автомобиля, самолета, поезда и пр.). Опишите принцип действия такого акселерометра.

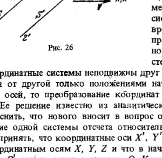


Рис. 26

с постоянной скоростью V. Пусть известно движение материальной точки в одной из этих систем, например в системе S. Как найти движение той же точки в системе S'? Задача в дорелятивистской ее постановке сводится к нахождению формул, выражающих координаты x', y', z' движущейся точки в системе S' через ее координаты x, y, z в системе S в один и тот же момент времени. Начало координат и направления координатных осей можно выбрать произвольно как в системе S, так и в системе S'. Если координатные системы неподвижны друг относительно друга и отличаются одна от другой только положениями начал и направлениями координатных осей, то преобразование координат есть чисто геометрическая задача. Ее решение известно из аналитической геометрии. Остается только выяснить, что нового вносит в вопрос о преобразовании координат движение одной системы отсчета относительно другой? Для простоты можно принять, что координатные оси X', Y', Z' соответственно параллельны координатным осям X, Y, Z и что в начальный момент времени $t = 0$ начало O' совмещается с началом O. Кроме того, можно считать, что скорость V параллельна оси X. При этих условиях ось X' все время будет совпадать с осью X. Такие упрощения в постановке задачи не лишают ее общности, поскольку переход к общим формулам может быть совершен дополнительным переносом начал координат и поворотом координатных осей.

Пусть в момент времени t движущаяся точка находится в положении M (рис. 26). Тогда $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$. За время t начало координат системы S' переходит из положения O в положение O', причем $\overrightarrow{OO'} = Vt$. Ввиду этого предыдущее соотношение принимает вид

$$r = r' + Vt', \quad t = t', \tag{15.2}$$

где $r = \overrightarrow{OM}$, $r' = \overrightarrow{O'M}$ — радиусы-векторы движущейся точки в системах S и S' соответственно. Запишем соотношение (15.2) в проекциях на координатные оси:

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \tag{15.3}$$

Формулы обратного преобразования имеют вид

$$r' = r - Vt, \quad t' = t, \tag{15.4}$$

или в координатной форме

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \tag{15.5}$$

Эти формулы и дают решение поставленной задачи. Они называются *преобразованием Галилея*. Мы присоединили к формулам преобразования координат дополнительную формулу $t' = t$, чтобы явно отметить, что в нерелятивистской кинематике время считается абсолютным, а потому не преобразуется.

С точки зрения "здравого смысла" преобразование Галилея кажется самоочевидным. Однако в основе его вывода лежит предположение дорелятивистской кинематики об абсолютности длин и промежутков времени. Абсолютность времени явно отмечена в уравнении $t = t'$. При выводе остальных формул использовано предположение об абсолютности длин. Действительно, формулы (15.2), (15.3) и (15.4) были бы самоочевидными, если бы радиусы-векторы r и r', а с ними и все координаты x, y, z, x', y', z' измерялись в одной и той же системе отсчета, например S. Но в действительности формулы предполагают, что "нештрихованные" величины r, x, y, z измеряются в системе S, а "штрихованные" r', x', y', z' — в системе S'. По этой причине при выводе формул преобразования Галилея без предположения об абсолютности расстояний и промежутков времени обойтись нельзя. Релятивистская физика отказалась от такой абсолютности. Преобразование Галилея она заменила *преобразованием Лоренца* (по имени нидерландского физика-теоретика Лоренца (1853–1928)). Этот вопрос будет подробно рассмотрен при изложении теории относительности (см. т. IV). Сейчас достаточно отметить, что преобразование Галилея является предельным случаем преобразования Лоренца и получается из последнего, когда скорость V пренебрежимо мала по сравнению со скоростью света в вакууме. При изучении "медленных движений" ($V^2/c^2 \ll 1$) можно пользоваться преобразованием Галилея. В случае "быстрых движений" этого делать нельзя.

3. Дифференцируя соотношение (15.2) по времени t, получим

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr'}{dt} + V = \frac{dr'}{dt'} + V',$$

или

$$v = v' + V, \tag{15.6}$$

где v — скорость точки в системе S, а v' — в системе S'. Эта формула выражает *нерелятивистский закон сложения скоростей* (в физическом смысле). Она выведена здесь в предположении, что скорость V постоянна. Но формула верна и в случае, когда скорость V не постоянна. Однако для целей настоящего параграфа достаточно скорость V считать величиной постоянной.

на Ньютона можно написать

$$\frac{dp_1}{dt} = F_1^{(i)} + F_1^{(e)},$$

$$\frac{dp_2}{dt} = F_2^{(i)} + F_2^{(e)},$$

. . . .

Сложив почленно эти уравнения и приняв во внимание соотношение (12.2), найдем

$$\frac{d}{dt}(p_1 + p_2 + \ldots + p_n) = F_1^{(e)} + F_2^{(e)} + \ldots + F_n^{(e)},$$

или

$$\frac{dp}{dt} = F^{(e)}, \tag{12.3}$$

где p — импульс всей системы, $F^{(e)}$ — равнодействующая всех внешних сил, действующих на нее. Таким образом, *производная по времени от импульса системы материальных точек равна геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему*. Внутренние силы исключаются третьим законом Ньютона. Уравнение (12.3) является обобщением соответствующего уравнения для одной материальной точки.

Допустим теперь, что геометрическая сумма всех внешних сил равна нулю (это имеет место, например, для замкнутой системы). Тогда $\dfrac{dp}{dt} = 0$. Производная постоянной величины равна нулю. Справедливо и обратное утверждение: если производная некоторой величины равна нулю, то эта величина постоянна. Поэтому из последнего уравнения следует, что $p = \mathrm{const}$.

Итак, *если геометрическая сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то импульс системы сохраняется, т.е. не меняется со временем*. В частности, это имеет место, когда система замкнута.

Допустим теперь, что $F^{(e)} \neq 0$, однако равна нулю проекция силы $F^{(e)}$ на какое-либо направление, например на направление оси X. Тогда из уравнения (12.3) следует, что для этой проекции $\dfrac{dp_x}{dt} = 0$, а потому $p_x = \mathrm{const}$. Таким образом, полный импульс системы не сохраняется, но сохраняется проекция импульса на направление оси X. Например, импульс свободно падающего тела не может сохраняться, так как на тело действует вниз сила тяжести. Под действием этой силы вертикальная составляющая

импульса непрерывно изменяется. Однако горизонтальная составляющая импульса при свободном падении остается неизменной. (Мы учитываем действие только силы тяжести и отвлекаемся от силы сопротивления воздуха и прочих сил.)

3. Относительно приведенного вывода закона сохранения импульса надо сделать следующее замечание. Вывод предполагает, что материальные точки замкнутой системы взаимодействуют между собой попарно, и это взаимодействие подчиняется третьему закону Ньютона. Для справедливости результата достаточно потребовать выполнения более слабого условия (12.2). Достаточно, чтобы обращалась в нуль геометрическая сумма внутренних сил, действующих в системе. Соблюдение этого условия, как будет показано в § 38, является следствием весьма общего свойства пространства — его *однородности*. Возможно, что и это более слабое условие не является необходимым. Возможно, что закон сохранения импульса останется справедливым даже в тех случаях, когда теряет смысл разделение системы на части и нельзя пользоваться представлением о силах взаимодействия между ними, а также другими представлениями и понятиями классической механики. Возможно, что такая ситуация встречается внутри атомных ядер или при превращениях "элементарных" частиц. Опыт показывает, что *закон сохранения импульса*, надлежащим образом обобщенный, *является фундаментальным законом природы, не знающим никаких исключений*. Однако в таком широком понимании он уже не может рассматриваться как следствие законов Ньютона.

4. В нашем изложении закон сохранения импульса для замкнутой системы из двух взаимодействующих материальных точек был постулирован. Его доказательством служил опыт. Это было сделано для того, чтобы ввести понятие массы. Но можно ввести это понятие иначе, а именно определить отношение масс сравниваемых тел по обратному отношению ускорений, сообщаемым им равными силами. Этот способ *не требует предварительного измерения сил*. Достаточно лишь располагать критерием *равенства сил*. Например, если на два тела последовательно подействовать одной и той же пружиной, растянутой на одну и ту же длину, то можно утверждать, что действующие на них силы одинаковы. В сущности, способ определения массы, использованный нами в § 10, является частным случаем этого второго, более общего способа. Он использует то обстоятельство, что два тела, приведенные во взаимодействие, подвергаются согласно третьему закону Ньютона воздействию сил, равных по модулю. Понятно, что если при определении массы не опираться на третий закон Ньютона, а пользоваться каким-либо другим *независимым способом*, то при доказательстве закона сохранения импульса не потребуется особо выделять случай двух взаимодействующих материальных точек. И в этом случае закон сохранения импульса будет теоремой механики. Определение массы, принятое нами в § 10, обладает, однако, тем преимуществом, что оно не нуждается

именно так. Заставьте теперь корабль привести в движение с какой угодно скоростью. Если движение будет равномерным и без качки в ту и другую сторону, то во всех указанных явлениях вы не обнаружите ни малейшего изменения и ни по одному из них вы не сможете установить, движется ли корабль или стоит на месте".

Далее Галилей повторяет, как будут протекать на движущемся корабле все явления, описанные выше. Он замечает, в частности, что если бросить с одинаковой силой (надо было сказать — с одинаковой скоростью относительно корабля) один и тот же предмет сначала к корме, а затем к носу корабля, то в первом случае предмет пройдет относительно пола корабля не большее расстояние, чем во втором, хотя за время, пока предмет находится в воздухе, пол движущегося корабля успеет переместиться на значительное расстояние навстречу предмету. Аналогичные замечания делаются им и в отношении остальных явлений. Отмечая независимость всех явлений, наблюдаемых в закрытом помещении под палубою корабля, от равномерного движения последнего, Галилей приходит к следующему выводу:

"Причина согласованности всех этих явлений в том, что движение корабля обще всем находящимся в нем предметам, так же как и воздуху. Поэтому-то я и сказал, что вы должны находиться под палубой".

5. Было бы неправильным давать принципу относительности следующую формулировку: "Если в двух различных инерциальных системах отсчета в начальный момент времени *все без исключения тела и объекты Вселенной* поставить в совершенно одинаковые условия, то в дальнейшем в обеих системах отсчета все явления будут протекать совершенно одинаково". Такое утверждение бессодержательно и не может выражать никакого физического закона. Действительно, если две системы отсчета движутся одна относительно другой, то *все без исключения тела Вселенной* не могут в один и тот же момент времени находиться в них в совершенно одинаковых условиях: скорости одних и тех же тел в этих двух системах отсчета будут разными. Поэтому предпосылка, о которой говорится в приведенной (неправильной) формулировке, не может быть выполнена, поскольку она имеет в виду все без исключения тела Вселенной. Принцип относительности (в правильной формулировке) является не тривиальным физическим законом потому, что в нем речь идет не о явлениях во всей Вселенной, а о явлениях внутри *конечных замкнутых систем* или *систем, находящихся в неизменных внешних условиях*. Примером может служить закрытое помещение на корабле, о котором говорил Галилей. Помещение должно быть закрыто. Иначе явления, в нем происходящие, зависели бы от скорости ветра, меняющейся с изменением скорости движения корабля. Такое помещение все же не является вполне замкнутой системой. Тела, в нем находящиеся, подвержены внешним явлениям: на них действует поле силы тяжести Земли. Однако это поле одно и то же, независимо от того, движется корабль равномерно или стоит на месте. Поэтому закрытое помещение с находящимися в нем телами ведет себя так же, как замкнутая система, хотя оно и находится во внешнем поле тяжести.

Принцип относительности иногда формулируют еще так: "Законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета". Недостаток

этой формулировки состоит в том, что "одинаковость законов природы" может быть истолкована в смысле одинаковости протекания одного и того же явления во всех инерциальных системах отсчета. Это, как подробно разъяснено выше, неверно. Характер протекания физических явлений определяется не только основными законами природы, но и значениями параметров, определяющих начальные условия, в которых находилась система. Чтобы не возникало подобных неверных представлений, лучше говорить не просто о "законах природы", а по примеру Эйнштейна о "законах, по которым *происходят изменения состояний физических систем*", формулируя принцип относительности следующим образом:

Законы природы, по которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к какой из инерциальных систем отсчета относятся эти изменения.

Эта формулировка является более общей, чем прежняя, в которой говорилось об инвариантности законов Ньютона относительно преобразования Галилея. Во-первых, здесь идет речь об инвариантности *всех физических законов*, а не только законов механики, каковыми являются законы Ньютона. Во-вторых, здесь не указан конкретный вид преобразований координат и времени, относительно которых законы природы инвариантны. Такие преобразования надо найти из *самого принципа относительности* и некоторых дополнительных соображений. Именно так в теории относительности получаются преобразования Лоренца, о которых было упомянуто выше. Законы природы инвариантны относительно преобразования Лоренца. Принцип относительности в такой формулировке называется *принципом относительности Эйнштейна*. О нем будет идти речь в т. IV нашего курса.

§ 16. Аддитивность и закон сохранения массы

1. Пусть два тела с массами m_1 и m_2 сталкиваются между собой и соединяются в одно — составное — тело. Примером может служить слипание двух глиняных шаров при столкновении их между собой. Другим примером является *химическая реакция*, в которой два атома или ядра соединяются в молекулу. Требуется определить массу составного тела m, зная массы m_1 и m_2 соединяющихся тел. На первый взгляд ответ кажется тривиальным, а именно $m = m_1 + m_2$. Хотя это в какой-то мере и правильно, но требует обоснования. Обоснование в механике Ньютона можно дать на основе принципа относительности Галилея.

Рассмотрим процесс столкновения в какой-либо инерциальной системе отсчета S. Обозначим через v_1 и v_2 скорости тел до столкновения, а через v — скорость составного тела после столкновения. На основании закона сохранения импульса можно написать

$$m_1v_1 + m_2v_2 = mv. \tag{16.1}$$

хотим понять происхождение сил F_1 и F_2, с которыми нить действует на тела A и B. Точно так же надо рассмотреть деформации тел A и B, если мы хотим понять, почему эти тела растягивают нить. Ведь тела A и B действуют на нить только потому, что они деформированы. Камень, привязанный на веревке, заставляют вращаться по окружности. При этом неизбежно возникнут деформации. Если бы камень не был деформирован, то он не мог бы двигаться с ускорением. Всякая мысленно вырезанная малая часть камня движется с ускорением потому, что на нее действуют окружающие части камня. А это возможно только тогда, когда камень деформирован.

Помимо сил, зависящих от деформации тел, возможны и более сложные случаи. Например, силы взаимодействия могут зависеть не только от самих деформаций, но и от их *скоростей*. Примером могут служить силы трения. Но и эти силы возникают лишь при непосредственном соприкосновении взаимодействующих тел. Во всех этих случаях говорят, что силы взаимодействия являются *силами близкодействия*.

2. Помимо сил, действующих при соприкосновении тел, в природе существуют силы, которые, во всяком случае при непосредственном созерцании, воспринимаются нами как силы, *непосредственно действующие на расстоянии* без какого бы то ни было участия промежуточной среды. Они существуют даже тогда, когда взаимодействующие тела разделены "пустым" пространством. К силам такого рода относятся, например, гравитационные силы, а также силы взаимодействия наэлектризованных и намагниченных сил.

Согласно основным представлениям механики Ньютона силы, действующие на всякое тело в какой-либо момент времени, зависят от положений и скоростей остальных тел в тот же момент времени. Когда взаимодействующие тела не соприкасаются, такое представление предполагает либо непосредственное действие на расстоянии, либо передачу взаимодействий с *бесконечно большой скоростью*. Ньютоновская механика принципиально допускала взаимодействия, передающиеся с бесконечно большими скоростями. Логически против такого допущения возразить ничего нельзя. Вопрос должен быть решен опытом. Опытные факты привели к заключению, что мгновенных взаимодействий не существует. Скорость распространения взаимодействий ограничена (она не превосходит скорости света в вакууме). Отсюда следует, что описание взаимодействий, даваемое ньютоновской механикой, может привести и действительно приводит к практически верным результатам только тогда, когда скорости всех тел рассматриваемой системы пренебрежимо малы по сравнению со *скоростью распространения взаимодействий* (скоростью света). Но принципиально такое описание неверно. Для иллюстрации рассмотрим третий закон Ньютона. Из-за наличия конечной скорости распространения взаимодействий этот закон не может быть всегда верным для взаимодействий, осуществля-

ющихся на расстоянии. Действительно, пусть две материальные точки длительно находятся в покое в положениях A и B (рис. 24). Допустим, что силы их взаимодействия в этих положениях подчиняются третьему закону Ньютона. Если первая точка перейдет в новое положение A' настолько быстро, что за время перехода взаимодействие не успеет распространиться до точки B, то сила F при этом не изменится. Она будет определяться не новым, а прежним расположением материальных точек, т.е. будет направлена вдоль прямой BA, а не вдоль прямой BA', как должно было бы

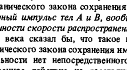


Рис. 24

быть по третьему закону Ньютона. Получилось нарушение третьего закона, а с ним и механического закона сохранения импульса взаимодействующих сил. *Суммарный импульс тел A и B, вообще говоря, не может сохраняться из-за конечности скорости распространения взаимодействий.*

3. Физик XIX века сказал бы, что такое нарушение третьего закона Ньютона и механического закона сохранения импульса является кажущимся. В действительности нет непосредственного действия тел на расстоянии. Непосредственное действие на расстоянии предполагает, что тело может оказывать действие в тех местах, где оно не находится и от которых оно отделено пустым пространством. По этой причине такое действие невозможно. Все взаимодействия осуществляются посредством промежуточной среды. Тело A, действуя на окружающую среду, вызывает в ней какие-то изменения, например, напряжения и давления, распространяющиеся с конечными скоростями. Когда эти изменения доходят до тела B, они проявляются в виде сил, действующих на него. Но как быть в тех случаях, когда взаимодействующие тела отделены друг от друга совершенно пустым пространством? На это физик XIX века отвечал бы, что абсолютно пустого пространства не существует. Все пространство заполнено какой-то средой, например *мировым эфиром*, через которую и осуществляется взаимодействие. Такую гипотетическую среду физик XIX века наделял свойствами, аналогичными свойствам привычных нам твердых, жидких или газообразных тел. Третий закон Ньютона всегда справедлив — сказал бы он, — но его надо применять не к силам взаимодействия непосредственно между удаленными телами A и B (таких сил просто не существует, они кажущиеся), а к силам взаимодействия между этими телами и окружающей средой. Закон сохранения импульса также всегда

Полная масса веществ, участвующих в реакции, равна $m = 12 + 32 = 44$ г. Поэтому

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{0{,}5\cdot10^{-8}}{44} \approx 10^{-10}.$$

Чтобы обнаружить взвешиванием изменение массы вещества при химических реакциях, необходима относительная точность измерений не менее 10^{-10}.

Энергетический выход ядерных реакций в миллионы раз больше, чем химических реакций. На ядерных реакциях соотношение между массой и энергией (13.2) подтверждено экспериментально. В ядерной физике и физике элементарных частиц это соотношение играет исключительную роль.

§ 17. О законах трения

1. В механике обычно имеют дело с силами всемирного тяготения, упругими силами и силами трения. Иногда в механику включаются также задачи на движение электрически заряженных частиц в электрических и магнитных полях. Тогда к указанным силам добавляются еще электромагнитные силы, т.е. силы, которым подвержены заряженные частицы со стороны таких полей. Силы всемирного тяготения и упругие силы будут подробно рассмотрены в дальнейшем. Сейчас же мы кратко рассмотрим *силы трения*. Заметим при этом, что механика не занимается изучением физической природы действующих сил — эти вопросы рассматриваются в других разделах физики. Поэтому мы здесь совсем не будем затрагивать вопрос о происхождении сил трения, а ограничимся описанием эмпирически найденных *законов трения*. Понятно, что эти вопросы при всей их важности не имеют все же того фундаментального значения, каким характеризуются, например, законы Ньютона, а сами законы трения являются приближениями, часто довольно грубыми.

Упругие силы, силы всемирного тяготения, а также силы притяжения и отталкивания электрически заряженных тел зависят только *от конфигурации тел*, т.е. от их взаимного расположения, но не от их скоростей. Силы трения, помимо конфигурации, зависят еще *от относительных скоростей тел*, между которыми они действуют.

Силы трения могут действовать между соприкасающимися телами или их частями как при их относительном движении, так и при их относительном покое. Трение называется *внешним*, если оно действует между различными соприкасающимися телами, не образующими единого тела (например, трение между бруском и наклонной плоскостью, на которой он лежит или с которой он соскальзывает). Если же трение проявляется между различными частями одного и того же тела, например между различными слоя-

ми жидкости или газа, скорости которых непрерывно меняются от слоя к слою, то трение называется *внутренним*. Впрочем, разделение трения на внутреннее и внешнее носит условный характер. Если соприкасающиеся тела объединить в одну механическую систему, то трение, которое ранее рассматривалось как внешнее, становится внутренним. Трение, испытываемое твердым телом при движении в жидкости (или газе), есть внутреннее трение в жидкости, а не внешнее трение между жидкостью и твердым телом. Действительно, опыт показывает, что слои жидкости или газа, непосредственно примыкающие к поверхности тела, прилипают к ней и движутся вместе с телом, а трение возникает в окружающей среде между различными слоями ее, соприкасающимися друг с другом.

Трение между поверхностью твердого тела и окружающей его жидкой или газообразной средой, в которой оно движется, а также трение между различными слоями такой среды, называется *вязким*.

Трение между поверхностями двух соприкасающихся твердых тел при отсутствии между ними жидкой или газообразной прослойки (смазки) называется *сухим*. Применительно к этому случаю, когда соприкасающиеся тела движутся друг относительно друга, различают *трение скольжения* и *трение качения*.

2. Рассмотрим сначала законы сухого трения. Такое трение возникает не только при скольжении одного тела по поверхности другого, но и при всякой попытке вызвать такое скольжение. В последнем случае трение называется *трением покоя* или *трением сцепления*. Наличие трения покоя — характерная особенность сухого трения. В более общем смысле, безотносительно к тому, между какими телами возникает трение, оно называется

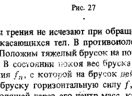


Рис. 27

сухим, если силы трения не исчезают при обращении в нуль относительных скоростей соприкасающихся тел. В противоположном случае трение называется *жидким*. Положим тяжелый брусок на поверхность горизонтального стола (рис. 27). В состоянии покоя вес бруска F уравновешен силой нормального давления f_n, с которой на брусок действует стол ($P = f_n$). Приложим затем к бруску горизонтальную силу f, лежащую в вертикальной плоскости, проходящей через его центр масс, как можно ближе к поверхности стола, чтобы предотвратить опрокидывание бруска, когда он придет ям удовлетворяют следующие решения:

$$\mathbf{v} = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{r} = \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \tag{14.4}$$

при произвольных значениях постоянных векторов $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$. Решение (14.4) является *общим.* Это значит, что любое решение уравнения (14.2) может быть представлено в виде (14.4). Общее решение – это, в сущности, не одно решение, а целое *семейство решений,* зависящее от двух произвольных векторных постоянных $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$. Придавая этим постоянным какие-либо конкретные значения, мы выделяем из этого семейства определенное *частное решение.* Постоянная $\mathbf{v}_0$ есть начальная скорость движущейся точки, $\mathbf{r}_0$ – радиус-вектор ее в начальный момент времени. В этом легко убедиться, если с помощью формул (14.4) найти значения $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$ при $t = 0$. Постоянные $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$ нельзя определить из дифференциального уравнения движения (14.2), так как при любых значениях этих постоянных выражения (14.4) являются решениями этого уравнения. Величины $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$ определяются *начальными условиями.* В зависимости от значений $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$ движения могут сильно отличаться друг от друга. Тело может подниматься вверх или опускаться вниз по прямой линии; оно может описывать параболу, достигая или не достигая ее вершины; дуга параболы может быть изогнута сильнее или слабее и т.д. Получается довольно разнообразный и запутанный класс движений. Заслуга Ньютона, между прочим, и состоит в том, что он подметил, что вся эта сложность исчезает, а все многообразие движений может быть описано единой формулой, не содержащей никаких произвольных постоянных, если от положений и скоростей материальной точки перейти к ее ускорению.

3. Полученные результаты допускают обобщение. Допустим, что имеется система N материальных точек, взаимодействующих между собой и с внешними телами, положение которых предполагается заданным в любой момент времени. Записав математически второй закон Ньютона для каждой материальной точки, мы получим систему N векторных или $3N$ эквивалентных им числовых дифференциальных уравнений второго порядка. Можно показать, что для однозначного решения этих уравнений надо задать $2N$ векторных или $6N$ числовых величин, определяющих начальные значения координат и скоростей материальных точек системы.

ЗАДАЧА

Тело брошено вверх под углом α к горизонту с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$. Исследовать его движения, пренебрегая сопротивлением воздуха. Найти уравнение траектории, дальность полета и максимальную высоту подъема, считая земную поверхность горизонтальной. При каком угле α дальность полета максимальна?

Решение. Точку земной поверхности, откуда брошено тело, примем за начало координат ($\mathbf{r}_0 = 0$). Тогда, как видно из (14.4), движение будет происходить

в вертикальной плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{g}$ и $\mathbf{v}_0$. Примем ее за координатную плоскость XY, направив ось X горизонтально в сторону движения, а ось Y – вертикально вверх. Запишем уравнение (14.4) в проекциях на координатные оси, учтя при этом, что $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$,

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - gt,$$

$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2.$$

Исключая из последних двух уравнений время t, найдем уравнение траектории

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Это уравнение параболы. Отсюда находим дальность полета

$$x = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$$

и максимальную высоту поднятия

$$y_{\text{макс}} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Максимальная дальность достигается при $\alpha = 45°$ и равна

$$x_{\text{макс}} = \frac{v_0^2}{g}.$$

§ 15. Принцип относительности Галилея

1. Уравнение, выражающее закон Ньютона,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{15.1}$$

отчетливо показывает, что этот закон не может быть справедлив в любой системе отсчета. Действительно, ускорение $\mathbf{a}$, вообще говоря, имеет разные значения в различных системах отсчета, движущихся относительно друг друга с ускорением. Сила же $\mathbf{F}$ не может зависеть от выбора системы отсчета, так как она определяется только взаимными расположениями и относительными скоростями материальных точек системы, а эти величины согласно нерелятивистской кинематике от выбора системы отсчета не зависят. Отсюда следует, что если второй закон Ньютона справедлив в какой-либо системе отсчета, то он не может оставаться справедливым в другой системе отсчета, движущейся относительно первой с ускорением.

2. Допустим, что система отсчета S инерциальна. Рассмотрим вторую систему отсчета S', движущуюся относительно первой поступательно

Опыт показывает, что колебания тела, подвешенного на пружине, постепенно затухают и в конце концов прекращаются. Отсюда следует, что уравнение движения (11.5) является приближенным. Оказывается, что тело, движущееся в газообразной или жидкой среде, встречает сопротивление, зависящее от скорости тела. Если скорость тела (относительно окружающей среды) не очень велика, то эта сила приблизительно пропорциональна первой степени скорости. Так, в случае шара на пружине затухание его колебаний в газе довольно точно описывается уравнением

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}, \tag{11.8}$$

где b – постоянный коэффициент, зависящий от размеров шара и рода газа, в котором он колеблется. Здесь мы имеем пример силы, которая зависит не только от положения, но и от скорости шара.

3. Для решения задач на движение материальных точек и их систем нужны *дифференциальные уравнения движения.* Способ получения таких уравнений не имеет значения. В частности, их можно было бы получать и строить всю механику без введения понятия силы.

При рассмотрении различных динамических задач механика ставит и решает два вопроса: 1) по заданному движению тел вычислить силы, действующие на них; 2) по заданным силам определить движение тел. Задачи первого типа сравнительно просты. Они сводятся к вычислению ускорений материальных точек, из которых состоит система. Примером таких задач может служить разобранная нами задача о силе, действующей на колеблющееся тело, подвешенное на пружине. Задачи второго типа много сложнее и являются основными в механике. Здесь прежде всего надо написать уравнение движения для каждой материальной точки, входящей в систему. Это сводится к отысканию сил как функций координат и скоростей взаимодействующих точек. В результате получится система дифференциальных уравнений, решение которой (при определенных начальных условиях) даст полное представление о всех деталях движения. Таким образом, при решении таких задач требуется *интегрирование дифференциальных уравнений,* а это значительно сложнее дифференцирования.

Могут быть и задачи смешанного типа. Сюда относятся, например, такие задачи, когда на движение системы наложены определенные ограничения, например движущаяся точка должна находиться на какой-то линии или поверхности. Такого рода ограничения называются *связями.* Действие таких линий или поверхностей, как и всяких связей, ограничивающих свободу движения, сводится к тому, что они воздействуют на движущиеся тела с определенными силами, называемыми *реакциями связей.* Во всех подобных случаях задача сводится не только к определению движения каждой материальной точки системы, но и к нахождению реакций связей.

4. Остановимся на вопросе о соотношении между первым и вторым законами Ньютона. Если в уравнении (11.1) положить $\mathbf{F} = 0$, то получится

$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$. Отсюда следует, что $\mathbf{p} = \text{const}$, т.е. импульс, а с ним и скорость свободно движущейся материальной точки постоянны. Таким образом, формально первый закон Ньютона является следствием второго. Почему же тогда он выделяется в самостоятельный закон? Дело в том, что уравнение (11.1), выражающее второй закон Ньютона, только тогда имеет смысл, когда указана система отсчета, в которой оно справедливо. Выделить же такую систему (или такие системы) отсчета позволяет первый закон. Он утверждает, что существует система отсчета, в которой свободная материальная точка движется без ускорения. В такой системе отсчета (и в этом состоит второй закон) движение всякой материальной точки подчиняется уравнению (11.1). Таким образом, по существу, первый закон нельзя рассматривать как простое логическое следствие второго. Связь между этими законами более глубокая.

5. Уравнение (11.2) предопределяет выбор единицы силы. Поскольку единицы длины, массы и времени уже установлены, это уравнение вынуждает нас за единицу силы принять такую силу, которая единице массы сообщает ускорение, равное единице. В 1960 г. XI Генеральная конференция по мерам и весам приняла так называемую *Международную систему единиц* SI (в русской транскрипции СИ). В основу этой системы положены семь *независимых* единиц: единица длины *метр* (м), единица времени *секунда* (с), единица массы *килограмм* (кг), единица разности температур *кельвин* (К), единица силы тока *ампер* (А), единица силы света *кандела* (кд) и единица количества вещества *моль* (моль). Остальные единицы являются их *производными.* Смысл термина "производная единица" легко уясняется на примере единицы силы. В системе СИ за единицу силы принимается ньютон (Н). Ньютон – эта такая сила, которая массе в 1 кг сообщает ускорение в 1 м/с^2. Наряду с системой СИ в физике широко употребляется система СГС. Основными единицами в этой системе являются: *сантиметр* (см) – единица длины, *секунда* (с) – единица времени, *грамм* (г) – единица массы. Единицей силы в системе СГС является *дина* (дин). Дина есть сила, сообщающая массе в 1 г ускорение в 1 см/с^2. Очевидно,

$$1\ \text{Н} = 10^5\ \text{дин}.$$

В механике обе системы одинаково удобны. Ни одна из них не обладает преимуществом по сравнению с другой, так как между ними нет разницы по существу. Обе системы в механике отличаются друг от друга только *масштабами* основных единиц – единицы длины и единицы массы. Все понятия механики имеют один и тот же смысл, а формулы пишутся совершенно одинаково в обеих системах единиц. Не так обстоит дело в учении об электрических, оптических и атомных явлениях. Для изучения таких явлений система СГС значительно лучше приспособлена, чем система СИ. Поэтому в нашем курсе отдается предпочтение системе СГС.

Дифференцируя второй раз в преположении постоянства V, получим

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv'}{dt} = \frac{dv'}{dt'},$$

или

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'. \tag{15.7}$$

Здесь $\mathbf{a}$ – ускорение точки в системе S, а $\mathbf{a}'$ – ускорение той же точки в системе S'. Таким образом, ускорение в обеих системах отсчета одно и то же. Говорят, что *ускорение инвариантно относительно преобразования Галилея.*

Свободная материальная точка движется в системе S без ускорения, так как по предположению система S инерциальна. Формула (15.7) показывает, что ее движение в системе S' будет также неускоренным. Следовательно, система S' – тоже инерциальная система отсчета. Таким образом, *система отсчета, движущаяся прямолинейно и равномерно относительно инерциальной системы, сама является инерциальной системой отсчета.* Если существует хотя бы одна инерциальная система отсчета, то существует и бесконечное множество инерциальных систем, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно. Сила является функцией только инвариантных величин: разностей координат и разностей скоростей взаимодействующих материальных точек. Поэтому она не меняется при переходе от одной системы отсчета к другой: $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$. Иначе говоря, *сила инвариантна относительно преобразования Галилея.* Так как и ускорение инвариантно: $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$, то из уравнения (15.1) следует

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}'.$$

Это уравнение выражает второй закон Ньютона в "штрихованной" системе отсчета S'. Оно имеет такой же вид, что и в "нештрихованной" системе S. Уравнения, остающиеся неизменными при переходе от одной системы отсчета к другой, называются *инвариантными.* Таким образом, *уравнения механики Ньютона инвариантны относительно преобразования Галилея.* Это утверждение называется *принципом относительности Галилея.*

4. Принцип относительности Галилея утверждает полное равноправие всех инерциальных систем отсчета. Значит ли это, что одно и то же движение выглядит одинаково во всех инерциальных системах отсчета? Конечно, нет. Движение тела, свалившегося с полки равномерно движущегося вагона, является прямолинейным, если его рассматривать относительно вагона. Но то же движение происходит по параболе в системе отсчета, связанной с полотном железной дороги, хотя законы механики Ньютона одинаковы в обеих системах отсчета. *Движение выглядит по-разному потому, что законы Ньютона выражаются дифференциальными урав-*

нениями, а таких уравнений недостаточно, чтобы полностью определить движение. Для этого к дифференциальным уравнениям надо присоединить начальные условия – задать начальное положение тела и его начальную скорость. В приведенном примере дифференциальные уравнения движения тела одни и те же в обеих системах отсчета, однако начальные условия разные. В вагоне тело падает с полки с начальной скоростью, равной нулю. В системе отсчета, связанной с полотном железной дороги, то же тело имеет начальную скорость в горизонтальном направлении, равную скорости поезда. Этим и объясняется различный характер движения в обеих системах отсчета. Для того чтобы движение получилось одинаковым, надо в обеих системах отсчета создать одинаковые начальные условия. Это надо понимать в следующем смысле.

Допустим, что имеются две замкнутые системы тел – две большие лаборатории, движущиеся относительно друг друга прямолинейно и равномерно. Каждая из лабораторий может служить системой отсчета. Пусть эти системы инерциальны. Предположим, что обе лаборатории совершенно тождественны, т.е. состоят из одного и того же набора одинаковых тел и оборудованы совершенно одинаково. Явления, происходящие внутри лабораторий, не зависят от того, что происходит в окружающем внешнем мире, так как по предположению лаборатории являются замкнутыми системами. Принцип относительности Галилея утверждает, что *основные механические законы, которыми определяются изменения состояния движения тел, в обеих лабораториях одни и те же.* Под основными механическими законами здесь понимаются законы, однозначно определяющие движение системы по начальным условиям, в которых она находилась, т.е. по значениям координат и скоростей всех материальных точек системы в произвольный момент времени, условно принимаемый за начальный. Если в обеих лабораториях создать одинаковые начальные условия для всех без исключения тел, то все последующие движения их будут протекать совершенно одинаково в обеих лабораториях. Именно в таком смысле понимал принцип относительности сам Галилей. Он писал:

"Уединитесь с каким-нибудь приятелем в просторное помещение под палубой большого корабля и пустите туда мух, бабочек и других подобных мелких летающих насекомых. Пусть там находится также большой сосуд с водой и плавающими в нем рыбками. Подвесьте далее наверху ведерко, из которого капля за каплей вытекала бы вода в другой сосуд с узким горлышком, подставленный внизу. Пока корабль стоит неподвижно, наблюдайте старательно, как мелкие летающие живые существа с одной и той же скоростью летают во всех направлениях внутри помещения. Рыбки, как вы увидете, будут плавать безразлично во все стороны. Все падающие капли будут попадать в подставленный сосуд. Бросая приятелю какую-нибудь вещь, вам не придется применять большую силу, чтобы бросить ее в одну сторону, чем в другую, если только вещь бросается на одни и те же расстояния. Прыгая двумя ногами, вы сделаете прыжок на одно и то же расстояние, независимо от его направления. Наблюдайте хорошенько за всем этим, хотя у нас не возникает никакого сомнения в том, что пока корабль остается неподвижным, все должно происходить

3. Самолет совершает вираж, двигаясь по окружности с постоянной скоростью v на одной и той же высоте. Определить радиус r этой окружности, если плоскость крыла самолета наклонена к горизонтальной плоскости под постоянным углом α.

Ответ. $r = \dfrac{v^2}{g \operatorname{tg}\alpha}$.

Указание. Когда самолет летит прямолинейно, плоскость крыла горизонтальна. Подъемная сила в этом случае направлена вертикально вверх, т.е. перпендикулярна к плоскости крыла. При повороте корпуса самолета вокруг продольной оси подъемная сила поворачивается на тот же угол, т.е. продолжает оставаться перпендикулярной к плоскости крыла, так как силы взаимодействия самолета с окружающей средой зависят лишь от относительного движения самолета и среды.

§ 12. Третий закон Ньютона и закон сохранения импульса

1. Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух взаимодействующих материальных точек. В этом случае справедлив закон сохранения импульса

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{const}.$$

Дифференцируя это соотношение по времени, получим

$$\dot{\mathbf{p}}_1 + \dot{\mathbf{p}}_2 = 0,$$

или, на основании второго закона Ньютона (11.1),

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2, \tag{12.1}$$

где $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ – силы, с которыми рассматриваемые материальные точки действуют друг на друга. Привлечем сюда опытный факт, согласно которому силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ направлены *вдоль прямой,* соединяющей взаимодействующие точки. Тогда мы придем к *третьему закону Ньютона*:

Силы взаимодействия двух материальных точек равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки.

Одну из сил, $\mathbf{F}_1$ или $\mathbf{F}_2$, согласно Ньютону иногда называют *действием,* а другую – *противодействием,* и формулируют третий закон следующим образом. *Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.* Следует, однако, заметить, что "действие" по своей физической природе ничем не отличается от "противодействия". Если действующая сила обусловлена деформацией, всемирным тяготением или наличием электрического поля, то и противодействующая сила обусловлена тем же самым. Так, тяжелое тело, лежащее на столе, давит на стол, испытывая со стороны стола противоположно направленное противодавление. Действие – давление камня на стол – обусловлено деформацией камня, противодействие – давление стола на камень – обусловлено деформацией стола. В основе подразделения сил на "действующие" и "противодействующие" лежит представление об *активных телах,* произ-

водящих действие, и *пассивных телах,* оказывающих противодействие. Так, если лошадь тянет телегу, то активным телом, производящим действие, будет лошадь, а пассивным телом, оказывающим противодействие, – телега. Однако подразделение тел на активные и пассивные можно провести далеко не всегда. Например, когда Солнце и планета притягиваются друг к другу силами всемирного тяготения, то в этом взаимодействии они выступают совершенно равноправно, и нельзя указать, какое из этих взаимодействующих тел является активным, а какое пассивным. Какую из сил $\mathbf{F}_1$ или $\mathbf{F}_2$ назвать действием и какую противодействием – это в большинстве случаев вопрос соглашения.

2. Третий закон Ньютона мы сформулировали для замкнутой системы, состоящей из двух взаимодействующих материальных точек. Постулируем теперь его справедливость для системы из произвольного числа материальных точек. Мы исходим из представления, что и в этом случае взаимодействие сводится к силам *попарного взаимодействия* между материальными точками. Пусть $\mathbf{F}_{ik}$ – сила, с которой i-я материальная точка действует на k-ю, а $\mathbf{F}_{ki}$ – сила, с которой k-я точка действует на i-ю. Третий закон утверждает, что обе эти силы направлены вдоль прямой, соединяющей взаимодействующие точки, причем $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$. В таком понимании третий закон Ньютона позволяет выполнить переход от *механики отдельной материальной точки* к *механике системы материальных точек.* В частности, он позволяет распространить закон сохранения импульса на случай системы произвольного числа n взаимодействующих материальных точек. Рассмотрим этот вопрос, а также другие связанные с ним важные вопросы.

Силы, действующие на материальные точки системы, можно разделить на *внутренние* и *внешние.* Внутренние силы – это силы взаимодействия между материальными точками самой системы. Выше мы обозначили их символами $\mathbf{F}_{ik}$ с двумя индексами i и k, которые указывают, какие точки взаимодействуют. Внешние силы – эти такие силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела. Согласно третьему закону Ньютона $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$, т.е. $\mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_{ki} = 0$. Отсюда следует, что геометрическая сумма всех внутренних сил, действующих в системе, равна нулю. Запишем этот результат в виде соотношения

$$\mathbf{F}_1^{(i)} + \mathbf{F}_2^{(i)} + \ldots + \mathbf{F}_n^{(i)} = 0, \tag{12.2}$$

снабдив каждую силу верхним индексом (i), который указывает, что речь идет о внутренних силах. Нижний индекс обозначает номер материальной точки, на которую действует сила. Таким образом, $\mathbf{F}_1^{(i)}$, например, обозначает полную внутреннюю силу, действующую на первую материальную точку. Обозначим далее символами $\mathbf{F}_1^{(e)}, \mathbf{F}_2^{(e)}, \ldots$ внешние силы, действующие на материальные точки системы. Тогда на основании второго зако-

Рассмотрим теперь тот же процесс в системе отсчета S', движущейся относительно системы S прямолинейно и равномерно со скоростью V. Согласно принципу относительности закон сохранения импульса справедлив также в системе S' и записывается в виде

$$m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' = m\mathbf{v}'. \tag{16.2}$$

Ввиду полного равноправия инерциальных систем отсчета массы всех тел в системе S' такие же, какими они были в системе S. В нерелятивистской физике скорости $\mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_2'$ и $\mathbf{v}'$ в системе S' связаны с соответствующими скоростями в системе S соотношениями

$$\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1 - \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}.$$

Поэтому (16.2) преобразуется в

$$m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}) + m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{V}) = m(\mathbf{v} - \mathbf{V}),$$

или на основании соотношения (16.1)

$$(m_1 + m_2)\mathbf{V} = m\mathbf{V}.$$

Отсюда ввиду произвольности $\mathbf{V}$

$$m = m_1 + m_2. \tag{16.3}$$

Масса составного тела, как мы и ожидали, *равна сумме масс составляющих тел. Это свойство называется аддитивностью массы.*

Доказательство может быть обобщено. Нет необходимости предполагать, что сталкиваются только два тела и что после столкновения они соединяются в одно тело. Можно взять, например, произвольную химическую реакцию, в которой реагирует несколько молекул или атомов, а в результате реакции получается несколько других молекул или атомов. Тогда, повторяя рассуждения, приведшие нас к соотношению (16.3), мы придем к более общему заключению, что *сумма масс веществ до реакции равна сумме масс веществ после реакции.* Это *закон сохранения вещества* или, точнее, *закон сохранения массы.* Масса пропорциональна весу. Поэтому этот закон называли также *законом сохранения веса.* Такое название применялось в старой литературе, но оно неудачно и теперь почти вышло из употребления. Однако Ломоносов (1711–1765) и Лавуазье (1743–1794), с именами которых обычно связывают утверждение в науке *закона сохранения вещества,* пришли к своему открытию на основании опытов по взвешиванию продуктов химических реакций. Поэтому то, что непосредственно доказали эти ученые, есть именно "закон сохранения веса".

2. Ньютон определил массу тела как *количество вещества,* содержащегося в нем. Такое определение бессодержательно, пока не указано, что следует понимать под "количеством вещества". Ньютон просто заменил

термин "количество вещества" новым термином "масса", не дав ни одному из них точного определения. Однако с ньютоновым определением массы интуитивно связано представление об ее аддитивности. Если, например, две одинаковые гири с массами 1 кг каждая соединить в одну, то "интуитивно ясно", что получится гиря с массой 2 кг, ибо "количество вещества" в двух гирях вдвое больше, чем в одной из них. Интуиция является мощным источником научного творчества. Но в науке она не может служить доказательством. Доказательство должно основываться на точных определениях и законах природы. Точное определение понятия массы было дано в § 10. Если пользоваться только этим определением, то совсем не очевидно, что масса является величиной аддитивной. Необходимость доказательства этого свойства следует уже из того, что *аддитивность и закон сохранения массы вещества верны лишь приближенно.* В самом деле, этот закон мы получили как следствие галилеева принципа относительности. Но *галилеев принцип относительности не есть вполне точный закон природы – он является приближенным предельным случаем эйнштейновского принципа относительности.* Поэтому приведенное выше рассуждение должно быть пересмотрено – в основу его надо положить не галилеев, а эйнштейновский принцип относительности. Это будет сделано в т. IV при изложении теории относительности. Сейчас же мы ограничимся сообщением основного результата ввиду его фундаментального значения. *Закон сохранения массы в старом его понимании – сумма масс тел до реакции равна сумме масс тел после реакции – оказывается неверным. Законы сохранения массы и энергии, которые в дорелятивистской физике считались двумя независимыми точными законами природы, в релятивистской физике утратили свою независимость и были объединены в единый закон сохранения массы – энергии. Всякая энергия обладает массой, равной количеству энергии, деленному на квадрат скорости света в вакууме.* К такому заключению мы уже пришли в частном случае лучистой энергии (см. конец § 13). В балансе массы должна учитываться не только масса вещества, но и масса выделяющейся или поглощающейся энергии. Во всех процессах природы сумма массы вещества и энергии остается постоянной.

То обстоятельство, что в химических реакциях не было обнаружено изменение массы вещества, связано с их относительно очень малым энергетическим выходом. Изменение массы за счет выделения или поглощения энергии столь мало, что его обнаружение находится за пределами точности измерений. Так, при сгорании 12 г углерода с образованием углекислого газа CO_2 выделяется около 99 ккал тепла. В эргах эта величина равна $\epsilon = 99 \cdot 4{,}19 \cdot 10^{10} \approx 4 \cdot 10^{12}$ эрг. По формуле (13.2) ей соответствует масса

$$\Delta m \approx \frac{4 \cdot 10^{12}}{9 \cdot 10^{20}} \approx 0{,}5 \cdot 10^{-8}\ \text{г}.$$

в указании дополнительного критерия, позволяющего судить о равенстве действующих сил. В общем случае такой критерий, не опирающийся на третий закон Ньютона, указать затруднительно.

5. Иногда взаимодействие двух тел A и B осуществляется посредством третьего тела. Тогда мы имеем дело с системой трех тел, и надо принимать во внимание уравнение движения этого третьего тела. Между тем во многих случаях рассуждают так, как если бы этого третьего тела совсем не было. Выясним, когда такой способ рассуждения допустим и не приводит к ошибкам. Для этого рассмотрим следующий пример.

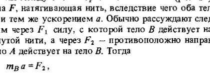


Рис. 23

Тела A и B связаны между собой нерастяжимой нитью (рис. 23). На тело A действует сила $\mathbf{F}$, натягивающая нить, вследствие чего оба тела A и B движутся с одним и тем же ускорением a. Обычно рассуждают следующим образом. Обозначим через F_1 силу, с которой тело B действует на тело A посредством натянутой нити, а через F_2 – противоположно направленную силу, с которой тело A действует на тело B. Тогда

$$m_A a = F + F_1, \qquad m_B a = F_2, \tag{12.4}$$

где m_A и m_B – массы тел A и B. По третьему закону Ньютона $F_1 = -F_2$. Исключая F_1 и F_2, находим ускорение

$$a = \frac{F}{m_A + m_B},$$

а затем силы F_1 и $-F_2$:

$$F_2 = -F_1 = \frac{m_B}{m_A + m_B}F.$$

Это рассуждение неполно и может привести к неправильному результату. Из рассуждения выпало третье тело – нить, которая также движется ускоренно. Тела A и B не взаимодействуют непосредственно между собой. Они взаимодействуют с *нитью,* и третий закон Ньютона надо применять именно к таким взаимодействиям. Вот более подробное рассуждение, в котором учитывается ускорение, сообщаемое нити. В нем под F_1 и F_2 следует понимать силы, с которыми на тела A и B действует *натянутая нить.* Силы, с которыми на нить действуют тела A и B, обозначим через

F_1' и F_2'. К уравнениям (12.4) надо присоединить уравнение движения нити: $ma = F_1' - F_2'$, где m – масса нити. Ввиду равенства действия и противодействия $F_1' = F_1$, $F_2' = F_2$, так что

$$ma = F_1 - F_2.$$

Решая это уравнение совместно с (12.4), получим

$$a = \frac{F}{m_A + m_B + m},$$

$$F_2 = m_B a, \quad F_1 = (m_B + m)a.$$

Теперь $F_1 \neq F_2$, поскольку $m \neq 0$. Допустим, однако, что масса нити пренебрежимо мала по сравнению с массами тел A и B. Тогда, отбрасывая член ma, получим приближенно $F_1 = F_2$. В этом приближении результат получается такой же, как если бы тела A и B *непосредственно* взаимодействовали между собой. Идеализируя задачу, говорят, что взаимодействие между телами A и B осуществляется посредством *"безмассового" тела* (нити). Подобные случаи встречаются очень часто. Безмассовые тела просто выбрасывают из рассмотрения. Однако безмассовых тел в действительности не существует, они являются идеализированными абстракциями. Надо отдавать себе отчет, когда можно и когда нельзя пользоваться такими идеализированными абстракциями. В приведенном примере было бы грубой ошибкой пользоваться соотношением $F_1 = F_2$ в тех случаях, когда масса нити сравнима с массами тела A и B.

§ 13. Взаимодействие тел на расстоянии и полевое взаимодействие

1. Взаимодействие тел может происходить либо при их *непосредственном* соприкосновении, либо *на расстоянии.* В первом случае взаимодействующие тела тянут или толкают друг друга. Возникающие при этом силы обычно вызываются *деформациями тел.* Деформации могут быть малы и не представлять непосредственного интереса в изучаемом явлении. Тогда от них можно отвлечься, учтя их влияние введением соответствующих сил *натяжения* и *давления.* Но если нас интересует происхождение и механизм действия сил, то надо подробно рассмотреть картину деформаций, возникающих в телах. Так, в примере, рассмотренном в конце предыдущего параграфа, нить действует на тела A и B (см. рис. 23) потому, что она растянута. В приведенных там расчетах мы отвлекались от этого обстоятельства, так как предполагали, что растяжение нити мало, так что скорости связанных тел A и B можно было считать одинаковыми. В этом случае результаты расчета не зависят от степени растяжения нити. Это было бы, вообще говоря, не так, если вместо нити взять мягкую пружину. Мы не можем также отвлечься от растяжения нити, если

в движение. Опыт показывает, что если сила f не превосходит некоторой определенной величины f_0 ($f < f_0$), то брусок не приходит в движение. Отсюда следует сделать вывод, что на брусок со стороны стола действует равная и противоположно направленная сила $f_{\text{тр}}$, уравновешивающая силу f. Это и есть сила трения, а именно трения покоя. Такая же сила трения, но в противоположном направлении, действует на поверхность стола со стороны бруска. Сила трения покоя автоматически принимает значения, равные внешней силе f. Максимальное значение силы трения покоя равно f_0.

Допустим теперь, что брусок скользит по поверхности стола со скоростью v. При равномерном движении действующая сила f по-прежнему уравновешивается силой трения $f_{\text{тр}}$. Если равновесия нет, то движение будет ускоренным. В обоих случаях сила трения $f_{\text{тр}}$, вообще говоря, зависит от скорости v. Характер этой зависимости графически изображен на схематическом рис. 28. Сила трения, приложенная к поверхности бруска, всегда действует против направления движения последнего. На графике это отражено тем, что знаки величин $f_{\text{тр}}$ и v всегда противоположны. При $v = 0$ график вырождается в отрезок вертикальной прямой. Этому соответствует тот факт, что сила трения покоя может принимать любое значение от $-f_0$ до $+f_0$. При увеличении модуля скорости модуль силы трения сначала убывает, проходит через минимум, а затем начинает возрастать. Вся кривая симметрична относительно начала координат $[f(+v) = -f(-v)]$. Как экспериментально установил Кулон, сила трения $f_{\text{тр}}$ не зависит от площади поверхности, вдоль которой тела соприкасаются, и пропорциональна силе нормального давления f_n, с которой одно тело действует на другое. Поэтому можно написать

$$f_{\text{тр}} = \mu f_n. \tag{17.1}$$

Постоянная μ называется *коэффициентом трения* и зависит от природы и состояния трущихся поверхностей. Если тело действительно скользит по поверхности другого тела, то μ называют *коэффициентом трения скольжения.* Если же тела покоятся друг относительно друга, то его называют *коэффициентом трения покоя.* В последнем случае предполагается, что в формуле $f_{\text{тр}}$ равно f_0, т.е. максимальному значению, которое может принимать сила трения покоя. В соответствии с рис. 28 коэффициент трения μ, вообще говоря, зависит от скорости v. Впрочем, как также установил Кулон, эта зависимость, как правило, выражена слабо, так что, когда не требуется большая точность, коэффициент μ можно считать не зависящим от скорости. Тогда кривая рис. 28 вырождается в кривую рис. 29. Сила трения и в этом идеализированном случае зависит от v, поскольку при переходе скорости через нуль она меняет знак, а при $v = 0$ становится неопределенной. Во всех задачах на силы трения, приводимых в конце этого параграфа, предполагается, что μ не зависит от v.

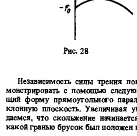


Рис. 28

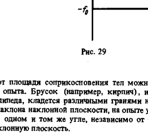


Рис. 29

Независимость силы трения покоя от площади соприкосновения тел можно демонстрировать с помощью следующего опыта. Брусок (например, кирпич), имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, кладется различными гранями на наклонную плоскость. Увеличивая угол наклона наклонной плоскости, на опыте убеждаемся, что скольжение начинается при одном и том же угле, независимо от того, какой гранью брусок был положен на наклонную плоскость.

3. При наличии сухого трения тело может находиться в состоянии покоя, даже если на него подействовать какой-либо силой. Если приложенная сила f не превосходит максимального значения f_0 силы трения покоя, то тело не придет в движение. С этой особенностью сухого трения связано так называемое *явление застоя.* Допустим, например, что тело A, лежащее на поверхности горизонтального стола, находится в равновесии, когда обе прикрепленные к нему пружины не растянуты или растянуты одинаково (рис. 30). В этом положении сила, действующая на тело A, равна нулю.

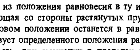


Рис. 30

Сместим тело A из положения равновесия в ту или другую сторону. Если сила f, действующая со стороны растянутых пружин, не превосходит f_0, то тело A и в новом положении останется в равновесии. На поверхности стола не существует определенного положения равновесия тела. Напротив, существует область, при смещении в пределах которой тело остается в равновесии. Эта область называется *областью застоя.* Сухое трение, действующее, например, в подшипниках измерительных приборов со стрелка-

справедлив. Однако полный импульс слагается не только из импульсов тел, входящих в систему, но и из импульса промежуточной среды, через которую передаются взаимодействия.

Физик нашего времени рассуждает аналогично, но более осторожно и абстрактно. Он также не признает непосредственного действия тел на расстоянии. Однако он не признает и промежуточной среды, через которую якобы передаются взаимодействия. Он говорит, что все взаимодействия осуществляются *полями* – гравитационными, электромагнитными и прочими. Тело A возбуждает в окружающем пространстве *силовое поле,* которое в месте нахождения тела B проявляется в виде действующих на него сил. В свою очередь, тело B возбуждает аналогичное силовое поле, действующее на тело A. Никаких других силовых взаимодействий, помимо полевых, современная физика не признает. Взаимодействия прикосновением являются частными случаями полевого взаимодействия. Они осуществляются *молекулярными полями.* Молекулярные поля быстро убывают с расстоянием и проявляются, когда расстояние между взаимодействующими телами не превышает примерно 10^{-7} см. Вот почему такие *полевые взаимодействия* макроскопически воспринимаются как *"взаимодействия прикосновением".*

4. Возникает вопрос, не является ли различие между точками зрения современного физика и физика прошлого века чисто терминологическим: раньше говорили о промежуточной среде, теперь говорят о поле. Дело, конечно, не в терминологии, а в существе, в реальных физических свойствах поля и гипотетической среды – мирового эфира, посредством которой, по воззрениям физиков XIX века, осуществляются взаимодействия тел. Мировому эфиру приписывались свойства, аналогичные свойствам обычных тел. Можно было говорить о покое и движении эфира, о его упругости, плотности, силах, действующих на эфир. Можно было говорить о движении тел относительно эфира, с эфиром можно было связать систему отсчета и т.д. Обо всем этом не имеет смысла говорить, когда речь идет о поле. На поле современная физика смотрит как на некоторую объективную реальность, посредством которой передаются взаимодействия. Поле может существовать и самостоятельно, независимо от возбудивших его тел. Таковы, например, электромагнитные волны, излучаемые радиостанциями. Радиостанция может прекратить работу, а излученное ею электромагнитное поле продолжает существовать и распространяться в пространстве. Достигнув удаленного приемника, оно доставляет информацию, которую несколько ранее передала радиостанция. Нет абсолютно пустого пространства, пространство заполнено полями. Поле, наряду с веществом, является *одним из видов материи.* Физикам XIX века казалось, что понять природу сил взаимодействия – это значит свести их к механическим силам, возникающим при соприкосновении тел, например, к силам упругости. Современная физика отрицает такую постановку вопроса.

Упругие силы, силы давления и натяжения, мускульная сила и прочие силы издавна были привычны человеку. Он считал эти силы чем-то простым и понятным. Электрические и магнитные силы, с которыми он столкнулся позднее, были восприняты им как нечто таинственное и непонятное. Возникло естественное стремление свести эти таинственные силы к более простым и привычным силам упругости, к силам давления и натяжения. Однако в действительности дело обстоит как раз наоборот. Более простыми и "понятными" являются силы электромагнитных взаимодействий, а упругие и прочие силы – более сложными. По современным представлениям силы упругости, силы трения, силы химического сродства, молекулярные силы, мускульная сила и прочие обычные силы, с которыми сталкивается человек, за исключением сил всемирного тяготения, являются не чем иным, как проявлением электромагнитных сил. Поэтому задача сведения электромагнитных сил к силам упругости просто бессмысленна.

Поле действует на тела с определенными силами. Однако не имеет смысла говорить о механических силах, действующих на поля. Поэтому с точки зрения полевого взаимодействия третий закон Ньютона может нарушаться: на тело действует сила, но нет силы противодействия, действующей на другое тело. Закон сохранения импульса, однако, остается верным, так как импульсом могут обладать не только тела, но и поля. Импульс поля проявляется в изменении импульса тела, излучившего или поглотившего энергию поля. При излучении тело теряет импульс, уносимый полем, при поглощении оно приобретает импульс за счет поглощения энергии поля.

5. Примером проявления импульса электромагнитного поля может служить *давление света.* Опытами русского физика-экспериментатора П.Н. Лебедева (1866–1912) было показано, что свет оказывает давление на тела,

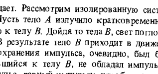


Рис. 25

на которые он падает. Рассмотрим изолированную систему из двух тел A и B (рис. 25). Пусть тело A излучило кратковременный световой сигнал по направлению к телу B. Дойдя то тела B, свет поглощается, оказывая на него давление. В результате тело B приходит в движение, его импульс меняется. Закон сохранения импульса, очевидно, был бы нарушен, если бы свет, направлявшийся к телу B, не обладал импульсом. Мы должны приписать ему импульс, равный импульсу, приобретенному телом B после поглощения света. Но если свет обладает импульсом, то при его излучении ми, ограничивает чувствительность таких приборов. Наличие же области застоя делает неопределенным положение равновесия, в котором устанавливается стрелка при измерениях, т.е. ограничивает точность измерения.

4. Во многих случаях силы трения оказываются полезными. Так, автомобиль приводится в движение силами трения, действующими между шинами колес и полотном дороги. Силы трения приводят в движение поезда. Силы трения, возникающие между приводным ремнем и шкивами, осуществляют передачу движения от одного маховика к другому. Подобных примеров можно привести неограниченно много. Но сплошь и рядом силы трения являются вредными. Таковы, например, силы трения, возникающие между осью и втулкой, а также между другими деталями машины. Они приводят к преждевременному износу машин, и с ними приходится бороться. Для этой цели применяется *смазка*. Однако более радикальным способом уменьшения сил трения является замена трения скольжения *трением качения* (шарикоподшипники). Под трением качения понимают трение, возникающее, например, между шарообразным или цилиндрическим телом, катящимся без скольжения по плоской или изогнутой поверхности. Трение качения формально подчиняется тем же законам, что и трение скольжения. Однако коэффициент трения при качении значительно меньше, чем при скольжении. Наиболее радикальным способом уменьшения сил трения, который за последнее время начинает получать все большее и большее распространение, является создание "воздушной подушки" между соприкасающимися поверхностями.

5. Как уже говорилось выше, в отличие от сил сухого трения силы жидкого или вязкого трения обращаются в нуль вместе с относительными скоростями между соприкасающимися слоями среды. Более подробно вопрос о вязком трении будет разобран в механике жидкостей и газов, а также в кинетической теории газов. Здесь же мы очень кратко рассмотрим только силы жидкого трения, возникающие при движении твердого тела в жидкой или газообразной среде. Помимо сил, обусловленных собственно внутренним трением, на поверхность движущегося тела со стороны среды действуют также силы нормального давления. Результирующая этих нормальных давлений имеет составляющую, направленную против движения тела. Такая составляющая называется *силой сопротивления среды*. При больших скоростях она во много раз превосходит силы сопротивления, обусловленные собственно вязким трением. При рассмотрении движения тела в вязкой среде эти две силы целесообразно объединить вместе. Такую суммарную силу, направленную против скорости движущегося тела, условно будем называть также *силой трения* и обозначать символом $f_{\text{тр}}$.

При малых скоростях сила $f_{\text{тр}}$ пропорциональна первой степени скорости тела:

$$f_{\text{тр}} = -k_1 \mathbf{v}. \tag{17.2}$$

При возрастании скорости зависимость становится более сложной, а затем сила трения начинает возрастать приблизительно пропорционально квадрату скорости:

$$f_{\text{тр}} = -k_2 v^2 \frac{\mathbf{v}}{v} = -k_2 v\mathbf{v}. \tag{17.3}$$

Коэффициенты k_1 и k_2, а также область скоростей, в которой осуществляется переход от линейного закона (17.2) к квадратичному (17.3), в сильной степени зависят от формы и размеров тела, направления его движения, состояния поверхности тела и от свойств окружающей среды. Искусственно увеличивая поверхность тела и придавая ей надлежащую форму, можно сильно увеличить значения коэффициентов k_1 и k_2. На этом основано устройство и действие парашюта (см. задачу 8 к этому параграфу).

ЗАДАЧИ

1. Удобный метод измерения коэффициента трения покоя состоит в следующем. Тело кладется на наклонную плоскость. Измеряется минимальный угол наклона плоскости α, при котором начинается скольжение. Найти связь между углом α и коэффициентом трения μ.

Ответ: $\mu = \operatorname{tg}\alpha$.

2. Человек может, хотя и медленно, привести в движение тяжелую баржу на воде, если он будет тянуть за канат, привязанный к ней. Но он не в состоянии сделать это с тяжелым телом, лежащим на земле, если даже вес этого тела заметно меньше веса баржи. Почему?

3. Положите стержень в горизонтальном положении на указательные пальцы ваших рук. Вначале пальцы должны быть разведены, а стержень должен лежать на них своими концами. Затем приближайте пальцы друг к другу. Около какой точки стержня они сойдутся? После этого пальцы снова разведите так, чтобы стержень все время лежал на них в горизонтальном положении. В каком месте будет находиться один из пальцев, когда другой достигнет конца стержня? Произведите этот опыт и объясните наблюдаемые явления.

4. Шофер, едущий на автомобиле по горизонтальной площади в тумане, внезапно заметил недалеко впереди себя стену, перпендикулярную к направлению движения. Что выгоднее: затормозить или повернуть в сторону, чтобы предотвратить аварию?

Ответ. Затормозить.

5. Автомобиль движется "равномерно" вдоль извилистой горизонтальной дороги. Принимая дорогу за синусоиду, найти максимальную скорость, которую может развить автомобиль, чтобы не было заноса.

Решение. Если автомобиль движется по криволинейной траектории "равномерно", то его ускорение a будет только нормальным. Это ускорение создается силой трения покоя между колесами автомобиля и полотном дороги: $f_{\text{тр}} = ma$. Если скорость автомобиля превзойдет определенный предел, то для удержания автомобиля на требуемой траектории, где кривизна ее велика, максимальной силы трения f_0 будет недостаточно ($f_0 < ma$). Автомобиль начнет скользить в направлении нормали к траектории. При этом в соответствии с графиком рис. 28 сила трения скольжения уменьшится, что приведет к дальнейшему боковому смещению автомобиля с траектории. В этом и состоит явление заноса. При движении по синусоиде

ЗАДАЧИ

1. Для лучшего уяснения закономерностей движения ракеты полезно рассмотреть мысленный случай, когда ракета выбрасывает вещество не непрерывно, а конечными дискретными порциями одной и той же массы Δm. Пусть при каждом выбрасывании порция вещества Δm получает одну и ту же скорость $v_{\text{отн}}$ относительно ракеты, направленную назад. Определить скорость ракеты v_N, которую она достигнет после N выбрасываний, если начальная масса ракеты равна m_0. Показать, что в предельном случае, когда $\Delta m \to 0$, $N \to \infty$, но произведение $N\Delta m$ остается постоянным, выражение для v_N переходит в формулу Циолковского. Ограничиться нерелятивистскими скоростями.

Решение. Пусть $v_1, v_2, \ldots$ – скорость ракеты после 1-го, 2-го, ... выбрасываний. По закону сохранения импульса $(m_0 - \Delta m)\, v_1 + \Delta m \cdot w = 0$, где w – скорость выброшенной массы Δm после первого выбрасывания. Очевидно, $v_{\text{отн}} = v_1 - w$. Исключая w, получим

$$v_1 = \frac{\Delta m}{m_0}\, v_{\text{отн}}. \tag{21.7}$$

Найдем теперь v_2. В системе отсчета, движущейся со скоростью v_1, ракета перед вторым выбрасыванием неподвижна, а после второго выбрасывания приобретает скорость $v_2 - v_1$. Поэтому можно воспользоваться формулой (21.7), сделав в ней замену $m_0 \to m_0 - \Delta m$, $v_1 \to v_2 - v_1$. Это дает

$$v_2 - v_1 = \frac{\Delta m}{m_0 - \Delta m}\, v_{\text{отн}}.$$

Комбинируя это соотношение с (21.7), находим v_2. Продолжая этот процесс дальше, нетрудно получить

$$v_N = \left[\frac{\Delta m}{m_0} + \frac{\Delta m}{m_0 - \Delta m} + \ldots + \frac{\Delta m}{m_0 - (N-1)\,\Delta m}\right] v_{\text{отн}}.$$

В пределе, когда $\Delta m \to 0$, $N \to \infty$, $m_0 - (N-1)\,\Delta m \to m$, сумма, стоящая в квадратных скобках, переходит в интеграл, и мы получаем

$$v = v_{\text{отн}} \int_m^{m_0} \frac{dm'}{m'},$$

где m – конечная масса ракеты. После взятия интеграла получается формула Циолковского (21.5).

2. Найти связь между массой ракеты $m(t)$, достигнутой ею скоростью $v(t)$ и временем t, если ракета движется вертикально вверх в поле земной тяжести. Скорость газовой струи относительно ракеты $v_{\text{отн}}$ считать постоянной. Сопротивление воздуха и изменение ускорения свободного падения g с высотой не учитывать. Какую массу газов $\mu(t)$ должна ежесекундно выбрасывать ракета, чтобы оставаться неподвижной в поле тяжести?

Решение. Уравнение движения ракеты

$$m\frac{dv}{dt} = -v_{\text{отн}}\frac{dm}{dt} - mg$$

перепишем в форме

$$m\frac{d}{dt}(v + gt) = -v_{\text{отн}}\frac{dm}{dt}$$

или

$$\frac{d(v + gt)}{dm} = -\frac{v_{\text{отн}}}{m}.$$

Это уравнение имеет такой же вид, что и (21.3), если за неизвестное принять величину $v + gt$. Поэтому можно воспользоваться формулой (21.5), заменив в ней v на $v + gt$. Это дает

$$\frac{m_0}{m} = e^{(v+gt)/v_{\text{отн}}}, \quad v = v_{\text{отн}} \ln\frac{m_0}{m} - gt.$$

Величина μ, очевидно, равна $-\dfrac{dm}{dt}$. Она находится из условия, что для неподвижной ракеты $\dfrac{dv}{dt} = 0$, и равна

$$\mu = -\frac{dm}{dt} = \frac{m_0 g}{v_{\text{отн}}}\, e^{-gt/v_{\text{отн}}}.$$

3. Космический корабль движется с постоянной по модулю скоростью v. Для изменения направления его полета включается двигатель, выбрасывающий струю газа со скоростью $v_{\text{отн}}$ относительно корабля в направлении, перпендикулярном к его траектории. Определить угол α, на который повернется вектор скорости корабля, если начальная масса его m_0, а конечная m.

Решение. Ускорение корабля по модулю равно $\omega^2 r = \omega v$, причем $v = \text{const}$. Поэтому уравнение движения

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v}_{\text{отн}}\frac{dm}{dt}$$

переходит в $mv\omega dt = -v_{\text{отн}} dm$. Замечая, что $d\alpha = \omega dt$ есть угол поворота за время dt, и интегрируя, получим

$$\alpha = \frac{v_{\text{отн}}}{v} \ln\frac{m_0}{m}.$$

4. Космический корабль, движущийся в пространстве, свободном от поля тяготения, должен изменить направление своего движения на противоположное, сохранив скорость по модулю. Для этого предполагаются два способа: 1) сначала затормозить корабль, а затем разогнать его до прежней скорости; 2) повернуть, заставив корабль двигаться по дуге окружности, сообщая ему ускорение в поперечном направлении. При каком из этих двух способов потребуется меньшая затрата топлива? Скорость истечения газов относительно корабля считать постоянной и одинаковой в обоих случаях.

Ответ. Первый способ требует меньшей затраты топлива.

5. Определить коэффициент полезного действия ракеты, т.е. отношение кинетической энергии K, приобретенной ракетой, к количеству теплоты Q, выделившемуся

Соответствующие значения силы $F^{(e)}$ на таких промежутках обозначим через $F_1^{(e)}, \ldots, F_n^{(e)}$. Тогда на основании соотношения (18.2) можно написать приближенно

$$p_1 - p_0 = F_1^{(e)}(t_1 - t_0),$$
$$p_2 - p_1 = F_2^{(e)}(t_2 - t_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p - p_{n-1} = F_n^{(e)}(t - t_{n-1}),$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ – импульсы системы в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ соответственно. Складывая эти равенства, получим

$$p - p_0 = \sum_i F_i^{(e)} \Delta t_i,$$

где использовано стандартное обозначение $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Последнее равенство является приближенным и не совсем определенным, поскольку значения внешней силы $F_1^{(e)} F_2^{(e)}, \ldots, F_n^{(e)}$ не фиксированы точно. Однако эта неопределенность устраняется и указанное равенство переходит в точное соотношение, если перейти к пределу, устремляя к нулю

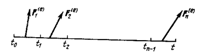


Рис. 31

наибольший из промежутков времени Δt_i при неизменной длине временного интервала $t - t_0$. В результате такого предельного перехода получится

$$p - p_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i F_i^{(e)} \Delta t_i.$$

Как известно, предел, стоящий в правой части этого равенства, называется определенным интегралом функции $F^{(e)}(t)$ в пределах от t_0 до t:

$$\int_{t_0}^{t} F^{(e)}(\tau)\,d\tau \equiv \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i F_i^{(e)} \Delta t_i.$$

Аргумент функции $F^{(e)}$, по которому производится интегрирование, обозначен через τ, чтобы не смешивать его с верхним пределом интеграла t. Величина τ называется *переменной интегрирования*. Значение определенного интеграла при заданной подынтегральной функции определяется только значениями пределов интегрирования t_0 и t.

Таким образом, обобщением соотношения (18.2) является формула

$$p - p_0 = \int_{t_0}^{t} F^{(e)}(\tau)\,d\tau. \tag{18.3}$$

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства называется *импульсом силы $F^{(e)}$ за время от t_0 до t*. Следовательно, и в случае силы, меняющейся во времени, *приращение импульса системы материальных точек равно импульсу геометрической суммы всех действующих на нее внешних сил*. Внутренние силы, как уже подчеркивалось выше, не влияют на изменение полного импульса системы, поскольку они всегда входят попарно и удовлетворяют принципу равенства действия и противодействия.

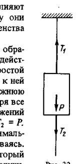


Рис. 32

3. Импульс, приобретаемый телом, зависит, таким образом, не только от силы, но и от продолжительности ее действия. Иллюстрацией этого может служить следующий простой опыт. Тяжелая гиря (рис. 32) подвешена на нити, снизу к ней прикреплена такая же нить. Если медленно тянуть за нижнюю нить, то рвется верхняя нить. Причина ясна. Так как гиря все время практически находится в покое, разность натяжений нити $T_1 - T_2$ должна уравновешивать вес груза P: $T_1 - T_2 = P$. Отсюда следует $T_1 > T_2$. Обозначим символом T_0 максимальное натяжение, которое может выдержать нить, не разрываясь. Когда мы медленно тянем за нижнюю нить, то в некоторый момент времени натяжение T_1 достигает предельной величины T_0. В этот момент натяжение нижней нити T_2 еще меньше T_0. Поэтому нижняя нить остается целой, а верхняя рвется. Однако если быстро дернуть за нижнюю нить, то верхняя нить остается целой, а нижняя рвется. Дело в том, что для разрыва верхней нити ее необходимо растянуть на определенную длину. А для этого надо привести в движение гирю. Чтобы сообщить гире необходимое смещение, требуется конечное время, даже когда на нее действует большая сила. Быстро дергая за нижнюю нить, мы не успеваем сообщить гире достаточное смещение. В нижней нити возникает натяжение, превосходящее предельное T_0, в то время как верхняя нить еще не успевает растянуться, и ее натяжение практически остается неизменным. Поэтому и рвется нижняя нить.

Опишем второй опыт, иллюстрирующий влияние продолжительности действия силы. Из ватманской бумаги вырезаются два одинаковых кольца с наружным диаметром около 20 см и внутренним диаметром около 15 см. Кольца подвешиваются на двух горизонтальных металлических стержнях, зажатых в штативах. В кольца вставляется четырехугольная сосновая планка длиной 1 м с поперечным сечением 2–3 см². Расстояние между бумажными кольцами должно быть лишь немного меньше длины планки. Если

ГЛАВА IV

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

§ 22. Работа и кинетическая энергия

1. *Работой силы F на перемещении ds* называется проекция F_s этой силы на направление перемещения, умноженная на само перемещение:

$$dA = F_s ds = F ds \cos\alpha, \tag{22.1}$$

где α – угол между векторами F и ds (рис. 36). Поскольку перемещение ds предполагается бесконечно малым, величина dA называется также *элементарной работой* в отличие от *работы на конечном перемещении*.

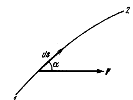


Рис. 36

Если воспользоваться понятием скалярного произведения, то можно сказать, что *элементарная работа dA* есть скалярное произведение силы F на перемещение ds:

$$dA = (F ds). \tag{22.2}$$

В общем случае, когда материальная точка, двигаясь по криволинейной траектории, проходит путь конечной длины, можно мысленно разбить этот путь на бесконечно малые элементы, на каждом из которых сила F может считаться постоянной, а элементарная работа может быть вычислена по формуле (22.1) или (22.2). Если сложить все эти элементарные работы и перейти к пределу, устремив к нулю длины всех элементарных перемеще-

ний, а число их – к бесконечности, то такой предел обозначается символом

$$A = \int_L (F ds) \tag{22.3}$$

и называется *криволинейным интегралом* вектора F вдоль траектории L. Этот интеграл, по определению, и дает *работу силы F вдоль кривой L*.

Если $F = F_1 + F_2$, то проецируя это векторное уравнение на направление элементарного перемещения ds, получим $F_s = F_{1s} + F_{2s}$, а после умножения на ds: $F_s ds = F_{1s} ds + F_{2s} ds$, или

$$dA = dA_1 + dA_2. \tag{22.4}$$

Таким образом, *элементарная работа результирующей двух или нескольких сил равна сумме элементарных работ этих сил*. Очевидно, то же утверждение справедливо и для работ на конечных перемещениях:

$$A = A_1 + A_2. \tag{22.5}$$

Единицей работы в системе СИ является джоуль (Дж). *Джоуль* есть работа силы в один ньютон на перемещении в один метр при условии, что направление силы совпадает с направлением перемещения. В системе СГС единицей работы является эрг. *Эрг* есть работа силы в одну дину на перемещении в один сантиметр при том же условии, т. е. в предположении, что направления силы и перемещения совпадают. Очевидно,

1 Дж = 10^7 эрг.

Работа, отнесенная к единице времени, т. е. величина

$$P = \frac{dA}{dt}, \tag{22.6}$$

называется *мощностью*. Ее единицами являются эрг на секунду и джоуль на секунду, или ватт (Вт). Очевидно,

1 Вт = 10^7 эрг/с.

Подставив в формулу (22.3) $F = \dfrac{dp}{dt}$, $ds = \mathbf{v}\,dt$, придадим этой формуле вид

$$A = \int (\mathbf{v}\, dp). \tag{22.7}$$

2. Чтобы вычислить интеграл, надо знать связь между скоростью материальной точки $\mathbf{v}$ и ее импульсом p. По определению импульса $p = m\mathbf{v}$, причем в нерелятивистской механике масса m не зависит от скорости, так что $\mathbf{v}\,dp = m\mathbf{v}\,d\mathbf{v}$. Здесь вектор $d\mathbf{v}$ означает элементарное приращение

ла натяжения, отнесенная к единице площади поперечного сечения стержня, равна T. Объемная плотность материала стержня равна ρ (см. также § 75, задача 4).

Ответ. $\rho l^2 \omega^2 < 8T$.

4. На прямоугольный трехгранный клин ABC массы M, лежащий на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости, положен подобный же, но меньший клин BED массы m (рис. 34). Определить, на какое расстояние x сместится влево большой клин, когда малый клин соскользнет вниз и займет такое положение, что точка D совместится с C. Длины катетов AC и BE равны соответственно a и b.

Ответ. $x = \dfrac{m}{M+m}(a - b)$.

§ 20. Приведенная масса

1. Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух взаимодействующих материальных точек с массами m_1 и m_2 (рис. 35). Уравнения движения этих точек можно записать в виде

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} = \frac{F_1}{m_1}, \qquad \frac{d^2 r_2}{dt^2} = \frac{F_2}{m_2}, \tag{20.1}$$

причем по третьему закону Ньютона $F_1 = -F_2$. Вычитая из одного уравнения другое, находим

$$\frac{d^2}{dt^2}(r_2 - r_1) = \frac{F_2}{m_2} - \frac{F_1}{m_1} = F_2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right).$$

Это уравнение описывает движение одной материальной точки относительно другой, так как разность $r = r_2 - r_1$ есть радиус-вектор, проведенный от первой точки ко второй. Он однозначно определяет положение второй точки относительно первой. Введем обозначение

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad \text{или} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{20.2}$$

Тогда предыдущее уравнение перейдет в

$$\mu\frac{d^2 r}{dt^2} = F_2. \tag{20.3}$$

Это уравнение формально аналогично второму закону Ньютона. Роль силы играет сила F_2, действующая на вторую материальную точку, а роль массы – вспомогательная величина μ, называемая *приведенной массой*.

Разумеется, одно уравнение (20.3) не может быть эквивалентно двум исходным уравнениям (20.1). Однако такая эквивалентность может быть

достигнута, если к уравнению (20.3) присоединить уравнение, выражающее теорему о движении центра масс системы. Последняя в рассматриваемом случае сводится к утверждению, что центр масс системы движется прямолинейно и равномерно. Тем самым задача о движении двух материальных точек распадается на две независимые задачи: 1) определение равномерного движения центра масс; 2) определение относительного движения одной материальной точки относительно другой. Вторая задача формально сводится к задаче о движении одной материальной точки с массой μ в силовом

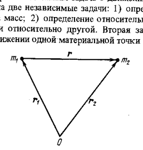


Рис. 35

поле другой точки. Этим и оправдывается введение понятия приведенной массы. Никакого глубокого физического смысла приведенная масса не имеет. На нее надо смотреть только как на целесообразное обозначение.

2. Рассмотрим пример, поясняющий пользу введения понятия приведенной массы. Пусть планета обращается вокруг Солнца по окружности радиуса r. Действующая на нее сила по закону всемирного тяготения равна $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$, где M – масса Солнца, m – масса планеты, G – гравитационная постоянная. Так как сила направлена к Солнцу, то в векторной форме $F = -G\dfrac{Mm}{r^2}\dfrac{r}{r} = -G\dfrac{Mm}{r^3}r$. Вводя приведенную массу, запишем уравнение движения планеты относительно Солнца:

$$\mu\ddot{r} \equiv \frac{Mm}{M+m}\ddot{r} = F = -G\frac{Mm}{r^3}r.$$

Отсюда

$$\ddot{r} = -G\frac{M+m}{r^3}r.$$

Так как вращение планеты по орбите равномерное, то $\ddot{r} = -\omega^2 r$, а потому

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = G\frac{M+m}{r^3},$$

Отсюда

$$A_{12} = c^2(m_2 - m_1) = c^2 \Delta m, \tag{22.11}$$

где m_1 и m_2 – массы материальной точки в начальном и конечном положениях.

Таким образом, *в релятивистской механике работа определяется только приращением массы материальной точки*. Этот результат проще соответствующего результата нерелятивистской механики. Введем обозначение

$$E = mc^2 \tag{22.12}$$

и назовем величину E *полной* или *релятивистской энергией частицы* (материальной точки). Тогда

$$A_{12} = E_2 - E_1. \tag{22.13}$$

В частном случае, когда частица покоится, ее релятивистская энергия определяется выражением

$$E_0 = m_0 c^2 \tag{22.14}$$

и называется *энергией покоя*. *Кинетическая энергия* есть часть релятивистской энергии, обусловленная движением частицы. Она представляется разностью

$$K = E - E_0 = (m - m_0)c^2, \tag{22.15}$$

или

$$K = m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right). \tag{22.16}$$

Ясно, что работу A_{12} можно вычислить также по формуле

$$A_{12} = K_2 - K_1. \tag{22.17}$$

Если в формулу (22.10) ввести величины E и E_0, то получится

$$E^2 = E_0^2 + (pc)^2. \tag{22.18}$$

Эта формула выражает в релятивистской механике связь между импульсом частицы и ее полной энергией. Она справедлива не только для отдельных частиц, но и для систем, состоящих из нескольких частиц. Под m_0 и E_0 следует понимать массу и полную энергию такой системы в системе отсчета, относительно которой она покоится.

Формула (22.16) дает выражение для кинетической энергии в релятивистской механике. При медленных движениях она переходит в привычную формулу (22.8). Действительно, пользуясь формулой бинома Ньюто-

на, можем написать

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^2}{c^4} + \ldots$$

Когда $v^2/c^2 \ll 1$, можно оборвать это разложение на втором члене. Тогда формула (22.16) перейдет в формулу (22.8).

5. В атомной физике удобной единицей энергии является *электронвольт* (эВ). Это есть энергия, приобретаемая электроном в электрическом поле при прохождении разности потенциалов в один вольт:

1 эВ = $1{,}602 \cdot 10^{-12}$ эрг.

Употребляется также *килоэлектронвольт* (1 кэВ = 1000 эВ). В ядерной физике, а также в ускорительной технике употребляются более крупные единицы: *мегаэлектронвольт* (1 МэВ = 10^6 эВ), *гигаэлектронвольт* (1 ГэВ = 10^9 эВ) и *тераэлектронвольт* (1 ТэВ = 10^{12} эВ). Энергия покоя для электрона и протона соответственно равна:

$$m_{0e}c^2 = 0{,}511 \text{ МэВ}, \qquad m_{0p}c^2 = 938 \text{ МэВ}.$$

Если полная релятивистская энергия частицы E велика по сравнению с ее энергией покоя $E_0 = m_0 c^2$, то говорят о движении с ультрарелятивистскими скоростями. Такие скорости получаются в ускорителях, они встречаются также в космических лучах.

Зная энергию ультрарелятивистской частицы, можно вычислить и ее скорость. Точнее, можно вычислить не самую скорость частицы (для этого недостаточна точность, с которой известна скорость света c), а разность между этой скоростью и скоростью света в вакууме. С этой целью перепишем формулу (22.12) в виде

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Отсюда получаем

$$E^2(c + v)(c - v) = m_0^2 c^6 = E_0^2 c^2.$$

Так как скорость v близка к c, то во втором множителе $c + v$ величину v можно заменить на c. В результате получится

$$(c - v)/c = E_0^2/2E^2. \tag{22.19}$$

Для протонов с энергией E = 10 ГэВ получаем

$$(c - v)/c = 0{,}938^2/(2 \cdot 10^2) = 0{,}0044.$$

Для электронов с энергией E = 1 ГэВ

$$(c - v)/c = 0{,}511^2/2 \cdot 10^6 = 1{,}3 \cdot 10^{-7}.$$

3. Применим уравнение (21.1) к движению ракеты, на которую не действуют никакие внешние силы. Полагая $F = 0$, получим

$$m d\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{отн}}\, dm.$$

Допустим, что ракета движется прямолинейно в направлении, противоположном скорости газовой струи $\mathbf{v}_{\text{отн}}$. Если направление полета принять за положительное, то проекция вектора $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ на это направление будет отрицательной и равной $-\mathbf{v}_{\text{отн}}$. Поэтому в скалярной форме предыдущее уравнение можно записать так: $mdv = -v_{\text{отн}} dm$, причем в соответствии с принятыми обозначениями величина $v_{\text{отн}}$ существенно положительна. Следовательно,

$$\frac{dv}{dm} = -\frac{v_{\text{отн}}}{m}. \tag{21.3}$$

Скорость газовой струи $v_{\text{отн}}$ может меняться во время полета. Однако простейшим и наиболее важным является случай, когда она постоянна. Предположение о постоянстве $v_{\text{отн}}$, очевидно, не затрагивает основные черты явления, но сильно облегчает решение уравнения (21.3). В этом случае

$$v = -v_{\text{отн}} \int \frac{dm}{m} = -v_{\text{отн}} \ln m + C.$$

Значение постоянной интегрирования C определяется начальными условиями. Допустим, что в начальный момент времени скорость ракеты равна нулю, а ее масса равна m_0. Тогда предыдущее уравнение дает $0 = -v_{\text{отн}} \ln m_0 + C$, откуда $C = v_{\text{отн}} \ln m_0$. Следовательно,

$$v = v_{\text{отн}} \ln\frac{m_0}{m}, \tag{21.4}$$

или

$$m_0/m = e^{v/v_{\text{отн}}}. \tag{21.5}$$

Последнее соотношение называется *формулой Циолковского* (по имени советского ученого К.Э. Циолковского (1857–1935)). Она получена нами для нерелятивистских движений, т.е. для тех случаев, когда обе скорости v и $v_{\text{отн}}$ малы по сравнению со скоростью света в вакууме c. Но ее можно обобщить на случай релятивистских движений. Если m_0 и m означают массы покоя ракеты в соответствующие моменты времени, то без вычислений ясно, что формула (21.5) дает заниженное значение для отношения m_0/m. Действительно, релятивистская масса возрастает со скоростью. Ввиду этого при одном и том же расходе топлива "релятивистская" ракета достигнет меньшей скорости, чем получается по нерелятивистской формуле (21.5).

Релятивистская формула имеет вид

$$\frac{m_0}{m} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{c/2v_{\text{отн}}} \tag{21.6}$$

(см. задачу 2 к § 22). Здесь $\beta \equiv v/c$. При $\beta \ll 1$ и $v_{\text{отн}}/c \ll 1$ формула (21.6) переходит в формулу Циолковского. Действительно, в этом случае

$$(1 + \beta)/(1 - \beta) \approx 1 + 2\beta$$

и, следовательно,

$$\frac{m_0}{m} \approx (1 + 2\beta)^{\frac{c}{2v}\frac{v}{v_{\text{отн}}}} = (1 + 2\beta)^{\frac{1}{2\beta}\frac{v}{v_{\text{отн}}}}.$$

Так как величина 2β мала, то

$$(1 + 2\beta)^{1/2\beta} \approx \lim_{\beta \to 0} (1 + 2\beta)^{1/2\beta} = e.$$

В результате в предельном случае медленных движений получаем

$$m_0/m = e^{v/v_{\text{отн}}},$$

т.е. формулу Циолковского.

4. Формула Циолковского позволяет рассчитать запас топлива, необходимый для сообщения ракете определенной скорости v. В табл. 1 приведены отношения начальной массы ракеты m_0 к ее конечной массе m при различных значениях отношения $v/v_{\text{отн}}$. Вычисления выполнены с помощью нерелятивистской формулы (21.5).

Допустим, например, что ракете надо сообщить *первую космическую скорость*, т.е. такую скорость, чтобы она начала двигаться вокруг Земли по окружности. Эта скорость приблизительно равна v = 8 км/с. При скорости газовой струи $v_{\text{отн}}$ = 1 км/с должно быть m_0/m = 2980. Практически вся масса ракеты приходится на топливо. При $v_{\text{отн}}$ = 2 км/с получилось бы m_0/m = 54,6, при $v_{\text{отн}}$ = 4 км/с m_0/m = 7,39 и т.д. Отсюда видно, что относительная полезная масса ракеты очень быстро увеличивается с увеличением скорости газовой струи $v_{\text{отн}}$. Газы, выходящие из ракеты, должны иметь возможно меньшую молекулярную массу и быть нагреты до возможно более высокой температуры. Действительно, в молекулярной физике будет показано, что скорость газовой струи $v_{\text{отн}}$ пропорциональна $\sqrt{T/\mu}$, где T – абсолютная температура газа, а μ – его молекулярная масса.

Таблица 1

$v/v_{\text{отн}}$	m_0/m	$v/v_{\text{отн}}$	m_0/m	$v/v_{\text{отн}}$	m_0/m	$v/v_{\text{отн}}$	m_0/m
1	2,72	4	54,6	7	1100	10	22000
2	7,39	5	148	8	2980	11	59900
3	20,1	6	403	9	8100	12	163 000

По закону сохранения энергии

$$c^2 dm + d\mathcal{E}_{\text{изл}} = 0.$$

Для излучения $d\mathcal{E}_{\text{изл}} = cp_{\text{изл}}$. Исключая $dp_{\text{изл}}$, получим

$$mdv + \frac{d\mathcal{E}_{\text{изл}}}{c}(1 - \beta).$$

Мощность ракеты

$$P = \frac{d\mathcal{E}_{\text{изл}}}{dt} = \frac{mca}{1 - \beta^2} = \frac{m_0 ca}{(1 - \beta^2)^{3/2}}.$$

На старте $\beta = 0$,

$$P\,[\text{МВт}] = m_0 ca = 3000\, m_0,$$

где m_0 – в килограммах. Удельная мощность излучения, т.е. мощность, требуемая для ускорения одного килограмма ракеты, равна мощности нескольких тысяч крупных электростанций.

§ 23. Связь между кинетическими энергиями в различных системах отсчета. Теорема Кёнига

Как ясно из формулы (22.8), кинетическая энергия тела зависит от выбора системы отсчета, относительно которой рассматривается его движение. Можно поставить вопрос, как преобразуется кинетическая энергия при переходе от одной системы отсчета к другой. Приведем решение этого вопроса в нерелятивистской механике. Сначала рассмотрим частный случай, когда тело состоит всего из одной материальной точки. Обозначим через K кинетическую энергию материальной точки в какой-либо системе отсчета S, а через K' – в другой системе S', движущейся относительно S поступательно со скоростью V. (Скорость V может быть постоянной, но и может меняться во времени.) В нерелятивистской механике скорости $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ и V связаны соотношением $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + V$. Поэтому

$$\tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2} mv'^2 + \tfrac{1}{2} mV^2 + m\mathbf{v}'V,$$

или

$$K = K' + \tfrac{1}{2} mV^2 + (p'V), \tag{23.1}$$

где $p' = m\mathbf{v}'$ – импульс материальной точки в системе S'. Формула (23.1) справедлива и для произвольной системы материальных точек. Чтобы убедиться в этом, достаточно написать соотношение (23.1) для каждой материальной точки системы, а затем просуммировать по всем точкам. Тогда получится снова формула (23.1), в которой под p' надо понимать импульс *всей системы материальных точек* в системе отсчета S', т.е. $p' = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' + \ldots$ Его можно представить в виде $p' = m\mathbf{v}_c'$, где $\mathbf{v}_c'$ – скорость центра масс системы материальных точек относительно S', а

m – ее суммарная масса. Таким образом,

$$K = K' + \tfrac{1}{2} mV^2 + m(V\mathbf{v}_c'). \tag{23.2}$$

Если центр масс покоится в системе S', т.е. $\mathbf{v}_c' = 0$, то

$$K = K' + \tfrac{1}{2} mV^2. \tag{23.3}$$

Это равенство выражает так называемую *теорему Кёнига: кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии всей массы системы, мысленно сосредоточенной в ее центре масс и движущейся вместе с ним, и кинетической энергии той же системы в ее относительном движении по отношению к поступательно движущейся системе координат с началом в центре масс.*

§ 24. Консервативные и неконсервативные силы

1. Все силы, встречающиеся в макроскопической механике, принято разделять на *консервативные* и *неконсервативные*. Прежде чем вводить эти понятия, рассмотрим некоторые примеры.

Вычислим сначала работу силы тяжести, которую она совершает при переходе материальной точки из положения *1* в положение *2* вдоль прямолинейного отрезка *12* (рис. 38). Примером может служить скольжение

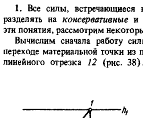


Рис. 38

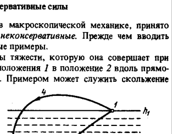


Рис. 39

без трения материальной точки по гладкой наклонной плоскости. Очевидно, эта работа $A_{12} = mgs\cos\alpha$, или

$$A_{12} = mg(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2, \tag{24.1}$$

где h_1 и h_2 – высоты, на которых находилась материальная точка в начале и конце пути, отсчитанные от какого-либо произвольного уровня, например от земной поверхности или от уровня моря. Формула (24.1) остается справедливой и при перемещении вдоль произвольной кривой, например по пути *132* (рис. 39). Это станет очевидным, если разбить весь при сгорании топлива. Скорость, достигнутая ракетой, $v = 9$ км/с. Теплота сгорания топлива $q = 4000$ ккал/кг, скорость выбрасываемых продуктов сгорания относительно ракеты $u = 3$ км/с.

Ответ. $\dfrac{K}{Q} = \dfrac{v^2}{2q(e^{v/u} - 1)} \approx 13\,\%$.

6. Продукты сгорания (газы) выбрасываются из ракеты со скоростью $u = 3$ км/с (относительно ракеты). Найти отношение ее кинетической энергии $K_{\text{рак}}$ к кинетической энергии продуктов сгорания $K_{\text{газ}}$ в момент достижения ракетой скорости $v_{\text{кон}} = 12$ км/с.

Решение. Приращение скорости ракеты $\mathbf{v}$ связано с изменением ее массы m соотношением $m d\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{отн}}\, dm$. Переходя к скалярной форме и новым обозначениям, запишем его в виде $m dv = -u dm$, причем $dm = -dm_{\text{газ}}$, где $m_{\text{газ}}$ – масса выброшенных газов. Приращение кинетической энергии газов

$$dK_{\text{газ}} = -\frac{1}{2} v_{\text{газ}}^2 dm = \frac{m v_{\text{газ}}^2}{2u} dv.$$

Подставив сюда $v_{\text{газ}} = v - u$ и воспользовавшись формулой Циолковского (21.5), получим

$$dK_{\text{газ}} = -\frac{m_0}{2u}(u - v)^2 e^{-v/u} dv,$$

или после интегрирования

$$K_{\text{газ}} = \frac{m_0 u^2}{2}(1 - e^{-x} - x^2 e^{-x}),$$

где для краткости введено обозначение $x = v_{\text{кон}}/u$. Кинетическая энергия ракеты

$$K_{\text{рак}} = \tfrac{1}{2} m v_{\text{кон}}^2 = \tfrac{1}{2} m_0 u^2 x^2 e^{-x}.$$

В результате находим

$$\eta \equiv \frac{K_{\text{рак}}}{K_{\text{газ}}} = \frac{x^2}{e^x - (1 + x^2)}.$$

При $x = 4$ отношение энергий $\eta = 45\,\%$.

7. С поверхности Луны стартует двухступенчатая ракета. При каком отношении масс первой (m_1) и второй (m_2) ступеней скорость контейнера с полезным грузом (массой m) получится максимальной? Скорость истечения газов u в двигателях обеих ступеней постоянна и одинакова. Отношения массы топлива к массе ступени равна для первой и второй ступеней соответственно α_1 и α_2. Отделение ступеней и контейнера производится без сообщения добавочных импульсов.

Решение. От действия силы тяжести Луны можно отвлечься. Сила тяжести уменьшает кинетическую энергию системы, но не влияет на условие максимума. Примем за единицу массы полную массу ракеты в момент старта. Тогда

$$m_1 + m_2 + m = 1. \tag{21.8}$$

После выгорания топлива в первой ступени масса системы уменьшится на $\alpha_1 m_1$. Если при этом будет достигнута скорость v_1, то по соотношению Циолковского

$$e^{v_1/u} = \frac{1}{(1 - \alpha_1)m_1 + m_2 + m}.$$

Масса $(1 - \alpha_1)m_1$ отделяется, и включается двигатель второй ступени. После выгорания топлива во второй ступени скорость ракеты возрастает еще на величину v_2, причем

$$e^{v_2/u} = \frac{m_2 + m}{(1 - \alpha_2)m_2 + m}.$$

В этом можно убедиться, если перейти в систему отсчета, в которой ракета в момент отделения первой ступени покоится. Полная достигнутая скорость найдется перемножением двух предыдущих соотношений и последующим логарифмированием. Исключая еще при этом массу m_2 с помощью соотношений (21.8), получим

$$v/u = \ln(1 - m_1) - \ln(1 - \alpha_1 m_1) - \ln[(1 - \alpha_2)(1 - m_1) + \alpha_2 m].$$

Здесь m и u играют роль постоянных параметров, а m_1 – роль аргумента, от которого зависит скорость v. Дифференцируя по m_1 и приравнивая производную нулю, получим условие максимума.

$$\frac{1}{m_1 - 1} + \frac{1}{\beta - m_1} + \frac{1}{\gamma + m} = 0, \tag{21.9}$$

где введены обозначения

$$\beta = \frac{1}{\alpha_1}, \qquad \gamma = 1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2} m.$$

Условие (21.9) приводит к квадратному уравнению относительно m_1, решая которое, найдем

$$m_1 = 1 - \sqrt{1 + (\beta\gamma - \beta - \gamma)}.$$

Перед корнем взят минус, так как по смыслу задачи $0 < m_1 < 1$. С помощью (21.8) находим массу m_2, а затем искомое отношение m_2/m_1. Возвращаясь при этом к прежним параметрам α_1 и α_2, получаем

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sqrt{\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\dfrac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_2}} - \sqrt{m}}{1 - \sqrt{\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\dfrac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_2}m}}\sqrt{m}. \tag{21.10}$$

Решение имеет смысл при выполнении условия

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_2} m < 1.$$

В реальных условиях, когда $m \ll 1$, а параметры α_1 и α_2 отличаются не очень сильно, это условие соблюдается. При $\alpha_1 = \alpha_2$ получается простая формула

$$m_2/m_1 = \sqrt{m}. \tag{21.11}$$

нормальное ускорение максимально в ее вершинах, где кривизна кривой максимальна. Если $y = y(x)$ – уравнение синусоиды, то в вершинах $y' = 0$, и радиус кривизны в этих точках можно вычислить по формуле $1/R = |y''|$. Имея все это в виду и записав уравнение синусоиды $y = A \sin \dfrac{2\pi x}{l}$ (амплитуда A и пространственный период l постоянны), нетрудно получить условие, при котором заноса не будет:

$$v < \frac{l}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu g}{A}},$$

где μ – коэффициент трения, g – ускорение свободного падения.

6. Решить ту же задачу, предполагая, что автомобиль движется равномерно по эллипсу с полуосями A и B. В каких точках траектории нормальное ускорение автомобиля достигает максимального и минимального значений? Найти эти значения.

Ответ. $a_{\text{макс}} = \dfrac{Av^2}{B^2}$, $a_{\text{мин}} = \dfrac{Bv^2}{A^2}$. Заноса не будет при условии $v < B\sqrt{\dfrac{\mu g}{A}}$.

7. Предполагая, что обе пружины на рис. 30 одинаковы, найти для тела A размеры области застоя.

Ответ. Центр основания тела A может находиться в равновесии в любой точке в пределах области

$$-\frac{\mu P}{2k} < x < +\frac{\mu P}{2k},$$

где P – вес тела, μ – коэффициент трения, k – жесткость пружины (одной). За начало координат принят центр области застоя.

8. Парашютист совершает затяжной прыжок. Считая массу парашютиста m равной 70 кг, найти установившиеся скорости его падения без парашюта и с раскрытым парашютом. Для человеческого тела при падении без парашюта коэффициент $k_2 = 2$ г/см. При раскрытом парашюте этот коэффициент возрастает примерно в 100 раз, т.е. составляет приблизительно 200 г/см.

Решение. Установившаяся скорость падения найдется из условия, чтобы вес человека $P = mg$ уравновешивался силой трения. Это дает

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k_2}} \approx \begin{cases} 60 \text{ м/с без парашюта;} \\ 6 \text{ м/с с раскрытым парашютом.} \end{cases}$$

ГЛАВА III

НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ ЗАКОНОВ НЬЮТОНА

§ 18. Импульс силы и изменение импульса тела

1. Как было показано в § 12, производная импульса $\mathbf{p}$ системы материальных точек по времени определяется уравнением

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)}, \tag{18.1}$$

где $\mathbf{F}^{(e)}$ – геометрическая сумма всех внешних сил, действующих на систему. Внутренние силы не входят в это уравнение из-за третьего закона Ньютона. В случае одной материальной точки уравнение (18.1) переходит в уравнение, выражающее второй закон Ньютона. Допустим, что сила $\mathbf{F}^{(e)}$ постоянна. Тогда из уравнения (18.1) следует

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \mathbf{F}^{(e)}(t - t_0), \tag{18.2}$$

где векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}_0$ означают импульсы системы в моменты времени t и t_0 соответственно.

Произведение постоянной силы $\mathbf{F}^{(e)}$ на время ее действия называется *импульсом силы* за то же время. Это понятие нельзя смешивать с ранее введенной величиной $\mathbf{p} = m_1\mathbf{v}_1 + \ldots + m_n\mathbf{v}_n$, которая называется *импульсом системы материальных точек* или *импульсом тела*. Недоразумений возникнуть не может, так как слово "импульс" отдельно нигде встречаться не будет. Оно будет входить в комбинации либо со словом "сила", либо со словом "тело" (или "материальная точка" и "система материальных точек"). Поэтому всякий раз будет ясно, о каком импульсе идет речь. Впрочем, понятие импульса силы будет встречаться сравнительно редко.

2. Соотношение (18.2) означает, что приращение импульса тела или системы тел равно импульсу геометрической суммы всех внешних сил, действующих на систему. Этот результат получен нами в предположении, что сила $\mathbf{F}^{(e)}$ постоянна. Он может быть обобщен и на тот случай, когда эта сила меняется во времени. Разделим промежуток времени $t - t_0$ на более мелкие промежутки $(t_1 - t_0)$, $(t_2 - t_1)$, $\ldots$, $(t - t_{n-1})$ (рис. 31). Выберем эти промежутки настолько малыми, чтобы на каждом из них силу $\mathbf{F}^{(e)}$ без большой ошибки можно было считать приблизительно постоянной.

вектора $\mathbf{v}$, причем это приращение может и не совпадать по направлению с вектором $\mathbf{v}$ (рис. 37). Если мы условимся понимать под v длину вектора $\mathbf{v}$, то очевидно $v^2 = \mathbf{v}^2$. Действительно, справа стоит скалярное произведение вектора $\mathbf{v}$ на самого себя, а оно равно квадрату длины вектора, как это непосредственно следует из определения скалярного произведения. Дифференцируя теперь обе части соотношения $v^2 = \mathbf{v}^2$, получим $v\,dv = \mathbf{v}\,d\mathbf{v}$. Здесь dv есть элементарное приращение длины вектора $\mathbf{v}$. Его нельзя смешивать с длиной элементарного приращения вектора, т.е. с величиной $|d\mathbf{v}|$. Последняя величина по самому ее смыслу существенно положительна, в то время как приращение dv может быть как положительным, так и отрицательным. На рис. 37 $d\mathbf{v} = \vec{AB}$, $dv = AC$. По определению скалярного произведения $\mathbf{v}d\mathbf{v} = v \cdot AB\cos\alpha = v \cdot AC = v dv$. Это дает другое доказательство соотношения $\mathbf{v}d\mathbf{v} = v dv$. Разумеется, такое соотношение справедливо не только для вектора $\mathbf{v}$, но и для любого другого вектора. Используя его в нашей задаче и вынося постоянный множитель m из-под знака интеграла, получим

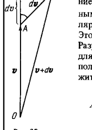


Рис. 37

$$A_{12} = m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

где v_1 – начальная, а v_2 – конечная скорости точки. Букву A мы снабдили индексами 1, 2, чтобы подчеркнуть, что речь идет о работе при перемещении материальной точки из начального положения *1* в конечное положение *2* (см. рис. 36). Величина

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \tag{22.8}$$

называется *кинетической энергией материальной точки*. С помощью этого понятия полученный результат запишется в виде

$$A_{12} = K_2 - K_1. \tag{22.9}$$

Таким образом, *работа силы при перемещении материальной точки равна приращению кинетической энергии этой точки*. Связь между работой и кинетической энергией, выражаемая этой теоремой, и оправдывает введение обоих этих понятий.

3. Полученный результат без труда обобщается на случай произвольной системы материальных точек. *Кинетической энергией системы* называется сумма кинетических энергий материальных точек, из которых эта система состоит или на которые ее можно мысленно разделить. Напишем соотноше-

ние (22.9) для каждой материальной точки системы, а затем все такие соотношения сложим. В результате снова получится формула (22.9), но уже не для одной материальной точки, а для системы материальных точек. Под A_{12} надо понимать сумму работ всех сил, как внутренних, так и внешних, действующих на материальные точки системы. Таким образом, *работа всех сил, действующих на систему материальных точек, равна приращению кинетической энергии этой системы*.

Имеется существенное отличие этой теоремы от аналогичной, в которой говорится о связи между импульсом силы и изменением импульса системы (§ 18). Внутренние силы вследствие равенства действия и противодействия не меняют импульс всей системы. Приращение импульса системы определяется только *внешними силами*. Не так обстоит дело в случае кинетической энергии. Работа внутренних сил, вообще говоря, не обращается в нуль. Представим себе, например, замкнутую систему, состоящую из двух материальных точек, взаимодействующих между собой силами притяжения $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$. Если точки придут в движение навстречу друг другу, то каждая из сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ совершит положительную работу. Будет положительной и работа обеих сил. Она пойдет на приращение кинетической энергии системы. Кинетическая энергия изменится под действием одних только внутренних сил. Следовательно, *приращение кинетической энергии определяется работой не только внешних, но и внутренних сил*.

4. Доказанная теорема для материальной точки имеет место и в релятивистской механике. Надо только изменить выражение для кинетической энергии. В релятивистской механике формула (22.7) также справедлива, однако при вычислении интеграла (22.7) надо учитывать зависимость массы от скорости. Масса определяется формулой

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Подставив в эту формулу $v = p/m$ и возведя в квадрат, получим

$$p^2 + (m_0 c)^2 = (mc)^2. \tag{22.10}$$

Дифференцированием этого соотношения находим

$$p\,dp = c^2 m\,dm.$$

А так как $p\,dp = \mathbf{p}\,d\mathbf{p}$ и $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, то

$$\mathbf{v}\,d\mathbf{p} = c^2\,dm.$$

Таким образом,

$$A_{12} = \int \mathbf{v}\,d\mathbf{p} = \int_{m_1}^{m_2} c^2\,dm.$$

плавно нажимать на середину планки, то одно из бумажных колец (или оба вместе), рвется, а планка остается целой. Нанесем теперь по середине планки резкий сильный удар тяжелым металлическим стержнем. Планка ломается, а кольца остаются целыми. Поразительным в этом опыте является не то, что ломается планка, – она переломилась бы и при отсутствии колец, а то, что остаются целыми бумажные кольца.

§ 19. Теорема о движении центра масс

классической

В нерелятивистской механике, ввиду независимости массы от скорости, импульс системы $\mathbf{p} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots$ может быть выражен через скорость ее *центра масс*. *Центром масс* или *центром инерции системы* называется такая воображаемая точка, радиус-вектор $\mathbf{R}$ которой выражается через радиусы-векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots$ материальных точек по формуле

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots}{m}, \tag{19.1}$$

где $m = m_1 + m_2 + \ldots$ – общая масса всей системы. Эту точку мы обычно будем обозначать буквой C.

Если продифференцировать выражение (19.1) по времени и умножить на m, то получится

$$m\dot{\mathbf{R}} = m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 + \ldots,$$

или

$$m\mathbf{V} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots,$$

где $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ – скорость центра масс системы. Таким образом,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{V}. \tag{19.2}$$

Подставив это выражение в формулу (18.1), получим

$$m\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)}. \tag{19.3}$$

Отсюда следует, что *центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе всей системы, а действующая сила – геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему*. Этот результат называется *теоремой о движении центра масс*.

Примером может служить движение снаряда по параболе в безвоздушном пространстве. Если в какой-либо момент времени снаряд разорвется на мелкие осколки, то эти осколки под действием внутренних сил будут разлетаться в разные стороны. Однако центр масс осколков и газов, образовавшихся при взрыве, будет продолжать свое движение по параболической траектории, как если бы никакого взрыва не было.

Центр масс системы совпадает с ее *центром тяжести*, т.е. с точкой приложения параллельных сил, действующих на материальные точки системы в однородном поле тяжести. Поэтому вместо терминов "центр масс" и "центр инерции" употребляют также термин "центр тяжести". Однако в теореме о движении центра масс термином "центр тяжести" лучше не пользоваться, так как к этой теореме тяжесть не имеет прямого отношения. Термин "центр тяжести" распространен в курсах теоретической механики, особенно старых. В физике этот термин практически вышел из употребления.

Если система замкнута, то $\mathbf{F}^{(e)} = 0$. В этом случае уравнение (19.3) переходит в $\dfrac{d\mathbf{V}}{dt} = 0$, из которого следует $\mathbf{V} = \text{const}$. Центр масс замкнутой системы движется прямолинейно и равномерно.

ЗАДАЧИ

1. На дне маленькой запаянной пробирки, подвешенной над столом на нити, сидит муха, масса которой равна массе пробирки, а расстояние от дна до поверхности стола равно длине пробирки l. Нить пережигают, и за время падения муха перелетает со дна в самый верхний конец пробирки. Определить время, по истечении которого нижний конец пробирки стукнется о стол.

Ответ. $t = \sqrt{l/g}$.

2. Металлическое кольцо, подвешенное на нити к оси центробежной машины, как указано на рис. 33, равномерно вращается с угловой скоростью ω настолько быстро,

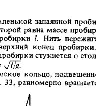


Рис. 33

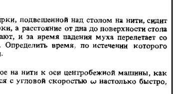


Рис. 34

что его плоскость вращения практически горизонтальна. Нить составляет угол α с осью. Найти расстояние от центра кольца до оси вращения.

Ответ. $x = \dfrac{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\omega^2}$.

3. Однородный стержень длины l равномерно вращается вокруг свободной оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его центр. Какова должна быть угловая скорость вращения ω, при которой стержень еще не разрывается под действием внутренних напряжений, возникающих в нем при вращении? Максимальная си-

В космических лучах регистрировались протоны с энергией 10^{20} эВ = 10^{11} ГэВ. В этом случае

$$(c - v)/c \sim 10^{-21},$$

т.е. скорость частицы отличается от скорости света всего на $3 \cdot 10^{-11}$ см/с.

ЗАДАЧИ

1. Через неподвижный блок, массой которого можно пренебречь, перекинута замкнутая тяжелая веревка массой M. В начальный момент времени за точку веревки, расположенную между блоком и нижним заворотом ее, цепляется обезьяна массой m и начинает карабкаться вверх так, чтобы удержаться на неизменной высоте. Какую мощность P должна для этого развивать обезьяна? Через сколько времени она перестанет справляться со своей затеей, если максимальная мощность, которую она может развивать, равна $P_{\text{макс}}$?

Ответ: $P = \dfrac{(mg)^2}{M} t$; $\quad t = \dfrac{M}{(mg)^2} P_{\text{макс}}$.

2. Вывести формулу (21.6), являющуюся релятивистским обобщением формулы Циолковского для движения ракеты. Считать, что скорости ракеты и газовой струи направлены вдоль одной прямой.

Решение. Решение основано на релятивистских законах импульса и энергии (релятивистской массы). Они нами были сформулированы. Кроме того, требуется знать *релятивистский закон сложения скоростей*, который нами не формулировался. Читатель, желающий разобрать решение, приводимое ниже, должен обратиться к руководствам по теории относительности или принять на веру формулу (22.22), приводимую ниже.

Пусть m и v – масса покоя и скорость ракеты в произвольный момент времени t, а $m_{\text{газ}}$ и $v_{\text{газ}}$ – те же величины для газов, образовавшихся из топлива ракеты к этому моменту времени. Так как газы, уже покинувшие ракету, не оказывают влияния на ее движение, то можно принять $m_{\text{газ}} = 0$. Однако газы непрерывно образуются, так что $dm_{\text{газ}} \neq 0$. На основании закона сохранения импульса и энергии (релятивистской массы)

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{m_{\text{газ}} v_{\text{газ}}}{\sqrt{1 - v_{\text{газ}}^2/c^2}} = \text{const}, \tag{22.20}$$

$$\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{m_{\text{газ}}}{\sqrt{1 - v_{\text{газ}}^2/c^2}} = \text{const}. \tag{22.21}$$

Дифференцируя уравнение (22.20) с учетом (22.21) и полагая в окончательном результате $m_{\text{газ}} = 0$, получим

$$\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dv + (v - v_{\text{газ}}) d\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0.$$

По релятивистскому закону сложения скоростей

$$v_{\text{газ}} = \frac{v - v_{\text{отн}}}{1 - v v_{\text{отн}}/c^2}, \tag{22.22}$$

где $v_{\text{отн}}$ – скорость газовой струи относительно ракеты. Исключая $v_{\text{газ}}$, после несложных преобразований находим

$$\frac{dv}{v^2 - c^2} = \frac{v_{\text{отн}}}{c^2}\frac{dm}{m}.$$

Предполагая скорость $v_{\text{отн}}$ постоянной и интегрируя, получим

$$\frac{m_0}{m} = \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right)^{c/(2v_{\text{отн}})}. \tag{22.23}$$

При выводе этой формулы предполагалось, что вся энергия и весь импульс сосредоточены в веществе. Энергия и импульс излучения все же учитываются, хотя и частично. Действительно, часть излучения поглощается газами, образующимися при сгорании топлива ракеты. За счет этого масса покоя газов несколько увеличивается. В результате некоторая часть энергии и импульса излучения переходит к веществу и учитывается при вычислении.

3. Импульс излучения $p_{\text{изл}}$ связан с его энергией $\mathscr{E}_{\text{изл}}$ соотношением

$$\mathscr{E}_{\text{изл}} = c p_{\text{изл}}.$$

Используя это соотношение, найти, как изменится формула (22.23) для фотонной ракеты.

Решение. Изменения полной энергии и импульса ракеты (с точностью до знака) равны энергии и импульсу образовавшегося излучения, т.е.

$$\left(m_0 - \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)c^2 = \mathscr{E}_{\text{изл}},$$

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - \beta^2}} = p_{\text{изл}}.$$

Значит,

$$\left(m_0 - \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)c^2 - \frac{mvc}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \mathscr{E}_{\text{изл}} - c p_{\text{изл}} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{m_0}{m} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, \tag{22.24}$$

Формально эта формула является частным случаем формулы (22.23) при $v_{\text{отн}} = c$.

4. Определить мощность фотонной ракеты, которой сообщается ускорение $a = 10$ м/с².

Решение. Изменение импульса ракеты за время dt равно $d(mv) = m dv + v dm$, где $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ – релятивистская масса ракеты. Оно компенсируется изменением импульса излучения:

$$m dv + v dm = dp_{\text{изл}}.$$

где ω – угловая скорость, а T – период обращения планеты. Если масса планеты пренебрежимо мала по сравнению с массой Солнца, то для угловой скорости ω_1 и периода обращения T_1 получаем

$$\omega_1^2 = \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 = G\frac{M}{r^3}.$$

Если бы масса планеты была равна массе Солнца (двойная звезда), то для угловой скорости ω_2 и периода обращения мы получили бы

$$\omega_2^2 = \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 = G\frac{2M}{r^3}.$$

При одном и том же расстоянии r

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = 2.$$

Период обращения во втором случае меньше, чем в первом, в $\sqrt{2}$ раз.

§ 21. Движение тел с переменной массой. Реактивное движение

1. Термин "*переменная масса*" употребляется в этом параграфе в совершенно ином смысле, чем в теории относительности. В теории относительности масса движущегося тела изменяется за счет изменения его скорости, причем никакого вещества во время движения тело не получает и не теряет. Напротив, в настоящем параграфе говорится о медленном движении тел, масса которых меняется за счет *потери* или *приобретения вещества*. Например, масса автомобиля для поливки улиц уменьшается за счет вытекающих водяных струй; дождевая капля растет при падении в воздухе, пересыщенном водяными парами; масса ракеты или реактивного самолета уменьшается за счет истечения газов, образующихся при сгорании топлива. В таких случаях говорят о движении тел с переменной массой. Уравнения движения тел с переменной массой не содержат ничего принципиально нового по сравнению с законами Ньютона, а являются их следствиями. Тем не менее они представляют большой интерес, главным образом в связи с ракетной техникой.

2. Выведем уравнение движения материальной точки с переменной массой на примере движения ракеты. Принцип действия ракеты очень прост. Ракета с большой скоростью выбрасывает вещество (газы), воздействуя на него с большой силой. Выбрасываемое вещество с той же, но противоположно направленной силой в свою очередь действует на ракету и сообщает ей ускорение в противоположном направлении. Если нет внешних сил, то ракета вместе с выброшенным веществом является замкнутой системой. Импульс такой системы не может меняться во времени. На этом положении и основа-

на теория движения ракет. Целесообразно, однако, обобщить задачу, предположив, что на ракету действуют внешние силы. Такими силами могут быть сила земной тяжести, гравитационное притяжение Солнца и планет, а также сила сопротивления среды, в которой движется ракета.

Пусть $m(t)$ – масса ракеты в произвольный момент времени t, а $\mathbf{v}(t)$ – ее скорость в тот же момент. Импульс ракеты в этот момент времени будет $m\mathbf{v}$. Спустя время dt масса и скорость ракеты получат приращения dm и $d\mathbf{v}$ (величина dm отрицательна!). Импульс ракеты станет равным $(m + dm) \times (\mathbf{v} + d\mathbf{v})$. Сюда надо добавить импульс движения газов, образовавшихся за время dt. Он равен $dm_{\text{газ}}\mathbf{v}_{\text{газ}}$, где $dm_{\text{газ}}$ – масса газов, образовавшихся за время dt, а $\mathbf{v}_{\text{газ}}$ – их скорость. Вычитая из суммарного импульса системы в момент $t + dt$ импульс системы в момент t, найдем приращение этой величины за время dt. Согласно известной теореме это приращение равно $\mathbf{F}dt$, где $\mathbf{F}$ – геометрическая сумма всех внешних сил, действующих на ракету. Таким образом,

$$(m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + dm_{\text{газ}}\mathbf{v}_{\text{газ}} - m\mathbf{v} = \mathbf{F}dt.$$

Время dt, а с ним и приращения dm и $d\mathbf{v}$ мы должны устремить к нулю – нас интересуют предельные отношения, или производные $\dfrac{dm}{dt}$ и $\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$. Поэтому, раскрывая скобки, можно отбросить произведение $dm \cdot d\mathbf{v}$, как бесконечно малую высшего порядка. Далее, ввиду сохранения массы, $dm + dm_{\text{газ}} = 0$. Пользуясь этим, можно исключить массу газов $dm_{\text{газ}}$. Наконец, разность $\mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{v}_{\text{газ}} - \mathbf{v}$ есть скорость истечения газов относительно ракеты. Мы будем называть ее *скоростью газовой струи*. С учетом этих замечаний предыдущее соотношение легко преобразуется к виду

$$m\,d\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{отн}}\,dm + \mathbf{F}dt. \tag{21.1}$$

Отсюда делением на dt получаем

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v}_{\text{отн}}\frac{dm}{dt} + \mathbf{F}. \tag{21.2}$$

По форме уравнение (21.2) совпадает с уравнением, выражающим второй закон Ньютона. Однако масса тела m здесь не постоянна, а меняется во времени из-за потери вещества. К внешней силе $\mathbf{F}$ добавляется дополнительный член $\mathbf{v}_{\text{отн}}\dfrac{dm}{dt}$, который может быть истолкован как *реактивная сила*, т.е. сила, с которой действуют на ракету вытекающие из нее газы. Уравнение (21.2) впервые было получено русским механиком И.В. Мещерским (1859–1935). Оно, так же как и эквивалентное ему уравнение (21.1), называется *уравнением Мещерского или уравнением движения точки с переменной массой*.

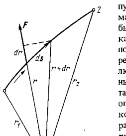


Рис. 40

путь *132* горизонтальными плоскостями на малые участки, каждый из которых может быть принят за прямолинейный. Применив к каждому участку формулу (24.1) и сложив полученные работы, мы придем к прежнему результату (24.1). Если вместо пути *132* взять любой другой путь *142* между теми же начальным и конечными положениями *1* и *2*, то работа силы тяжести не изменится, так как она определяется только разностью высот $h_1 - h_2$, которая от формы пути не зависит. Таким образом, *работа тяжести не зависит от формы пути, а определяется только начальным и конечным положениями перемещающейся точки*.

2. В качестве второго примера рассмотрим работу при перемещении материальной точки в поле центральных сил. Сила называется *центральной*, если она направлена к одной и той же точке (или от одной и той же точки) и зависит только от расстояния до этой точки, называемой *центром сил* или *силовым центром*. Примером может служить сила гравитационного притяжения, с которой Солнце действует на планету, или сила электростатического взаимодействия двух точечных зарядов. По определению элементарной работы $dA = F\,ds\cos(\mathbf{F}, d\mathbf{s})$. Величина $ds\cos(\mathbf{F}, d\mathbf{s})$ есть проекция элементарного перемещения $d\mathbf{s}$ на направление силы, или, что то же самое, на направление радиуса-вектора $\mathbf{r}$ (если за положительное направление силы принять направление от силового центра O). Следовательно, $ds\cos(\mathbf{F}, d\mathbf{s}) = dr$, где dr – элементарное приращение длины r, т.е. расстояние материальной точки от силового центра (рис. 40). Таким образом, $dA = F(r)dr$, причем по предположению сила F зависит только от расстояния r. Поэтому работа A_{12} выразится определенным интегралом

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)\,dr, \tag{24.2}$$

значение которого зависит *только от расстояний* r_1 *и* r_2 точек *1* и *2* до силового центра O, но *не зависит от формы пути*, по которому материальная точка перешла из начального положения *1* в конечное положение *2*. В формулу (24.2) путь перехода вообще не входит, в нее входят только расстояния до силового центра.

3. Допустим, что в силовом центре помещено *физическое тело* (материальная точка), взаимодействующее с рассматриваемой материальной точкой (которая с тем же основанием может быть принята за силовой центр). При взаимодействии перемещаются как материальная точка, так

и силовой центр. При выводе формулы (24.2) перемещение силового центра не принималось во внимание. Однако справедливость самой формулы не связана с этим ограничением. *Работа A_{12} зависит только от относительного перемещения материальных точек, но не может зависеть от абсолютных перемещений каждой из точек в отдельности. В этом можно убедиться простым* вычислением. Пусть взаимодействуют две материальные точки *1* и *2*, причем силы взаимодействия $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ подчиняются третьему закону Ньютона. Обозначим через $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ радиусы-векторы этих точек, проведенные из какого-либо неподвижного начала. Тогда для элементарной работы можно написать $dA = \mathbf{F}_1 d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 d\mathbf{r}_2$. По третьему закону Ньютона $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$, а потому $dA = \mathbf{F}_2(d\mathbf{r}_2 - d\mathbf{r}_1) = \mathbf{F}_2 d(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Но $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ есть радиус-вектор точки *2* относительно точки *1*. Обозначим его через $\mathbf{r}_{12}$. Тогда

$$dA = \mathbf{F}_2 d\mathbf{r}_{12}. \tag{24.3}$$

Значит, при вычислении элементарной, а с ней и полной работы точка *1* может считаться неподвижной, а точка *2* – перемещающейся относительно нее. Можно было бы, конечно, считать неподвижной точку *2*, а точку *1* – движущейся. Результат получился бы тот же самый. Вообще, как и раньше, выражение (24.3) может быть преобразовано к виду

$$dA = F(r)\,dr. \tag{24.4}$$

Сюда входят только расстояние между взаимодействующими точками r и его приращение dr. Отсюда немедленно получается формула (24.2), что и доказывает наше утверждение.

Отметим одно следствие формулы (24.2). Допустим, что материальные точки *1* и *2* соединены абсолютно жестким стержнем. При такой идеализации расстояние между взаимодействующими точками будет оставаться неизменным при любых их перемещениях: $dr = 0$. Поэтому всегда будет равен нулю интеграл в формуле (24.2), а с ним и работа сил взаимодействия материальных точек *1* и *2* на любом перемещении. Так называемые абсолютно твердые тела могут рассматриваться как системы материальных точек, расстояния между которыми не меняются при любых движениях. Такая неизменяемость обеспечивается внутренними силами или силами связей, действующими между материальными точками системы. Всю систему можно мысленно разбить на пары взаимодействующих точек и применить к ним доказанное выше следствие. Отсюда следует, что *работа внутренних сил, действующих в абсолютно твердых телах, равна нулю при любых движениях*. Реальные тела не являются абсолютно твердыми. Действующие в них силы обусловлены связями, которые могут быть очень жесткими, но не бесконечно жесткими. Работа таких сил, вообще говоря, отлична от нуля. Однако по мере увеличения жесткости работа

В современных ракетах на химическом топливе скорость газовой струи порядка одного или нескольких километров в секунду. Вероятно, она не превосходит 4 км/с. Имея это в виду, оценим перспективы межпланетных и межзвездных полетов ракет на химическом топливе. Минимальная скорость, которую необходимо сообщить ракете относительно Земли, чтобы она вышла за пределы действия поля земного тяготения, называется *второй космической скоростью* и составляет 11,2 км/с. Практически такую скорость необходимо сообщить ракете, например, при отправке ее на Луну. Скорость ракеты, которую она должна приобрести относительно Земли, чтобы навсегда покинуть пределы Солнечной системы, называется *третьей космической скоростью*. Третья космическая скорость зависит от направления начальной скорости ракеты. Минимальное ее значение соответствует запуску ракеты по касательной к земной орбите в направлении орбитального вращения Земли. Эта скорость составляет около 16,7 км/с (см. § 61). Скорости такого порядка необходимы при межпланетных путешествиях. Допустим, что $v_{\text{отн}} = 4$ км/с. Тогда для достижения второй космической скорости отношение m_0/m должно составлять $m_0/m = e^{11{,}2/4} \approx 17$, а для достижения третьей $m_0/m = e^{16{,}7/4} \approx 64$. Оба отношения не очень велики. Однако надо принять во внимание, что ракета должна иметь запас топлива для обратного возвращения на Землю, а также для ее торможения при посадке и для коррекции траектории. Поэтому отношение m_0/m (m – масса ракеты, вернувшейся обратно на Землю) должно быть значительно больше. Допустим, например, что поле тяготения и размеры второй планеты такие же, как у Земли. Тогда при путешествии в прямом направлении в нашем примере должно быть $m_0/m' \approx 60$ (m' – масса ракеты, достигшей второй планеты). При обратном путешествии $m'/m \approx 60$, так что $m_0/m \approx 3600$. Таким образом, для осуществления межпланетных полетов запас топлива должен превышать массу космического корабля по меньшей мере в несколько тысяч раз. Технические трудности очень велики, но, по-видимому, все же преодолимы.

Но для межзвездных полетов ракеты на химическом топливе абсолютно непригодны. Возьмем, например, $v_{\text{отн}} = 10$ км/с, что для ракет на химическом топливе, по-видимому, превышает пределы возможного. (Если допустить, что газовая струя состоит из наиболее легкого вещества – атомарного водорода, то для достижения таких скоростей потребуются температуры порядка 5000 °С.) Расстояния до звезд измеряются *световыми годами* – от ближайшей звезды свет идет до Земли около 4 лет. Поэтому для достижения даже ближайших звезд нужны космические корабли, скорости которых близки к скорости света c. В табл. 2 приведены значения отношения m/m_0 при различных значениях β, вычисленные по релятивистской формуле (21.6) и по формуле Циолковского (21.5) в предположении, что $v_{\text{отн}} = 10$ км/с. Таблица, между

Таблица 2

$\beta = \dfrac{v}{c}$	m_0/m		$\beta = \dfrac{v}{c}$	m_0/m	
	по формуле (21.6)	по формуле (21.5)		по формуле (21.6)	по формуле (21.5)
0,001	$1{,}0690 \cdot 10^{13}$	$1{,}0686 \cdot 10^{13}$	0,25	$5{,}37 \cdot 10^{3327}$	$1{,}62 \cdot 10^{3257}$
0,01	$1{,}963 \cdot 10^{130}$	$1{,}942 \cdot 10^{130}$	1/3	$2{,}84 \cdot 10^{4515}$	$8{,}81 \cdot 10^{4342}$
0,1	$1{,}79 \cdot 10^{1307}$	$7{,}64 \cdot 10^{1302}$			

прочим, наглядно показывает, когда существенны релятивистские эффекты и формула Циолковского неприменима.

Допустим, что скорость космического корабля v должна составлять четверть скорости света ($\beta = 0{,}25$). Тогда должно быть $m_0/m \approx 5 \cdot 10^{3327}$. На каждую тонну полезного груза должно приходиться $5 \cdot 10^{3327}$ т топлива! Если полезная масса $m = 20$ т $= 2 \cdot 10^7$ г, то стартовая масса корабля должна быть $m_0 \approx 10^{3329}$ т $= 10^{3335}$ г! Обычно, когда имеют дело с очень большими величинами, их называют "астрономическими". В данном случае такое сравнение не годится – речь идет о величинах несравненно большего масштаба. Для сравнения приведем массы некоторых частиц и астрономических объектов:

масса электрона	$9{,}11 \cdot 10^{-28}$ г
масса протона	$1{,}67 \cdot 10^{-24}$ г
масса Земли	$5{,}98 \cdot 10^{27}$ г
масса Солнца	$1{,}99 \cdot 10^{33}$ г
масса Галактики	$3 \cdot 10^{44}$ г
масса Метагалактики	10^{56} г.

Под *Метагалактикой* понимают ту часть *Вселенной*, которая доступна обнаружению методами современной оптической, радио- и гамма-астрономии. Масса Метагалактики превосходит массу электрона примерно в 10^{83} раза. Масса нашего фантастического корабля с топливом должна превосходить массу Метагалактики в 10^{3329} раз! Эти цифры превосходят всякое воображение. В масштабах нашего космического корабля Метагалактика выглядит несравненно более малым объектом, чем электрон в масштабах Метагалактики.

Вряд ли имеет смысл говорить о движении столь фантастически гигантского космического корабля относительно Метагалактики, имеющей по сравнению с ним ничтожные размеры. Вводить в рассмотрение объекты таких размеров и применять к ним обычные законы физики является недопустимой экстраполяцией. Кроме того, обычная теория движения ракет основана на предположении, что импульс, полученный от сгорания топлива в задней части ракеты, *практически мгновенно передается ракете в целом*. Это условие ввиду конечной скорости распространения взаимодействий не может выполняться для "ракет" достаточно больших размеров. Оно, разумеется, не выполняется для нашего фантастического "корабля". Наш пример доказывает только, что для межзвездных полетов ракеты на химическом топливе абсолютно непригодны.

Было бы неосторожным на основании изложенного сделать вывод, что звездные миры никогда не будут доступны земным космонавтам. Только отдаленное будущее покажет, возможно это или нет. Не собираясь входить в обсуждение этой фантастической проблемы, ограничимся следующими замечаниями. Для превращения ракеты в *звездолет* прежде всего необходимо повысить скорость струи $v_{\text{отн}}$, приблизив ее к скорости света. Идеальным был бы случай $v_{\text{отн}} = c$. Так было бы в *фотонной ракете*, в которой роль газовой струи должен играть световой пучок, излучаемый двигателем корабля в определенном направлении. Реактивная сила в фотонной ракете осуществлялась бы давлением света, оказываемым на корабль при излучении светового пучка. Превращение вещества в излучение постоянно происходит внутри звезд. Этот процесс осуществляется и на Земле и притом не только в лабораторных условиях, а в более крупном масштабе (взрывы атомных и водородных бомб). Возможно ли придать ему управляемый характер и использовать в фотонных ракетах – на этот вопрос отвечать преждевременно.

становится все меньше и меньше и в пределе для бесконечно жестких связей обращается в нуль.

Результаты, полученные для двух материальных точек, обобщаются на случай произвольной системы материальных точек, между которыми действуют центральные силы. Если задать положение каждой материальной точки, то этим определится и положение всей системы или ее *конфигурация. Работа центральных сил не зависит от способа (или "пути") перехода системы из начальной конфигурации в конечную – она определяется исключительно самими конфигурациями.*

4. Если силы взаимодействия зависят только от конфигурации материальных точек системы (т.е. от их координат) и работа этих сил при перемещении системы из произвольного начального положения в произвольное конечное положение не зависит от пути перехода, а определяется только начальной и конечной конфигурациями системы, то такие силы называются *консервативными.* Рассмотренные нами примеры показывают, что *сила тяжести и все центральные силы являются силами консервативными.*

Можно дать другое определение консервативных сил, эквивалентное приведенному. Пусть система из положения *1* (рис. 41) перешла в положение *2* по пути *132.* (Мы символически изображаем положение системы точкой на плоскости, а путь перехода – линией, хотя буквально такой способ применим лишь для системы, состоящей всего из одной материальной точки.) При этом будет совершена работа A_{132}. Если бы система перешла в положение *2* по пути *142,* то совершенная работа была бы равна A_{142}. По определению консервативных сил $A_{132} = A_{142}$. Так как силы зависят только от конфигурации системы, то $A_{142} = -A_{241}$, где A_{241} –

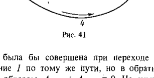


Рис. 41

работа, которая была бы совершена при переходе системы из положения *2* в положение *1* по тому же пути, но в обратном порядке, т.е. по пути *241.* Таким образом, $A_{132} + A_{241} = 0$. Но сумма $A_{132} + A_{241}$ есть работа, совершенная силами, когда система вернулась в исходное положение *1.* В этом случае говорят о работе по *"замкнутому пути".* Итак, *работа консервативных сил по любому замкнутому пути равна нулю.* Проведя это рассуждение в обратном порядке, без труда докажем, что из обращения в нуль работы по любому замкнутому пути следует незави-

симость работы от пути перехода. Поэтому можно дать еще такое определение консервативных сил. *Консервативными* называются силы, зависящие только от конфигурации системы, и работа которых по любому замкнутому пути равна нулю.

5. Все силы, не являющиеся консервативными, называются *неконсервативными силами.* К ним относятся, прежде всего, так называемые *диссипативные силы,* например силы трения, возникающие при скольжении

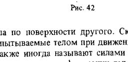


Рис. 42

какого-либо тела по поверхности другого. Сюда же относятся силы сопротивления, испытываемые телом при движении в жидкой или газообразной среде. Их также иногда называют силами трения (см. § 17). Все эти силы зависят не только от конфигурации тел, но и от их *относительных скоростей.* Они направлены всегда против скорости тела (относительно поверхности, по которой оно скользит, или относительно сопротивляющейся среды, в которой оно движется). Поэтому, если тело скользит по неподвижной поверхности или движется в "неподвижной" сопротивляющейся среде, то при любом движении тела работа сил трения, действующих на него, отрицательна. Но работа сил трения может быть и положительной, когда поверхность или среда сами движутся. Рассмотрим, например, тело *B,* по поверхности которого скользит тело *C* (рис. 42) с относительной скоростью $\mathbf{v}_{отн}$. Сила трения $\boldsymbol{F}_{тр}$, действующая на тело *C,* направлена против вектора $\mathbf{v}_{отн}$. Допустим, что само тело *B* движется в противоположном направлении со скоростью $\mathbf{v}$. Если $v > v_{отн}$, то в "неподвижной" системе отсчета тело *C* движется со скоростью $\mathbf{v} - \mathbf{v}_{отн}$ в том же направлении, в котором действует сила трения. Сила трения ежесекундно совершает над телом *C* положительную работу $A_1 = F_{тр}(v - v_{отн})$. Однако если система замкнута, то полная работа сил трения, действующих на все тела системы, всегда отрицательна. Так, в приведенном примере сила трения, действующая на тело *B,* совершает отрицательную работу $A_2 = -F_{тр}v$. Полная работа сил трения равна $A = A_1 + A_2 = -F_{тр}v_{отн}$, т.е. отрицательна. Поэтому мы даем следующее определение диссипативных сил. *Диссипативными* называются такие силы, полная работа которых при любых движениях в замкнутой системе всегда отрицательна.

6. Отметим, наконец, еще один вид неконсервативных сил, называемых *гироскопическими силами. Эти силы зависят от скорости материальной точки и действуют всегда перпендикулярно к этой скорости.* Работа таких

бы окончательно были установлены все законы природы, и развитие науки, во всяком случае в ее основах, было бы окончательно завершено.

Деление энергии на кинетическую и потенциальную имеет смысл только в механике и не охватывает всех форм энергии. Кроме того, отнесение энергии к тому или иному виду часто зависит от точки зрения. Например, в макроскопической механике упругая энергия сжатого идеального газа считается потенциальной. Но с молекулярной точки зрения упругость газа объясняется тепловым движением его молекул. Поэтому с этой точки зрения ту же энергию следует считать кинетической.

4. Принцип сохранения энергии, наряду с громадными конкретными применениями к уже известным явлениям, дает руководящие указания и в неисследованных областях. Всякое кажущееся нарушение этого принципа указывает на существование новых явлений, не укладывающихся в рамки существующих научных концепций. Так было, например, при открытии *радиоактивности.* Так было и с открытием *нейтрино.* На опыте были обнаружены кажущиеся нарушения законов сохранения энергии и импульса в явлениях β-распада атомных ядер. Это обстоятельство вынудило физика-теоретика Вольфганга Паули (1900–1958) ввести гипотезу, впоследствии подтвержденную экспериментально, что в β-распаде наряду с известными заряженными частицами (электронами и атомными ядрами) участвует еще неизвестная нейтральная частица, которая и была названа *нейтрино.* Эта частица и уносит недостающие энергию и импульс. Благодаря исключительно слабому взаимодействию с веществом она ускользает от наблюдения. (Позднее, когда было выяснено, что каждой частице соответствует античастица, оказалось, что в явлениях электронного β-распада участвует не нейтрино, а *антинейтрино.*)

Общефизический принцип сохранения энергии охватывает, таким образом, не только явления, рассматриваемые в макроскопической механике, но и такие физические явления, к которым законы такой механики не применимы. Поэтому он не может быть выведен из уравнений макроскопической механики, а должен рассматриваться как *одно из наиболее широких обобщений опытных фактов.*

§ 28. Абсолютно упругий удар

1. Интересные превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно наблюдаются при *абсолютно упругом ударе.* Так называется столкновение тел, в результате которого их внутренние энергии не меняются. В чистом виде такой случай при столкновении макроскопических тел не встречается. Но к нему можно подойти довольно близко. Это имеет место, например, при столкновениях бильярдных шаров из слоновой кости или подходящей пластмассы. При столкновениях атомных, ядерных или элементарных частиц может реализоваться и случай абсолютно упругого удара в чистом виде. Такая возможность связана с *квантовыми законами.*

Внутренние состояния и соответствующие им значения внутренней энергии атомных частиц *дискретны* (*квантованы*). Частицы при столкновении могут разлететься без изменения внутренних состояний. Тогда столкновение и будет абсолютно упругим. Так будет всегда, когда кинетической энергии сталкивающихся частиц недостаточно, чтобы перевести хотя бы одну из них из *нормального* в ближайшее *возбужденное* состояние, характеризующееся бо́льшим значением внутренней энергии. При больших энергиях столкновение может сопровождаться возбуждением одной или обеих частиц с увеличением их внутренних энергий. Наконец, может быть и такой случай, когда сталкиваются возбужденные частицы и в результате столкновения их внутренние энергии уменьшаются. Во всех таких случаях говорят о *неупругих ударах.*

2. Рассмотрим сначала *центральные удары* абсолютно упругих шаров. В этом случае скорости шаров до удара v_1 и v_2 направлены вдоль прямой, соединяющей их центры. Эта прямая называется *линией центров.* При столкновении кинетическая энергия шаров $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2$, связанная с движением их центра масс, измениться не может, так как не может измениться скорость самого центра масс. Может претерпевать превращения только кинетическая энергия $\frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2$ относительного движения шаров. В случае абсолютно упругого удара шары при столкновении сплющиваются, и кинетическая энергия частично переходит в потенциальную энергию упругих деформаций. В некоторый момент вся кинетическая энергия относительного движения $\frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2$ переходит в потенциальную энергию упруго деформированных шаров. В этот момент шары аналогичны сжатым пружинам, стремящимся перейти в недеформированное состояние. Ввиду этого начинается обратный процесс перехода энергии упругих деформаций в кинетическую энергию поступательного движения шаров. Когда он заканчивается, шары разлетаются в разные стороны и вновь оказываются не деформированными. Таким образом, кинетическая энергия поступательного движения шаров снова принимает исходное значение, каким оно было до удара. Для реальных тел этот процесс осложняется возникновением упругих возмущений, распространяющихся в шарах со скоростью звука, излучением звуковых волн, а также внутренним трением и остаточными деформациями. После столкновения часть энергии уносится в виде энергии таких упругих возмущений, внутренних движений и звуковых волн, излученных в окружающую среду. Эта часть энергии в конце концов переходит в тепловую (внутреннюю) энергию. Она может быть очень малой и в предельном случае идеально упругих шаров обращается в нуль.

3. Скорости шаров после столкновения v_1' и v_2' легко найти из законов сохранения импульса тела и энергии:

$$\begin{gathered} m_1v_1' + m_2v_2' = m_1v_1 + m_2v_2, \\ \tfrac{1}{2}m_1v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2'^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2. \end{gathered} \tag{28.1}$$

Сумма кинетической и потенциальной энергий системы называется ее *полной энергией E.* Таким образом, $E_1 = E_2$, или

$$E \equiv K + U = \mathrm{const}. \tag{25.2}$$

В системе с одними только консервативными (и гироскопическими) силами полная энергия остается неизменной. Могут происходить лишь превращения потенциальной энергии в кинетическую и обратно, но полный запас энергии системы измениться не может. Это положение называется *законом сохранения энергии в механике.*

3. Вычислим потенциальную энергию в некоторых простейших случаях.

а. Потенциальная энергия тела в однородном поле тяжести. Если материальная точка, находящаяся на высоте *h*, упадет на нулевой уровень (т.е. уровень, для которого $h = 0$), то сила тяжести совершит работу $A = mgh$. Поэтому на высоте *h* материальная точка обладает потенциальной энергией $U = mgh + C$. За нулевой можно принять произвольный уровень, например, уровень пола (если опыт производится в лаборатории), уровень моря и т.д. Постоянная *C* равна потенциальной энергии на нулевом уровне. Полагая ее равной нулю, получим

$$U = mgh. \tag{25.3}$$

б. Потенциальная энергия растянутой пружины. Упругие силы, возникающие при растяжении или сжатии пружины, являются центральными силами. Поэтому они консервативны, и имеет смысл говорить о потенциальной энергии деформированной пружины. Ее называют *упругой энергией.* Обозначим через *x растяжение пружины,* т.е. разность $x = l - l_0$ длин пружины в деформированном и недеформированном состояниях. Упругая сила *F* зависит только от растяжения. Если растяжение *x* не очень велико, то она пропорциональна ему: $F = kx$ (закон Гука, см. § 11). При возвращении пружины из деформированного в недеформированное состояние сила *F* совершает работу

$$A = \int_0^x F\,dx = k\int_0^x x\,dx = \tfrac{1}{2}kx^2.$$

Если упругую энергию пружины в недеформированном состоянии условиться считать равной нулю, то

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2. \tag{25.4}$$

в. Потенциальная энергия гравитационного притяжения двух материальных точек. По закону всемирного тяготения Ньютона гравитационная сила притяжения двух точечных тел пропорциональна произведению их масс *Mm* и обратно пропорциональ-

на квадрату расстояния между ними:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}, \tag{25.5}$$

где *G* – *гравитационная постоянная.* Силы гравитационного притяжения, как силы центральные, являются консервативными. Для них имеет смысл говорить о потенциальной энергии. При вычислении этой энергии одну из масс, например *M*, можно считать неподвижной, а другую – перемещающейся в ее гравитационном поле. При перемещении массы *m* из бесконечности гравитационные силы совершают работу

$$A = \int_r^\infty G\frac{Mm}{r^2}\,dr = G\frac{Mm}{r},$$

где *r* – расстояние между массами *M* и *m* в конечном состоянии. Эта работа равна убыли потенциальной энергии:

$$A = U_\infty - U(r).$$

Обычно потенциальную энергию в бесконечности U_∞ принимают равной нулю. При таком соглашении

$$U = -G\frac{Mm}{r}. \tag{25.6}$$

Величина (25.6) отрицательна. Это имеет простое объяснение. Максимальной энергией притягивающиеся массы обладают при бесконечном расстоянии между ними. В этом положении потенциальная энергия считается равной нулю. Во всяком другом положении она меньше, т.е. отрицательна.

4. Допустим теперь, что в системе наряду с консервативными и гироскопическими силами действуют также диссипативные силы. Работа всех сил A_{12} при переходе системы из положения *1* в положение *2* по-прежнему равна приращению ее кинетической энергии $K_2 - K_1$. Но в рассматриваемом случае эту работу можно представить в виде суммы работы консервативных сил $A_{12}^{кон}$ и работы диссипативных сил $A_{12}^{дис}$. Первая работа может быть выражена через убыль потенциальной энергии системы: $A_{12}^{кон} = U_1 - U_2$. Поэтому

$$A_{12} = U_1 - U_2 + A_{12}^{дис}.$$

Приравнивая это выражение приращению кинетической энергии, получим

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2 + A_{12}^{дис},$$

или

$$E_2 - E_1 = A_{12}^{дис}, \tag{25.7}$$

ним в сторону шар *1.* Ударившись о шар *2* со скоростью *v*, он передаст ему эту скорость, а сам остановится. С шаром *2* произойдет то же самое – при ударе о шар *3* он остановится, а шар *3* придет в движение со скоростью *v*. Этот процесс будет повторятся с каждым впереди находящимся шаром. В конце концов последний шар отскочит со скоростью *v*, а все прочие шары останутся в состоянии покоя.

Отклоним теперь два шара. При возвращении в нижнее положение они приобретут одну и ту же скорость *v* и, двигаясь с такой скоростью, ударят впереди находящийся шар (рис. 50). Оказывается, что в результате удара отскочат два последних шара со скоростью *v*, а все остальные шары останутся в покое. Явление можно объяснить следующим образом. Шар *2*

Рис. 50

ударяет в шар *3.* В результате этого шар *2* останавливается, а шар *3* приобретает скорость *v*. Однако шар *2* сразу же подвергается удару со стороны шара *1* и снова приобретает прежнюю скорость *v*. Таким образом, шар *1* придет в состояние покоя, а шары *2* и *3* будут двигаться вместе со скоростью *v*. Повторяя это рассуждение, найдем, что затем остановится шар *2*, а начнут двигаться шары *3* и *4* и т.д. В конце концов скорость *v* приобретут два последних шара, а все остальные шары придут в состояние покоя. Вместо двух можно отклонить три, четыре и т.д. шара, сообщив им одну и ту же скорость *v*. После удара отскочит такое же количество шаров, остальные же шары останутся неподвижными.

6. Рассмотрим теперь *нецентральный удар* твердых упругих шаров. Так называется столкновение, когда в момент удара начальные скорости шаров не совпадают по направлению с линией центров. Разложим в момент столкновения начальную скорость каждого шара на нормальную v_n и тангенциальную v_t составляющие, т.е. составляющие вдоль линии центров и перпендикулярно к ней (рис. 51). Так же поступим с конечными скоростями шаров в момент начала их разлета. Тогда законы сохранения импульса тела и энергии запишутся в виде

$$\begin{gathered} m_1v_{1n}' + m_2v_{2n}' = m_1v_{1n} + m_2v_{2n}, \\ m_1v_{1t}' + m_2v_{2t}' = m_1v_{1t} + m_2v_{2t}, \\ \tfrac{1}{2}m_1(v_{1n}'^2 + v_{1t}'^2) + \tfrac{1}{2}m_2(v_{2n}'^2 + v_{2t}'^2) = \tfrac{1}{2}m_1(v_{1n}^2 + v_{1t}^2) + \tfrac{1}{2}m_2(v_{2n}^2 + v_{2t}^2). \end{gathered} \tag{28.6}$$

Получилось всего три уравнения для определения четырех неизвестных v_{1n}', v_{1t}', v_{2n}', v_{2t}'. Чтобы написать недостающее уравнение, введем предположение, что *при столкновении шаров не возникают тангенциальные силы.* В сущности, ввести такое предположение вынуждает нас закон сохранения энергии, уже использованный при написании наших уравнений. Действительно, если бы тангенциальные скорости

сталкивающихся шаров были одинаковы ($v_{1t} = v_{2t}$), то рассматриваемый случай сводился бы к случаю центрального удара, уже разобранному выше. Для этого достаточно было бы перейти в систему отсчета, в которой $v_{1t} = v_{2t}$. Поэтому без ущерба для общности мы будем предполагать, что $v_{1t} \neq v_{2t}$. Но тогда, если бы при столкновении развивались тангенциальные силы трения скольжения, механическая энергия не могла бы сохраняться. Поэтому, предполагая удар идеально упругим, мы должны считать сами шары *идеально гладкими.* При их столкновении тангенциальные силы не возникают. Если так, то не происходит также изменения тангенциальных скоростей, и к уравнениям (28.6) следует присоединить уравнения $v_{1t}' = v_{1t}$, $v_{2t}' = v_{2t}$. Тогда останутся только уравнения для нормальных скоростей, отличающиеся от уравнений (28.1) лишь обозначениями. В результате мы приходим к следующему заключению.

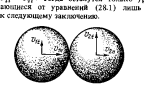


Рис. 51

При столкновении гладких идеально упругих шаров их тангенциальные скорости не изменяются. Нормальные же скорости изменяются так же, как и скорости при центральном ударе. В частности, при столкновениях не изменяются состояния вращения шаров. Это было бы возможно только при наличии тангенциальных сил. *Если шары одинаковы, то при столкновении они обмениваются нормальными скоростями, тангенциальные скорости их остаются неизменными.*

7. Отметим случай, когда масса одного из шаров бесконечно велика. В этом случае скорость большего шара при столкновении вообще не изменяется. Устремляя радиус этого шара к бесконечности, в пределе придем к задаче о столкновении гладкого упругого шара с *гладкой плоской стенкой.* Если связать систему отсчета с такой стенкой, то можно сказать, что при столкновении с ней тангенциальная скорость шара не меняется, а нормальная меняет знак. Это значит, что шар отражается от стенки *"зеркально"*: его скорость по модулю не изменяется, а угол падения равен углу отражения.

Удар под углом о массивную стенку сообщает ей конечный импульс, в то время как кинетическая энергия, приобретаемая стенкой, пренебрежимо мала. Например, если удар нормальный, то скорость шара *v* после удара становится равной $-v$, а импульс шара получает приращение $-2mv$. Чтобы общий импульс не изменился, стенка должна воспринять импульс $MV = 2mv$, проявляющийся в конечной силе удара, действующей на стенку. При этом стенка получает скорость $V = 2mv/M$, которая для массивной стенки бесконечно мала. Бесконечно мала и кинетическая энергия, приобретаемая стенкой. Действительно, ее можно представить в виде $MV^2/2 = MV \cdot V/2$, т.е. в виде произведения конечного импульса *MV* на половину бесконечно малой скорости $V/2$.

6. Для финитных движений справедлива так называемая *теорема вириала,* имеющая многочисленные применения в различных отделах физики. Она была сформулирована и доказана немецким физиком Рудольфом Клаузиусом (1822–1888). Для произвольной системы материальных точек можно написать

$$\frac{d}{dt}\Sigma\,pr = \Sigma\,rF + \Sigma\,pv,$$

так как $\dot{p} = F$, $\dot{r} = v$ (суммирование ведется по всем материальным точкам системы). Последнее слагаемое в правой части есть удвоенная кинетическая энергия системы: $2K = \Sigma pv = \Sigma mv^2$, и предыдущее соотношение можно переписать в виде

$$K = -\frac{1}{2}\Sigma rF + \frac{d}{dt}\Sigma\frac{1}{2}(pr). \tag{25.9}$$

Величина $-\frac{1}{2}\Sigma rF$ называется *вириалом сил,* действующих в системе.

Назовем *средним по времени значением функции f(t)* на временном *интервале* $(t, t + T)$ величину, определяемую выражением

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(t')\,dt'. \tag{25.10}$$

Если функция $f(t)$ периодична, то в качестве времени *T* обычно берут ее период. Если же $f(t)$ не периодична, но ограничена, то время *T* берут достаточно большим и переходят к пределу

$$\bar{f} = \lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(t')\,dt', \tag{25.11}$$

предполагая, конечно, что предел существует. Если $f(t)$ есть производная ограниченной функции по времени; $f = \frac{d\varphi}{dt}$, то $\bar{f} = 0$. Действительно,

$$\bar{f} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\frac{d\varphi}{dt'}\,dt' = \lim_{T\to\infty}\frac{\varphi(t+T) - \varphi(t)}{T}.$$

Имея это в виду, усредним соотношение (25.9) по времени, устремляя *T* к бесконечности. Тогда для финитного движения последнее слагаемое в (25.9) даст нуль, и мы получим

$$\bar{K} = -\tfrac{1}{2}\overline{\Sigma\,rF}. \tag{25.12}$$

В случае финитных движений среднее по времени значение кинетической энергии системы равно среднему по времени значению вириала сил, действующих в системе. Это и есть теорема вириала Клаузиуса.

ЗАДАЧИ

1. Определить отношение потенциальных энергий деформации U_1 и U_2 двух пружин с жесткостями k_1 и k_2 в двух случаях: а) пружины соединены последовательно и растягиваются грузом *P* (рис. 46*а*); б) пружины висят параллельно, причем груз *P* подвешен в такой точке, что обе пружины растягиваются на одну и ту же величину (рис. 46*б*). Деформацией пружин под действием собственного веса пренебречь.

Ответ: а) $U_1/U_2 = k_2/k_1$; б) $U_1/U_2 = k_1/k_2$.

Когда одна из пружин очень жесткая по сравнению с другой, практически вся потенциальная энергия в случае а) будет запасена в более мягкой, а в случае б) – в более жесткой пружинах.

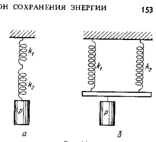


Рис. 46

2. Два протона с энергией $E = 0{,}5$ МэВ каждый летят навстречу друг другу и испытывают лобовое столкновение. Как близко могут сойтись они, если учитывать только электростатическое взаимодействие между ними?

Ответ. $r = e^2/2E$, где *e* – заряд протона. Для вычислений формулу целесообразно преобразовать, положив $E = eV$. Тогда $r = e/2V = 1{,}4\cdot 10^{-13}$ см ($2V = 10^6$ В). Опыты по рассеянию ядерных частиц показали, что радиус действия ядерных сил по порядку величины равен 10^{-13} см. Поэтому при расчете столкновения протонов, энергии которых превосходят примерно 0,5 МэВ, помимо электростатических сил надо учитывать также ядерные силы.

3. Три электрона в состоянии покоя находятся в вершинах правильного треугольника со стороной $a = 1$ см. После этого они начинают двигаться под действием взаимного отталкивания. Определить предельное значение их скоростей.

Ответ. $v = \sqrt{2e^2/ma} = 2{,}2\cdot 10^4$ см/с.

4. Решить задачу 3 для релятивистских скоростей. При каких расстояниях *a* можно пользоваться нерелятивистским приближением?

Ответ. $v = c\,\dfrac{\sqrt{2m_0c^2e^2/a + e^4/a^2}}{m_0c^2 + e^2/a}$.

Нерелятивистское приближение справедливо при

$$a \gg \frac{e^2}{m_0c^2} = 2{,}8\cdot 10^{-13}\ \text{см}.$$

5. Исходя из того требования, что произведение импульса частицы *mv* на расстояние *a* велико по сравнению с *L*, определить, при каких расстояниях *a* в задаче 3 квантовые поправки не играют роли.

Ответ. При $a \gg \dfrac{h^2}{2me^2} \approx 10^{-7}$ см.

6. Четыре электрона в состоянии покоя находятся в вершинах квадрата со стороной $a = 1$ см. После этого они начинают двигаться под действием взаимного отталкивания. Определить предельное значение их скоростей.

Ответ. $v = \sqrt{\left(2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\dfrac{e^2}{ma}} = 2{,}6\cdot 10^4$ см/с.

7. Материальная точка совершает одномерное финитное движение в потенциальном силовом поле между точками поворота x_A и x_B (см. рис. 45). Показать, что время движения ее от точки x_A к точке x_B равно времени обратного движения от точки x_B к точке x_A.

8. Материальная точка (например, шарик на пружине) под действием квазиупругой силы $F = -kx$ совершает колебания вдоль оси *X* вокруг положения равновесия.

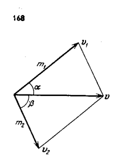


Рис. 54

v_1 и v_2 – скорости частиц после рассеяния (рис. 54). Законы сохранения импульса и энергии дают

$$m_1v = m_1v_1\cos\alpha + m_2v_2\cos\beta,$$
$$m_1v_1\sin\alpha = m_2v_2\sin\beta,$$
$$m_1v^2 = m_1v_1^2 + m_2v_2^2.$$

Исключив отсюда угол β и скорость v_2, получим для v_1 квадратное уравнение

$$(m_1 + m_2)v_1^2 - 2m_1vv_1\cos\alpha + (m_1 - m_2)v^2 = 0.$$

Условие вещественности корней его, как легко видеть, имеет вид $\sin\alpha \leqslant m_2/m_1$. Максимальный угол α, удовлетворяющий этому условию, и будет равен углу ϑ. Таким образом, $\sin\vartheta = m_2/m_1$. Отсюда находим для α-частицы $\vartheta = 14°30'$, для дейтрона $\vartheta = 30°$.

12. Альфа-частица, летящая со скоростью v_0, испытывает упругое столкновение с неподвижным ядром и летит под углом 90° к первоначальному направлению движения. При каком соотношении масс α-частицы *m* и ядра *M* это возможно? Определить скорость α-частицы *v* и ядра *V* после столкновения. Определить также угол ϑ между направлением скорости вылетающего ядра и первоначальным направлением движения α-частицы.

Ответ. Масса α-частицы должна быть меньше массы ядра: $m < M$;

$$v = v_0\sqrt{\frac{M - m}{M + m}},\quad V = \frac{mv_0}{M}\sqrt{\frac{2M}{M + m}},\quad \operatorname{tg}\vartheta = \sqrt{\frac{M - m}{M + m}}.$$

13. Частица массой *m*, летящая горизонтально со скоростью *V*, сталкивается с невозбужденным неподвижным атомом массой *M*, после чего она отскакивает и летит в прямо противоположном направлении с половинной скоростью $V/2$, а атом переходит в возбужденное состояние, т.е. состояние с более высокой внутренней энергией. Определить скорость атома *v* после столкновения и энергию *E*, которая пошла на возбуждение атома. Для каких невозбужденных атомов описанный процесс невозможен?

Ответ. $v = \frac{3}{2}mV/M$, $E = \frac{3}{8}mV^2(1 - 3m/M)$. Процесс невозможен, если $M < 3m$.

14. Ядра дейтерия и трития летят навстречу друг другу таким образом, что центр масс этих частиц остается неподвижным. Суммарная кинетическая энергия обеих частиц равна $E = 15$ кэВ. До какой энергии E_D надо ускорить ядро дейтерия, оставляя тритий неподвижным, чтобы получить тот же выход реакции? Какая энергия E_T потребуется для той же цели, если ускорять тритий?

Рассматриваемая реакция, а также реакция, о которой говорится в следующей задаче, являются основными реакциями, с помощью которых предполагается осуществить управляемую термоядерную реакцию синтеза для использования в мирных целях.

Ответ. $E_D = \dfrac{m_D + m_T}{m_T}E = \dfrac{5}{3}E = 25$ кэВ,

$E_T = \dfrac{m_D + m_T}{m_D}E = \dfrac{5}{2}E = 37{,}5$ кэВ.

15. Ядро дейтерия сталкивается и вступает в реакцию с ядром трития. Предполагается осуществить этот процесс, ускорив перед столкновением лишь одну частицу до энергии $E = 20$ кэВ, оставив вторую неподвижной. Что выгоднее для осуществления реакции: ускорить легкую или тяжелую частицу? Предполагается, что удар между частицами центральный.

Ответ. Если ускорять дейтерий, то энергия

$$E/(1 + m_T/m_D) = 8\ \text{кэВ},$$

связанная с движением центра масс, не может принимать участие в реакции. В случае ускорения трития эта энергия равна

$$E/(1 + m_D/m_T) = 12\ \text{кэВ}.$$

Выгоднее ускорять дейтерий. Выигрыш в энергии в этом случае по сравнению с другим будет

$$\frac{m_T - m_D}{m_T + m_D}E = \frac{1}{5}E = 4\ \text{кэВ}.$$

16. Первая искусственная ядерная реакция

$${}^{14}N + {}^{4}He = {}^{17}O + p$$

наблюдалась Резерфордом в 1919 г. Она идет с поглощением энергии $E = 1{,}13$ МэВ. Какую минимальную энергию E_0 надо сообщить в лабораторной системе α-частице (т.е. ядру атома гелия), чтобы при бомбардировке неподвижной мишени из ${}^{14}N$ указанная реакция могла пойти?

Решение. Обозначим через p_0 импульс α-частицы до столкновения. В результате столкновения импульс не изменяется. С ним связана кинетическая энергия движения центра масс

$$K_{ц.м} = \frac{p_0^2}{2(m_{He} + m_N)} = \frac{m_{He}}{m_{He} + m_N}E_0,$$

которая также не изменяется, а потому никак не участвует в ядерных превращениях. Следовательно, искомая энергия найдется из условия

$$E_0 = E + K_{ц.м.} = E + \frac{m_{He}}{m_{He} + m_N}E_0,$$

откуда

$$E_0 = \frac{m_{He} + m_N}{m_N}E = 1{,}45\ \text{МэВ}.$$

17. *Пороговой энергией* $E_{пор}$ или *порогом* ядерной реакции называется такая энергия бомбардирующей частицы, что ядерная реакция при неподвижной мишени может идти только тогда, когда энергия *E* бомбардирующей частицы равна или превосходит $E_{пор}$, а при $E < E_{пор}$ реакция невозможна. Пороговая энергия ядерной реакции ${}^{7}Li + p \to {}^{7}Be + n$ (литий неподвижен) равна $E_{пор} = 1{,}88$ МэВ. При каких энергиях бомбардирующих протонов E_p нейтроны в такой реакции могут лететь назад от литиевой мишени?

Решение. Минимальное значение искомой энергии протона E_p соответствует лобовому столкновению, когда все частицы до и после столкновения движутся вдоль одной и той же прямой. Поэтому можно ограничиться только такими столкновениями.

не изменяется, а потому она на разрушение не оказывает никакого влияния. Например, если сталкиваются два одинаковых автомобиля, движущихся навстречу друг другу с одной и той же скоростью *v*, то энергия, от которой зависит разрушение, равна

$$\frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{mm}{m + m}(2v)^2 = mv^2,$$

т.е. вся кинетическая энергия тратится на разрушение. Это ясно без вычислений, так как после столкновения оба автомобиля, независимо от того, в какой мере они пострадали при аварии, должны остановиться. Тот же разрушительный эффект получится и в том случае, когда один из автомобилей неподвижен, а другой движется по направлению к нему со скоростью $2v$. Но в этом случае начальная кинетическая энергия системы составляет $\frac{1}{2}m(2v)^2 = 2mv^2$, т.е. она вдвое больше. Только половина энергии идет на разрушение.

Разрушительные эффекты при авариях, конечно, являются бедствием. Но в некоторых случаях, например при изучении превращений, претерпеваемых атомными ядрами и элементарными частицами во время столкновения, они являются целью исследования. В таких случаях стремятся к тому, чтобы разрушительные эффекты усилить. Из изложенного следует, что этого можно добиться, приводя в движение обе сталкивающиеся частицы. *При одной и той же затрате энергии наибольшее разрушение получится тогда, когда центр масс сталкивающихся частиц в лабораторной системе отсчета неподвижен.* Этот принцип используется в так называемых *ускорителях на встречных пучках.* Современные ускорители представляют дорогие и сложные технические сооружения, применяющиеся для сообщения высоких энергий заряженным частицам – электронам, протонам и пр. Они используются в ядерной физике и физике элементарных частиц для исследования различных процессов, происходящих при столкновении частиц высоких энергий. Обычно ускоренные частицы направляются на неподвижную мишень, при столкновении с которой и происходят процессы, подлежащие изучению. Тот же эффект, однако, может быть достигнут с меньшей затратой энергии, если привести в движение также саму мишень навстречу пучку. В качестве мишени используется встречный пучок ускоренных частиц. Если массы и скорости частиц в обоих пучках одинаковы, то согласно нерелятивистской механике должен получиться выигрыш в энергии в два раза. В действительности в ускорителях имеют дело с *релятивистскими пучками,* и при расчетах надо пользоваться релятивистской механикой. Оказывается, что в релятивистском случае можно получить принципиально ничем не ограниченный выигрыш в энергии, используя частицы, скорости которых приближаются к скорости света (см. т. IV).

4. Во время столкновения в системе действуют диссипативные силы, уменьшающие кинетическую энергию макроскопического движения. Поэтому применять закон сохранения энергии в его механической форме к процессам, происходящим во время удара, нельзя. Но после того как удар закончился и сталкивающиеся тела соединились в одно тело, законом сохранения энергии уже можно пользоваться (если, конечно, в дальнейшем не действуют диссипативные силы).

В качестве примера рассмотрим задачу о *баллистическом маятнике.* Он применяется для измерения скорости пуль или снарядов. Баллистический маятник обычно представляет собой подвешенный большой ящик с песком или землей, который может колебаться вокруг горизонтальной оси.

Пуля или снаряд, попадая в маятник, останавливается в нем, и маятник отклоняется. Для простоты расчета будем считать маятник математическим. Процесс столкновения происходит настолько быстро, что за время столкновения маятник не успевает отклониться на заметный угол. В результате удара он только приходит в движение, и задача прежде всего заключается в том, чтобы найти скорость этого движения *v* непосредственно после того, как удар закончился. До удара, когда маятник находился в равновесии, внешние силы (сила веса и сила натяжения подвеса), действующие на него, уравновешивались. Во время удара равновесие этих сил нарушается, и появляются новые силы, например силы трения. Однако во время самого удара все эти силы можно не принимать во внимание, так как они пренебрежимо малы по сравнению с силой, которая действует на маятник со стороны налетающих на него пули или снаряда. Иными словами, систему, состоящую из маятника и пули (снаряда) (рис. 48), во время удара можно считать замкнутой и применять к ней закон сохранения импульса. Из этого закона и найдется искомая скорость *v*, которую получит система непосредственно после удара:

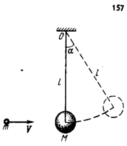


Рис. 48

$$v = \frac{m}{M + m}V,$$

где *V* – скорость пули до удара. После того как удар закончился, действие (внутренних) диссипативных сил прекращается. Поэтому к процессам после удара применим закон сохранения энергии. Скорость *v* надо рассматривать как начальную скорость, с которой начнет колебаться маятник в нижнем положении. В этом положении маятник и пуля (снаряд) обладают кинетической энергией $\frac{1}{2}(M + m)v^2$, которая при отклонении маятника переходит в потенциальную энергию $(M + m)gh$. Отсюда находится высота поднятия:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{m}{M + m}\right)^2 V^2. \tag{26.3}$$

Измерив высоту *h*, можно вычислить скорость пули *V*.

Было бы грубой ошибкой рассуждать следующим образом. В нижнем положении (до удара) энергия системы равна кинетической энергии $\frac{1}{2}mV^2$. При поднятии маятника эта энергия переходит в потенциальную энергию $(M + m)gh$. Такой способ

вания, называются *частными производными* функции *U.* Они обозначаются символом ∂, в отличие от символа *d*, применяемого при дифференцировании функций одного независимого переменного. Аналогичные соображения справедливы и для проекций силы вдоль остальных двух осей *Y* и *Z*. Таким образом,

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y},\quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{29.3}$$

Если функция $U(x, y, z)$ известна, то нахождение составляющих F_x, F_y, F_z сводится к вычислению ее частных производных по координатам. Разумеется, формулы (29.3) относятся только к случаю консервативных сил.

Приведем пример. Измеряя потенциальную энергию растянутой спиральной пружины, нашли, что она определяется выражением $U = \frac{1}{2}kx^2$, где *x* – удлинение пружины, а *k* – постоянная. Направим ось *X* вдоль оси пружины, закрепив один конец ее, а другой будем удерживать рукой. Тогда *U* будет функцией только одной координаты *x*. Растянутая пружина действует на руку с силой

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx.$$

Знак минус указывает, что сила *F* направлена в сторону, противоположную смещению, т.е. является *силой притяжения.*

3. Три формулы (29.3) можно объединить в одну векторную формулу. С этой целью умножим эти формулы на единичные векторы координатных осей $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ и сложим. В результате получим

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} U, \tag{29.4}$$

где символом grad *U* обозначена сумма

$$\operatorname{grad} U \equiv \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{29.5}$$

Она, согласно соотношению (29.4), является вектором. Вектор, определяемый соотношением (29.5), называется *градиентом скаляра U.* Для него, наряду с обозначением grad *U*, применяется также обозначение ∇U. Здесь ∇ ("набла") означает символический вектор или *оператор*

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}, \tag{29.6}$$

называемый *оператором Гамильтона* (по имени ирландского математика и физика Уильяма Гамильтона (1805–1865) или набла-оператором. Таким образом, ∇U формально может рассматриваться как произведение символического вектора ∇ на скаляр *U*. Понятно, что можно говорить о градиенте не только функции *U*, но и любой скалярной функции координат. Понятие

градиента широко применяется в самых разнообразных вопросах физики и математики.

Для уяснения геометрического смысла градиента полезно ввести *поверхности уровня,* т.е. такие поверхности, на которых скаляр *U* остается постоянным. Пусть *S* – одна из таких поверхностей и пусть она проходит через точку пространства *1*, в которой ищется grad *U* (рис. 55). Поместим в этой точке начало координат. Ось *X* направим по нормали к поверхности уровня

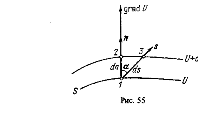


Рис. 55

$U = \mathrm{const}$, проведя единичный вектор $\boldsymbol{i}$ в сторону возрастания *U*. Координатные оси *Y* и *Z* расположатся в плоскости, касательной к поверхности уровня $U = \mathrm{const}$. Ясно, что при таком выборе координатных осей частные производные $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial U}{\partial z}$ в рассматриваемой точке пространства обратятся в нуль, так что в формуле (29.5) останется одно только первое слагаемое: $\operatorname{grad} U = \dfrac{\partial U}{\partial t}\boldsymbol{i}$. Изменим теперь обозначения. Единичный вектор нормали к поверхности уровня $U = \mathrm{const}$ обозначим символом $\boldsymbol{n}$, а расстояние между двумя бесконечно близкими поверхностями уровня *U* и $U + dU$, измеренное вдоль нормали, т.е. расстояние между точками *1* и *2*, – символом *dn*. Тогда, очевидно, $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{dU}{dn}$. Эту величину чаще обозначают через $\dfrac{\partial U}{\partial n}$ и называют *производной скаляра U в направлении нормали к поверхности уровня.* В этом направлении величина *U*, очевидно, изменяется наиболее быстро. Таким образом, в новых обозначениях формула (29.5) примет вид

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial n}\boldsymbol{n}. \tag{29.7}$$

сил равна нулю при любом перемещении материальной точки, в частности при ее движении по замкнутому пути. От консервативных гироскопические силы отличаются тем, что они определяются не только положением, но и скоростью движущейся материальной точки. Единственным примером гироскопических сил, известных в физике, является *сила Лоренца*, т.е. сила, действующая на заряженную частицу в магнитном поле. Она пропорциональна векторному произведению $[\mathbf{v}\mathbf{B}]$, т.е. перпендикулярна как к направлению скорости $\mathbf{v}$, так и к вектору *напряженности магнитного поля* $\mathbf{B}$. Правда, в механике встречаются гироскопические силы и иного рода. Это так называемые *силы Кориолиса* (по имени французского физика Гюстава Кориолиса (1792–1843)). Однако эти силы не являются "настоящими силами" в смысле механики Ньютона. При рассмотрении движений относительно инерциальных систем отсчета (а только такие движения мы сейчас и рассматриваем) такие "силы" вообще не существуют. Они вводятся искусственно при рассмотрении движений в системах отсчета, вращающихся относительно инерциальных, чтобы придать уравнениям движения в таких системах формально такой же вид, что и в инерциальных системах отсчета (см. гл. IX).

§ 25. Потенциальная энергия. Закон сохранения энергии в механике

1. Если на систему действуют одни только консервативные и гироскопические силы, то можно для нее ввести понятие *потенциальной энергии*. Какое-либо произвольное положение системы, характеризующееся заданием координат ее материальных точек, условно примем за *нулевое*. Работа, совершаемая консервативными силами при переходе системы из рассматриваемого положения в нулевое, называется потенциальной энергией системы в первом положении. Работа консервативных сил не зависит от пути перехода, а потому потенциальная энергия системы при фиксированном нулевом положении зависит только от координат материальных точек системы в рассматриваемом положении. Иными словами, *потенциальная энергия системы U является функцией только ее координат*.

Значение потенциальной энергии зависит от того, какое положение системы условно принято за нулевое. Если за нулевое принять положение *0* (рис. 43*а*), то в положении *1* система будет обладать потенциальной энергией $U = A_{10}$, равной работе консервативных сил при переходе системы из положения *1* в положение *0*. Если же за нулевое принять положение *0'*, то потенциальная энергия будет равна $U' = A_{10'}$. Вследствие консервативности сил, действующих в системе, работа вдоль пути *10'* равна работе вдоль пути *100'*: $A_{10'} = A_{10} + A_{00'}$, или $U' = U + A_{00'}$. Работа $A_{00'}$ постоянна, т.е. не зависит от координат системы в рассматриваемом состоянии *1*. Она полностью определяется выбором нулевых положений *0* и *0'*. Мы

видим, что при замене одного нулевого положения другим потенциальная энергия системы меняется на постоянную величину. Неопределенность можно усилить еще больше, если условиться считать потенциальную энергию в нулевом положении равной не нулю, а какому-либо постоянному произвольному значению. Тогда в приведенном выше определении вместо потенциальной энергии следует говорить о ее *разности* в двух положениях. *Разностью потенциальных энергий в рассматриваемом и нулевом положениях* называется работа, совершаемая консервативными силами при переходе системы из рассматриваемого в нулевое положение. Таким образом,

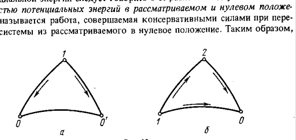


Рис. 43

потенциальная энергия системы определена не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной. Этот произвол не может отразиться на физических выводах, так как ход физических явлений может зависеть не от абсолютных значений самой потенциальной энергии, а лишь от ее разностей в различных состояниях. Эти же разности от выбора произвольной постоянной не зависят.

Пусть система перешла из положения *1* в положение *2* по какому-либо пути *12* (рис. 43*б*). Работу A_{12}, совершенную консервативными силами при таком переходе, можно выразить через потенциальные энергии U_1 и U_2 в состояниях *1* и *2*. С этой целью вообразим, что переход осуществлен через нулевое положение *0*, т.е. по пути *102*. Так как силы консервативны, то $A_{12} = A_{102} = A_{10} + A_{02} = A_{10} - A_{20}$. По определению потенциальной энергии $U_1 = A_{10} + C$, $U_2 = A_{20} + C$, где C – одна и та же аддитивная постоянная. Таким образом,

$$A_{12} = U_1 - U_2, \tag{25.1}$$

т.е. *работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии системы*.

2. Та же работа A_{12}, как было показано, может быть выражена через приращение кинетической энергии по формуле (22.9). Приравнивая выражения (22.9) и (25.1), получим $K_2 - K_1 = U_1 - U_2$, откуда

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2.$$

где $E = K + U$ – полная энергия системы. Таким образом, в рассматриваемом случае механическая энергия E системы не остается постоянной, а уменьшается, так как работа диссипативных сил $A_{12}^{\text{дис}}$ отрицательна.

Уравнение (25.7) можно обобщить. Разделим все действующие силы на две группы. К первой группе отнесем силы, учитываемые посредством потенциальной энергии U, ко второй – все остальные силы, как внутренние, так и внешние, действующие в системе. Обозначим через A_{12} работу сил второй группы. Тогда, рассуждая так же, как и при выводе формулы (25.7), получим

$$E_2 - E_1 = A_{12}. \tag{25.8}$$

5. Допустим снова, что диссипативные силы в системе не действуют. Тогда справедлив закон сохранения энергии в форме (25.2). Поскольку кинетическая энергия K по своему смыслу не может быть отрицательной, из формулы (25.2) следует, что $E \geqslant U$. Этим соотношением определяется *область изменения всех координат системы*, в которой она может находиться при заданной полной энергии E. В область, где $U > E$, система попасть не может, так как потенциальная энергия не может превышать полную.

Рассмотрим в качестве примера одномерное движение частицы, когда она движется вдоль определенной прямой линии. Примем эту линию за координатную ось X. На оси X величина U будет функцией только x: $U = U(x)$. Если E – полная энергия частицы, то частица может находиться только в тех местах оси X, где $U(x) \leqslant E$. Допустим, что график функции $U(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 44. Проведем на этом рисунке горизонтальную прямую $U = E_1$, где E_1 – какая-то постоянная. Пусть эта прямая пересекает "*потенциальную кривую*" $U = U(x)$ в трех точках A, B, C с координатами x_A, x_B, x_C. Сразу видно, что частица с полной энергией E_1 не может находиться в областях *I* и *III*. Она может двигаться либо в области *II*, либо в области *IV*. Переходить из области *II* в область *IV* или обратно частица не может. Этому препятствует "*потенциальный барьер*" BNC на потенциальной кривой. В области *II* частица с полной энергией E_1 будет совершать так называемое *финитное движение*, т.е. движение, происходящее в ограниченной части пространства. Она окажется запертой в "*потенциальной яме*" AMB и будет совершать

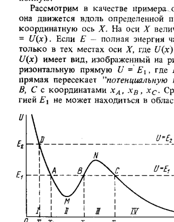


Рис. 44

колебания между крайними точками x_A и x_B, называемыми *точками поворота*. Если же частица находится в области *IV* и движется налево, то она, достигнув точки x_C, повернет обратно и далее будет "уходить на бесконечность". Такое движение называется *инфинитным*. Пусть теперь частица обладает большей энергией $E_2 > E_1$, и горизонтальная прямая $U = E_2$ пересекает потенциальную кривую в единственной точке D с абсциссой x_D. Тогда для частицы окажется доступной вся область пространства правее точки x_D, и движение в этой области будет инфинитным.

Допустим, что потенциальная яма имеет характер кривой, изображенной на рис. 45. По обе стороны от точки M обе ветви потенциальной кривой монотонно поднимаются вверх. Пусть при $x = \pm\infty$ функция $U(x)$ обращается в нуль, т.е. ось абсцисс является для потенциальной кривой *асимптотой*. Тогда можно утверждать, что *движение частицы будет финитным, если ее полная энергия отрицательна, и инфинитным, если она положительна*.

Для уяснения качественного характера движения частицы в силовом поле с потенциальной энергией $U(x)$ полезна следующая иллюстрация. Изготовим идеально твердую и идеально гладкую дорожку, форма которой точно совпадает с профилем потенциальной кривой $U = U(x)$ (например, кривой, изображенной на рис. 44). Поместим такую дорожку в однородное поле тяжести и положим на нее на некоторой высоте маленький шарик. Тогда движение шарика под действием силы тяжести будет почти точно воспроизводить движение материальной точки в рассматриваемом силовом поле $U = U(x)$, если только надлежащим образом подобрать ее

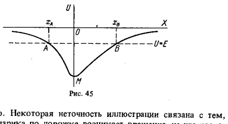


Рис. 45

полную энергию. Некоторая неточность иллюстрации связана с тем, что при движении шарика по дорожке возникает вращение, на что расходуется часть энергии. Иллюстрация совершенно точно передавала бы все черты искомого движения, если бы шарик не катился по дорожке, а скользил по ней без трения. Если такой шарик поместить без начальной скорости в точку A (рис. 44), то он будет совершать колебания по дуге AMB между крайними точками A и B. Если его поместить в точку D, то он сможет преодолеть потенциальный барьер BNC и "уйти на бесконечность".

Пользуясь теоремой вириала, показать, что средние по времени значения кинетической и потенциальной энергий при таком колебании одинаковы.

9. Идеально упругий шарик движется вверх и вниз в однородном поле тяжести, отражаясь от пола по законам упругого удара. Найти связь между средними по времени значениями его кинетической $\overline{K}$ и потенциальной $\overline{U}$ энергий.

Решение. Поместим начало координат в одной из точек пола, направив ось X вертикально вверх. Тогда сила давления пола на шарик не будет влиять на значение вириала, так как она действует только в таких положениях шарика, когда $x = 0$. Надо учитывать только силу тяжести $F = -mg$ (минус потому, что сила F действует вниз, т.е. в отрицательном направлении оси X). Вириал этой силы равен $-½\,Fx = ½\,mgx = ½\,U$. По теореме вириала находим

$$\overline{K} = ½\,\overline{U}.$$

§ 26. Абсолютно неупругий удар

1. Интересным примером, где имеет место потеря механической энергии под действием диссипативных сил, является *абсолютно неупругий удар*. Так называется столкновение двух тел, в результате которого они соединяются вместе и движутся дальше как одно тело. Примером может служить попадание ружейной пули в подвижную мишень, например в ящик с песком, подвешенный на веревках. Пуля, застряв в песке, остается в ящике и движется дальше вместе с ним. Шары из пластилина или глины при столкновении обычно слипаются и затем движутся вместе. Такое столкновение также может служить примером практически абсолютно неупругого удара. Точно так же столкновение двух свинцовых шаров можно с хорошим приближением рассматривать как абсолютно неупругий удар. В атомной и ядерной физике неупругие удары сопровождаются внутренними превращениями сталкивающихся частиц.

Физические явления при столкновении тел довольно сложны.

Сталкивающиеся тела деформируются, возникают упругие силы и силы трения, в телах возбуждаются колебания и волны и т.д. Однако если удар

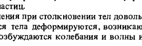


Рис. 47

неупругий, то в конце концов все эти процессы прекращаются, и в дальнейшем оба тела, соединившись вместе, движутся как единое твердое тело. Его скорость можно найти, не вдаваясь в механизм явления, а используя только закон сохранения импульса.

Рассмотрим абсолютно неупругий удар на примере столкновения шаров. Пусть шары движутся вдоль прямой, соединяющей их центры, со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ (рис. 47). В этом случае говорят, что удар является *централь-*

ным. Обозначим через $\mathbf{v}$ общую скорость шаров после столкновения. Закон сохранения импульса дает

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v,$$

где m_1 и m_2 – массы шаров. Отсюда получаем

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{26.1}$$

Кинетические энергии системы до удара и после удара равны соответственно

$$K_1 = ½ m_1 v_1^2 + ½ m_2 v_2^2, \quad K_2 = ½ (m_1 + m_2) v^2.$$

Пользуясь этими выражениями, нетрудно получить

$$K_1 - K_2 = ½ \mu (v_1 - v_2)^2, \tag{26.2}$$

где $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – приведенная масса шаров. Таким образом, *при столкновении двух абсолютно неупругих шаров происходит потеря кинетической энергии макроскопического движения, равная половине произведения приведенной массы на квадрат относительной скорости*.

2. Неупругое столкновение тел всегда должно сопровождаться *потерей* кинетической энергии макроскопического движения. Действительно, согласно теореме Кёнига кинетическая энергия механической системы складывается из двух частей: 1) кинетической энергии движения системы как целого со скоростью ее центра масс; 2) кинетической энергии относительного движения материальных точек, на которые мысленно можно разбить систему, около ее центра масс. Обе части – как кинетические энергии – существенно положительны. Первая из них в результате столкновения тел не меняется в силу теоремы о движении центра масс. Вторая же после столкновения исчезает, так как в результате неупругого столкновения относительное движение частей системы прекращается, остается только общее движение их со скоростью центра масс. Поэтому столкновение приводит к уменьшению полной кинетической энергии макроскопического движения. Зато возрастает внутренняя энергия тела (см. следующий параграф).

3. Нетрудно понять, почему в формулу (26.2) вошли приведенная масса и относительная скорость сталкивающихся шаров. Согласно общей формуле (25.7) потеря кинетической энергии по абсолютной величине равна работе диссипативных сил, действующих в системе во время столкновения. При вычислении этой работы, как было показано в § 24, можно одно из сталкивающихся тел считать неподвижным, а второе – движущимся относительно него. Относительное движение двух материальных точек описывается уравнением $\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$, аналогичным второму закону Ньютона. Ввиду этого работа диссипативной силы $\mathbf{F}$ за все время столкновения равна $½\mu(v_1 - v_2)^2$. Эта величина и дает убыль кинетической энергии системы за то же время.

Когда сталкиваются два тела, то разрушительное действие при столкновении зависит только от их относительной скорости $v_1 - v_2$. Кинетическая энергия, от которой зависит разрушительный эффект, равна $½\mu(v_1 - v_2)^2$. Остальная часть кинетической энергии связана с движением центра масс системы. Эта энергия при столкновении

рассуждения приводит к ошибочной формуле

$$h = \frac{1}{2g}\,\frac{m}{M + m}\,V^2.$$

Так как в случае баллистического маятника $m \ll M$, то эта формула дает совершенно неправильное (завышенное во много раз) значение для высоты h. Только в другом предельном случае, когда $m \gg M$, обе формулы фактически совпадают, как это ясно и без всяких вычислений. Ошибка приведенного рассуждения состоит в том, что оно не учитывает потери механической энергии при ударе.

При практических вычислениях удобно выразить высоту h через угол отклонения маятника из положения равновесия α, который легче поддается измерению, чем высота h. Очевидно, $h = l\,(1 - \cos\alpha) = 2l\sin^2(\alpha/2)$, где l – длина маятника. Пользуясь этим выражением, формулу (26.3) нетрудно привести к виду

$$V = 2\,\frac{M + m}{m}\,\sqrt{gl}\,\sin\frac{\alpha}{2} \approx 2\,\frac{M}{m}\,\sqrt{gl}\,\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{26.4}$$

§ 27. Внутренняя энергия. Общефизический закон сохранения энергии

1. Потеря кинетической энергии без соответствующего увеличения потенциальной, о которой говорилось в предыдущем параграфе, происходит не только при неупругих ударах, но и во многих других процессах. Например, движения в замкнутой системе, где действуют силы трения, в конце концов прекращаются, так что запас кинетической энергии в системе уменьшается. Может происходить и потеря потенциальной энергии. Так, например, если растянуть пружину, перейдя при этом предел упругости, а затем предоставить ее самой себе, то она не возвращается в исходное состояние, в пружине сохраняется некоторое остаточное удлинение. При этом работа, которую в состоянии совершить растянутая пружина, меньше работы, затраченной на ее растяжение. Во всех подобных случаях наблюдаются потери механической энергии. Формальная макроскопическая механика объясняет эти потери тем, что энергия расходуется на работу против диссипативных сил, действующих в системе. Однако такое объяснение является чисто формальным и нефизическим, поскольку оно совсем не раскрывает физическую природу диссипативных сил.

2. Надо учесть, что всякий раз, когда наблюдается потеря механической энергии, в системе происходят какие-то внутренние изменения. Если, например, с помощью чувствительного термометра или термопары измерить температуру шаров до и после неупругого удара, то опыт покажет, что в результате удара шары немного нагрелись. То же самое происходит при трении и остаточной деформации. При продолжительном и интенсивном трении нагревание настолько сильное, что для его обнаружения не требуется никаких специальных приборов. Дикари добывали огонь трением одного куска дерева о другой. Если на ось мотора насадить диск из прочного картона (толщиной около 1 мм) и привести его в быстрое вращение, то можно перепилить деревян-

ную доску, поднеся ее к краю этого вращающегося диска (картонная пила). Явление объясняется тем, что в месте контакта вращающегося картона с доской выделяется много тепла из-за трения. Дерево в этом месте сильно разогревается, обугливается и разрезается вращающимся диском. Картонный диск при этом не разрушается, так как он интенсивно охлаждается из-за быстрого вращения в окружающем воздухе. Разрез доски получается гладким и хорошо отполированным. Он имеет буроватую окраску из-за обугливания дерева при трении. Решающую роль в этом опыте играет натяжение картона, возникающее при вращении и придающее ему твердость. Вращением доски вокруг картонного диска ее распилить нельзя.

Могут быть и более сложные явления, сопровождающие потери механической энергии. Примером может служить следующая демонстрация. На вал небольшой динамомашины надет деревянный шкив, на который намотана длинная прочная нить. Нить перекинута через блок, укрепленный около потолка аудитории. К ее свободному концу подвешен груз в несколько килограммов. Вращая шкив, поднимают груз к потолку аудитории. Цепь динамомашины может замыкаться через ключ на небольшую электрическую цепочку. Если отпустить шкив, не замыкая цепи лампочки, то динамомашина не вырабатывает электрического тока. В этом случае груз падает ускоренно – потенциальная энергия груза переходит в кинетическую энергию. Если снова поднять груз и замкнуть цепь лампочки, когда он пройдет приблизительно половину пути до пола, то лампочка загорается, а движение груза и вращение динамомашины заметно затормозятся. После этого груз медленно опускается до пола с постоянной скоростью, а лампочка горит постоянным накалом во все время падения груза. Потенциальная энергия груза непрерывно уменьшается. Однако она не пропадает бесследно: динамомашина непрерывно вырабатывает электрический ток, выделяющий тепло в нити лампочки.

3. Макроскопическая механика учитывает только кинетическую энергию макроскопического движения тел и их макроскопических частей, а также их потенциальную энергию. Но она полностью отвлекается от внутреннего атомистического строения вещества. При ударе, трении и аналогичных процессах кинетическая энергия видимого движения тел не пропадает. Она только переходит в кинетическую энергию невидимого беспорядочного движения атомов и молекул вещества, а также в потенциальную энергию их взаимодействия. Эта часть энергии тела получила название *внутренней энергии*. Беспорядочное движение атомов и молекул воспринимается нашими органами чувств в виде *тепла*. Таково физическое объяснение кажущейся потери механической энергии при ударе, трении и пр.

Представление о теплоте как о беспорядочном движении атомов и молекул окончательно утвердилось во второй половине XIX века и составило эпоху в науке. Примерно тогда же в физике утвердился и взгляд на закон сохранения энергии как на *общефизический закон*, не знающий никаких исключений. Согласно этому закону *энергия никогда не создается и не уничтожается, она может только переходить из одной формы в другую*. Однако необходимо расширить понятие энергии, введя *новые формы ее*: энергию электромагнитного поля, ядерную энергию и пр. При этом необходимо заметить, что дать окончательную классификацию различных видов энергии не представляется возможным. Это можно было бы сделать, если

Так как одно из этих уравнений квадратное, а другое – линейное, то система (28.1) должна иметь два решения относительно неизвестных v_1' и v_2'. Одно из этих решений можно указать сразу, а именно $v_1' = v_1$, $v_2' = v_2$. Но это решение не удовлетворяет условию задачи. Ему соответствует случай, когда скорости шаров не изменились, т.е. шары не претерпели столкновения. Существование такого решения неизбежно. Действительно, законы сохранения импульса и энергии можно написать для двух любых состояний системы, разделенных каким-то промежутком времени Δt. Но в самих законах сохранения еще не заложено условие, что столкновение произошло. Это условие должно быть указано дополнительно. Если столкновение не произошло, то скорости шаров не могли измениться, и мы получаем решение $v_1' = v_1$, $v_2' = v_2$, указанное выше. Чтобы получить решение, относящееся к столкновению, очевидно, надо потребовать, чтобы скорости шаров *изменились*, т.е. $v_1' \neq v_1$, $v_2' \neq v_2$. Заметив это, перепишем уравнения (28.1) в виде

$$m_1(v_1' - v_1) = m_2(v_2 - v_2'), \quad m_1(v_1'^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - v_2'^2).$$

Так как $v_1' - v_1$ и $v_2' - v_2$ не равны нулю, то уравнения можно поделить почленно. Это дает

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'.$$

В результате задача свелась к решению системы двух линейных уравнений. Решая их, найдем единственное решение

$$v_1' = -v_1 + 2\,\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad v_2' = -v_2 + 2\,\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \tag{28.2}$$

удовлетворяющее условию задачи.

4. Полезно привести другой способ решения той же задачи. Он сокращает вычисления и лучше выявляет структуру окончательных формул. Рассмотрим процесс удара сначала в *системе центра масс*, т.е. в такой системе отсчета, в которой центр масс неподвижен. Относительно неподвижной системы отсчета (ее называют *лабораторной*) центр масс движется со скоростью

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{28.3}$$

Скорости в системе центра масс будем обозначать прежними буквами, но с индексом 0. Полный импульс в системе центра масс равен нулю, и законы сохранения импульса и энергии в такой системе запишутся в виде

$$\begin{aligned} &m_1 v_{10}' + m_2 v_{20}' = m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = 0, \\ &½ m_1 v_{10}'^2 + ½ m_2 v_{20}'^2 = ½ m_1 v_{10}^2 + ½ m_2 v_{20}^2. \end{aligned} \tag{28.4}$$

Эта система уравнений имеет два решения, которые могут быть указаны без вычислений. Первое решение

$$v_{10}' = v_{10}, \quad v_{20}' = v_{20}$$

не удовлетворяет условиям задачи. Годится только второе решение, а именно

$$v_{10}' = -v_{10}, \quad v_{20}' = -v_{20}.$$

Мы видим, что в системе центра масс столкновение приводит просто к изменению знака каждой из скоростей.

Перейдем теперь к лабораторной системе отсчета. Очевидно, $v_{01} = v_1 - V$, $v_{01}' = v_1' - V$ и т.д. Поэтому

$$(v_1' - V) = -(v_1 - V), \quad (v_2' - V) = -(v_2 - V),$$

откуда

$$v_1' = -v_1 + 2V, \quad v_2' = -v_2 + 2V. \tag{28.5}$$

Подставив сюда значение для V из (28.3), придем к прежним формулам (28.2).

5. Допустим, что второй шар вначале был неподвижным ($v_2 = 0$). Тогда

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,v_1, \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\,v_1.$$

Если $m_1 > m_2$, то первый шар будет двигаться в первоначальном направлении. При $m_1 < m_2$ он отскочит в противоположном направлении. При $m_1 = m_2$ первый шар остановится, а второй пойдет вперед со скоростью первого. Вообще, при $m_1 = m_2$ из формул (28.2) получаем

$$v_1' = v_2, \quad v_2' = v_1,$$

т.е. *при столкновении двух одинаковых абсолютно упругих шаров они просто обмениваются скоростями*.

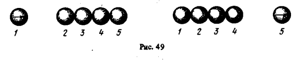


Рис. 49

Рассмотрим ряд соприкасающихся одинаковых абсолютно упругих шаров, центры которых расположены вдоль одной и той же прямой линии (рис. 49). В соответствующем демонстрационном опыте шары подвешиваются на нитях, а не располагаются на поверхности стола, чтобы не возникало вращение их из-за трения между шарами и поверхностью стола. Откло-

ЗАДАЧИ

1. На гладком горизонтальном столе лежит шар массой m_1, соединенный с пружиной жесткости k. Второй конец пружины закреплен (рис. 52). Происходит лобовое упругое соударение этого шара с другим шаром, масса которого m_2 меньше m_1, а скорость равна v. В какую сторону будет двигаться второй шар после удара? Определить амплитуду колебаний первого шара A после соударения.

Ответ. После соударения второй шар отскочит назад.

$$A = \frac{2m_2 v}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{m_1}{k}}.$$

2. Система состоит из двух шаров с массами m и M, соединенных между собой невесомой пружиной жесткости k (рис. 53). Третий шар массой m, движущийся

Рис. 52

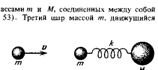


Рис. 53

вдоль оси пружины со скоростью v, претерпевает упругое столкновение с шаром m, как указано на рис. 53. Считая шары абсолютно жесткими, найти после столкновения: 1) кинетическую энергию K движения системы как целого; 2) внутреннюю энергию системы $E_{\text{вн}}$; 3) амплитуду колебаний одного шара относительно другого A. До удара система покоилась, а пружина не была деформирована. Какие шары могут рассматриваться как абсолютно жесткие?

Ответ. 1) $K = \dfrac{(mv)^2}{2(M + m)}$, 2) $E_{\text{вн}} = \dfrac{Mmv^2}{2(M + m)}$, 3) $A = v\sqrt{\dfrac{Mm}{k(M + m)}}$.

3. Ядра дейтерия D и трития T могут вступать в реакцию

$$\text{D} + \text{T} \to {}^4\text{He} + \text{n} + 17{,}6 \text{ МэВ},$$

в результате которой образуются нейтроны n и α-частицы, т.е. ядра гелия ^{4}He. При каждой реакции выделяется энергия 17,6 МэВ. Определить, какую энергию уносит электрон и какую – α-частица. Кинетические энергии, которыми обладали частицы до реакции, пренебрежимо малы.

Пояснение. Дейтерий – изотоп водорода с атомной массой 2, тритий – изотоп водорода с атомной массой 3, ^{4}He – обычный гелий с атомной массой 4.

Ответ. α-частица уносит 3,5 МэВ, нейтрон – 14,1 МэВ.

4. Ядра дейтерия D могут вступать друг с другом в реакцию, в результате которой образуется протон и ядра трития T. Каждый протон уносит кинетическую энергию 3 МэВ. Какую кинетическую энергию уносит ядро атома трития и каков общий энергетический выход реакции? Кинетические энергии, которыми обладали частицы до реакции, пренебрежимо малы.

Ответ. Ядро трития уносит энергию 1 МэВ; общий энергетический выход реакции 4 МэВ.

5. Ядра дейтерия могут вступать также в реакцию

$$\text{D} + \text{D} \to {}^3\text{He} + \text{n} + 3{,}25 \text{ МэВ}.$$

Какую энергию уносит нейтрон и какую – ядро гелия ^{3}He с атомной массой 3?

Кинетические энергии, которыми обладали частицы до реакции, пренебрежимо малы.

Ответ. Нейтрон уносит энергию 2,44 МэВ, ядро ^{3}He – 0,81 МэВ.

6. В реакции

$${}^3\text{He} + \text{D} \to {}^4\text{He} + \text{p}$$

получаются протоны с энергией 14,6 МэВ. Какую энергию уносит ядро гелия-4 (^{4}He) и какой общий энергетический выход реакции? Кинетические энергии, которыми обладали частицы до реакции пренебрежимо малы.

Ответ. Ядро ^{4}He уносит энергию 3,7 МэВ, общий энергетический выход реакции 18,3 МэВ.

7. Движущаяся частица претерпевает упругое столкновение с покоящейся частицей такой же массы. Доказать, что после столкновения, если оно не было лобовым, частицы разлетятся под прямым углом друг к другу. Как будут двигаться частицы после лобового столкновения? При столкновении вращения не возникает.

Решение. Пусть $\mathbf{v}$ – скорость первой частицы до столкновения, $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ – скорости частиц после столкновения. Законы сохранения импульса и энергии дают

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad v^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

Возводя первое соотношение в квадрат и вычитая из него второе, получим $(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2) = 0$. Если оба вектора $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ не равны нулю, что будет при нелобовом ударе, то угол между ними равен 90°. При лобовом столкновении $v_1 = 0$, $v_2 = v$, т.е. частицы просто обмениваются скоростями.

8. При бомбардировке гелия α-частицами с энергией 1 МэВ найдено, что налетающая частица отклонилась на 60° по отношению к первоначальному направлению полета. Считая удар упругим, определить энергию частицы и энергию ядра отдачи.

Ответ: 1/4 МэВ и 3/4 МэВ.

9. Определить долю энергии, теряемую частицей массой m_1 при упругом столкновении ее с неподвижной частицей массой m_2, если после столкновения частица продолжает двигаться в прежнем (когда $m_1 > m_2$) или прямо противоположном (когда $m_1 < m_2$) направлениях. Показать, что доля теряемой энергии не зависит от того, какая частица движется, а какая покоится. При каком соотношении масс m_1/m_2 потеря энергии максимальна? Используя полученные результаты, объяснить, почему в ядерных реакторах для замедления нейтронов используется рассеяние их на ядрах легких (дейтерий, углерод), а не тяжелых атомов.

Ответ. $\dfrac{\Delta E}{E} = 4\,\dfrac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$. Потеря энергии максимальна при $m_1 = m_2$.

10. Определить долю энергии α, теряемую протоном при упругом рассеянии под углом 180° на протоне, дейтроне, ядре гелия и ядре углерода.

Ответ. $\alpha = 4A/(1 + A)^2$, где A – атомная масса частицы, с которой сталкивается протон:

A	1	2	4	12
α	1	0,89	0,64	0.284

11. Каков максимальный угол ϑ рассеяния α-частицы и дейтрона при упругом рассеянии в водороде?

Решение. Пусть m_1 – масса рассеиваемой частицы (α-частицы или дейтрона), v – ее скорость до рассеяния; m_2 – масса рассеивающей частицы (атома водорода);

Допустим сначала, что энергия бомбардирующего протона равна пороговой $E_{\text{пор}}$. Тогда получающиеся в результате реакции ядро Be и нейтрон в системе центра масс должны находиться в состоянии покоя, а потому в лабораторной системе двигаться вперед с одинаковыми скоростями. При таком движении они уносят кинетическую энергию

$$E_0 = P_{\text{пор}}^2/[2(m_{\text{Be}} + m_{\text{n}})],$$

где $P_{\text{пор}}$ – импульс протона, соответствующий пороговой энергии

$$E_{\text{пор}} = P_{\text{пор}}^2/2m_{\text{p}}.$$

Разность этих двух энергий

$$E_{\text{пор}} - E_0 = \frac{m_{\text{Be}} + m_{\text{n}} - m_{\text{p}}}{m_{\text{Be}} + m_{\text{n}}}\,E_{\text{пор}} \tag{28.7}$$

затрачивается на ядерную реакцию.

Найдем теперь энергию бомбардирующего протона E_{p}, при которой получаются нейтроны в состоянии покоя, а ядра бериллия летят вперед. Если P_{p} – импульс протона до реакции, то

$$E_{\text{p}} = P_{\text{p}}^2/2m_{\text{p}},$$

а кинетическая энергия образовавшегося ядра бериллия $E_{\text{Be}} = P_{\text{p}}^2/2m_{\text{Be}}$. Разность этих энергий

$$E_{\text{p}} - E_{\text{Be}} = \frac{1}{2}P_{\text{p}}^2\left(\frac{1}{m_{\text{p}}} - \frac{1}{m_{\text{Be}}}\right) = \frac{m_{\text{Be}} - m_{\text{p}}}{m_{\text{Be}}}\,E_{\text{p}} \tag{28.8}$$

идет на ядерную реакцию, а потому равна величине (28.7). Приравнивая выражения (28.7) и (28.8), находим

$$E_{\text{p}} = \frac{m_{\text{Be}}(m_{\text{Be}} + m_{\text{n}} - m_{\text{p}})}{m_{\text{Be}}^2 - m_{\text{p}}^2}\,E_{\text{пор}},$$

или, пренебрегая различием масс протона и нейтрона,

$$E_{\text{p}} = \frac{m_{\text{Be}}^2}{m_{\text{Be}}^2 - m_{\text{p}}^2}\,E_{\text{пор}} = \frac{49}{48}\,E_{\text{пор}} = 1{,}92 \text{ МэВ}.$$

При больших энергиях появятся нейтроны, летящие назад.

§ 29. Силы и потенциальная энергия

1. *Взаимодействие тел можно описывать либо с помощью сил, либо с помощью потенциальной энергии как функции координат взаимодействующих частиц*. В макроскопической механике применимы оба способа. Первый способ обладает несколько большей общностью, так как он применим и к таким силам (например, силам трения), для которых нельзя ввести потенциальную энергию. Второй же способ применим только в случае консервативных сил. Но в квантовой механике, имеющей дело с явлениями

микромира, диссипативных сил нет, и в ней для описания взаимодействия частиц применяется исключительно второй способ. В уравнения движения квантовой механики силы не входят, а входит лишь потенциальная энергия взаимодействующих частиц. Разумеется, в этом параграфе вопрос рассматривается только в рамках макроскопической механики.

2. Зная действующие силы как функции координат материальных точек системы, можно вычислить ее потенциальную энергию. Эта задача решается *интегрированием*. Простейшие примеры на такое вычисление были приведены в § 25. Можно поставить и обратную задачу: вычислить действующие силы по заданной потенциальной энергии как функции координат взаимодействующих материальных точек. Эта задача решается с помощью более простой математической операции – *дифференцирования*. Рассмотрим сначала отдельную материальную точку, находящуюся в силовом поле каких-то неподвижных тел. Если силы консервативные, то можно ввести потенциальную энергию U, которой обладает материальная точка в рассматриваемом силовом поле. Величина U будет функцией радиуса-вектора $\mathbf{r}$ этой точки или ее координат x, y, z. Пусть точка претерпела произвольное бесконечно малое перемещение $d\mathbf{r}$. Если $\mathbf{F}$ – сила, действующая на нее, то работа этой силы при таком перемещении будет равна убыли потенциальной энергии:

$$\mathbf{F}\,d\mathbf{r} = -dU. \tag{29.1}$$

Это равенство справедливо, каково бы ни было перемещение $d\mathbf{r}$. Поэтому если функция $U(\mathbf{r})$ известна, то оно полностью определяет силу $\mathbf{F}$. В самом деле, чтобы найти вектор $\mathbf{F}$, достаточно определить его проекции F_x, F_y, F_z на координатные оси прямоугольной системы координат. В этих проекциях уравнение (29.1) запишется так:

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -dU. \tag{29.2}$$

Допустим, что смещение происходит вдоль какой-либо одной координатной оси, например оси X. Тогда

$$F_x\,dx = -(dU)_{y,z},$$

и, следовательно,

$$F_x = -\left(\frac{dU}{dx}\right)_{y,z}.$$

Индексы y, z означают, что при смещении, а следовательно, и при дифференцировании координаты y и z должны оставаться постоянными. Иными словами, $U(x, y, z)$ при дифференцировании должна рассматриваться как функция одного аргумента x; остальные два аргумента, y и z, являются *параметрами*, которые при дифференцировании по x должны оставаться постоянными. Величины, получающиеся в результате такого дифференциро-

Отсюда видно, что *градиент функции U есть вектор, направленный по нормали к поверхности уровня U* = const *в сторону возрастания U; его длина численно равна производной по нормали функции U к той же поверхности*. Преимущество такого определения по сравнению с определением (29.5) состоит в том, что оно *инвариантно*, т.е. содержит только величины и понятия, имеющие непосредственный геометрический смысл, и не содержит ничего такого, что вносится случайным выбором координатной системы.

Отметим еще одну простую, но важную формулу. Проведем через точку *1* (см. рис. 55) отрезок прямой *13* под углом α к нормали $\mathbf{n}$. Точку *3* возьмем на поверхности уровня $U + dU$. Длину этого отрезка обозначим ds. Так как точка *3* лежит на той же поверхности уровня, что и точка *2*, то приращения функции U на отрезках *12* и *13* будут одни и те же. Так как сами отрезки бесконечно малы, то участки поверхностей уровня, через которые они проходят, могут считаться плоскими, а потому $ds = \dfrac{dn}{\cos\alpha}$.

На этом основании

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dU}{dn}\cos\alpha,$$

или в иных обозначениях

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial n}\cos\alpha = \frac{\partial U}{\partial n}(\mathbf{n}\mathbf{s}),$$

где $\mathbf{s}$ – единичный вектор в направлении отрезка *13*. Величина $\dfrac{\partial U}{\partial s}$ называется производной функции U в том же направлении. Учтя определение градиента (29.7), получим

$$\frac{\partial U}{\partial s} = (\mathbf{s}\,\text{grad}\,U). \tag{29.8}$$

Формула эта справедлива независимо от конкретного смысла функции U. Если U является потенциальной энергией материальной точки, то с учетом (29.4) формула принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial s} = -(\mathbf{F}\mathbf{s}),$$

или

$$F_s = -\frac{\partial U}{\partial s}, \tag{29.9}$$

что, конечно, легко получить и прямо из (29.1).

4. Формулы (29.3) тривиальным образом обобщаются на случай произвольной системы материальных точек с одними только консервативными силами. В этом случае потенциальная энергия U является функцией координат всех взаимодействующих точек. Вместо (29.3) следует писать

$$F_{ix} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = -\frac{\partial U}{\partial z_i}. \tag{29.10}$$

Здесь x_i, y_i, z_i – координаты i-й материальной точки системы, а F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} – компоненты действующей на нее силы. Номер i может пробегать все возможные значения, так что формулы (29.10) справедливы для каждой точки системы.

5. Закон сохранения энергии в механике является следствием уравнения движения Ньютона. Можно ли, наоборот, вывести уравнение движения Ньютона из механического закона сохранения энергии? На этот вопрос следует ответить отрицательно. Уравнение, выражающее сохранение энергии, является *скалярным*, в то время как уравнение движения есть *векторное* и эквивалентно *трем* независимым *числовым уравнениям*. Ясно, что одного скалярного уравнения недостаточно для вывода из него трех независимых числовых уравнений. Но если движение одномерное, то при некоторых дополнительных предположениях из закона сохранения энергии можно вывести уравнение движения Ньютона. Допустим, что материальная точка движется вдоль какой-то фиксированной линии под действием одних только консервативных сил. По закону сохранения энергии $½mv^2 + U = \text{const}$. Потенциальная энергия U при таком движении может рассматриваться как функция только расстояния s, измеренного вдоль траектории. Дифференцируя последнее соотношение по времени, получим

$$m v\dot{v} + \frac{dU}{ds}\,\dot{s} = 0,$$

или, учитывая соотношения $v = \dot{s}$ и $F_s = -\dfrac{dU}{ds}$,

$$v(m\dot{v} - F_s) = 0. \tag{29.11}$$

Отсюда после сокращения на v получается уравнение движения Ньютона.

Необходимо, однако, отметить, что уравнение Ньютона в механике, обладает большей общностью, чем закон сохранения энергии. Во-первых, приведенный вывод справедлив только для консервативных сил. Во-вторых, при выводе в уравнении (29.11) производилось сокращение на v. Поэтому необходимо ввести *дополнительное предположение*, не содержащееся в самом законе сохранения энергии, что $v \neq 0$. Уравнение (29.11) имеет два решения, которые удовлетворяют условию сохранения энергии. Одно из них, а именно $v = 0$, было отброшено. Закон сохранения энергии для этого не дает оснований. Однако решение $v = 0$ не согласуется с уравнением Ньютона, если только сила F не обращается в нуль.

6. Используя понятие потенциальной энергии, можно выразить условие равновесия механической системы и его устойчивости. Рассмотрим сначала систему взаимодействующих материальных точек, на которую не наложены никакие связи. Пусть все действующие силы консервативны. Тогда их составляющие можно представить формулами (29.10). В состоянии равновесия все силы, а с ними и все первые производные потенциальной энергии U по координатам должны обращаться в нуль. Отсюда следует, что *для равновесия необходимо, чтобы потенциальная энергия была стационарна*. Стационарность означает, что при всяком выводе системы из состояния равновесия, когда координаты материальных точек получают бесконечно малые приращения $\delta x_1, \delta y_1, \ldots, \delta z_n$, функция U остается почти постоянной. Точнее, приращения функции U при таких бесконечно малых изменениях координат являются бесконечно малыми *более высокого порядка*, чем приращения самих координат. В частности, *система будет находиться в равновесии, если потенциальная энергия U экстремальна, т.е. минимальна или максимальна.*

Если потенциальная энергия минимальна, то равновесие будет устойчивым. Действительно, пусть U_0 – значение потенциальной энергии в состоянии равновесия. По условию теоремы можно найти малую окрестность вблизи состояния равновесия, в которой разность $U - U_0$ положительна. Выберем эту окрестность так, чтобы было $0 < U - U_0 < \epsilon$, где ϵ – некоторое положительное число, которое может быть взято сколь угодно малым. Выведем теперь систему из состояния равновесия, сообщив ей кинетическую энергию $K_0 < \epsilon$. Затем предоставим систему самой себе. Сообщение движение системы будет подчиняться закону сохранения энергии $K + U = K_0 + U_0$ или $U - U_0 = K_0 - K$. Отсюда видно, что $U - U_0 < \epsilon$, так как кинетическая энергия K не может быть отрицательной. Следовательно, система без внешних воздействий не может выйти за пределы области $0 < U - U_0 < \epsilon$ и будет совершать в ней финитное движение. Это означает, что равновесие системы при минимуме потенциальной энергии устойчиво, точнее, устойчиво *по отношению к бесконечно малым возмущениям*.

Изложенное остается справедливым и при наличии диссипативных сил типа жидкого трения, а также гироскопических сил. Действительно, в состоянии равновесия, когда все материальные точки покоятся, такие силы равны нулю. Поэтому необходимое условие равновесия, требующее стационарности потенциальной энергии U, остается в силе. Сохраняет силу и доказательство устойчивости равновесия при минимуме U. Только равенство, выражающее закон сохранения энергии, при наличии диссипативных

сил в доказательстве следует заменить неравенством $(K + U) - (K_0 + U_0) < 0$ или $U - U_0 < K_0 - K$. Это только усилит дальнейшие заключения. *Диссипативные силы делают равновесие еще более устойчивым.* Если систему вывести из состояния равновесия и затем предоставить самой себе, то диссипативные силы в конце концов снова вернут систему в состояние равновесия.

Признак устойчивости равновесия при минимуме U выявится особенно наглядно, если рассмотреть всего одну материальную точку, могущую совершать одномерное движение. В этом случае график функции U имеет вид потенциальной ямы (аналогичной той, которая представлена на рис. 45). В состоянии равновесия материальная точка "лежит на дне потенциальной ямы". Никакие силы на нее в этом положении не действуют. При смещении точки в сторону, как легко видеть, появляется сила, направленная к положению равновесия и стремящаяся вернуть точку в это положение. Если же точка находится в равновесии там, где потенциальная энергия максимальна (т.е. "лежит на вершине потенциальной горы", например в точке N на рис. 44), то при ее смещении в сторону появляется сила, направленная от положения равновесия. Такая сила еще дальше уводит точку от этого положения. Равновесие будет неустойчивым. *Равновесие всякой механической системы, вообще говоря, неустойчиво, если потенциальная энергия максимальна.*

Изложенные результаты можно распространить и на системы, свобода перемещения которых ограничена *наложенными связями*. Надо только потребовать, чтобы связи были *идеальными*, т.е. такими, которые не производят работы при любых возможных перемещениях системы. Примером может служить идеально гладкий шарик, надетый на идеально твердую и гладкую спицу, которая задает направление возможного перемещения шарика. Сила, действующая на шарик со стороны спицы, перпендикулярна к направлению возможного перемещения и работы не производит.

При наличии связей условия равновесия материальной точки принимают вид

$$-\frac{\partial U}{\partial x} + R_x = 0, \quad -\frac{\partial U}{\partial y} + R_y = 0, \quad -\frac{\partial U}{\partial z} + R_z = 0, \tag{29.12}$$

где R – *реакция связей*, т.е. сила, с которой связи действуют на рассматриваемую материальную точку. В целях краткости мы провели рассуждения для одной материальной точки. В случае системы изменится только число уравнений, но сами рассуждения останутся без изменений. Пусть δx, δy, δz – *возможные перемещения* материальной точки вдоль координатных осей. Умножая на них уравнения (29.12), складывая и принимая во внима-

совершается по тем же законам, что и вращение вокруг неподвижной оси (см. § 37).

4. Земля при вращении вокруг собственной оси ведет себя подобно скамье Жуковского. Всякое перемещение масс внутри Земли (выпадение осадков, вулканическая деятельность, горообразование и пр.) меняет момент инерции, а с ним и угловую скорость вращения Земли. Это является причиной нерегулярных колебаний продолжительности суток. Экспериментально обнаружены периодические колебания продолжительности суток с основным периодом в один год и с амплитудой около 0,001 с. Земля подвержена также регулярным внешним воздействиям, прежде всего силам приливного трения, связанным с гравитационным притяжением Луны и Солнца. Благодаря этому средние солнечные сутки увеличиваются примерно на $1{,}640 \cdot 10^{-3}$ с в столетие. Как уже говорилось в § 1, неравномерность вращения Земли можно наблюдать с помощью кварцевых, атомных или молекулярных часов. Ход таких часов управляется колебаниями кристаллической решетки кварца, а также внутриатомными и внутримолекулярными колебаниями при излучении спектральных линий. Указанные колебания обладают значительно большей стабильностью, чем вращение Земли вокруг собственной оси или вокруг Солнца. Это и является причиной, почему в настоящее время эталон времени – секунда – устанавливается именно с помощью таких колебательных процессов, а не с помощью вращения Земли вокруг своей оси или Солнца, как это делалось до недавнего времени (см. § 1).

5. Вернемся к опыту со скамьей Жуковского. При уменьшении момента инерции вращающегося тела его кинетическая энергия увеличивается (при условии, что момент внешних сил равен нулю). Это непосредственно видно из формулы (33.6), так как в рассматриваемом случае вращательный импульс системы $L = I\omega$ не изменяется. Изменение кинетической энергии системы может происходить только за счет работы каких-то сил. Такими силами в нашем примере являются внутренние силы, действующие в системе. Они не могут изменить момент импульса системы. Однако совершаемая ими работа, вообще говоря, отлична от нуля и идет на изменение кинетической энергии вращения системы. Демонстратор на скамье Жуковского должен развить определенную мускульную силу, чтобы удержать вращающиеся гири на их круговых траекториях. Сила, с которой он действует на гирю, есть центростремительная сила $F = m\omega^2 r$, где m – масса гири, а r – расстояние ее от оси вращения. Когда демонстратор приближает гирю к оси вращения, сила F совершает положительную работу. За счет этой работы и происходит увеличение кинетической энергии системы. При удалении гири работа силы F отрицательна, и кинетическая энергия уменьшается.

Подтвердим эти рассуждения простым расчетом. Чтобы максимально упростить вычисления, схематизируем опыт, заменив реальную систему идеализированной мо-

делью ее. Будем считать, что гири являются материальными точками, а масса рук демонстратора пренебрежимо мала. При такой схематизации момент инерции системы представится выражением $I = I_0 + 2mr^2$, где I_0 – момент инерции системы без гирь, а $2mr^2$ – момент инерции самих гирь (двойка потому, что гирь две). Будем предполагать, что приближение и удаление гирь к оси вращения совершается бесконечно медленно. Тогда в любой момент времени можно пренебречь кинетической энергией радиального движения. Вся работа внутренних сил пойдет на изменение кинетической энергии вращения системы. Вычислим работу A, совершаемую демонстратором, когда он тянет гири к оси вращения, перемещая их с расстояний r_1 до $r_2 < r_1$. Как было показано в § 24, при вычислении работы имеет значение только относительное движение взаимодействующих тел. В нашей задаче это есть движение гирь относительно демонстратора. Каждую гирю демонстратор тянет с силой $m\omega^2 r$. Элементарная работа, совершаемая им, положительна и равна $-2m\omega^2 r\,dr$ (в нашем случае $dr < 0$). Полная работа A определится интегралом

$$A = -\int_{r_1}^{r_2} 2m\omega^2 r\,dr = -2m \int_{r_1}^{r_2} \frac{(I\omega)^2}{I^2} r\,dr.$$

Так как момент импульса L во время движения остается постоянным, а $I = I_0 + 2mr^2$, то

$$A = -2mL^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{r\,dr}{(I_0 + 2mr^2)^2} = \frac{L^2}{2}\left\{\frac{1}{I_0 + 2mr_2^2} - \frac{1}{I_0 + 2mr_1^2}\right\},$$

или

$$A = \frac{L^2}{2I_2} - \frac{L^2}{2I_1} = K_2 - K_1.$$

Та же формула справедлива и при удалении гирь от оси вращения. Она показывает, что *кинетическая энергия вращения изменяется за счет работы мускульной силы демонстратора.*

6. Приведенное объяснение, однако, не отвечает на вопрос, какие силы вызывают изменение угловой скорости вращения системы. Если бы на гири действовала только центростремительная сила, то она, как сила центральная, не могла бы изменить вращательный импульс гири. Должны были сохраниться в отдельности вращательные импульсы гирь и скамьи Жуковского вместе с демонстратором. Гири и скамья Жуковского вращались бы с различными угловыми скоростями. На самом деле этого нет. При движении гирь по радиусу происходит выравнивание угловых скоростей. Отсюда можно сделать вывод, что во время такого движения помимо центростремительных сил *на гири действуют силы бокового давления со стороны рук демонстратора. Эти силы и изменяют угловую скорость вращения гирь. Гири, в свою очередь, оказывают боковое давление на руки демонстратора, в результате чего меняется угловая скорость вращения скамьи вместе с демонстратором.* Демонстратор на скамье Жуковского очень хорошо ощущает действие этих сил бокового давления при всяком, в особенности быстром, радиальном перемещении гирь. Дополнительные силы бокового давления перпендикулярны к оси вращения и к относитель-

параллелограмм $OA'B'C$. Оба параллелограмма имеют общее основание OC и общую высоту. Поэтому их площади равны, что и доказывает наше утверждение.

Моментом M *нескольких сил относительно точки* называется сумма моментов этих сил относительно той же точки. Если линии действия сил $F_1, F_2, \ldots$ пересекаются в одной точке A, то по доказанному при вычислении момента M этих сил точки приложения их можно перенести в точку A. Если r – радиус-вектор точки A, то, следовательно,

$$M = [rF_1] + [rF_2] + \ldots = [rF], \tag{30.2}$$

где $F = F_1 + F_2 + \ldots$ – геометрическая сумма сил $F_1, F_2, \ldots$, называемая их *равнодействующей*. Таким образом, в рассматриваемом случае *момент всех действующих сил относительно некоторой точки равен моменту их равнодействующей относительно той же точки*. Это справедливо и для параллельных сил, так как последние можно рассматривать как предельный случай пересекающихся сил (в бесконечно удаленной точке).

Доказанная теорема распространяется и на случай любой системы сил $F_1, F_2, \ldots$, линии действия которых лежат в одной плоскости. Действительно, при вычислении момента M силы F_1 и F_2 можно заменить их равнодействующей $F_{12} = F_1 + F_2$; силы F_{12} и F_3 можно заменить их равнодействующей $F_{123} = F_1 + F_2 + F_3$ и т.д. В результате задача сведется к вычислению момента двух сил, лежащих в одной плоскости, а линии действия таких сил пересекаются в одной точке. Следовательно, *если линии действия сил лежат в одной плоскости, то момент этих сил относительно точки равен моменту их равнодействующей относительно той же точки.*

Отметим частный случай двух равных параллельных сил F_1 и F_2, направленных в противоположные стороны. Такие силы образуют так называемую *пару сил*. В этом случае

$$M = [r_1F_1] + [r_2F_2] = [(r_1 - r_2)F_1] = [(r_2 - r_1)F_2],$$

т.е. *момент пары сил равен моменту одной из этих сил относительно точки приложения другой*. Момент пары сил, очевидно, не зависит от выбора точки, относительно которой он берется. В частности, если равные и противоположно направленные силы F_1 и F_2 действуют вдоль одной и той же прямой, то они коллинеарны с вектором $(r_2 - r_1)$, а потому момент M обращается в нуль.

Отметим еще, что *момент произвольной системы сил может быть сведен к сумме момента их равнодействующей и момента какой-то пары сил*. Этим результатом мы нигде не будем пользоваться. При желании читатель сам может доказать его без особого труда или обратиться к курсам теоретической механики. Более существенно всегда иметь в виду, что перенос

точки приложения силы вдоль линии ее действия, равно как и любая замена исходной системы сил на другую с тем же моментом и равнодействующей, приводит к эквивалентной системе сил только в том случае, когда рассматриваемое тело можно (приближенно) рассматривать как *идеально твердое*. Действительно, твердое тело обладает шестью степенями свободы. Для описания его движения достаточно двух векторных уравнений: уравнения движения центра масс (19.3) и выводимого ниже уравнения моментов (30.5). Во всех остальных случаях, например при рассмотрении движения деформированных тел, системы сил с одинаковыми равнодействующими и моментами не эквивалентны.

Аналогично определяется *момент импульса* p материальной точки относительно точки или *полюса* O. Так называется векторное произведение

$$L = [rp]. \tag{30.3}$$

Для системы материальных точек моментом импульса относительно некоторого начала O называется сумма моментов этих точек относительно того же начала.

2. Целесообразность введения моментов импульса и силы оправдывается тем, что они связаны между собой важным соотношением, которое называется *уравнением моментов*. Предположим сначала, что начало O неподвижно. В случае одной материальной точки дифференцированием из (30.3) получаем $\dot{L} = [\dot{r}p] + [r\dot{p}]$. Но при неподвижном начале O импульс частицы p коллинеарен с ее скоростью $v = \dot{r}$. Кроме того, $\dot{p} = F$. Значит, $[r\dot{p}] = [rF] = M$. В результате получается

$$\dot{L} = M. \tag{30.4}$$

Это и есть уравнение моментов для одной материальной точки. Оно справедливо как в ньютоновской, так и в релятивистской механике, так как при его выводе постоянство массы материальной точки не использовалось.

Распространим теперь уравнение (30.4) на систему материальных точек. Для этого напишем уравнение (30.4) для каждой точки, понимая под M момент всех действующих на нее сил, как внутренних, так и внешних. Затем сложим все эти уравнения. При таком сложении моменты внутренних сил исключатся. Действительно, внутренние силы входят в систему попарно: сила F_{ik}, с которой k-я точка действует на i-ю, равна силе F_{ki}, с которой i-я точка действует на k-ю. Эти силы направлены противоположно и действуют вдоль одной и той же прямой. Момент таких двух сил, а значит и момент всех внутренних сил равны нулю. В результате получается уравнение моментов для системы материальных точек:

$$\dot{L} = M_{\text{внеш}}, \tag{30.5}$$

т.е. *производная по времени от момента импульса системы материальных*

B, то после интегрирования получится $I_A\varphi_A + I_B\varphi_B = 0$. Угол поворота тела B относительно оболочки A определится разностью $\varphi = \varphi_B - \varphi_A = -(I_A/I_B + 1)\varphi_A$. Если $\varphi = 2\pi n$ (n – целое число), то тело B возвратится в исходное положение относительно оболочки A. При этом угол поворота оболочки φ_A, вообще говоря, не будет равен нулю. Различие в поведении лаборатории при поступательном перемещении и вращении связано со следующим обстоятельством. *При непрерывном поступательном перемещении тела B оно никогда не возвращается в исходное положение относительно тела A.* Различным значениям координаты x соответствуют и различные положения тела A. Напротив, *при непрерывном вращении тела B взаимное расположение тел B и A периодически восстанавливается*: значениям угла φ, отличающимся на $2\pi n$, соответствует одно и то же относительное расположение тел A и B. Падающая кошка, вращая хвостом и лапами, придает своему телу такое положение, чтобы встать на землю лапами. И это ей удается.

Эти явления можно имитировать на скамье Жуковского. Демонстратор, совершая конические вращения одной или обеими руками, всегда может повернуть скамью Жуковского на произвольный угол. Для усиления эффекта он может взять в руки массивный предмет с большим моментом инерции, например молот.

§ 35. Теорема Гюйгенса–Штейнера

Найдем связь между моментами инерции тела относительно двух различных параллельных осей. Предполагается, что эти оси перпендикулярны к плоскости рисунка и пересекают ее в точках O и A. Ради краткости

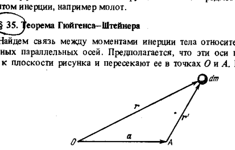


Рис. 63

будем называть самые оси осями также O и A. Разобьем мысленно тело на элементарные массы dm. Радиусы-векторы одной из них, проведенные от осей O и A параллельно плоскости рисунка, обозначим r и r' соответственно. (На рис. 63 изображен такой случай, когда элементарная масса dm лежит в плоскости рисунка). Тогда $r' = r - a$, где a означает радиус-вектор $\vec{OA}$. Следовательно, $r'^2 = r^2 + a^2 - 2(ar)$,

$$\int r'^2\,dm = \int r^2\,dm + a^2\int dm - 2\left(a\int r\,dm\right).$$

Интеграл слева есть момент инерции I_A тела относительно оси A, первый интеграл справа – момент инерции относительно оси O. Последний интеграл можно представить в виде $\int r\,dm = mR_C$, где R_C – радиус-вектор центра масс C тела относительно оси O (точнее, R_C есть слагающая радиуса-вектора центра масс, параллельная плоскости рисунка). Таким образом,

$$I_A = I_O + ma^2 - 2m(aR_C). \tag{35.1}$$

Допустим, что ось O проходит через центр масс C тела. Тогда $R_C = 0$, и предыдущая формула упрощается, принимая вид

$$I_A = I_C + ma^2. \tag{35.2}$$

Это важное геометрическое соотношение называется *теоремой Гюйгенса–Штейнера* (Якоб Штейнер (1796–1863) – швейцарский геометр). *Момент инерции тела относительно какой-либо оси равен моменту инерции его относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, сложенному с величиной ma^2, где a – расстояние между осями.*

§ 36. Вычисление моментов инерции

1. Момент инерции тела относительно какой-либо оси можно найти вычислением или измерить экспериментально*). Если вещество в теле распределено непрерывно, то вычисление момента инерции его сводится к вычислению интеграла

$$I = \int r^2\,dm, \tag{36.1}$$

в котором r – расстояние от элемента массы dm до оси вращения. Интегрирование должно производиться по всей массе тела. Аналитическое вычисление таких интегралов возможно только в простейших случаях тел правильной геометрической формы. Для тел неправильной формы такие интегралы могут быть найдены численно.

Вычисление моментов инерции во многих случаях можно упростить, используя соображения подобия и симметрии, теорему Гюйгенса–Штейнера, а также некоторые другие общие соотношения, о которых будет сказано ниже.

Рассмотрим два подобных и подобно расположенных относительно оси вращения тела A и B одной и той же плотности. Полные и элементарные массы этих тел относятся как кубы их линейных размеров l. Так как элементарные массы умножаются на квадраты расстояний их до оси вращения, то моменты инерции тел A и B будут относиться как пятые сте-

*) Об одном методе экспериментального определения моментов инерции говорится в § 42.

§ 31. Связь момента импульса материальной точки с секториальной скоростью. Теорема площадей

1. Если система состоит из одной материальной точки, то момент импульса имеет простой геометрический смысл. Пусть в момент времени t положение материальной точки определяется радиусом-вектором r (рис. 57). За время dt радиус-вектор получает приращение $v\,dt$, описывая площадь бесконечно малого треугольника, заштрихованного на рис. 57. Площадь этого треугольника можно изобразить вектором

$$dS = \tfrac{1}{2}[rv]\,dt,$$

длина которого представляет рассматриваемую площадь, а направление перпендикулярно к плоскости треугольника. Производная

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = \tfrac{1}{2}[rv] \tag{31.1}$$

определяет площадь, описываемую радиусом-вектором в единицу времени. Она называется *секториальной* скоростью. Так как по определению $L = m[rv]$, то

$$L = 2m\dot{S}. \tag{31.2}$$

При нерелятивистских движениях масса m постоянна, а потому момент импульса L пропорционален секториальной скорости $\dot{S}$.

2. Если сила, действующая на материальную точку, центральная и ее направление проходит через полюс O, то вектор L не будет меняться во

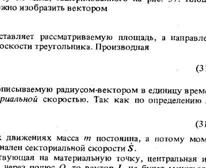


Рис. 57

времени. В случае нерелятивистских движений не будет меняться и секториальная скорость $\dot{S}$. В этом случае закон сохранения момента импульса переходит в *закон площадей*:

$$\dot{S} = \text{const}. \tag{31.3}$$

Из этого уравнения вытекают два следствия. Во-первых, плоскость, в которой лежат векторы r и v, перпендикулярна к направлению вектора $\dot{S}$. А так как последнее направление остается неизменным, то будет неизмен-

ной и указанная плоскость. Это значит, что *траектория материальной точки в поле центральных сил есть плоская кривая*. Во-вторых, из постоянства длины вектора $\dot{S}$ следует, что *в равные времена радиус-вектор материальной точки описывает одинаковые по размеру площади*. Это положение часто также называют *законом площадей*. Мы предпочитаем, однако, придавать закону площадей более широкий смысл, характеризуя площадь не только размером, но и ее ориентацией в пространстве.

Справедливо и обратное утверждение. *Если траектория материальной точки – плоская кривая и радиус-вектор, проведенный из неподвижного полюса O, в равные времена описывает одинаковые площади, то направление действующей силы все время проходит через полюс O.* Действительно, условие теоремы эквивалентно утверждению, что секториальная скорость $\dot{S}$ есть постоянный вектор. Будет постоянен и момент импульса L.

Поэтому на основании (30.4) $\dot{L} = M = [rF] = 0$. Отсюда следует, что вектор F коллинеарен радиусу-вектору r, а следовательно, его направление все время проходит через точку O. Последняя является, таким образом, *силовым центром*, из которого должны исходить силы притяжения или отталкивания, действующие на материальную точку.

3. Теорема площадей справедлива не только в случае неподвижного силового центра. Пусть две материальные точки взаимодействуют между собой центральными силами. Применяя понятие приведенной массы, можно свести задачу об их относительном движении к задаче о движении одной точки в силовом поле неподвижного силового центра (см. § 20). В качестве такого силового центра можно принять любую из рассматриваемых материальных точек, относительно которой движется другая точка. Тогда радиус-вектор, проведенный от первой точки ко второй, будет в относительном движении описывать в равные времена равные площади.

§ 32. Момент импульса и момент сил относительно неподвижной оси

1. Векторное уравнение (30.5) эквивалентно трем скалярным уравнениям

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^{\text{внеш}}, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y^{\text{внеш}}, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^{\text{внеш}}, \tag{32.1}$$

которые получаются из уравнения (30.5) путем проецирования на неподвижные оси декартовой системы координат. Индекс "внеш", указывающий на то, что при вычислении момента сил внутренние силы могут не приниматься во внимание, в дальнейшем обычно будет опускаться. Таким обра-

4. **Момент инерции тонкого однородного стержня относительно перпендикулярной оси.** Пусть ось проходит через конец стержня A (рис. 65). Для момента инерции можно написать $I_A = kml^2$, где l – длина стержня. Центр стержня C является его центром масс. По теореме Гюйгенса – Штейнера $I_A = I_C + m(l/2)^2$. Величину I_C можно представить как сумму моментов инерции двух стержней, CA и CB, длина каждого из которых равна $l/2$, масса $m/2$, а следовательно, момент инерции равен $k\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2$. Таким образом, $I_C = km(l/2)^2$. Подставляя эти выражения в предыдущую формулу, получим

$$kml^2 = km(l/2)^2 + m(l/2)^2,$$

откуда $k = 1/3$. В результате находим

$$I_A = \tfrac{1}{3}ml^2, \tag{36.5}$$

$$I_C = \tfrac{1}{12}ml^2. \tag{36.6}$$

Существенно, что стержень тонкий. Бесконечно тонкий стержень можно рассматривать как отрезок прямой линии. Он всегда геометрически подобен любой его части. Поэтому коэффициент k будет одним и тем же для всего стержня и для любой его части, например половины. Для стержня конечной толщины подобие между всем стержнем и его частью уже не имеет места. В этом случае числовой коэффициент k имеет разные значения для всего стержня и его половины. По этой причине к стержню конечной толщины формулы (36.5) и (36.6) не применимы. Но ими как приближенными формулами можно пользоваться, когда поперечные размеры стержня очень малы по сравнению с его длиной.

5. **Момент инерции однородной прямоугольной пластинки и прямоугольного параллелепипеда.** Пусть координатные оси X и Y проходят через центр пластинки C и параллельны ее сторонам (рис. 66). Представим себе, что все вещество пластинки смещено параллельно оси X и сконцентрировано на оси Y. При таком смещении все

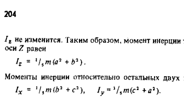


Рис. 65

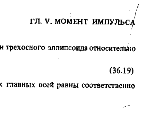


Рис. 66

расстояния материальных точек до оси X не изменятся. Вместе с ними не изменится и момент инерции I_x относительно оси X. Но в результате смещения пластинка перейдет в бесконечно тонкий стержень длины l, к которому применима формула (36.6). В результате получим

$$I_x = \frac{m}{12}b^2, \quad I_y = \frac{m}{12}a^2. \tag{36.7}$$

Момент инерции I_z пластинки относительно оси Z, перпендикулярной к ее плоскости,

найдется по формуле (36.4), откуда дает

$$I_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2). \tag{36.8}$$

Формула (36.8) годится также для вычисления моментов инерции прямоугольного параллелепипеда относительно его геометрических осей. В этом можно убедиться, если мысленно сжать параллелепипед вдоль одной из геометрических осей в прямоугольную пластинку – при таком сжатии момент инерции относительно этой оси не изменяется. Формула (36.8) дает момент инерции прямоугольного параллелепипеда относительно той его геометрической оси, которая проходит через центр основания с длинами сторон a и b. На рис. 66 эта ось перпендикулярна к плоскости рисунка.

6. **Момент инерции бесконечно тонкого круглого кольца (окружности).** Момент инерции относительно оси Z (рис. 67), очевидно, равен

$$I_z = mR^2, \tag{36.9}$$

где R – радиус кольца. Ввиду симметрии $I_x = I_y$. Поэтому из формулы (36.4) находим

$$I_x = I_y = \tfrac{1}{2}mR^2. \tag{36.10}$$

Формула (36.9), очевидно, дает также момент инерции полого однородного цилиндра с бесконечно тонкими стенками относительно его геометрической оси.

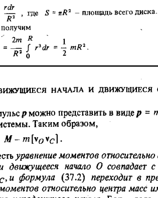


Рис. 67

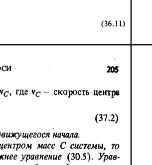


Рис. 68

7. **Момент инерции бесконечно тонкого диска и сплошного цилиндра.** Предполагается, что диск и цилиндр однородны, т.е. вещество распределено в них с постоянной плотностью. Пусть ось Z проходит через центр диска C перпендикулярно к его плоскости (рис. 68). Рассмотрим бесконечно тонкое кольцо с внутренним радиусом r и наружным радиусом $r + dr$. Площадь такого кольца $dS = 2\pi r\,dr$. Его момент инерции найдется по формуле (36.9), он равен $dI_z = r^2\,dm$. Момент инерции всего диска определяется интегралом $I_z = \int r^2\,dm$. Ввиду однородности диска $dm = m\frac{dS}{S} = 2m\frac{r\,dr}{R^2}$, где $S = \pi R^2$ – площадь всего диска. Вводя это выражение под знак интеграла, получим

$$I_z = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3\,dr = \frac{1}{2}mR^2. \tag{36.11}$$

где

$$I = \Sigma mr^2. \tag{33.2}$$

Величина I, равная сумме произведений масс материальных точек на квадраты расстояний их до оси вращения, называется *моментом инерции системы относительно этой оси*. Уравнение (33.1) показывает, что *при вращении системы момент ее импульса относительно оси вращения равен произведению момента инерции относительно той же оси на угловую скорость*.

Если на вращательное движение системы материальных точек накладывается еще *радиальное движение* их, а также *движение параллельно оси*, то наличие таких движений не отразится на справедливости формулы (33.1). Это следует из того, что *момент импульса материальной точки зависит от ее скорости v линейно*. Когда же скорость v направлена по радиусу или параллельно оси вращения, то момент импульса относительно этой оси равен нулю. Поэтому такие движения непосредственно не сказываются на виде связи между моментом импульса системы относительно оси вращения и ее угловой скоростью. Их влияние косвенное и состоит в том, что момент инерции I перестает быть постоянной величиной, а меняется во времени в соответствии с изменением мгновенной конфигурации системы. В этом случае уравнение (32.2) принимает вид

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = M, \tag{33.3}$$

где M – момент внешних сил относительно оси вращения. Это *основное уравнение динамики вращательного движения вокруг неподвижной оси*. Оно напоминает уравнение Ньютона для движения материальной точки. Роль массы играет момент инерции I, роль скорости – угловая скорость ω, роль силы – момент силы M, роль импульса – момент импульса L. Момент импульса L часто называют *вращательным импульсом системы*. Пользуясь этой терминологией, можно сказать, что *производная вращательного импульса системы по времени равна моменту внешних сил относительно оси вращения*.

Если момент внешних сил M относительно оси вращения равен нулю, то вращательный импульс $I\omega$ сохраняется.

2. Важным частным случаем является вращение неизменяемой системы материальных точек или твердого тела вокруг неподвижной оси. В этом случае момент инерции I при вращении остается постоянным, и уравнение (33.3) переходит в

$$I\frac{d\omega}{dt} = M. \tag{33.4}$$

Произведение момента инерции твердого тела относительно неподвижной

оси вращения на угловое ускорение $\frac{d\omega}{dt}$ равно моменту внешних сил относительно той же оси.

Для лучшего уяснения уравнения (33.4) приведем другой его вывод, основанный непосредственно на уравнении движения материальной точки. Последнее в случае вращения материальной точки вокруг неподвижной оси имеет вид $m\frac{dv}{dt} = F_\tau$, где F_τ – тангенциальная слагающая действующей силы. Так как $v = \omega r$, то, умножая предыдущее уравнение на r, получим $mr^2\frac{d\omega}{dt} = rF_\tau$. Напишем такие соотношения для каждой материальной точки, а затем сложим их. Тогда мы снова придем к уравнению (33.4). При этом все внутренние силы исключаются, так что под M в уравнении (33.4) следует понимать момент одних только внешних сил. Этот элементарный вывод обладает, однако, тем недостатком, что он не дает уравнение вращательного движения в общей форме (33.3), а только в частной форме (33.4).

3. Аналогия между движением материальной точки и вращением твердого тела относительно неподвижной оси может быть прослежена и дальше. Если материальная точка движется по окружности, то элементарная работа при повороте на угол $d\varphi$ равна $dA = F\,ds = Fr\,d\varphi = M\,d\varphi$. Такое же выражение получается и для твердого тела, так как его можно рассматривать как систему материальных точек, вращающихся с общей угловой скоростью ω. Внутренние силы исключаются, так как в случае твердого тела, как было показано в § 24, они работы не совершают. Итак, для твердого тела

$$dA = M\,d\varphi. \tag{33.5}$$

Роль силы играет момент внешних сил, роль линейного перемещения – угловое перемещение.

Кинетическая энергия вращающегося твердого тела представляется в виде

$$K = \frac{1}{2}\Sigma mv^2 = \frac{1}{2}\Sigma m(\omega r)^2 = \frac{\omega^2}{2}\Sigma mr^2,$$

или

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{L^2}{2I}. \tag{33.6}$$

Эти выражения напоминают соответствующие выражения для кинетической энергии материальной точки. Они получаются из последних формальной заменой $m \to I$, $v \to \omega$, $p \to L$.

I_z не изменится. Таким образом, момент инерции трехосного эллипсоида относительно оси Z равен

$$I_z = \tfrac{1}{5}m(a^2 + b^2). \tag{36.19}$$

Моменты инерции относительно остальных двух главных осей равны соответственно

$$I_x = \tfrac{1}{5}m(b^2 + c^2), \quad I_y = \tfrac{1}{5}m(c^2 + a^2).$$

§ 37. Уравнение моментов относительно движущегося начала и движущейся оси

1. Уравнение моментов (30.5) справедливо для того случая, когда начало O, относительно которого рассматриваются моменты L и M, *неподвижно*. Точно так же уравнение (32.2) относится к моментам относительно *неподвижной оси*. В некоторых случаях, однако, целесообразно рассматривать *движущиеся начала или движущиеся оси*. Исследуем, как меняется в этом случае уравнение моментов. Особый интерес представляет случай, когда уравнение моментов относительно движущегося начала сохраняет прежний вид (30.5).

2. Рассмотрим сначала одну материальную точку. Будем понимать под v и p ее скорость и импульс этой точки относительно неподвижной инерциальной системы отсчета S, а под r – ее радиус-вектор, проведенный из движущегося начала O. Движение начала O может быть как равномерным, так и неравномерным. Скорость этого движения обозначим через v_0. Момент импульса движущейся точки относительно начала O определим прежним выражением (30.3), т.е. $L = [rp]$. Как и раньше, дифференцированием этого выражения найдем

$$\dot{L} = [\dot{r}p] + [r\dot{p}].$$

Однако теперь $\dot{r}$ означает не скорость материальной точки v, а разность между этой скоростью и скоростью движущегося начала v_0. Таким образом,

$$\dot{L} = [(v - v_0)p] + [r\dot{p}],$$

или ввиду уравнения Ньютона $\dot{p} = F$ и коллинеарности векторов v и p $\dot{L} = [rF] - [v_0p]$, или, наконец,

$$\dot{L} = M - [v_0p]. \tag{37.1}$$

Чтобы обобщить это уравнение на случай системы материальных точек, напишем его для i-й материальной точки $\dot{L}_i = M_i - [v_0p_i]$, а затем просуммируем по всем i. Таким путем снова получим уравнение (37.1). Однако теперь p будет означать импульс всей системы материальных точек, а M – момент действующих на нее внешних сил.

Импульс p можно представить в виде $p = mv_C$, где v_C – скорость центра масс системы. Таким образом,

$$\dot{L} = M - m[v_0v_C]. \tag{37.2}$$

Это и есть *уравнение моментов относительно движущегося начала*.

Если движущееся начало O совпадает с центром масс C системы, то $v_0 = v_C$, и формула (37.2) переходит в прежнее уравнение (30.5). Уравнение моментов относительно центра масс имеет такой же вид, что и относительно неподвижного начала. Более того, в этом случае скорости v материальных точек не обязательно рассматривать относительно неподвижной системы отсчета S. Их можно брать относительно самого центра масс C, считая его как бы неподвижным. Если центр масс C движется прямолинейно и равномерно, то это утверждение непосредственно следует из принципа относительности. Но оно справедливо и в случае ускоренного движения центра масс. В самом деле, скорость каждой материальной точки может быть представлена в виде $v = v_C + v_{\text{отн}}$, где $v_{\text{отн}}$ – скорость точки относительно центра масс C. Поэтому

$$L = \Sigma[rmv] = \Sigma[rmv_C] + \Sigma[rmv_{\text{отн}}].$$

Предпоследняя сумма в этом равенстве равна нулю. Действительно, так как скорость v_C одна и та же для всех слагаемых суммы, то ее можно вынести из-под знака суммы, что дает

$$-[v_C\Sigma mr] = -[v_Cr_C]\Sigma m,$$

где r_C – радиус-вектор центра масс. Он равен нулю, так как начало координат O по условию помещено в центр масс. Итак,

$$L = \Sigma[rmv_{\text{отн}}],$$

что и доказывает наше утверждение.

Второй, более общий, случай, когда уравнение (37.2) переходит в простую форму (30.5), получается тогда, когда скорости v_O и v_C коллинеарны. В этом случае векторное произведение $[v_0v_C]$ обращается в нуль. Таким образом, *когда скорость движущегося начала O параллельна скорости центра масс C, уравнение моментов принимает простую форму (30.5).* В этом случае, однако, при вычислении момента импульса L надо брать скорости всех материальных точек *обязательно относительно инерциальной системы отсчета S, а не относительно центра масс*.

3. Аналогичные результаты справедливы и для поступательно движущихся осей, когда при движении оси она все время остается параллельной своему исходному направлению. Нет необходимости формулировать эти результаты отдельно, так как уравнение моментов относительно оси получается из соответствующего уравнения моментов относительно точки путем проецирования на эту ось.

ной скорости гирь. Работы они не производят. Их наличие не может сказаться на результате вычисления работы A, которое было произведено выше. *Силы бокового давления*, однако, *имеют моменты относительно оси вращения и производят перераспределение неизменного момента импульса системы между гирями – с одной стороны – и скамьей Жуковского с демонстратором – с другой.* В результате их действия все эти тела вращаются с общей угловой скоростью. Количественное рассмотрение вопроса будет произведено в § 64.

7. С помощью скамьи Жуковского можно демонстрировать и векторный характер момента импульса. Для этой цели применяется велосипедное колесо с утяжеленным ободом. Если колесо вращается вокруг собственной оси, то вследствие осевой симметрии полный импульс его $\boldsymbol{p}$ равен нулю. В этом случае, как было показано в § 30, момент импульса $\boldsymbol{L}$ относительно неподвижной точки не зависит от положения этой точки. С другой стороны, проекция вектора $\boldsymbol{L}$ на ось вращения колеса равна $I\Omega$, где I – момент инерции колеса, а Ω – его угловая скорость. Проекция вектора $\boldsymbol{L}$ на любое направление, перпендикулярное к оси колеса, равна нулю ввиду осевой симметрии. Отсюда следует, что вектор момента импульса $\boldsymbol{L}$ направлен вдоль оси колеса и по модулю равен $I\Omega$.

Демонстратор садится или становится на скамью Жуковского. Ему передают быстро вращающееся колесо с вертикально направленной осью (рис. 62). Полный момент импульса системы направлен вертикально и равен $I\Omega$. Примем вертикальную ось скамьи Жуковского за ось X. Так как момент внешних сил относительно оси X равен нулю, то проекция L_x полного момента импульса системы на эту ось должна сохраняться. В начале опыта весь вращательный импульс сосредоточен в колесе. Затем демонстратор наклоняет ось колеса на угол α. Проекция момента импуль-

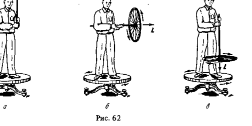


Рис. 62

са колеса на ось X становится равной $L_x^{\text{кол}} = I\Omega\cos\alpha$, т.е. она уменьшается на $I\Omega(1-\cos\alpha)$. Это уменьшение должно быть скомпенсировано возрастанием соответствующей проекции момента импульса скамьи и демонстратора на величину $L_x^{\text{скам}} = I\Omega(1-\cos\alpha)$. В результате скамья вместе с демонстратором приходит во вращение с угловой скоростью ω, определяемой из уравнения $I_0\omega = I\Omega(1-\cos\alpha)$, где I_0 – момент инерции скамьи. При $\alpha = 90°$ проекция $L_x^{\text{кол}}$ обращается в нуль – она целиком передается скамье и демонстратору. При $\alpha = 180°$ изменение вращательного импульса колеса становится максимальным $\Delta L_x^{\text{кол}} = 2L_x^{\text{кол}}$, скамья и демонстратор вращаются с максимальной скоростью $\omega_{\text{макс}} = \dfrac{2I}{I_0}\Omega$. Поворачивая ось, демонстратор придает ей исходное направление – тогда вращение скамьи прекращается. Однако скамья, вообще говоря, не возвращается в исходное положение, а оказывается повернутой вокруг вертикальной оси на некоторый угол.

Наклоняя ось колеса, демонстратор во время ее движения испытывает значительные силы бокового давления. Колесо как бы стремится вырваться из рук демонстратора. Эти силы направлены горизонтально и притом перпендикулярно как к оси колеса, так и к оси скамьи Жуковского. Их геометрическая сумма равна нулю, но они имеют момент относительно оси X. Последний приводит во вращение скамью Жуковского и демонстратора. Происхождение этих сил будет выяснено в гл. VII.

8. Закончим этот параграф следующим замечанием. Пусть имеется замкнутая система тел (назовем ее лабораторией), которая в начальный момент времени покоилась относительно какой-то неподвижной (инерциальной) системы отсчета S. Можно ли с помощью одних только внутренних движений сместить лабораторию в пространстве и притом так, чтобы все тела в ней вернулись в свои исходные положения? Говоря о смещении лаборатории, мы имеем в виду ее поступательное перемещение без вращения. Отрицательный ответ на этот вопрос дает теорема о движении центра масс. Не так обстоит дело в отношении поворота замкнутой системы тел. *С помощью одних только внутренних движений можно повернуть лабораторию в пространстве на любой угол и притом так, что исходное расположение тел в лаборатории восстановится.* Допустим, например, что лаборатория состоит из замкнутой оболочки A, в которой помещено всего одно тело B. Пусть тело B начинает вращаться вокруг некоторой оси с угловой скоростью $\dot\varphi_B$ (относительно неподвижной системы отсчета). Тогда оболочка A придет во вращение относительно той же оси с угловой скоростью $\dot\varphi_A$. По закону сохранения вращательного импульса $I_A\dot\varphi_A + I_B\dot\varphi_B = 0$, так как в начальный момент вращательный импульс был равен нулю (I_A и I_B – моменты инерции оболочки A и тела B соответственно). Если углы φ_A и φ_B условиться отсчитывать от начальных положений тел A и

ние, что реакции связей работы не производят, получим $\delta U \equiv \dfrac{\partial U}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial U}{\partial y}\delta y + \dfrac{\partial U}{\partial z}\delta z = 0$. Таково необходимое условие равновесия. Оно означает, что *в состоянии равновесия потенциальная энергия U стационарна.* Не изменятся и рассуждения относительно устойчивости равновесия, которые были приведены выше. Иллюстрацией может служить тяжелый шарик, помещенный на дно сферической чаши (устойчивое равновесие), или в вершину выпуклой поверхности (неустойчивое равновесие). *При наличии сил сухого трения стационарность потенциальной энергии U для равновесия не необходима.* Примером может служить равновесие бруска, лежащего на наклонной плоскости.

ГЛАВА V

МОМЕНТ ИМПУЛЬСА

§ 30. Момент силы и момент импульса относительно неподвижного начала

1. Важные законы механики связаны с понятиями *момента импульса* и *момента силы*. Следует различать и никоим образом не смешивать друг с другом моменты этих векторов *относительно точки* и *относительно оси*. Момент вектора относительно точки и относительно оси – разные понятия, хотя и связанные между собой. Момент вектора относительно точки сам есть *вектор*. Момент того же вектора относительно оси есть *проекция* на эту ось его момента относительно точки, лежащей на той же оси. Таким образом, момент вектора относительно оси уже не является вектором. Начнем с рассмотрения моментов относительно точки.

Пусть O – какая-либо точка, относительно которой рассматривается момент вектора силы или вектора импульса. Ее называют *началом* или *полюсом*. Обозначим буквой $\boldsymbol{r}$ радиус-вектор, проведенный из этой точки

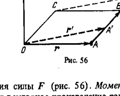


Рис. 56

к точке приложения силы $\boldsymbol{F}$ (рис. 56). *Моментом силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки O* называется векторное произведение радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ на силу $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{F}]. \tag{30.1}$$

Из этого определения непосредственно следует, что *момент $\boldsymbol{M}$ не изменится, если точку приложения силы $\boldsymbol{F}$ перенести в любую другую точку, расположенную на линии действия силы.* Действительно, если точку приложения силы перенести из A в A', то параллелограмм $OABC$ перейдет в

пени тех же размеров. Таким образом, $I \sim l^5$, или

$$I = kml^2. \tag{36.2}$$

Под l следует понимать какой-либо *характерный размер тела* или расстояние какой-либо характерной точки его от оси вращения. Коэффициент пропорциональности k зависит только от формы тела и его расположения относительно оси вращения.

2. Вычисление момента инерции тела относительно оси часто можно упростить, вычислив предварительно *момент инерции* его *относительно точки*. Сам по себе момент инерции тела относительно точки не играет никакой роли в динамике. Он является чисто вспомогательным понятием, служащим для упрощения вычислений. *Моментом инерции тела относительно точки O* называется сумма произведений масс материальных точек, из которых тело состоит, на квадраты их расстояний R до точки O: $\Theta = \sum mR^2$. В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу $\Theta = \int R^2 dm$. Само собой понятно, что момент Θ не следует смешивать с моментом инерции I относительно оси. В случае момента I массы dm умножаются на квадраты расстояний до этой оси, а в случае момента Θ – до неподвижной точки.

Рассмотрим сначала одну материальную точку с массой m и с координатами x, y, z относительно прямоугольной системы координат (рис. 64).

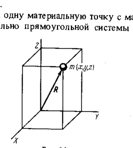


Рис. 64

Квадраты расстояний ее до координатных осей X, Y, Z равны соответственно y^2+z^2, z^2+x^2, x^2+y^2, а моменты инерции относительно тех же осей

$$I_x = m(y^2+z^2), \quad I_y = m(z^2+x^2), \quad I_z = m(x^2+y^2).$$

Сложив эти три равенства, получим

$$I_x + I_y + I_z = 2m(x^2+y^2+z^2).$$

Но $x^2+y^2+z^2 = R^2$, где R – расстояние точки m от начала координат O.

Поэтому

$$I_x + I_y + I_z = 2\Theta. \tag{36.3}$$

Это соотношение справедливо не только для одной материальной точки, но и для произвольного тела, так как тело можно рассматривать как совокупность материальных точек. Таким образом, *сумма моментов инерции тела относительно трех взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в одной точке O, равна удвоенному моменту инерции того же тела относительно этой точки.*

Если повернуть координатные оси X, Y, Z относительно тела, оставляя углы между ними прямыми, то моменты инерции I_x, I_y, I_z, вообще говоря, изменятся. Однако их сумма останется той же самой, так как она равна 2Θ, а величина Θ не зависит от ориентации координатных осей. Таким образом, *сумма моментов инерции I_x, I_y, I_z относительно любых трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через одну точку, зависит только от положения этой точки и не меняется с изменением ориентации осей.* Более глубокая геометрическая природа этого утверждения раскрывается в тензорной алгебре.

3. Другое следствие можно получить для плоского распределения масс. Допустим, что имеется пластинка произвольной формы с произвольным распределением вещества по ее объему. Если пластинка очень тонкая, то можно считать, что вещество распределено бесконечно тонким слоем по математической плоскости. Примем эту плоскость за координатную плоскость XY. Тогда z-координаты всех материальных точек будут равны нулю, а потому момент инерции Θ пластинки относительно начала координат O представится выражением $\Theta = \sum \Delta m(x^2+y^2)$, т.е. будет равен моменту инерции пластинки относительно оси Z. Таким образом, в случае плоского распределения масс $I_x + I_y + I_z = 2I_z$, т.е.

$$I_x + I_y = I_z. \tag{36.4}$$

Далее, очевидно, что величина Θ не меньше каждого из моментов инерции I_x, I_y, I_z, например, $\Theta \geqslant I_z$ (знак равенства имеет место только для плоского распределения масс). Вычитая неравенство $2I_z \leqslant 2\Theta$ из равенства (36.3), получим $I_x + I_y - I_z \geqslant 0$, или

$$I_x + I_y \geqslant I_z. \tag{36.4a}$$

Отсюда следует, что из отрезков, длины которых численно равны I_x, I_y, I_z, всегда можно составить треугольник. Для плоского распределения масс (в плоскости XY) формула (36.4a) переходит в формулу (36.4).

После этих предварительных замечаний можно перейти к вычислению моментов инерции конкретных тел.

точек относительно произвольного неподвижного начала равна геометрической сумме моментов всех внешних сил относительно того же начала.

3. *Если момент внешних сил относительно неподвижного начала O равен нулю, то момент импульса системы относительно того же начала остается постоянным во времени.* Это положение называется *законом сохранения момента импульса.* В частности, момент импульса сохраняется для изолированной системы материальных точек.

Важным является случай центральных сил, когда направления всех сил, действующих на материальные точки системы, проходят через неподвижный центр O. Момент таких сил относительно точки O равен нулю. Поэтому момент импульса системы относительно точки O должен сохраняться, т.е. оставаться постоянным во времени. И это справедливо даже тогда, когда силы зависят от скоростей.

Наряду с законами сохранения импульса и энергии закон сохранения момента импульса является одним из важнейших *фундаментальных законов физики.* В атомной физике понятие момента импульса должно быть обобщено. Это видно уже из того, что в классической механике момент импульса определен через координаты и скорости частиц, а эти величины, согласно принципу неопределенностей Гайзенберга, одновременно не могут иметь определенных значений в одном и том же состоянии. Кроме того, моментом импульса могут обладать не только частицы, но и силовые поля, например электромагнитное поле. Наконец, понятия и законы классической механики, как правило, применимы к процессам, происходящим внутри атомов, атомных ядер и элементарных частиц. При рассмотрении таких процессов не представляется возможным пользоваться классическими понятиями, к числу которых относится момент импульса как он был определен выше. Здесь можно только ограничиться замечанием, что в физике понятие момента импульса расширяется, но как это делается фактически, пока рассматривать преждевременно. Изучающий физику уже с самого начала должен иметь в виду, что физика обобщает механическое понятие момента импульса и постулирует закон его сохранения для всех физических процессов. Такой *расширенный закон сохранения момента импульса уже не является теоремой механики, а должен рассматриваться как самостоятельный общефизический принцип, являющийся обобщением опытных фактов.*

Можно было бы при изложении механики включить закон сохранения момента импульса для системы двух материальных точек в число основных постулатов, как это мы сделали с законом сохранения импульса для системы двух материальных точек. Тогда третий закон Ньютона следовало бы исключить из числа основных постулатов механики. В § 12 уже было показано, что этот закон только отчасти является следствием закона сохранения импульса. Однако если к закону сохранения импульса добавить еще закон сохранения его момента, то из этих двух законов

можно получить третий закон Ньютона как их следствие. Действительно, рассмотрим замкнутую систему из двух материальных точек, взаимодействующих между собой с силами $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Из закона сохранения импульса следует $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$, а из закона сохранения момента импульса

$$[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{p}_1] + [\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{p}_2] = \text{const}.$$

Дифференцируя по времени это уравнение, получим

$$[\boldsymbol{r}_1\dot{\boldsymbol{p}}_1] + [\boldsymbol{r}_2\dot{\boldsymbol{p}}_2] = 0,$$

или

$$[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{F}_1] + [\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{F}_2] = 0.$$

Так как $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$, то

$$[(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{F}_1] = 0.$$

Отсюда следует, что векторы $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{F}_1$ коллинеарны. Коллинеарны также векторы $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{F}_2$. Это значит, что силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ направлены вдоль прямой, соединяющей взаимодействующие материальные точки.

4. Момент сил и момент импульса зависят не только от модуля и направления этих векторов, но и от положения начала. Оба момента, вообще говоря, изменятся, если перейти к новому началу. Пусть O и O' – два неподвижных начала. Радиусы-векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}'$ одной и той же точки относительно этих начал связаны соотношением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{R},$$

где $\boldsymbol{R} = \overrightarrow{O'O}$ – радиус-вектор начала O относительно O'. Написав выражения для моментов импульсов каждой материальной точки системы и просуммировав эти выражения по всем материальным точкам, получим

$$\sum[\boldsymbol{r}m\boldsymbol{v}] = \sum[\boldsymbol{r}'m\boldsymbol{v}] - [\boldsymbol{R}\sum m\boldsymbol{v}],$$

или

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}' - [\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}], \tag{30.6}$$

где $\boldsymbol{p}$ – полный импульс системы, $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{L}'$ – моменты ее импульса относительно начала O и O' соответственно. Если импульс $\boldsymbol{p}$ равен нулю, то $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}'$. В этом случае вектор момента импульса системы не зависит от выбора начала.

Аналогично

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' - [\boldsymbol{R}\boldsymbol{F}], \tag{30.7}$$

где $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{M}'$ – моменты сил, действующих на систему, относительно начал O и O', а $\boldsymbol{F}$ – геометрическая сумма этих сил. Если результирующая сила $\boldsymbol{F}$ равна нулю, то $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}'$. Это имеет место, например, для *пары сил.* Вот почему можно говорить о моменте пары сил, не указывая начала, относительно которого этот момент берется.

Момент инерции диска относительно диаметра вдвое меньше, как это непосредственно следует из формулы (36.4) и из соображений симметрии:

$$I_x = I_y = {}^1/_4\, mR^2. \tag{36.12}$$

Формула (36.11) дает также момент инерции однородного сплошного цилиндра относительно его продольной геометрической оси.

8. Момент инерции однородного сплошного цилиндра относительно поперечной оси. Пусть ось вращения проходит через центр основания цилиндра A перпендикулярно к его продольной геометрической оси (рис. 69). Вырежем мысленно бесконечно

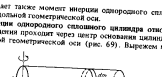


Рис. 69

короткий цилиндр с массой dm, находящийся от оси вращения на расстоянии x. Для его момента инерции по теореме Гюйгенса – Штейнера можно написать

$$dI_A = dm\cdot x^2 + {}^1/_4\, dm\cdot R^2,$$

а для момента инерции всего цилиндра

$$I_A = \int x^2 dm + {}^1/_4\, R^2\int dm.$$

Первое слагаемое в правой части формально совпадает с выражением для момента инерции однородного бесконечно тонкого стержня, а потому равно ${}^1/_3\, ml^2$. Второе слагаемое равно ${}^1/_4 mR^2$. Следовательно,

$$I_A = {}^1/_3\, ml^2 + {}^1/_4\, mR^2. \tag{36.13}$$

Момент инерции I_C относительно поперечной геометрической оси, проходящей через центр масс цилиндра, можно найти по формуле (36.13), если цилиндр разделить на два цилиндра с высотами $l/2$ и массами $m/2$. Получим

$$I_C = {}^1/_{12}\, ml^2 + {}^1/_4\, mR^2. \tag{36.14}$$

При $R \to 0$ формулы (36.13) и (36.14) переходят в формулы (36.5) и (36.6) для бесконечно тонкого стержня.

9. Момент инерции полого шара с бесконечно тонкими стенками. Сначала найдем момент инерции Θ относительно центра шара. Очевидно, он равен $\Theta = mR^2$. Затем применяем формулу (36.3), полагая в ней ввиду симметрии $I_x = I_y = I_z = I$. В результате находим момент инерции полого шара относительно его диаметра

$$I = {}^2/_3\, mR^2. \tag{36.15}$$

10. Момент инерции сплошного однородного шара. Сплошной шар можно рассматривать как совокупность бесконечно тонких сферических слоев с массами dm (см. рис. 68). Так как шар по предположению однороден, то $dm = m\dfrac{dV}{V}$, где $dV = 4\pi r^2 dr$ – объем сферического слоя, а $V = {}^4/_3\pi R^3$ – объем всего шара. По формуле (36.15)

момент инерции сферического слоя относительно диаметра равен $dI = {}^2/_3 dm\, r^2 = 2m\dfrac{r^4 dr}{R^3}$. Интегрируя, получаем момент инерции сплошного шара

$$I = {}^2/_5\, mR^2.$$

11. Момент инерции однородного эллипса. Предполагается, что масса равномерно распределена по площади эллипса. Эллипс можно получить из круга равномерным сжатием вдоль одного из его диаметров, например вдоль оси Y (рис. 70). При таком сжатии момент инерции относительно оси Y не меняется. Первоначально он был равен ${}^1/_4 ma^2$ (a – радиус круга, сжатием которого получен эллипс, он равен длине большой

Рис. 70

полуоси эллипса). Аналогичное рассуждение применимо и для оси X. В результате получим

$$I_x = {}^1/_4\, mb^2, \quad I_y = {}^1/_4\, ma^2. \tag{36.17}$$

Момент инерции относительно оси Z, перпендикулярной к плоскости эллипса, найдется по формуле (36.4):

$$I_z = {}^1/_4\, m(a^2+b^2). \tag{36.18}$$

Формула (36.18) дает также момент инерции однородного эллиптического цилиндра относительно его продольной геометрической оси.

12. Момент инерции трехосного эллипсоида. Предполагается, что масса равномерно распределена по объему эллипсоида. Координатные оси X, Y, Z направим вдоль главных осей эллипсоида. Длины полуосей эллипсоида обозначим a, b, c. Вычислим момент инерции его относительно главной оси Z. Эллипсоид может быть получен из шара равномерным сжатием или растяжением по трем взаимно перпендикулярным направлениям, например по направлениям осей X, Y, Z. Возьмем однородный шар радиуса a. Его момент инерции $I_{\text{ш}} = {}^2/_5 ma^2$. Произведем однородное сжатие в направлении оси Z, чтобы шар превратился в бесконечно тонкий круглый диск (конечно, с неравномерным распределением масс). Момент инерции I_z при этом остается неизменным, а моменты инерции I_x и I_y будут равны между собой ввиду симметрии. На основании соотношения (36.4) $I_x = I_y = {}^1/_2 I_z = {}^1/_5 ma^2$. Произведем затем равномерное сжатие круглого диска в направлении оси Y, чтобы его размеры в этом направлении сделались равными $2b$. При этом момент инерции I_y останется неизменным, а I_x сделается равным $I_x = {}^1/_5 mb^2$. Применяя снова соотношение (36.4), для момента инерции I_z полученного эллиптического диска найдем $I_z = I_x + I_y = {}^1/_5 m(a^2+b^2)$. Наконец, произведем равномерное растяжение эллиптического диска в направлении оси Z, чтобы он превратился в трехосный эллипсоид с полуосями a, b, c. При этом величина

зом, под M в уравнении моментов всегда будет подразумеваться момент внешних сил. Величины L_x и M_x называются соответственно *моментами импульса* и *сил относительно оси X*. Аналогично говорят о моментах импульса и сил относительно координатных осей Y и Z.

Вообще, *моментами L_x и M_x импульса и сил относительно произвольной оси X* называют проекции векторов $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{M}$ на эту ось в предположении, что начало O лежит на рассматриваемой оси.

Уравнение

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x \tag{32.2}$$

называется *уравнением моментов относительно неподвижной оси X.* Когда момент внешних сил относительно какой-либо неподвижной оси равен нулю, то момент импульса системы относительно той же оси остается постоянным. Это *закон сохранения момента импульса относительно неподвижной оси.*

2. Чтобы выяснить геометрический смысл момента M_x, представим векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{F}$ в виде

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\perp + \boldsymbol{r}_\parallel, \quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_\perp + \boldsymbol{F}_\parallel.$$

Здесь $\boldsymbol{r}_\perp$ – составляющая вектора $\boldsymbol{r}$, перпендикулярная к оси X, а $\boldsymbol{r}_\parallel$ – составляющая того же вектора, параллельная этой оси. Аналогичный смысл имеют векторы $\boldsymbol{F}_\perp$ и $\boldsymbol{F}_\parallel$. Используя эти разложения, можно написать

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{F}] = [\boldsymbol{r}_\perp\boldsymbol{F}_\perp] + \{[\boldsymbol{r}_\perp\boldsymbol{F}_\parallel] + [\boldsymbol{r}_\parallel\boldsymbol{F}_\perp]\} + [\boldsymbol{r}_\parallel\boldsymbol{F}_\parallel].$$

Последний член как векторное произведение параллельных векторов равен нулю. Сумма, заключенная в фигурные скобки, есть вектор, перпендикулярный к оси X. При проецировании на эту ось он даст нуль. Таким образом, составляющая вектора $\boldsymbol{M}$, параллельная оси X, равна

$$\boldsymbol{M}_\parallel = [\boldsymbol{r}_\perp\boldsymbol{F}_\perp].$$

Только эта составляющая и играет роль при нахождении момента M_x относительно оси X. Аналогично при нахождении проекции L_x достаточно проецировать только параллельную слагаемую вектора $\boldsymbol{L}$:

$$\boldsymbol{L}_\parallel = [\boldsymbol{r}_\perp\boldsymbol{p}_\perp].$$

Изложенное тривиальным образом обобщается на случай системы нескольких сил и системы нескольких материальных точек.

Назовем *плечом силы относительно некоторой оси* кратчайшее расстояние между осью и линией действия силы. Тогда *момент силы относительно той же оси* может быть определен как взятое с надлежащим знаком произведение перпендикулярной составляющей силы на соответствую-

щее плечо. Такое определение момента дается в элементарной физике. Так как точку приложения силы можно перемещать произвольно вдоль линии ее действия, то это определение согласуется с определением, которое было приведено выше. Это видно из рис. 58, где предполагается, что ось перпендикулярна к плоскости рисунка и проходит через полюс O.

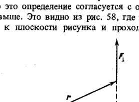


Рис. 58

Аналогично *момент импульса материальной точки относительно оси* можно определить как взятое с надлежащим знаком произведение слагающей импульса, перпендикулярной к этой оси, на соответствующее плечо.

§ 33. Уравнение момента импульса для вращения вокруг неподвижной оси. Момент инерции

1. Применим уравнение моментов относительно оси к рассмотрению *вращательного движения.* За неподвижную ось моментов удобно выбрать *ось вращения.* Если материальная точка вращается по окружности радиуса r (рис. 59), то момент ее импульса относительно оси вращения O равен

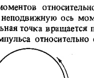


Рис. 59

$L = mvr$. Пусть ω – угловая скорость вращения, тогда $v = \omega r$, и, следовательно, $L = mr^2\omega$. Если вокруг оси O вращается система материальных точек с одной и той же угловой скоростью ω, то $L = \sum mr^2\omega$, где суммирование производится по всем материальным точкам системы. Величину ω как одинаковую для всех материальных точек можно вынести из-под знака суммы. Тогда получится

$$L = I\omega, \tag{33.1}$$

ЗАДАЧИ

1. Определить ускорения тел и натяжения нити на машине Атвуда, предполагая, что $m_2 > m_1$ (рис. 71). Момент инерции блока относительно геометрической оси равен I, радиус блока r. Массу нити считать пренебрежимо малой.

Р е ш е н и е. Ввиду того, что масса нити пренебрежимо мала, изменения натяжений T_1 и T_2 вдоль нити можно не учитывать. Уравнения движения грузов и блока будут

$$m_1 a = T_1 - m_1 g,$$
$$m_2 a = m_2 g - T_2,$$
$$I\frac{d\omega}{dt} = r(T_2 - T_1).$$

Если нет проскальзывания нити по блоку, то

$$r\frac{d\omega}{dt} = a.$$

Решая эти уравнения, получим

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \dfrac{I}{r^2}}\, g,$$

после чего находим T_1 и T_2. Если масса блока пренебрежимо мала, то $T_1 = T_2$.

2. К шкиву креста Обербека (рис. 72) прикреплена нить, к которой подвешен груз массой $M = 1$ кг. Груз опускается с высоты $h = 1$ м до нижнего положения, а затем начинает подниматься. В это время происходит "рывок", т.е. увеличение натяжения нити. Найти натяжение нити T при опускании или поднятии груза, а также оценить приближенно натяжение во время рывка $T_{\text{рыв}}$. Радиус шкива $r = 3$ см. На кресте укреплены четыре груза массой $m = 250$ г каждый на расстоянии $R = 30$ см от его оси. Моментом инерции самого креста и шкива пренебречь по сравнению с

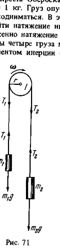


Рис. 71

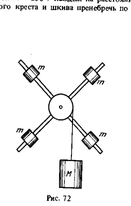


Рис. 72

моментом инерции грузов. Растяжение нити во время рывка не учитывать.

О т в е т. $T = \dfrac{Mg}{1 + \dfrac{Mr^2}{I}} = \dfrac{Mg}{1 + \dfrac{Mr^2}{4mR^2}} = 0{,}99\,T_0$,

где I – момент инерции системы, а T_0 – натяжение нити при неподвижном грузе. Среднее натяжение нити во время рывка $T_{\text{рыв}}$ можно оценить следующим образом. Надо вычислить максимальную скорость груза M в нижнем положении. Обозначим ее через v. За время полуоборота шкива $\Delta t = \pi r/v$ импульс груза M меняется на $2Mv$. Это изменение равно импульсу силы, действующей на груз M, за то же время, т.е. $(T_{\text{рыв}} - Mg)\Delta t$. Вычисления дают $T_{\text{рыв}} = Mg + \dfrac{Mhr}{\pi mR^2}T \approx 1{,}42\,T_0$.

3. Монета массой m и радиусом r, вращаясь в горизонтальной плоскости вокруг своей геометрической оси с угловой скоростью ω, вертикально падает на горизонтальный диск и прилипает к нему. В результате диск приходит во вращение вокруг своей оси. Возникающий при этом момент сил трения в оси диска постоянен и равен M_0. Через какое время вращение диска прекратится? Сколько оборотов N сделает диск до полной остановки? Момент инерции диска относительно его геометрической оси I_0. Расстояние между осями диска и монеты равно d.

О т в е т. $t = \dfrac{mr^2}{2M_0}\omega$; $N = \dfrac{M_0}{2I}t^2$, где $I = I_0 + m(d^2 + r^2/2)$.

4. Сплошной однородный короткий цилиндр радиусом r, вращающийся вокруг своей геометрической оси со скоростью n об/с, ставят в вертикальном положении на горизонтальную поверхность. Сколько оборотов N сделает цилиндр, прежде чем вращение его полностью прекратится? Коэффициент трения скольжения между основанием цилиндра и поверхностью, на которую он поставлен, не зависит от скорости вращения и равен k.

О т в е т. $N = \dfrac{3\pi r n^2}{4kg}$.

5. Тонкий стержень массой m и длиной L (рис. 73) подвешен за один конец и может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси. К той же оси подвешен на нити длиной l шарик с такой же массой m. Шарик отклоняется на некоторый угол и отпускается. При какой длине нити шарик после удара о стержень остановится? Удар абсолютно упругий.

О т в е т. $l = L/\sqrt{3}$.

6. Математический маятник массой m и стержень массой M (рис. 74) подвешены к одной и той же точке A, вокруг которой они могут свободно колебаться. Длина нити маятника равна длине стержня. Шарик маятника отклоняют в сторону, так что он приподнимается на высоту H относительно своего нижнего положения. Затем шарик отпускают, и он сталкивается неупруго с палкой. Как будут двигаться шарик и нижний конец палки после удара и на какие высоты они поднимутся?

Р е ш е н и е. Скорость шарика в нижнем положении до удара $v_0 = \sqrt{2gH}$. Так как удар неупругий, то непосредственно после удара шарик и нижний конец стержня в нижнем положении будут иметь одну и ту же скорость v. Она найдется из закона сохранения момента импульса относительно оси A:

$$mlv_0 = mlv + I\omega,$$

где $I = {}^1/_3\, Ml^2$ – момент инерции стержня относительно той же оси. Так как $v = l\omega$.

§ 34. Примеры на закон сохранения вращательного импульса

1. Поучительные демонстрационные опыты на закон сохранения момента импульса можно осуществить с помощью *скамьи Жуковского* (по имени русского ученого Н.Е. Жуковского (1847–1921)). Скамья Жуковского представляет собой угол, сидение которого имеет форму диска. Диск может свободно вращаться вокруг вертикальной оси на шариковых подшипниках. Во время опыта демонстратор садится или становится на скамью Жуковского и, отталкиваясь от пола, может приводить ее во вращение. После прекращения толчка единственными внешними силами, которые могут создавать момент относительно оси вращения, являются силы трения и сопротивления воздуха. Силы трения благодаря применению шариковых подшипников очень малы, а сопротивление воздуха может не приниматься во внимание, пока число оборотов скамьи невелико. Поэтому момент импульса системы, состоящей из скамьи и демонстратора, относительно оси вращения не может меняться во времени, если система представлена самой себе.

Демонстратор на скамье Жуковского, оттолкнувшись ногою от пола, приводит ее во вращение. Вместе со скамьей вращается и он сам. Во время вращения вращательный импульс системы будет оставаться постоянным. Какие бы внутренние движения ни совершались в системе – внутренние силы не могут изменить вращательный импульс. Если демонстратор разведет руки в стороны, то он увеличит момент инерции системы I, а потому угловая скорость вращения ω должна уменьшиться, чтобы остался

Рис. 60

неизменным вращательный импульс $I\omega$. Если демонстратор сводит руки к оси вращения, то момент инерции I уменьшается, а угловая скорость увеличивается. Для усиления эффекта демонстатор держит в руках тяжелые гири. При максимальном удалении гирь от оси вращения момент инерции увеличивается в несколько раз. В такое же число раз уменьшается угловая скорость вращения (рис. 60).

2. Когда балерина делает пируэт, она вращается на носке, вокруг вертикальной оси. Ноги и руки при этом максимально приближены к оси

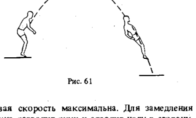


Рис. 61

вращения, и угловая скорость максимальна. Для замедления вращения и остановки балерина разводит руки и отводит ногу в сторону. Наоборот, для сообщения своему телу быстрого вращения балерина отталкивается от пола, получая вращательный импульс, когда момент инерции ее тела максимален. Затем она соответствующим движением уменьшает момент инерции в несколько раз и тем самым увеличивает угловую скорость вращения. Таким образом, она управляет скоростью вращения путем изменения момента инерции своего тела. В сущности, она делает то же самое, что и демонстратор на скамье Жуковского. Тем же самым приемом пользуется гимнаст, выполняющий упражнение на перекладине.

3. Прыгун, чтобы сделать *сальто*, отталкивается от трамплина и тем самым сообщает своему телу вращательный импульс. Этот импульс сохраняется при дальнейшем движении прыгуна в воздухе. Вначале тело прыгуна вытянуто и момент инерции велик. В некоторый момент прыгун свертывается клубком (рис. 61), уменьшая момент инерции в три и большее число раз. Угловая скорость возрастает во столько же раз. С этой угловой скоростью прыгун выполняет один, два и даже три полных оборота. В нужный момент прыгун снова выпрямляет тело и с малой угловой скоростью становится на землю или погружается в воду. Приведя это пример, мы несколько забежали вперед, так как здесь ось, вокруг которой вращается тело прыгуна, не неподвижна, а движется в пространстве. Однако если движущаяся ось вращения проходит через центр масс прыгуна, то вращение

то написанное уравнение дает

$$v = \frac{ml^2}{I + ml^2} v_0 = \frac{3m}{M+3m} v_0.$$

Теперь надо решить, будут ли шарик и стержень после столкновения двигаться вместе или при дальнейшем движении они разойдутся. С этой целью вычислим скорость шарика v_1 и нижнего конца стержня v_2 при поднятии на какую-то одну и ту

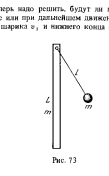


Рис. 73

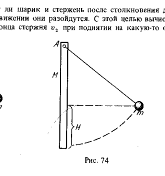


Рис. 74

же высоту h_1, если бы при этом они двигались независимо друг от друга. Эти скорости найдутся из уравнения сохранения энергии

$$v^2 - v_1^2 = 2gh_1, \quad \frac{1}{2}\frac{I}{l^2}(v^2 - v_2^2) = Mg\frac{h_1}{2}.$$

Преобразовав второе уравнение к виду

$$v^2 - v_2^2 = 3gh_1,$$

видим, что $v_1 > v_2$. Поэтому в любом положении шарик будет стремиться обогнать стержень. А так как шарик движется позади стержня, то он все время будет прижиматься к стержню. Отсюда следует, что после удара шарик и стержень будут подниматься как единое тело. Высоту поднятия h легко определить из закона сохранения энергии. Она равна

$$h = \frac{I + ml^2}{(M+2m)gl^2} v^2 = \frac{6m^2}{(M+2m)(M+3m)} H.$$

7. Решить предыдущую задачу в предположении, что до удара был отклонен стержень (нижний конец его был бы поднят на высоту H).

Ответ. После удара шарик поднимается на высоту

$$h_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{M}{M+3m}\right)^2 H,$$

нижний конец стержня – на высоту

$$h_2 = \left(\frac{M}{M+3m}\right)^2 H = \frac{2}{3} h_1.$$

8. Твердый стержень длиной l и массой M может вращаться вокруг горизонтальной оси A, проходящей через его конец (рис. 75). К той же оси A подвешен математический маятник такой же длины l и массы m. Первоначально стержень занимает горизонтальное положение, а затем отпускается. В нижнем положении происходит идеально упругий удар, в результате которого шарик и стержень деформируются, и часть кинетической энергии переходит в потенциальную энергию деформации. Затем деформация уменьшается, и запасенная потенциальная энергия вновь переходит в кинетическую. Найти значение потенциальной энергии деформации U в момент, когда она максимальна.

Ответ. $U = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{I + ml^2} Mgl = \frac{3}{2}\frac{Mm}{M+3m} gl$, где I – момент инерции стержня.

9. Вертикально висящая однородная доска длиной L = 1,5 м и массой M = 10 кг может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через ее верхний конец. В нижний конец доски ударяет пуля, летящая горизонтально с начальной скоростью V_0 = 600 м/с. Пуля пробивает доску и летит далее со скоростью V. Определить скорость V, если после выстрела доска стала колебаться с угловой амплитудой α = 0,1 рад. Масса пули m = 10 г.

Ответ. $V = V_0 - \frac{M}{m}\sqrt{\frac{2}{3}gL}\,\sin\frac{\alpha}{2}$ = 444 м/с.

10. В общей точке подвеса A (рис. 76) подвешены шарик на нити длиной l и однородный стержень длиной L, отклоненный в сторону на некоторый угол. При возвращении стержня в положение равновесия происходит упругий удар. При каком соотношении между массами стержня M и шарика m шарик и точка удара стержня будут двигаться после удара с равными скоростями в противоположных направлениях? При каком соотношении между массами M и m описанный процесс невозможен?

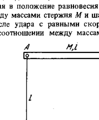


Рис. 75

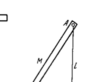


Рис. 76

Ответ. $ML^2 = ml^2$. Так как $L \geqslant l$, то для возможности процесса необходимо $M \leqslant m$. При $M > m$ процесс невозможен.

11. На горизонтальный диск, вращающийся вокруг геометрической оси с угловой скоростью ω_1, падает другой диск, вращающийся вокруг той же оси с угловой скоростью ω_2. Моменты инерции дисков относительно указанной оси равны соответственно I_1 и I_2. Оба диска при ударе сцепляются друг с другом (при помощи острых шипов на их поверхностях). На сколько изменится общая кинетическая энергия вращения системы после падения второго диска? Чем объясняется изменение энергии? Геометрические оси обоих дисков являются продолжением одна другой.

Приведенное простое вычисление вместе с тем показывает, что выражение (39.1) является решением дифференциального уравнения (40.6) при условии, что частота ω определяется формулой (40.3), а амплитуда A – формулой (40.7). Таким образом, при заданной полной энергии E постоянная A не произвольна. Имеется лишь одна произвольная постоянная, определяемая начальными условиями, а именно начальная фаза δ. Для ее определения достаточно знать, например, либо начальное смещение, либо начальную скорость. Наличие в решении только одной произвольной постоянной связано с тем, что уравнение (40.6) – *первого порядка* по времени, в отличие от (40.2), которое является уравнением *второго порядка.* Впрочем, на энергию в уравнении (40.6) можно смотреть как на параметр, который может принимать любые положительные значения, определяющиеся начальными условиями. Тогда уравнение (40.6) становится полностью эквивалентным уравнению (40.2).

4. Все изложенное здесь применимо к гармоническим колебаниям любых механических систем с *одной степенью свободы.* Мгновенное положение механической системы с одной степенью свободы может быть определено с помощью какой-либо *одной* величины q, называемой *обобщенной координатой,* например угла поворота, смещения вдоль некоторой линии и пр. Производная $\dot q$ обобщенной координаты по времени называется *обобщенной скоростью.* При рассмотрении колебаний механических систем с одной степенью свободы за исходное удобнее брать не уравнение движения Ньютона, а *уравнение энергии.* Его обычно легче составлять. Кроме того, оно в известном смысле проще уравнения Ньютона, так как является дифференциальным уравнением *первого,* а не второго порядка по времени. Допустим, что механическая система такова, что ее потенциальная и кинетическая энергии выражаются формулами вида

$$E_{\text{пот}} = \tfrac{1}{2}\alpha q^2, \qquad E_{\text{кин}} = \tfrac{1}{2}\beta \dot q^2, \tag{40.8}$$

где α и β – положительные постоянные (параметры системы). Тогда закон сохранения энергии приводит к уравнению

$$E = \tfrac{1}{2}\alpha q^2 + \tfrac{1}{2}\beta \dot q^2 = \text{const}. \tag{40.9}$$

Оно отличается от уравнения (40.6) только обозначениями, что при математическом рассмотрении не имеет значения. Из математической тождественности уравнений (40.6) и (40.9) следует, что и общие решения их одинаковы. Поэтому *если уравнение энергии приводится к виду* (40.9), *то*

$$q = q_0 \cos(\omega t + \delta), \tag{40.10}$$

т.е. обобщенная координата q совершает гармоническое колебание с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\alpha/\beta}. \tag{40.11}$$

5. В заключение покажем, как можно найти общее решение дифференциального уравнения (40.2). Из этого уравнения прежде всего вытекает уравнение энергии (40.6). Поэтому можно сразу исходить из уравнения (40.6). Используя соотношение (40.3), запишем это уравнение в виде

$$\omega^2 x^2 + \dot x^2 = \text{const}. \tag{40.12}$$

Левая часть этого соотношения существенно положительна, так как она равна сумме квадратов. Поэтому правую часть можно обозначить $\omega^2 A^2$, введя тем самым новую постоянную A. Тогда

$$\dot x^2 = \omega^2 (A^2 - x^2). \tag{40.13}$$

Так как $\dot x^2 \geqslant 0$, то $x \leqslant A$. Поэтому можно положить

$$x = A\cos\Theta, \tag{40.14}$$

где Θ – неизвестная функция времени t. Подставляя это выражение в уравнение (40.13), получим

$$\dot x^2 = \omega^2 A^2 (1 - \cos^2\Theta) = \omega^2 A^2 \sin^2\Theta,$$

откуда

$$\dot x = \pm\omega A \sin\Theta.$$

С другой стороны, дифференцируя выражение (40.14) по времени, находим

$$\dot x = -\dot\Theta A \sin\Theta.$$

Сравнение полученных выражений для x дает $\dot\Theta = \pm\omega$, откуда

$$\Theta = \pm\omega t + \delta,$$

где δ – произвольная постоянная. Таким образом,

$$x = A\cos(\pm\omega t + \delta).$$

Полученные выражения для x: $x_1 = A\cos(\omega t + \delta)$ и $x_2 = A\cos(-\omega t + \delta) = A\cos(\omega t - \delta)$ можно объединить в одно, так как δ – произвольная постоянная. Ее можно во втором выражении переобозначить, заменив на $-\delta$. Итак, в общем случае

$$x = A\cos(\omega t + \delta),$$

что совпадает с выражением (39.1).

§ 41. Физический маятник

1. *Физическим маятником* называется твердое тело, которое может качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Точка пересечения ее A с вертикальной плоскостью, проходящей через центр масс маятника, называется *точкой подвеса маятника* (рис. 85). Положение тела в каждый момент времени можно характеризовать углом отклонения его из положения равновесия φ. Угол φ играет роль обобщенной координаты q. Кинетическая энергия качающегося физического маятника определяется выражением

$$E_{\text{кин}} = \tfrac{1}{2} I \dot\varphi^2,$$

где I – момент инерции маятника относительно оси A. Потенциальная энергия равна $E_{\text{пот}} = mgh$, где h – высота поднятия центра масс C над его са-

ной оси O. Найти горизонтальную $F_{\text{гор}}$ и вертикальную $F_{\text{верт}}$ составляющие силы, с которыми ось O действует на стержень в горизонтальном положении 2.

Решение. Кинетическая энергия стержня в горизонтальном положении $\tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}mgl$. Центростремительное ускорение центра масс стержня в том же положении $\tfrac{1}{2}\omega^2 l$. Отсюда по теореме о движении центра масс

$$F_{\text{гор}} = m\omega^2 \frac{l}{2} = \frac{ml^2}{2I} mg = \frac{3}{2} mg.$$

Применив к вращению стержня в положении 2 уравнение (33.4), получим

$$I\frac{d\omega}{dt} = mg\frac{l}{2}.$$

Отсюда находим вертикальную составляющую ускорения центра масс в том же положении:

$$a = \frac{l}{2}\frac{d\omega}{dt} = \frac{mgl^2}{4I} = \frac{3}{4} g.$$

Далее,

$$ma = mg - F_{\text{верт}}.$$

В результате получится

$$F_{\text{верт}} = m(g - a) = \tfrac{1}{4} mg.$$

18. Абсолютно твердая однородная балка весом P лежит своими концами на двух абсолютно твердых опорах (рис. 80*а*). Одну из них выбивают. Найти начальную силу давления, действующую на оставшуюся опору (рис. 80*б*).

Ответ. $F = \tfrac{1}{4} P$.

Когда балка лежала на двух опорах, на каждую из опор действовала сила $\tfrac{1}{2}P$. При быстром удалении одной из опор сила, действующая на оставшуюся опору,

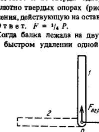


Рис. 79

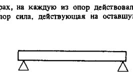


Рис. 80

скачкообразно уменьшается вдвое. Такое скачкообразное изменение связано с идеализацией – балка и опора считаются абсолютно твердыми. Реальные балки и опоры деформируются. При учете этого обстоятельства нагрузка на опору F будет меняться непрерывно.

19. Гимнаст на перекладине выполняет большой оборот из стойки на руках, т.е. вращается, не сгибаясь, вокруг перекладины под действием собственного веса. Оценить приближенно наибольшую нагрузку F на его руки, пренебрегая трением ладоней о перекладину.

Ответ. $F = \left(1 + \frac{4a^2 m}{I}\right) mg$, где m – масса, I – момент инерции человека относительно перекладины, a – расстояние между осью вращения и центром масс человека. Если при оценке момента инерции моделировать человека однородным стержнем, вращающимся вокруг одного из его концов, то получится $F = 4mg$.

20. Человек на аттракционе "гигантские шаги" движется по замкнутой траектории таким образом, что достигаемая им высота относительно положения равновесия меняется в пределах от $h_{\text{мин}}$ до $h_{\text{макс}}$. Определить максимальную и минимальную скорости человека при таком движении, если длина веревки, на которой он удерживается, равна l.

Решение. На основании закона сохранения энергии

$$v^2 + 2gh = \text{const}. \tag{37.3}$$

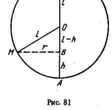


Рис. 81

Момент силы тяжести относительно точки подвеса не имеет вертикальной составляющей. Момент силы натяжения веревки равен нулю. Поэтому при движении человека вертикальная составляющая его момента импульса остается неизменной. В положениях, где высота h максимальна или минимальна, скорость человека v горизонтальна, а момент импульса равен mvr, где r – расстояние до вертикальной оси, вокруг которой вращается человек. Значит, в этих положениях величина vr одна и та же. В момент, когда высота h максимальна или минимальна, опишем в вертикальной плоскости окружность с центром в точке подвеса O, проходящую через точку нахождения человека M (рис. 81). По известной геометрической теореме $r^2 = AB \cdot BC$, или $r^2 = (2l - h)h$. Поэтому в положениях, где h максимальна и минимальна,

$$(2l - h)hv^2 = \text{const}. \tag{37.4}$$

Запишем соотношения (37.3) и (37.4) для этих положений, имея в виду, что максимуму h соответствует минимум v, и наоборот. Получим

$$v^2_{\text{макс}} + 2gh_{\text{мин}} = v^2_{\text{мин}} + 2gh_{\text{макс}},$$

$$(2l - h_{\text{мин}})h_{\text{мин}} v^2_{\text{макс}} = (2l - h_{\text{макс}})h_{\text{макс}} v^2_{\text{мин}}.$$

Решая эти уравнения, получим

$$v^2_{\text{макс}} = \frac{2gh_{\text{макс}}(2l - h_{\text{макс}})}{2l - (h_{\text{макс}} + h_{\text{мин}})}, \tag{37.5}$$

$$v^2_{\text{мин}} = \frac{2gh_{\text{мин}}(2l - h_{\text{мин}})}{2l - (h_{\text{макс}} + h_{\text{мин}})}. \tag{37.6}$$

При этом учтено, что в реальных условиях $h < l$, так что величина (37.5) действительно максимальна, а (37.6) – действительно минимальна. Если $h_{\text{макс}}$ и $h_{\text{мин}}$ пренебрежимо малы по сравнению с l, то

$$v^2_{\text{макс}} = 2gh_{\text{макс}}, \quad v^2_{\text{мин}} = 2gh_{\text{мин}}. \tag{37.7}$$

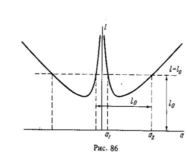


Рис. 86

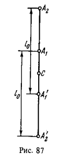


Рис. 87

Это значит, что его период колебаний снова становится бесконечно большим. Поэтому по мере приближения точки A к C убывание периода должно смениться возрастанием. Положению точки подвеса, где это происходит, соответствует минимальный период колебаний. Тогда точка подвеса переходит через точку C на другую сторону прямой AA', период колебаний, перейдя через бесконечность, начинает уменьшаться. При этом двум положениям точки подвеса, находящимся по разные стороны от C на одинаковых расстояниях, соответствуют равные периоды колебаний.

Вместо периода колебаний можно пользоваться приведенной длиной маятника l, однозначно определяющей его период колебаний. При удалении точки подвеса в бесконечность или при приближении ее к центру масс C приведенная длина l стремится к бесконечности и достигает минимума в каком-то промежуточном положении. Графически это представлено кривой на рис. 86. На оси абсцисс отложена величина a, на оси ординат – приведенная длина l маятника. Кривая состоит из двух ветвей, симметрично расположенных относительно оси ординат. Одна ветвь соответствует случаю, когда точка подвеса расположена по одну, а вторая – по другую сторону от центра масс C. Аналитически кривая изображается уравнением (41.5), которое можно переписать в виде

$$a^2 - la + I_C/m = 0. \tag{41.6}$$

Фиксированному значению приведенной длины l_0 соответствует на рис. 86 горизонтальная прямая $l = l_0$. Точки пересечения ее с кривой определяют положение точек подвеса физического маятника, при которых его приведенная длина равна заданному значению l_0. Вообще говоря, таких точек пересечения четыре. Две из них расположены по одну, две остальные – по другую сторону от центра масс C. Их положение легко найти из квадратного уравнения

$$a^2 - l_0 a + I_C/m = 0. \tag{41.7}$$

Если $l_0 > 2\sqrt{I_C/m}$, это уравнение имеет два вещественных положительных корня a_1 и a_2, причем

$$a_1 + a_2 = l_0. \tag{41.8}$$

В этом случае по одну и ту же сторону от центра масс C имеются две точки подвеса A_1 и A_2 (рис. 87), которым соответствует одна и та же приведенная длина l_0. По другую

сторону от центра масс C лежит вторая пара симметрично расположенных точек подвеса A_1' и A_2', характеризующаяся той же приведенной длиной l_0. Если $l_0 = 2\sqrt{I_C/m}$, корни уравнения (41.7) совпадают, т.е. обе точки подвеса по каждую сторону от центра масс сливаются в одну. Если $l_0 < 2\sqrt{I_C/m}$, корни уравнения (41.7) мнимые. Не существует точек подвеса, для которых приведенная длина была бы меньше $2\sqrt{I_C/m}$.

Теорема Гюйгенса теперь становится очевидной. Действительно, из соотношения (41.8) следует, что расстояние между точками A_1 и A_2', а также между точками A_1' и A_2 равно приведенной длине маятника l. Если одну из точек каждой пары принять за точку подвеса, то вторая будет центром качания. Но это и есть теорема Гюйгенса. Наше рассмотрение показывает также, *что точка подвеса и центр качания находятся по разные стороны от центра масс и расположены асимметрично относительно него. Исключение составляет только случай, когда $l_0 = 2\sqrt{I_C/m}$. Тогда точки A_1 и A_2 сливаются в одну точку. Сливаются также и точки A_1' и A_2'. В этом исключительном случае точка подвеса и центр качания расположены симметрично относительно центра масс.*

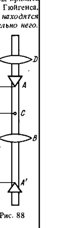


Рис. 88

4. Теорема Гюйгенса используется в *оборотном маятнике* для точных измерений ускорения свободного падения. Существуют разнообразные конструкции оборотного маятника. На рис. 88 схематически изображена одна из них. Маятник состоит из стального стержня, длина которого обычно несколько больше метра. На нем жестко закреплены опорные стальные призмы A и A' и стальная чечевица B, находящаяся между ними. Другая стальная чечевица D находится на одном из концов стержня (не между призмами), она может перемещаться по стержню и закрепляться в нужном положении. Перемещением этой чечевицы достигают совпадения периодов колебаний маятника, когда точками подвеса являются ребра опорных призм A и A'. Эти ребра закреплены *асимметрично* относительно центра масс C. Поэтому при совпадении периодов колебаний расстояние между ними дает приведенную длину физического маятника l. Измерив период колебаний T, можно вычислить g по формуле (41.3).

§ 42. Бифилярный и трифилярный подвесы

1. Найдем период малых колебаний *бифилярного подвеса.* Так называется устройство, состоящее из двух нитей AB и CD (рис. 89) одинаковой длины, на которых подвешено некоторое тело BD. Если тело повернуть вокруг вертикальной оси OO', то оно начнет совершать крутильные колебания вокруг этой оси. Бифилярный подвес есть система с одной степенью свободы. В качестве координаты, определяющей ее мгновенное положение, удобно взять угол поворота φ тела BD вокруг оси OO', отсчитывая этот угол от положения равновесия.

нике нужны какие-то дополнительные исходные положения механического характера. Однако число этих исходных положений можно уменьшить, если использовать свойства симметрии пространства и времени. Так, в этом случае при выводе законов сохранения импульса и момента импульса не потребуется закон равенства действия и противодействия.

В аналитической механике основные законы обычно выражают через *функцию Лагранжа* (по имени французского математика и механика Жозефа Лагранжа (1736–1813)), и симметрия, о которой идет речь, означает пространственно-временную симметрию самой функции Лагранжа. В общем курсе физики мы не можем идти по этому пути. В основу изложения мы положим *второй закон Ньютона.* Тогда утверждение, приведенное в начале этого параграфа, надо понимать в том смысле, что перечисленные в нем законы сохранения *можно получить из второго закона Ньютона, если к нему присоединить свойства симметрии пространства и времени.* Впрочем, при выводе закона сохранения энергии надо ввести и некоторые более специальные предположения относительно характера действующих сил.

2. Под симметрией пространства и времени понимают *однородность времени, однородность и изотропию пространства.* Однородность времени означает равноправие всех моментов времени. Однородность пространства означает, что в пространстве нет выделенных положений, все точки пространства равноправны. Аналогично изотропия пространства характеризуется отсутствием в нем выделенных направлений, все направления в пространстве эквивалентны.

Более полно:

Однородность времени означает, что если в два любые момента времени все тела замкнутой системы поставить в совершенно одинаковые условия, то начиная с этих моментов все явления в ней будут протекать совершенно одинаково.

Однородность пространства означает, что если замкнутую систему тел перенести из одного места пространства в другое, поставив при этом все тела в ней в те же условия, в каких они находились в прежнем положении, то это не отразится на ходе всех последующих явлений. В том же смысле надо понимать и изотропию пространства, только вместо переноса замкнутой системы надо говорить о ее *повороте* в пространстве на любой угол.

Оговорка относительно замкнутости системы существенна. Положения тела у подножья горы и на ее вершине отнюдь не эквивалентны. На Земле направления вверх и вниз объективно характеризуются разными свойствами: тела на Земле из состояния покоя самопроизвольно всегда падают вниз, но никогда не поднимаются вверх. Одно и то же явление протекает во времени по-разному, если его начать воспроизводить в различные моменты времени, так как при переходе от одного момента времени к другому может измениться обстановка, в которой явление про-

исходит. Но все эти примеры относятся к незамкнутым системам. На поведении замкнутых систем изменения окружающей обстановки не сказываются.

Здесь необходимо сделать такое же замечание, что и в § 15 в связи с принципом относительности Галилея. Нельзя понимать под замкнутой системой тел всю Вселенную. Если поступить так, то перечисленные свойства симметрии пространства и времени стали бы самоочевидными. Но они стали бы и бессодержательными. Ибо говорить о переносе или повороте системы тел можно только по отношению к каким-то другим телам. Речь идет не о всей Вселенной в целом, а о таких частях ее, которые можно рассматривать как (приближенно) *замкнутые системы.* Отсюда ясно, что свойства симметрии пространства и времени, о которых мы говорили, отнюдь не самоочевидны. На них надо смотреть как на *фундаментальные обобщения опытных фактов.*

3. После этих разъяснений обратимся к выводу закона сохранения энергии в механике. Из динамики мы заимствуем следствие второго закона Ньютона, выражающееся формулой

$$A_{12} = K_2 - K_1, \tag{38.1}$$

$F = -grad\,W_n(x, y, z)$

т.е. работа сил над механической системой равна приращению ее кинетической энергии K (см. § 22). Следующую часть наших рассуждений проведем применительно к одной материальной точке. В случае системы материальных точек все будет обстоять так же, изменится только число аргументов, от которых зависит потенциальная функция U, вводимая ниже. Предположим, что проекции силы F_x, F_y, F_z, действующие на материальную точку, могут быть получены дифференцированием потенциальной функции U:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Однако сама потенциальная функция U может зависеть явно не только от координат x, y, z рассматриваемой материальной точки, но и от времени t: $U = U(x, y, z, t)$. Например, это будет так, когда точка находится в силовом поле других тел, которое меняется во времени. Работа, производимая действующими силами над материальной точкой при перемещении ее вдоль некоторой кривой из положения *1* в положение *2*, представляется интегралом

$$A_{12} = -\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right),$$

взятым вдоль той же кривой. Прибавим и вычтем под знаком интеграла

с осью проволоки (рис. 91). При повороте тела на угол φ проволока закручивается, и возникает момент сил M, стремящийся вернуть тело в положение равновесия. Опыт показывает, что момент M в довольно широких пределах пропорционален углу φ: $M = -f\varphi$, где f – постоянная для данной проволоки величина, называемая ее *модулем кручения.* Поэтому

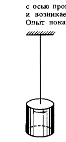


Рис. 91

$$I\ddot\varphi = -f\varphi.$$

Это уравнение математически тождественно уравнению (40.1). Значит, тело будет совершать гармонические крутильные колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{I/f}. \tag{42.2}$$

Сняв первое тело, подвесим на той же проволоке другое тело с моментом инерции I'. Тогда период колебаний будет

$$T' = 2\pi\sqrt{I'/f}.$$

Исключая неизвестный модуль кручения f, найдем

$$I/I' = (T/T')^2.$$

Если один из моментов инерции, например I, известен, то по этой формуле может быть вычислен момент инерции I' другого тела. Момент инерции I можно вычислить теоретически по геометрическим размерам и массе тела. Для этого надо взять тело правильной геометрической формы, например цилиндр или шар. Формула (42.2) может быть использована также для экспериментального определения модуля кручения проволоки.

ЗАДАЧИ

1. Материальная точка движется в поле тяжести по хорде круга без начальной скорости (рис. 92). Показать, что время ее движения из точки A в нижнее положение B не зависит от положения точки A на окружности. (Этот факт был использован Галилеем для установления законов малых колебаний математического маятника. Для нахождения периода колебаний маятника Галилей заменил малую дугу окружности ADB, по которой движется материальная точка, хордой AB.) Вычислить период

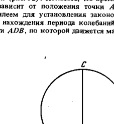


Рис. 92

Рис. 93

колебаний маятника в этом приближении и убедиться, что это приближение приводит к правильной зависимости периода колебаний от длины маятника l и ускорения свободного падения g. Сравнить результат с правильной формулой (41.3).

Ответ. $T = 8\sqrt{l/g}$.

2. Через неподвижный блок с моментом инерции I (рис. 93) и радиусом r перекинута нить, к одному концу которой подвешен груз массой m. Другой конец нити привязан к пружине с закрепленным нижним концом. Вычислить период колебаний груза, если жесткость пружины равна k, а нить не может скользить по поверхности блока.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{(I/r^2 + m)/k}$.

3. Физический маятник представляет собой однородный стержень длиной l, подвешенный за один из его концов. Определить период колебаний такого маятника.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{2l/3g}$.

4. Тело вращения радиусом a с моментом инерции I (относительно геометрической оси) и массой m катается без скольжения по внутренней поверхности цилиндра радиуса R, совершая малые колебания около положения равновесия (рис. 94). Найти период этих колебаний.

Решение. Рассматривая движение тела как вращение вокруг мгновенной оси (см. § 45) с угловой скоростью ω, напишем для скорости его центра $v = \omega a$.

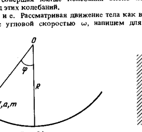


Рис. 94

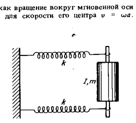


Рис. 95

Ту же скорость можно представить в виде $v = (R - a)\dot\varphi$. Приравнивая оба выражения, находим

$$\omega = \frac{R - a}{a}\dot\varphi.$$

Кинетическая энергия по теореме Кёнига

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 + \tfrac{1}{2}m(R - a)^2\dot\varphi^2 = \tfrac{1}{2}(m + I/a^2)(R - a)^2\dot\varphi^2.$$

Потенциальная же энергия

$$U = mg(R - a)(1 - \cos\varphi) \approx \tfrac{1}{2}mg(R - a)\varphi^2.$$

Применяя общий метод, изложенный в § 40, находим

$$T = 2\pi\sqrt{\left(1 + \frac{I}{ma^2}\right)\frac{R - a}{g}}.$$

ГЛАВА VI

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 39. Кинематика гармонического колебательного движения

Колебательные явления играют важную роль в самых разнообразных вопросах физики. Подробный разбор их дается в других разделах нашего курса. Здесь же мы ограничимся предварительным рассмотрением простейших *механических колебаний.* Начнем с *колебательного движения* материальной точки. В таком движении точка через равные промежутки времени проходит через одно и то же положение и притом в одном и том же направлении.

Важнейшим среди колебательных движений является так называемое *простое* или *гармоническое колебательное движение.* О нем мы уже говорили в § 11. Характер такого движения лучше всего раскрывается с помощью следующей кинематической модели. Допустим, что геометрическая точка M равномерно вращается по окружности радиуса A с постоянной угловой скоростью ω (рис. 83). Ее проекция N на диаметр, например на ось X,

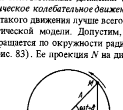


Рис. 83

будет совершать колебательное движение от крайнего положения N_1 до другого крайнего положения N_2 и обратно. Такое колебание точки N и называют простым или гармоническим колебанием. Чтобы его описать, надо найти координату x точки N как функцию времени t. Допустим, что в начальный момент времени $t = 0$ радиус OM образовывал с осью X угол δ. Спустя время t этот угол получит приращение ωt и сделается рав-

ным $\omega t + \delta$. Из рис. 83 видно, что

$$x = A\cos(\omega t + \delta). \tag{39.1}$$

Эта формула и описывает аналитически гармоническое колебательное движение точки N вдоль диаметра N_1N_2.

Величина A дает максимальное отклонение колеблющейся точки от положения равновесия O. Она называется *амплитудой колебания.* Величина ω называется *циклической частотой.* Величину $\omega t + \delta$ называют *фазой колебания,* а ее значение при $t = 0$, т.е. величину δ, – *начальной фазой.* Если $\delta = 0$, то $x = A\cos\omega t$; если $\delta = -\pi/2$, то $x = A\sin\omega t$ и т.д. Таким образом, при гармоническом колебании абсцисса x является синусоидальной или косинусоидальной функцией времени t. Для графического изображения гармонического колебательного движения можно откладывать по горизонтальной оси время t, а по вертикальной оси – смещение точки x (см. рис. 22). Тогда получится периодическая кривая – *синусоида.* Форма кривой полностью определяется амплитудой A и циклической частотой ω. Однако ее положение зависит также от начальной фазы δ. По истечении времени

$$T = 2\pi/\omega \tag{39.2}$$

фаза получает приращение 2π, а колеблющаяся точка возвращается в свое исходное положение с сохранением начального направления движения. Время T называется *периодом колебания.*

Скорость колеблющейся точки найдется дифференцированием выражения (39.1) по времени. Это дает

$$v = \dot x = -\omega A\sin(\omega t + \delta). \tag{39.3}$$

Дифференцируя вторично, получаем ускорение

$$a = \dot v = -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta), \tag{39.4}$$

или, используя (39.1),

$$a = -\omega^2 x. \tag{39.5}$$

Сила, действующая на материальную точку при гармоническом колебании, равна

$$F = ma = -m\omega^2 x. \tag{39.6}$$

Она пропорциональна отклонению x и имеет противоположное направление. Она всегда направлена к положению равновесия. Такого рода силы часто возникают при малых смещениях материальной точки из положения равновесия.

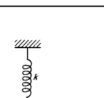


Рис. 100

Рис. 101

ся внизу, а другой раз – вверху (рис. 101). Определить отношение периодов малых колебаний стержня в этих случаях. Момент упругих сил пластинки пропорционален углу отклонения стержня от положения равновесия, причем коэффициент пропорциональности равен k.

Ответ. $T_1/T_2 = \sqrt{(2k - mgl)/(2k + mgl)}$.

13. Два незакрепленных шарика с массами m_1 и m_2 соединены друг с другом спиральной пружинкой с жесткостью k. Определить период колебаний шариков относительно центра масс системы, которые возникнут при растяжении пружинки.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{m_1 m_2/(m_1 + m_2)k}$.

14. Два диска с моментами инерции I_1 и I_2 насажены на общую ось, проходящую через их центры. Осью является стержень с модулем кручения f. Определить период крутильных колебаний одного диска относительно другого в предположении, что система свободна. Массой стержня пренебречь.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{I_1 I_2/f(I_1 + I_2)}$.

15. Два сплошных однородных цилиндра с одинаковым радиусом R и массами m_1 и m_2 лежат на горизонтальном столе и связаны с помощью двух одинаковых пружин с жесткостью k каждая, как показано на рис. 102 (вид сверху). Определить период

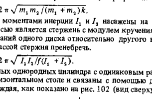


Рис. 102

малых колебаний, которые возникнут, если растянуть пружины и предоставить систему самой себе, не сообщая ей дополнительной скорости. Цилиндры катаются по столу без проскальзывания. Пружины могут работать как на растяжение, так и на сжатие.

Ответ. $T = \pi\sqrt{3m_1 m_2/k(m_1 + m_2)}$.

16. Колебания обычного математического маятника изохронны (точнее, приблизительно изохронны) только тогда, когда их амплитуды малы. Гюйгенс задался целью построить маятник, который совершал бы строго изохронные колебания при любых

амплитудах. Он показал, что таковым является *циклоидальный маятник.* Циклоидальный математический маятник представляет собой материальную точку, совершающую колебания, двигаясь под действием силы тяжести по дуге циклоиды. Показать, что колебания циклоидального маятника изохронны, и вывести формулу для его периода.

Решение. Как известно, циклоида представляет собой кривую, описываемую одной из точек окружности, катящейся по неподвижной прямой. Для наших целей надо взять циклоиду, обращенную выпуклостью вниз. В соответствии с этим примем, что окружность расположена ниже горизонтальной прямой, по которой она катится (эта прямая на рис. 103 изображена штриховой линией. За ось X примем параллельную ей прямую, смещенную вниз на диаметр окружности $2a$. Пусть точка A на катящейся окружности, описывающая циклоиду, в исходном положении находится на оси Y в наивысшей точке. Если окружность при качении повернется на угол φ, то ее центр C переместится вправо на расстояние $a\varphi$. При этом точка A сместится относительно центра влево на расстояние $a\sin\varphi$ и вниз на расстояние $a(1 - \cos\varphi)$. Поэтому прямоугольные координаты точки A станут

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = a(1 + \cos\varphi).$$

Это – уравнение циклоиды в параметрической форме. Пусть теперь x и y означают координаты материальной точки, совершающей циклоидальные колебания под действием силы тяжести. Параметр φ становится функцией времени. Потенциальная энергия

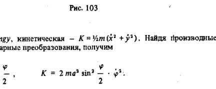


Рис. 103

точки будет $U = mgy$, кинетическая – $K = \tfrac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2)$. Найдя производные $\dot x, \dot y$ и выполнив элементарные преобразования, получим

$$U = 2mga\cos^2\frac{\varphi}{2}, \qquad K = 2ma^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\dot\varphi^2.$$

Введем обозначение $q = \cos\frac{\varphi}{2}$. Тогда $\dot q = -\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\dot\varphi$. Величина q может быть принята за координату, определяющую положение колеблющейся точки, а ее производная $\dot q$ – за соответствующую обобщенную скорость. В этих обозначениях

$$U = 2mgaq^2, \qquad K = 8ma^2\dot q^2.$$

Потенциальная энергия является квадратичной функцией координаты q, а кинетическая – производной $\dot q$ с постоянными коэффициентами. Отсюда делаем вывод, что при любых амплитудах колебания циклоидального маятника будут изохронными и мым нижним положением. Обозначим через a расстояние между центром масс C и точкой подвеса A. Тогда

$$E_{пот} = mga(1 - \cos\varphi) = 2mga\sin^2(\varphi/2).$$

В случае малых колебаний синус угла $\varphi/2$ можно приближенно заменить

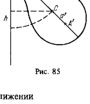


Рис. 85

самим углом. В этом приближении

$$E_{пот} = \tfrac{1}{2}mga\varphi^2.$$

Таким образом, для малых колебаний потенциальная и кинетическая энергии приводятся к виду (40.8), причем $\alpha = mga$, $\beta = I$. Отсюда следует, что малые колебания физического маятника будут приблизительно гармоническими с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{mga/I} \tag{41.1}$$

и периодом

$$T = 2\pi\sqrt{I/mga}. \tag{41.2}$$

Если период колебаний не зависит от амплитуды, то такие колебания называются *изохронными*. Мы видим, что *малые колебания физического маятника изохронны*. Колебания приближенно изохронны, когда угловая амплитуда колебаний не превышает нескольких градусов. При бо́льших амплитудах изохронность нарушается. На свойстве изохронности колебаний маятника основано его применение в часах.

Частным случаем физического маятника является *математический маятник*. Так называется маятник, вся масса которого практически сосредоточена в одной точке – в центре масс маятника C. Примером математического маятника может служить шарик, подвешенный на длинной нити. В случае математического маятника $a = l$, $I = ml^2$, где l – длина маятника, и формула (41.2) переходит в

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}. \tag{41.3}$$

Сравнивая формулы (41.2) и (41.3), делаем вывод, что *физический маятник колеблется так же, как математический маятник с длиной*

$$l = I/ma, \tag{41.4}$$

которая называется *приведенной длиной* физического маятника. Мы доказали это утверждение только для малых колебаний маятников. Но оно справедливо и для колебаний с конечными амплитудами, когда колебания не изохронны. Требуется только, чтобы угловые амплитуды физического и математического маятников были одинаковы. Доказательство этого мы предоставляем читателю.

2. Отложим от точки подвеса A вдоль прямой AC отрезок AA', длина которого равна приведенной длине физического маятника l (см. рис. 85). Точка A' называется *центром качания. Центр качания можно определить как математическую точку, в которой надо сосредоточить всю массу физического маятника, чтобы период его колебаний остался без изменений.* По теореме Гюйгенса – Штейнера $I = I_C + ma^2$, где I_C – момент инерции маятника относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C. Подставив это выражение в формулу (41.4), придадим ей вид

$$l = a + I_C/(ma). \tag{41.5}$$

Отсюда следует, во-первых, что $l > a$, т.е. точка подвеса A и центр качания A' лежат по разные стороны от центра масс C, и, во-вторых, что всем точкам подвеса, одинаково удаленным от центра масс маятника, соответствует одна и та же приведенная длина l, а следовательно, один и тот же период колебаний T.

Точка подвеса и центр качания являются *взаимными* или *сопряженными* точками в следующем смысле. *Если маятник подвесить за центр качания A', то его период не изменится и прежняя точка подвеса A сделается новым центром качания.* Это положение называется *теоремой* Гюйгенса. Для ее доказательства обозначим через a' длину отрезка $A'C$ и допустим, что маятник подвешен за точку A'. Тогда его приведенная длина будет

$$l' = a' + I_C/(ma').$$

Но $a' = l - a$, или в силу соотношения (41.5) $a' = I_C/(ma)$. Подставив это значение в предыдущую формулу, получим $l' = I_C/(ma) + a$. Таким образом, $l' = l$, т.е. приведенная длина, а с ней и период колебаний физического маятника остались без изменения. Это и доказывает теорему Гюйгенса.

3. Приведем другое доказательство теоремы Гюйгенса, глубже раскрывающее ее содержание. Будем перемещать точку подвеса маятника вдоль одной и той же прямой, проходящей через центр масс C. Посмотрим, как при этом будет меняться его период колебаний. Когда точка подвеса A бесконечно удалена от C, маятник ведет себя как математический. Его период колебаний бесконечно велик. При приближении точки подвеса A к центру масс C период колебаний сначала убывает. Когда точка подвеса совместится с C, маятник при любом отклонении будет в безразличном равновесии.

О т в е т. Кинетическая энергия вращения уменьшится на

$$\Delta K = \frac{1}{2}\frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}(\omega_1 - \omega_2)^2.$$

12. Шкивы двух маховиков соединены ремнем (рис. 77). Радиусы шкивов равны R_1 и R_2. Моменты инерции маховиков относительно их геометрических осей равны I_1 и I_2. Удерживая второй маховик и ремень неподвижными, раскручивают первый маховик до угловой скорости ω_0, вследствие чего между осью первого маховика и ремнем возникает скольжение. Затем ремень и второй маховик отпускают.

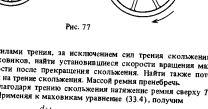


Рис. 77

Пренебрегая всеми силами трения, за исключением сил трения скольжения между ремнем и осями маховиков, найти установившиеся скорости вращения маховиков ω_1 и ω_2, т.е. скорости после прекращения скольжения. Найти также потерю ΔK кинетической энергии на трение скольжения. Массой ремня пренебречь.

Р е ш е н и е. Благодаря трению скольжения натяжение ремня сверху T_1 и снизу T_2 будет разным. Применяя к маховикам уравнение (33.4), получим

$$I_1\frac{d\omega_1}{dt} = (T_1 - T_2)R_1, \quad I_2\frac{d\omega_2}{dt} = (T_2 - T_1)R_2.$$

Поделим эти уравнения сответственно на R_1 и R_2, сложим и проинтегрируем. Тогда получим

$$I_1\omega_1/R_1 + I_2\omega_2/R_2 = \text{const}.$$

Входящая сюда постоянная равна $I_1\omega_0/R_1$, так как в начальный момент $\omega_1 = \omega_0$, $\omega_2 = 0$. Когда скольжение прекратится, то $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$. Решая полученную систему уравнений, найдем угловые скорости ω_1 и ω_2 после прекращения скольжения:

$$\omega_1 = \frac{I_1 R_2^2}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2}\omega_0, \quad \omega_2 = \frac{I_1 R_1 R_2}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2}\omega_0.$$

Потеря кинетической энергии на трение равна

$$\Delta K = \frac{1}{2}\frac{I_1 I_2 R_1^2}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2}\omega_0^2.$$

13. Почему в предыдущей задаче полный момент импульса системы не сохраняется?

14. Однородный диск A массой M_1 и радиусом r_1 (рис. 78) раскручен до угловой скорости ω_0 и приведен в контакт с диском B, ось вращения которого перпендикулярна к оси диска A. Масса диска B равна M_2, а расстояние между точкой соприкосновения и осью диска A равна a. Найти установившиеся угловые скорости

дисков ω_1 и ω_2 и потерю энергии в процессе установления. Трением в осях, а также трением качения пренебречь.

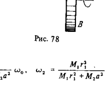


Рис. 78

О т в е т. $\omega_1 = \dfrac{M_1 r_1^2}{M_1 r_1^2 + M_2 a^2}\omega_0$, $\omega_2 = \dfrac{M_1 r_1^2}{M_1 r_1^2 + M_2 a^2}\dfrac{a}{r_2}\omega_0 = \dfrac{a}{r_2}\omega_1$.

Потеря энергии

$$\Delta K = \frac{M_1 M_2 r_1^2 a^2}{4(M_1 r_1^2 + M_2 a^2)}\omega_0^2.$$

15. Вертикальный столб высотой l подпиливается у основания и падает на землю, поворачиваясь вокруг нижнего основания. Определить линейную скорость его верхнего конца в момент удара о землю. Какая точка столба будет в этот момент иметь ту же скорость, какую имело бы тело, падая с той же высоты, как и данная точка?

О т в е т. $v = \sqrt{3gl}$. Искомая точка находится на расстоянии $x = {}^2/_3\, l$ от основания столба.

16. Изменится ли ответ к предыдущей задаче, если столб первоначально стоял в вертикальном положении на абсолютно гладком льду, а затем начал падать под действием силы тяжести? Чем будет отличаться движение столба в этом случае от движения в предыдущем случае?

Р е ш е н и е. По теореме Кёнига кинетическая энергия столба слагается из кинетической энергии движения его центра масс $\tfrac{1}{2}mv_C^2$ со скоростью v_C и кинетической энергии вращения $\tfrac{1}{2}I\omega^2$ вокруг центра масс с угловой скоростью ω. За время падения центр масс проходит путь $l/2$. При этом совершается работа $mgl/2$, которая идет на приращение кинетической энергии:

$$\tfrac{1}{2}mv_C^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}mgl.$$

В нижнем положении, когда столб горизонтален, $v_C = \tfrac{1}{2}l\omega$. Имея это в виду, а также используя выражение $I = \tfrac{1}{12}ml^2$, получим $v_C = \tfrac{1}{2}\sqrt{3gl}$. Скорость верхнего конца столба вдвое больше, т.е. равна $v = \sqrt{3gl}$. Отсюда видно, что результаты будут такими же, что и в предыдущей задаче. Однако характер движения будет другим. В предыдущем случае столб при падении вращался вокруг своего нижнего основания. При этом центр масс столба двигался по дуге окружности. В рассматриваемом случае, поскольку все действующие силы направлены вертикально, центр масс столба при его падении все время будет находиться на одной и той же вертикали.

17. Однородный стержень массой m и длиной l (рис. 79) падает без начальной скорости из положения 1, вращаясь без трения вокруг неподвижной горизонталь-

Кинетическая энергия системы равна $E_{кин} = \tfrac{1}{2}I\dot\varphi^2$, где I – момент инерции ее относительно оси OO'. Потенциальная энергия равна $E_{пот} = mgh$, где h – высота поднятия тела BD, отсчитываемая от его нижнего положения. Пусть l означает длину OO' в положении равновесия, $2a$ – расстояние между точками подвеса C и A, $2b$ – расстояние DB. Предполагается, что система симметрична, так что точки O и O' являются серединами отрезков CA и DB. Высота h найдется из условия нерастяжимости нитей AB и CD. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке O, ось X направим вдоль прямой OA, ось Z – вниз вдоль прямой OO', ось Y перпендикулярно к ним. Координаты точки A все время остаются постоянными и равны

$$x_A = a, \quad y_A = 0, \quad z_A = 0.$$

Координаты точки B в положении равновесия равны

$$x_B^{(0)} = b, \quad y_B^{(0)} = 0, \quad z_B^{(0)} = l.$$

При повороте системы на угол φ координаты той же точки становятся равными

$$x_B = b\cos\varphi, \quad y_B = b\sin\varphi, \quad z_B = l - h.$$

Условие постоянства длины нити AB можно записать в виде

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = (x_B^0 - x_A^0)^2 + (y_B^0 - y_A^0)^2 + (z_B^0 - z_A^0)^2,$$

или

$$(b\cos\varphi - a)^2 + b^2\sin^2\varphi + (l - h)^2 = (b - a)^2 + l^2.$$

После простых преобразований отсюда находим

$$h = \frac{2ab(1 - \cos\varphi)}{2l + h} = \frac{4ab}{2l + h}\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

При малых колебаниях можно положить $\sin(\varphi/2) = \varphi/2$. Кроме того, $h \ll 2l$, и вели-

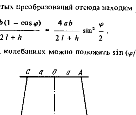


Рис. 89

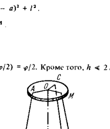


Рис. 90

чиной h в знаменателе можно пренебречь. В этом приближении

$$h = \frac{ab}{2l}\varphi^2, \quad E_{пот} = \frac{mgab}{2l}\varphi^2.$$

Таким образом, потенциальная и кинетическая энергии приводятся к виду (40.9), причем $\alpha = mgab/l$, $\beta = I$. Следовательно, колебания системы будут гармоническими с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Il}{mgab}}. \tag{42.1}$$

Период колебаний пропорционален квадратному корню из момента инерции и обратно пропорционален квадратному корню из массы системы. Возьмем в качестве тела BD металлический стержень. Выведем его из положения равновесия и заставим совершать крутильные колебания. Они будут сравнительно медленными. Прикрепим затем в точке O' тяжелый груз и снова заставим систему колебаться. Колебания станут значительно более быстрыми. Дело в том, что груз прикреплен на оси вращения, а потому он, значительно увеличивая массу системы, практически не влияет на ее момент инерции. Уменьшение периода колебаний можно объяснить также следующим образом. В положение равновесия система возвращается под действием горизонтальных составляющих сил натяжения нитей. Подвешивая груз, мы сильно увеличиваем натяжение нитей, а момент инерции увеличивается незначительно. Это и приводит к тому, что колебания становятся более быстрыми.

2. Формулой (42.1) определяется также период колебаний *трифилярного подвеса* (трифиляра). Он схематически изображен на рис. 90. Точки подвеса A, C и M расположены на окружности радиусом a, точки B, D, N – на окружности радиусом b. Нижний диск может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси OO'. Вывод формулы (42.1) применим без всяких изменений и к трифилярному подвесу. Это видно уже из того, что при выводе было использовано условие постоянства длины только одной нити AB. Постоянство длины другой нити CD при этом условии выполняется автоматически.

Трифилярный подвес дает удобный метод измерения моментов инерции тел. Сначала измеряется период колебаний T_0 ненагруженного трифиляра. По этому периоду вычисляется его момент инерции

$$I_0 = \frac{m_0 gab}{4\pi^2 l}T_0^2.$$

Затем на нижний диск трифиляра кладется тело массы m, момент инерции I которого требуется измерить. Пусть T – период крутильных колебаний нагруженного трифиляра. Тогда момент инерции системы относительно оси OO' будет

$$I + I_0 = \frac{(m + m_0)gab}{4\pi^2 l}T^2.$$

Вычитая отсюда предыдущее выражение, находим искомый момент инерции I.

3. Укажем другой метод измерения моментов инерции, который во многих случаях является более предпочтительным. Подвесим тело на стальной проволоке, чтобы оно могло совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси, совпадающей

21. По внутренней поверхности конической воронки, стоящей вертикально, без трения скользит маленький шарик (рис. 82). В начальный момент шарик находился на высоте h_0, а скорость его v_0 была горизонтальна. Найти v_0, если известно, что при дальнейшем движении шарик поднимается до высоты h, а затем начинает опускаться. Найти также скорость шарика в наивысшем положении v.

О т в е т: $v_0^2 = \dfrac{2gh^2}{h + h_0}$, $v^2 = \dfrac{2gh_0^2}{h + h_0}$.

22. Тяжелая веревка (линейная плотность ρ) длиной L перекинута через блок с моментом инерции I и радиусом r. В начальный момент блок неподвижен, а больший

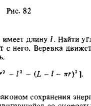


Рис. 82

из свешивающихся концов веревки имеет длину l. Найти угловую скорость вращения блока ω, когда веревка соскользнет с него. Веревка движется по блоку без скольжения, трение в оси блока не учитывать.

О т в е т: $\omega^2 = \dfrac{\rho g}{I + L\rho r^2}[L^2 + 4r^2 - l^2 - (L - l - \pi r)^2]$.

У к а з а н и е. Воспользоваться законом сохранения энергии.

23. Метеорит массой $m = 10^5$ т, двигавшийся со скоростью $v = 50$ км/с, ударился о Землю на широте $\vartheta = 60°$. Вся его кинетическая энергия перешла в тепловую (внутреннюю) энергию, а сам он испарился. Какое максимальное влияние мог оказать удар такого метеорита на продолжительность суток?

О т в е т: Максимальное изменение продолжительности суток ΔT, вызванное ударом метеорита, определяется формулой

$$\frac{\Delta T}{T} = \pm\frac{mvR\cos\vartheta}{2\pi I}T,$$

где $T = 86164$ с – продолжительность суток, $R = 6400$ км – радиус, $M = 6\cdot 10^{21}$ т – масса Земли, I – ее момент инерции. Если считать Землю однородным шаром, то $I = {}^2/_5 MR^2$ (на самом деле из-за возрастания плотности к центру Земли момент инерции ее несколько меньше и составляет приблизительно $I = {}^1/_3 MR^2$). В результате получится $\Delta T/T \sim 2\cdot 10^{-5}$, $\Delta T \sim 2\cdot 10^{-10}$ с.

24. Оценить, с какой минимальной скоростью v нужно выпустить на экваторе Земли снаряд массой $m = 1000$ т, чтобы изменить продолжительность земных суток на $\Delta T = 1$ мин?

О т в е т. Наивыгоднейшим является выстрел в горизонтальном направлении в плоскости экватора. В этом случае

$$\frac{c - v}{c} \approx \frac{5}{18}\frac{m^2c^2T^4}{\pi^2 IM(\Delta T)^2} \approx \frac{25}{36}\frac{m^2c^2T^4}{\pi^2M^2R^2(\Delta T)^2} \approx 2\cdot 10^{-22},$$

где c – скорость света в вакууме. Остальные обозначения такие же, как в предыдущей задаче. Относительно приближенных вычислений см. § 22.

25. *Пульсарами* называются небесные объекты, посылающие импульсы радиоизлучения, следующие друг за другом с высокостабильными периодами, которые для известных к настоящему времени пульсаров лежат в пределах примерно от $3\cdot 10^{-2}$ до 4 с. Согласно современным представлениям пульсары представляют собой вращающиеся нейтронные звезды, образовавшиеся в результате гравитационного сжатия. Нейтронные звезды подобны гигантским атомным ядрам, построенным из одних только нейтронов. Плотность вещества ρ в нейтронной звезде не однородна, но при грубых оценках ее можно считать одной и той же по всему объему звезды и по порядку величины равной 10^{14} г/см³. Оценить период вращения T, с каким стало бы вращаться Солнце, если бы оно превратилось в нейтронную звезду. Плотность вещества Солнца возрастает к его центру, а различные слои его вращаются с различными скоростями. При оценке этими обстоятельствами пренебречь и считать, что средняя плотность солнечного вещества $\rho_0 = 1{,}41$ г/см³, а период вращения Солнца $T_0 = 2{,}2\cdot 10^6$ с.

О т в е т. $T \approx T_0\left(\dfrac{\rho_0}{\rho}\right)^{2/3} = 1{,}3\cdot 10^{-3}$ с.

26. Гладкий твердый стержень длиной l_0 и массой M равномерно вращается с угловой скоростью ω_0 вокруг неподвижной оси, проходящей через один из концов стержня перпендикулярно к его продольной оси. На стержень надет шарик массой m. Вначале шарик находится на свободном конце стержня и вращается вместе с ним (упор, имеющийся на конце стержня, не позволяет шарику соскользнуть со стержня). В некоторый момент шарику сообщается скорость v, направленная вдоль стержня к оси вращения. Определить наименьшее расстояние l, до которого приблизится шарик к оси вращения, и угловую скорость системы ω в этом положении. В какую сторону будет изогнут стержень, когда шарик движется по направлению к оси вращения? Как изменится изгиб стержня, когда шарик, достигнув наименьшего удаления до оси, начнет двигаться в обратном направлении?

О т в е т. $\omega = \omega_0 + \dfrac{mv^2}{({}^1/_3 M + m)l_0^2\omega_0}$, $l = l_0\sqrt{\dfrac{\omega_0}{\omega}}$. При приближении шарика к оси вращения стержень будет изгибаться в сторону, противоположную вращению. При удалении шарика изгиб стержня изменится в обратную сторону.

§ 38. Законы сохранения и симметрия пространства и времени

1. Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса связаны с определенными свойствами *симметрии пространства и времени*. Разумеется, их нельзя получить из одних только свойств симметрии какого бы то ни было вида. Законы сохранения относятся к материальным физическим объектам, а последние не являются только пространственно-временными конструкциями. Для вывода законов сохранения в меха-

В частности, для сплошного цилиндра и сплошного шара

$$T = 2\pi\sqrt{{}^3/_2\,(R - a)/g}, \quad T = 2\pi\sqrt{{}^7/_5\,(R - a)/g}.$$

5. На горизонтальной плоскости лежит цилиндр с моментом инерции I (относительно продольной геометрической оси), массой m и радиусом r. К оси цилиндра прикреплены две одинаковые горизонтально расположенные спиральные пружины, другие концы которых закреплены в стене (рис. 95, вид сверху). Жесткость каждой пружины равна k, пружины могут работать как на растяжение, так и на сжатие. Найти период малых колебаний цилиндра, которые возникнут, если вывести его из положения равновесия и дать возможность катиться без скольжений по горизонтальной плоскости.

О т в е т. $T = \dfrac{2\pi}{r}\sqrt{\dfrac{I + mr^2}{2k}}$. Для сплошного цилиндра $T = \pi\sqrt{3m/k}$.

6. Однородная квадратная плита подвешена за свои углы к потолку зала на четырех параллельных веревках, длина каждой из которых равна l. Определить период малых крутильных колебаний плиты, которые возникнут, если повернуть ее на малый угол вокруг вертикальной оси.

О т в е т. $T = 2\pi\sqrt{l/3g}$.

В более общем случае, когда плита не однородна, но центр масс ее совпадает с геометрическим центром плиты,

$$T = 2\pi\sqrt{2Il/Mga^2},$$

где I – момент инерции плиты относительно вертикальной оси, проходящей через ее центр, а a – длина одной из сторон плиты.

7. Три однородных стержня длиной l каждый соединены короткими нитями, как указано на рис. 96. Нижний стержень поворачивают на малый угол вокруг вертикальной

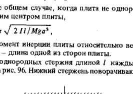


Рис. 96

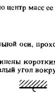


Рис. 97

оси, проходящей через центр системы, и отпускают. Найти период возникших при этом малых колебаний, если массы стержней одинаковы.

О т в е т. $T = 2\pi\sqrt{l/2g}$.

8. Шарик массой m подвешен на двух последовательно соединенных пружинках с жесткостями k_1 и k_2 (рис. 97). Определить период его вертикальных колебаний.

О т в е т. $T = 2\pi\sqrt{m(1/k_1 + 1/k_2)}$.

У к а з а н и е. Показать, что при растяжениях и сжатиях пружины ведут себя как одна пружина с жесткостью, определяемой соотношением

$$1/k = 1/k_1 + 1/k_2.$$

9. Найти период крутильных колебаний диска, плотно насаженного на составной стержень, состоящий из двух различных последовательно соединенных стержней (рис. 98). Верхний конец A стержня неподвижно закреплен. Если бы диск был насажен только на первый стержень, то период колебаний был бы равен T_1. Если бы

Рис. 98

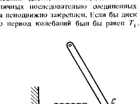


Рис. 99

он был насажен только на второй стержень, то период колебаний оказался бы равным T_2.

О т в е т. $T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$.

10. Найти период малых колебаний физического маятника массой m, к центру масс C которого прикреплена горизонтальная спиральная пружина с жесткостью k. Другой конец пружины закреплен в неподвижной стенке (рис. 99). Момент инерции маятника относительно точки подвеса равен I, расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника равно a. В положении равновесия пружина не деформирована.

О т в е т. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mga + ka^2}}$.

11. Колебательная система состоит из однородного стержня длиной l и массой m, который может вращаться вокруг горизонтальной оси O, проходящей через его конец и перпендикулярной к продольной оси стержня (рис. 100). Другой конец стержня подвешен на пружине с жесткостью k. Расстояние между центром масс стержня и осью вращения $CO = a$. Момент инерции стержня относительно оси O равен I. Найти удлинение пружины x_0 (по сравнению с ее длиной в недеформированном состоянии) в положении равновесия, если в этом положении стержень горизонтален. Определить также период малых колебаний стержня около положения равновесия.

О т в е т. $x_0 = mga/kl$, $T = 2\pi\sqrt{I/kl^2}$.

12. К концу однородного стержня длиной l и массой m прикреплена короткая упругая пластинка. Пластинку зажимают в тисках один раз так, что стержень оказывает-

член $\dfrac{\partial U}{\partial t}dt$. Тогда, вводя полный дифференциал

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz + \frac{\partial U}{\partial t}dt,$$

представим предыдущее выражение в виде

$$A_{12} = -\int dU + \int\frac{\partial U}{\partial t}dt.$$

В таком виде оно справедливо и для системы материальных точек. Поэтому дальнейшие рассуждения не связаны с предположением, что система состоит из одной материальной точки. После интегрирования получаем

$$A_{12} = U_1 - U_2 + \int\frac{\partial U}{\partial t}dt. \tag{38.2}$$

Комбинация этой формулы с (38.1) приводит к соотношению

$$(K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) = \int\frac{\partial U}{\partial t}dt. \tag{38.3}$$

До сих пор мы не использовали условие замкнутости системы и свойства однородности времени, поэтому наши рассуждения применимы и для незамкнутых систем. Допустим теперь, что система замкнута. Тогда ввиду однородности времени функция U не может явно зависеть от времени, т.е. $\dfrac{\partial U}{\partial t} = 0$. В результате получим

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2, \tag{38.4}$$

т.е. уравнение, выражающее механический закон сохранения энергии.

4. Перейдем к доказательству закона сохранения импульса. Допустим, что механическая система замкнута. Все силы $\boldsymbol F_1, \boldsymbol F_2, \ldots$, действующие на материальные точки системы, являются силами внутренними, внешних сил нет. Ввиду однородности пространства энергия системы не изменится, если систему сместить из одного положения пространства в другое. Математически

$$U(\boldsymbol r_1, \boldsymbol r_2 \ldots) = U(\boldsymbol r_1 + \boldsymbol R, \boldsymbol r_2 + \boldsymbol R, \ldots),$$

каковы бы ни были радиусы-векторы материальных точек системы в начальном положении $\boldsymbol r_1, \boldsymbol r_2, \ldots$ и каков бы ни был вектор смещения $\boldsymbol R$. Выберем $\boldsymbol R$ бесконечно малым и направим его вдоль оси X: $\boldsymbol R = \delta x\,\boldsymbol i$. Тогда

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2} + \ldots\right)\delta x = 0.$$

Ввиду произвольности δx выражение в скобках обращается в нуль. А в

силу (29.9) его можно представить в виде $F_{1x} + F_{2x} + \ldots = 0$. Аналогичные соотношения можно написать и для проекций сил на оси Y и Z. Вообще для замкнутой системы $\boldsymbol F_1 + \boldsymbol F_2 + \ldots = 0$. А это есть как раз то условие, при выполнении которого из второго закона Ньютона получается закон сохранения импульса (см. § 12).

5. Закон сохранения момента импульса для замкнутой системы доказывается в точности так же. Используя изотропию пространства, можно доказать, что геометрическая сумма моментов внутренних сил, действующих в системе, равна нулю: $\boldsymbol M_1 + \boldsymbol M_2 + \ldots = 0$ (см. задачу 2 к § 46). Отсюда немедленно следует рассматриваемый закон (см. § 30).

ЗАДАЧИ

1. Пусть $U(\boldsymbol r_1, \boldsymbol r_2)$ означает потенциальную энергию взаимодействия двух материальных точек как функцию радиусов-векторов $\boldsymbol r_1$ и $\boldsymbol r_2$, определяющих их положения в пространстве. Используя однородность пространства, доказать, что U является функцией только разности $\boldsymbol r_2 - \boldsymbol r_1$. Обобщить результат на случай системы n взаимодействующих материальных точек.

Р е ш е н и е. Ввиду однородности пространства потенциальная энергия U не изменится, если обе взаимодействующие точки сместить на один и тот же вектор $\boldsymbol a$. Записанное математически, это условие гласит: $U(\boldsymbol r_1, \boldsymbol r_2) = U(\boldsymbol r_1 + \boldsymbol a, \boldsymbol r_2 + \boldsymbol a)$. Это соотношение должно выполняться, каков бы ни был вектор $\boldsymbol a$. Полагая $\boldsymbol a = -\boldsymbol r_1$, получим $U = U(0, \boldsymbol r_2 - \boldsymbol r_1)$, т.е. $U = f(\boldsymbol r_2 - \boldsymbol r_1)$, где f – какая-то функция только разности $\boldsymbol r_2 - \boldsymbol r_1$.

Если система состоит из n взаимодействующих материальных точек, то, рассуждая аналогично, найдем

$$U = f(\boldsymbol r_2 - \boldsymbol r_1, \boldsymbol r_3 - \boldsymbol r_1, \ldots).$$

Разумеется, вместо первой точки можно взять любую из материальных точек системы. Значит, потенциальная энергия U может зависеть только от $n - 1$ векторных аргументов: разностей радиусов-векторов каких-либо $n - 1$ точек системы и радиуса-вектора остальной точки.

2. Какие дополнительные ограничения накладывает на вид функции U изотропия пространства?

О т в е т. Потенциальная энергия U может зависеть только от расстояний каких-либо $n - 1$ материальных точек системы от остальной точки.

3. Используя однородность пространства и галилеевский принцип относительности, показать, что сила взаимодействия материальных точек *1* и *2* не зависит от их координат и скоростей, а может зависеть только *от разностей* этих координат и скоростей.

Р е ш е н и е. В силу однородности пространства и галилеевского принципа относительности ускорение $\boldsymbol a$, а с ним и сила $\boldsymbol f = m\boldsymbol a$ инвариантны относительно переноса начала координат и преобразования Галилея. Возьмем две системы отсчета S и S'. Рассматривая силу $\boldsymbol f$ как функцию координат и скоростей в системе S', напишем $\boldsymbol f = \boldsymbol f(\boldsymbol r_1', \boldsymbol r_2', \boldsymbol v_1', \boldsymbol v_2')$. Систему S' можно выбрать произвольно. Выберем ее так, чтобы в рассматриваемый момент времени материальная точка *1* находилась в начале координат ($\boldsymbol r_1' = 0$), а ее скорость равнялась нулю ($\boldsymbol v_1' = 0$). Тогда в этот момент сила $\boldsymbol f$ будет функцией только двух аргументов: $\boldsymbol f = \boldsymbol f(\Delta\boldsymbol r_2', \Delta\boldsymbol v_2')$. Но разности координат и скоростей в обеих системах отсчета одинаковы, а потому $\Delta\boldsymbol r_2' = \boldsymbol r_2' - \boldsymbol r_1' = \boldsymbol r_2 - \boldsymbol r_1$, $\Delta\boldsymbol v_2' = \boldsymbol v_2' - \boldsymbol v_1' = \boldsymbol v_2 - \boldsymbol v_1$. В результате получим

$$\boldsymbol f = \boldsymbol f(\boldsymbol r_2 - \boldsymbol r_1, \boldsymbol v_2 - \boldsymbol v_1).$$

гармоническими с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{4a/g}.$$

17. Маятник подвешен на резинке, растянутой настолько сильно, что ее первоначальной длиной можно пренебречь. Возможны ли горизонтальные гармонические изохронные колебания маятника сколь угодно большой амплитуды? Если возможны, то определить период этих колебаний. Возможны ли круговые движения маятника в вертикальной плоскости? Каково будет движение при любых начальных условиях?

О т в е т. И те и другие движения возможны. Их период

$$T = 2\pi\sqrt{m/k},$$

где m – масса маятника, а k – жесткость резинки. При произвольных начальных условиях движение маятника будет происходить по эллипсу с периодом обращения T.

18. По штанге, вращающейся в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω, может скользить без трения груз массой m, удерживаемый на некотором расстоянии от оси вращения пружиной с жесткостью k и начальной длиной r_0. Найти движение груза, которое возникнет, если штангу мгновенно остановить.

О т в е т. $r = r_0\left(1 + \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega_0 t\right)$, где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

При этом должно быть $\omega < \omega_0$. В противном случае равновесие груза на вращающейся штанге в области применимости закона Гука было бы невозможно.

19. На горизонтальной пружине укреплено тело массой $M = 10$ кг, лежащее на гладком столе, по которому оно может скользить без трения (рис. 104). В это тело попадает и застревает в нем пуля массой $m = 10$ г, летящая с горизонтальной скоростью $v = 500$ м/с, направленной вдоль оси пружины. Тело вместе с застрявшей в нем пулей

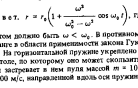


Рис. 104

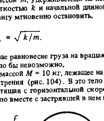


Рис. 105

отклоняется от положения равновесия и начинает колебаться относительно него с амплитудой $a = 10$ см. Найти период колебаний тела.

О т в е т. $T = 2\pi\dfrac{M + m}{mv}a \approx 1{,}26$ с.

20. На тонкую стальную спицу надет шарик. Противоположный конец спицы неподвижно закреплен. Показать, что если масса спицы пренебрежимо мала по сравнению с массой шарика, то период малых колебаний, возникающих при отклонении шарика в сторону, пропорционален расстоянию l между шариком и точкой закрепления спицы.

У к а з а н и е. Рассмотрим вспомогательную однородную спицу, согнутую в кольцо. Если ее разрезать в одном месте и к концам прикрепить шарики A и B, то появятся упругие радиальные силы F, приложенные к шарикам, стремящиеся распрямить спицу (рис. 105). Силы эти не зависят от места, где произведен разрез. Заметив это, вернемся теперь к нашей задаче. Если шарик сместить в сторону, то спица деформируется. При малых деформациях участок ее между шариком и точкой закрепления спицы можно в первом приближении считать дугой окружности. На основании предыдущего замечания можно утверждать, что при смещении шарика по этому деформированному участку действующая на него сила не будет меняться. Пользуясь этим, нетрудно показать, что жесткость k спицы будет обратно пропорциональна квадрату длины l.

21. Найти период колебаний физического маятника в зависимости от угловой амплитуды.

Р е ш е н и е. Закон сохранения энергии дает

$$\frac{I}{2}\dot\varphi^2 = mga(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$$

где φ – угол отклонения маятника из положения равновесия, а φ_0 – максимальное его значение (угловая амплитуда колебаний). Введя приведенную длину маятника (41.4) и выполнив несложные преобразования, получим

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Разрешив это уравнение относительно dt и интегрируя по φ, найдем период колебаний маятника T как учетверенное время прохождения интервала углов от $\varphi = 0$ до $\varphi = \varphi_0$. При интегрировании удобно ввести новую переменную интегрирования $u = \sin(\varphi/2)/\sin(\varphi_0/2)$. В результате получим

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}},$$

где введено обозначение $k \equiv \sin(\varphi_0/2)$. Входящий сюда интеграл не берется в элементарных функциях. Он называется полным *эллиптическим интегралом первого рода*. Его можно представить в виде бесконечного ряда. Так как $|k\sin u| < 1$, то подынтегральное выражение можно разложить в ряд по формуле бинома Ньютона:

$$(1 - k^2\sin^2 u)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2 u + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4 u + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6 u + \ldots$$

Этот ряд равномерно сходится, а потому его можно интегрировать почленно. Сделав это, получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\sin^6\frac{\varphi_0}{2} + \ldots\right].$$

При малых амплитудах φ_0 эта формула переходит в (41.3).

§ 40. Гармонические колебания груза на пружине

1. Рассмотрим спиральную пружину, один конец которой закреплен, а к другому подвешено тело массой m (рис. 84). Пусть l_0 – длина недеформированной пружины. Если пружину растянуть или сжать до длины l, то возникнет сила F, стремящаяся вернуть тело в положение равновесия. При небольших растяжениях $x = l - l_0$ справедлив *закон Гука* – сила пропорциональна растяжению пружины: $F = -kx$. В этих условиях уравнение движения тела имеет вид

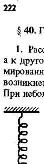


Рис. 84

$$m\ddot x = -kx. \tag{40.1}$$

Постоянная k называется *коэффициентом упругости* или *жесткостью* пружины. Знак минус означает, что сила F направлена в сторону, противоположную смещению x, т.е. к положению равновесия.

При выводе уравнения (40.1) предполагалось, что никакие другие силы на тело не действуют. Покажем, что тому же уравнению подчиняется движение тела, подвешенного на пружине в однородном поле тяжести. Обозначим в этом случае буквой X *удлинение пружины*, т.е. разность $X = l - l_0$. Пружина тянет груз вверх с силой kX, сила тяжести – вниз. Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot X = -kX + mg.$$

Пусть X_0 означает удлинение пружины в положении равновесия. Тогда $-kX_0 + mg = 0$. Исключая вес mg, получим $m\ddot X = -k(X - X_0)$. Введем обозначение $x = X - X_0$, тогда уравнение движения примет прежний вид (39.1). Величина x по-прежнему означает смещение груза из положения равновесия. Однако положение равновесия смещается под действием силы тяжести. Кроме того, при наличии тяжести меняется смысл величины $-kx$. Теперь она означает равнодействующую сил натяжения пружины и веса груза. Но все это не затрагивает математическую сторону колебательного процесса. Поэтому можно рассуждать так, как если бы силы тяжести совсем не было. Так мы и поступим.

2. Результирующая сила $F = -kx$ имеет такой же вид, что и сила в выражении (39.6). Если положить $m\omega^2 = k$, то уравнение (40.1) перейдет в

$$\ddot x + \omega^2 x = 0. \tag{40.2}$$

Это уравнение совпадает с уравнением (39.5). Функция (39.1) является решением такого уравнения при любых значениях постоянных A и δ. Можно доказать, что это есть *общее решение*, т.е. всякое решение уравнения (40.2) может быть представлено в виде (39.1). Различные решения отличаются друг от друга только значениями постоянных A и δ. (Доказатель-

ство приводится в конце этого параграфа.) Из изложенного следует, что груз на пружине будет совершать гармонические колебания с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{k/m} \tag{40.3}$$

и периодом

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}. \tag{40.4}$$

Период колебаний T не зависит от амплитуды A. Это свойство называется *изохронностью* колебаний. Изохронность, однако, имеет место до тех пор, пока справедлив закон Гука. При больших растяжениях закон Гука нарушается. Тогда и колебания перестают быть изохронными, т.е. появляется зависимость периода колебаний от амплитуды.

Амплитуда A и начальная фаза δ не могут быть определены из дифференциального уравнения (40.2). Эти постоянные определяются начальными условиями, например начальными значениями смещения x и скорости $\dot x$. Дифференциальное уравнение (40.2) справедливо при любых начальных условиях. Оно описывает весь комплекс колебаний, которые может совершать рассматриваемая система. Конкретное колебание выделяется из этого комплекса заданием постоянных A и δ.

3. Потенциальная и кинетическая энергии тела даются выражениями

$$E_{пот} = \tfrac{1}{2}kx^2, \quad E_{кин} = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\dot x^2. \tag{40.5}$$

Каждая из них меняется во времени. Однако их сумма E во времени должна оставаться постоянной:

$$E = \tfrac{1}{2}kx^2 + \tfrac{1}{2}m\dot x^2 = \text{const}. \tag{40.6}$$

Если воспользоваться выражением (39.1), то из формул (40.5) найдем

$$E_{пот} = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta), \quad E_{кин} = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \delta),$$

или в силу соотношения (40.3)

$$E_{кин} = \tfrac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \delta).$$

Эти формулы можно также записать в виде

$$E_{пот} = \tfrac{1}{4}kA^2[1 + \cos 2(\omega t + \delta)], \quad E_{кин} = \tfrac{1}{4}kA^2[1 - \cos 2(\omega t + \delta)].$$

Они показывают, что *кинетическая и потенциальная энергии в отдельности не остаются постоянными, а совершают гармонические колебания вокруг общего среднего значения $\tfrac{1}{4}kA^2$ с удвоенной круговой частотой 2ω.* Когда кинетическая энергия проходит через максимум, потенциальная обращается в нуль и обратно. Однако полная энергия $E = E_{кин} + E_{пот}$ остается постоянной и связана с амплитудой A соотношением

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2. \tag{40.7}$$

§ 43. Адиабатические инварианты

1. Энергия, импульс или момент импульса механической системы являются функциями ее координат и скоростей. Если система замкнута, то эти величины сохраняются, т.е. не меняются с течением времени. Если же система не замкнута, а параметры, определяющие ее состояние, изменяются во времени, то указанные величины, вообще говоря, также изменяются. Возьмем, например, математический маятник, нить которого перекинута через гвоздь. Параметрами здесь являются длина нити l и ускорение свободного падения g. Можно тянуть за свободный конец нити, уменьшая или увеличивая l. При этом над маятником совершается внешняя работа, а потому энергия его изменяется. Можно также менять ускорение свободного падения, поднимая или опуская маятник над земной поверхностью. Среди различных изменений внешних параметров играют особую роль бесконечно медленные изменения, называемые *адиабатическими* *).

При этом параметры, сколь бы медленно они не менялись, могут принимать любые значения, лежащие в допустимых пределах. Для изменения их на конечные величины требуется лишь достаточно длительное время. Изменения параметров системы, даже медленные, влекут за собой и изменения других физических величин. Так, энергия системы, как уже отмечалось, не остается постоянной, поскольку во время изменения параметров над системой производится работа. Но могут встречаться и такие величины, которые остаются постоянными или приблизительно постоянными из-за медленности изменения параметров.

Функции координат, скоростей и параметров системы, остающиеся постоянными при бесконечно медленных изменениях параметров, называются адиабатическими инвариантами. Это определение в дальнейшем будет уточнено, поскольку само понятие "медленности" нуждается в уточнении. Адиабатические инварианты играли большую роль в старой полуклассической теории атома Бора. Но они имеют важное значение и в других разделах физики.

2. Выясним понятие адиабатического инварианта сначала на простейшем, но важном примере гармонического осциллятора, собственная частота которого очень медленно изменяется во времени. Примером может служить математический маятник, медленно изменяющимися параметрами которого являются длина нити l и ускорение свободного падения g (точнее, их комбинация $\omega^2 = g/l$). Другим примером может служить колебание шарика на пружине, жесткость которой k является медленно меняющимся параметром. Все эти системы, называемые *гармоническими*

*) В термодинамике термин "адиабатический" применяется в другом смысле. Адиабатическим называют процесс, происходящий без подвода и отвода теплоты.

осцилляторами, математически эквивалентны. Для конкретности будем иметь в виду шарик на пружине. Задача о математическом маятнике сводится к этому случаю, если ввести обозначение $k = mg/l$. Каким образом производится изменение жесткости или величин, ей эквивалентных, — это не имеет значения, пока задача трактуется как чисто математическая.

Полная энергия гармонического осциллятора равна

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Для ее производной по времени можно написать

$$\dot E = (mv\dot v + kx\dot x) + \tfrac12 x^2 \dot k.$$

Выражение в скобках обращается в нуль, так как $\dot x = v$, действующая сила $F = -kx$ и по закону Ньютона $m\dot v = F$. Введя еще потенциальную энергию $U = \tfrac12 kx^2$, получим

$$\dot E = U(x)\,\frac{\dot k}{k}. \tag{43.1}$$

До сих пор наши вычисления были точными. Используем теперь *медленность изменения* параметра k и его производной $\dot k$. Медленность означает, что и при изменяющемся k движение по-прежнему будет носить характер колебаний. Только "период" этих колебаний T, а также положение крайних точек, достигаемых осциллятором, будут слегка меняться от колебания к колебанию. Иными словами, за каждое колебание параметр k должен изменяться очень мало. Это обычное представление о медленности. Но в нашей задаче его недостаточно. Надо на изменения k и его производной наложить дополнительное ограничение, потребовав, чтобы за каждый период колебания величина $\dot k/k$ оставалась почти постоянной. Точнее, это требование сводится к тому, чтобы на каждом периоде колебания отношение $\dot k/k$ могло быть представлено в виде

$$\frac{\dot k}{k} = \left(\frac{\dot k}{k}\right)_0 (1 + \alpha), \tag{43.2}$$

где $(\dot k/k)_0$ — значение этого отношения в какой-либо точке рассматриваемого периода, например в его середине, а α — поправка, стремящаяся к нулю при $\dot k \to 0$. Имея это в виду, проинтегрируем выражение (43.1) в пределах от t до $t + T(k)$ для произвольного момента времени t. Получим

$$\Delta E = E(t+T) - E(t) = \left(\frac{\dot k}{k}\right)_0 \left[\int_t^{t+T} U[x(t')]\,dt' + \beta\right]. \tag{43.3}$$

Здесь β — поправка, обращающаяся в нуль при $\dot k \to 0$. (Переменная ин-

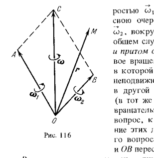


Рис. 116

ростью $\vec\omega_1$ (рис. 116). Пусть сама ось OA, в свою очередь, вращается с угловой скоростью $\vec\omega_2$, вокруг другой оси OB. Подчеркнем, что в общем случае *речь идет о мгновенных вращениях и притом с нерелятивистскими скоростями*. Первое вращение рассматривается в системе отсчета, в которой (в рассматриваемый момент) ось OA неподвижна. Второе вращение рассматривается в другой системе отсчета — в той, в которой (в тот же момент) неподвижна ось OB. Сложить вращательные движения — значит ответить на вопрос, к какому движению приводит наложение этих двух вращений? При рассмотрении этого вопроса ограничимся случаем, когда оси OA и OB пересекаются между собой.

Вопрос сводится к сложению линейных скоростей в аналогичном физическом смысле (см. § 7; в нерелятивистской механике, как известно, сложение линейных скоростей производится по правилу параллелограмма). Произвольная точка твердого тела M с радиусом-вектором $\boldsymbol r$ в результате первого вращения (вокруг оси OA) получает линейную скорость $\mathbf v_1 = [\vec\omega_1 \boldsymbol r]$, а в результате второго вращения (вокруг оси OB) — линейную скорость $\mathbf v_2 = [\vec\omega_2 \boldsymbol r]$. Результирующая линейная скорость будет равна

$$\mathbf v = \mathbf v_1 + \mathbf v_2 = [(\vec\omega_1 + \vec\omega_2)\boldsymbol r].$$

Если ввести векторную сумму в математическом смысле

$$\vec\omega = \vec\omega_1 + \vec\omega_2, \tag{46.5}$$

то результат запишется в виде

$$\mathbf v = [\vec\omega \boldsymbol r]. \tag{46.6}$$

Пусть точка M лежит на оси вектора $\vec\omega$, т.е. на диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec\omega_1$ и $\vec\omega_2$, или ее продолжении. Тогда $\mathbf v = 0$. Все точки указанной оси в рассматриваемый момент времени находятся в покое. Это объясняется тем, что все эти точки в результате первого вращения движутся в одну, а в результате второго вращения — в противоположную сторону. Результирующая линейная скорость получается равной нулю. Все прочие точки тела вращаются вокруг оси вектора $\vec\omega$ с угловой скоростью ω. Мгновенную линейную скорость любой точки тела можно вычислить по формуле (46.6). Это значит, что *мгновенное результирующее движение твердого тела есть вращение вокруг мгновенной оси OC*. Эта ось, вообще говоря, непрерывно перемещается как относительно самого твердого тела, так и относительно неподвижной системы отсчета, в которой рассматривается движение.

Итак, мы доказали, что *два вращения с угловыми скоростями $\vec\omega_1$ и $\vec\omega_2$ складываются* (в рассматриваемом физическом смысле) *в одно вращение вокруг мгновенной оси с угловой скоростью $\vec\omega = \vec\omega_1 + \vec\omega_2$. Мгновенная ось в каждый момент времени направлена вдоль диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec\omega_1$ и $\vec\omega_2$. Сложение подчиняется правилу параллелограмма.* Физическое сложение в указанном смысле оказалось тождественным с математическим.

3. Поясним изложенное наглядным примером. Пусть по поверхности неподвижного кругового конуса *2* катится без скольжения другой круговой конус *1* (рис. 117 и 118). Вершины обоих конусов все время находятся в одной и той же точке O. В рассматриваемом движении конус *1* вращается вокруг собственной оси OA с некоторой угловой скоростью $\vec\omega_1$. Сама ось OA описывает коническую поверхность, вращаясь вокруг другой оси OB с угловой скоростью $\vec\omega_2$. Речь идет о сложении этих двух вращений. Так как скольжения нет, то все точки тела, лежащие на прямой OC, по которой конусы касаются друг друга, неподвижны. Касательная OC является поэтому мгновенной осью вращения конуса *1*. Мгновенная ось вращения перемещается в теле, т.е. в конусе *1*, двигаясь по его поверхности. Но она перемещается также и в пространстве, т.е. по поверхности конуса *2*.

4. Вращение вокруг параллельных осей можно рассматривать как предельный случай вращений вокруг пересекающихся осей. При сложении таких вращений надо различать два случая: 1) вращения совершаются в одном направлении, 2) вращения совершаются в противоположных направлениях. Рассмотрим первый случай. Построив параллелограмм на векторах $\vec\omega_1$ и $\vec\omega_2$, пересечем его произвольной прямой ACB, перпендику-

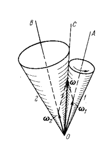


Рис. 117

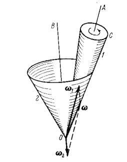


Рис. 118

4. Полученные результаты можно обобщить на случай негармонических колебаний с одной степенью свободы, т.е. колебаний, совершающихся под действием не квазиупругих сил. В этом случае колеблющаяся величина меняется во времени не синусоидально, а как-то иначе. Период колебаний T определяется не только параметрами системы, но и их амплитудой. Вместо формулы (43.7) получается

$$\bar K T = \text{const}, \tag{43.9}$$

где $\bar K$ — кинетическая энергия системы, усредненная по времени за период колебания (черта как раз и означает такое усреднение), т.е.

$$\bar K(t) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} K(t')\,dt'. \tag{43.10}$$

В случае гармонических колебаний, как нетрудно доказать, средние за период значения кинетической и потенциальной энергий одинаковы, а потому на каждую из них приходится половина полной энергии, т.е. $\bar K = \bar U = \tfrac12 E$. Тогда формула (43.9) переходит в ранее полученную формулу (43.7).

Подставим выражение (43.10) в формулу (43.9) и примем во внимание, что $K = \tfrac12 mv^2$, $p = mv$, $dq = v\,dt$, где dq — приращение координаты, определяющей положение материальной точки. Тогда получится

$$\oint p\,dq = \text{адиабатический инвариант}, \tag{43.11}$$

причем интегрирование ведется по полному периоду движения материальной точки в предположении, что параметры, характеризующие систему, закреплены. Общее доказательство соотношения (43.11) основано на уравнениях механики в форме Гамильтона. Мы его приводить не будем. Ограничимся только двумя примерами.

5. П е р в ы й п р и м е р. В цилиндре с гладкими стенками движется вверх и вниз идеально упругий шарик, последовательно отражающийся от основания AB и поршня CD по законам абсолютно упругого удара (рис. 106). Допустим сначала, что поля силы тяжести и прочих силовых полей нет. Заставим поршень CD очень медленно перемещаться со скоростью u. Исследуем, как это скажется на движении шарика. Перейдем в движущуюся систему отсчета, в которой поршень покоится. В этой системе скорость шарика будет $v - u$. После отражения шарика она сохранится по модулю, но изменит знак, т.е. будет равна $-v + u$. В неподвижной системе отсчета та же скорость равна $(-v + u) + u = -v + 2u$. Приращение кинетической энергии шарика в результате однократного отражения от движущегося поршня будет поэтому равно

$$\Delta K = \frac{m}{2}\left[(-v + 2u)^2 - v^2\right] = -2m(uv - u^2).$$

Разделив это соотношение на $K = \tfrac12 mv^2$ и пренебрегая квадратом малой скорости u, получим

$$\frac{\Delta K}{K} = -4\frac{u}{v}. \tag{43.12}$$

Посмотрим теперь, как меняется период колебаний шарика T в результате движения поршня. Под периодом T мы понимаем время движения шарика туда и обратно, вычисленное в предположении, что во время такого движения поршень *закреплен*. Если l — расстояние между поршнем и дном цилиндра во время этого движения, то $T = 2l/v$. Спустя время T расстояние l возрастает на uT, а скорость шарика уменьшится

Рис. 106

Рис. 107

на $2u$. Период колебаний в только что указанном смысле изменится и сделается равным

$$T' = \frac{2(l + uT)}{v - 2u} = \frac{2(l + uT)(v + 2u)}{v^2 - 4u^2},$$

или, пренебрегая квадратом малой скорости u,

$$T' = T + \frac{2uTv + 4lu}{v^2} = T + 4T\frac{u}{v}.$$

Таким образом, за время T период получает приращение

$$\Delta T = 4T\frac{u}{v} = -T\frac{\Delta K}{K}.$$

В пределе, когда поршень движется бесконечно медленно, приращения ΔT и ΔK могут рассматриваться как бесконечно малые дифференциалы, и мы получаем уравнение

$$\frac{dT}{T} + \frac{dK}{K} = 0.$$

Интегрируя его, находим

$$TK = \text{const}, \tag{43.13}$$

т.е. величина TK является адиабатическим инвариантом.

6. В т о р о й п р и м е р. Учтем теперь наличие силы тяжести. Пусть v_1 — скорость отразившегося шара в верхнем положении (рис. 107). На расстоянии x его скорость v определится соотношением $v^2 = v_1^2 + 2gx$. Интеграл (43.11) в рассматриваемом случае будет

$$J = 2m\int_0^l \sqrt{v_1^2 + 2gx}\,dx,$$

При этом угловая скорость мгновенного вращения в пределе сделается равной ω.

6. Если аксиальный вектор $\vec\omega$ продифференцировать по скалярному аргументу, например по времени t, то в результате получится новый аксиальный вектор $\vec\eta = \dfrac{d\vec\omega}{dt}$, называемый *угловым ускорением* (см. § 7).

Его проекции на координатные оси по определению даются выражениями

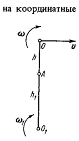


Рис. 121

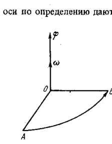


Рис. 122

$\eta_x = \dfrac{d\omega_x}{dt}$, $\eta_y = \dfrac{d\omega_y}{dt}$, $\eta_z = \dfrac{d\omega_z}{dt}$. Аналогично в результате интегрирования $\vec\omega$ по t получается другой аксиальный вектор $\vec\varphi = \int \vec\omega\,dt$ с составляющими $\varphi_x = \int\omega_x\,dt$, $\varphi_y = \int\omega_y\,dt$, $\varphi_z = \int\omega_z\,dt$. Векторный (точнее, псевдовекторный) характер этих величин, как всегда, означает только то, что при повороте (но не инверсии) координатных систем их составляющие преобразуются так же, как разности координат концов направленного геометрического отрезка. Если направление оси вращения не меняется с течением времени, то вектор $\vec\varphi$ направлен параллельно $\vec\omega$, т.е. по оси вращения. Его длина численно равна углу поворота тела за рассматриваемый промежуток времени. Поэтому $\vec\varphi$ естественно назвать *угловым поворотом тела*. Угловой поворот пропорционален площади сектора OAB, описываемого каким-либо отрезком OA, перпендикулярным к оси вращения, при его переходе из начального положения OA в конечное положение OB (рис. 122). Направление $\vec\varphi$ совпадает с направлением перпендикуляра к плоскости сектора OAB, а его составляющие φ_x, φ_y, φ_z пропорциональны площадям проекций этого сектора на координатные плоскости. Это лишний раз подтверждает векторный характер величины $\vec\varphi$ (см. § 7).

7. На примере угловых поворотов можно наглядно показать необходимость строгого разграничения между *математическим сложением* векторов (аксиоматически определяемым с помощью правила параллелограмма) и *физическим сложением* их, вводимым с помощью какой-либо физической операции. Введем физическое сложение угловых перемещений в том же смысле, в каком понимается физическое сложение линейных перемещений (см. § 7, п. 6). Пусть материальная точка последовательно совершает вращения вокруг различных осей, проходящих через неподвижную точку O (рис. 123). При таких вращениях она движется вдоль дуг больших кругов по поверхности сферы с центром в O. Пусть точка перешла из начального положения A в конечное положение B вдоль дуги большого круга AB. Радиус-вектор точки при этом повернулся на угол φ_1. Затем точка совершила поворот на угол φ_2, перейдя по дуге большого круга BC из положения B в положение C. Каким одним поворотом можно заменить эти два поворота, чтобы перевести точку из того же начального положения A в то же конечное положение C? Ясно, что таким поворотом будет вращение точки по дуге большого круга, проходящей через точки A и C. Обозначим соответствующий угол поворота φ_3. В соответствии со сказанным выше рассматриваемые три поворота можно изобразить векторами $\vec\varphi_1$, $\vec\varphi_2$, $\vec\varphi_3$, перпендикулярными соответственно к плоскостям секторов OAB, OBC и OAC. Поворот $\vec\varphi_3$ можно назвать суммой поворотов $\vec\varphi_1$ и $\vec\varphi_2$ в рассматриваемом физическом смысле. Ясно, что такое сложение не подчиняется

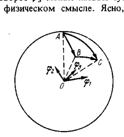


Рис. 123

Рис. 124

правилу параллелограмма. Это видно уже из того, что в общем случае вектор $\vec\varphi_3$ не лежит в плоскости векторов $\vec\varphi_1$ и $\vec\varphi_2$.

Особенно очевидным станет это утверждение, если рассмотреть частный случай. За начальное положение материальной точки возьмем полюс A (рис. 124). Затем по дуге меридиана AB совершим первый поворот на угол $\varphi_1 = 90°$, переведя точку в положение B на экваторе. Второй поворот на угол $\varphi_2 = 90°$ совершим по дуге экватора BC. Очевидно, третий пово-

ГЛАВА VII

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 44. Твердое тело в механике. Уравнения движения и равновесия твердого тела

1. В двух предыдущих главах уже говорилось о законах движения твердого тела и их применениях к некоторым простейшим движениям. В этой главе будет продолжено изучение избранных вопросов механики твердого тела.

Напомним, что *твердым телом* в механике называют неизменяемую систему материальных точек, т.е. такую идеализированную систему, при любых движениях которой взаимные расстояния между материальными точками системы остаются неизменными. Здесь, как и вообще в классической механике, под материальными точками понимают не атомы или молекулы, а достаточно малые макроскопические части, на которые мысленно можно разделить рассматриваемую механическую систему.

С атомистической точки зрения силы взаимодействия между материальными точками твердого тела являются силами *электрическими*. Но атомистический подход чужд феноменологической механике твердого тела. Последняя рассматривает твердое тело как *сплошную среду*, между различными элементами которой действуют внутренние силы в виде *нормальных и касательных напряжений*. Причиной их феноменологическая механика считает *деформации тел*. Если в теле совсем нет деформаций, то не может быть и внутренних напряжений. Однако если деформации, возникающие под действием внешних сил, малы и сами по себе нас не интересуют, то в ряде случаев от них можно отвлечься. Таким путем мы приходим к идеализированной модели тела, совершенно не способного деформироваться, хотя под действием внешних сил в нем и могут возникать внутренние натяжения и давления. Это и есть идеально твердое тело. Допустима или нет такая, как и всякая другая, идеализация — это определяется не только свойствами реальных тел, но и содержанием тех вопросов, на которые надо получить ответ.

2. Твердое тело является механической системой с шестью степенями свободы (см. § 8). Для описания его движения требуется шесть независимых числовых уравнений. Вместо них можно взять два независимых век-

торных уравнения. Таковыми являются уравнение движения центра масс

$$m\frac{dV}{dt} = \boldsymbol F_{\text{внеш}} \tag{44.1}$$

и уравнение моментов

$$\frac{dL}{dt} = \boldsymbol M_{\text{внеш}}. \tag{44.2}$$

Уравнение моментов можно брать относительно произвольного неподвижного начала или относительно центра масс твердого тела. Можно также брать произвольно движущееся начало, если только скорость его в любой момент времени параллельна скорости центра масс (см. § 37). При ограничении свободы движения число независимых уравнений, требующихся для описания движения твердого тела, уменьшается. Оно всегда равно числу степеней свободы.

В уравнения (44.1) и (44.2) входят только внешние силы. Внутренние силы не влияют на движение центра масс и не могут изменить момент импульса тела. Они могут изменять только взаимное расположение и скорости материальных точек тела. Но для абсолютно твердого тела такие изменения невозможны. Таким образом, внутренние силы не влияют на движение твердого тела. Если же сила внешняя, то точку приложения ее можно произвольно перемещать вдоль линии, по которой она действует. Действительно, при таком перемещении не меняются результирующая внешних сил $\boldsymbol F_{\text{внеш}}$ и их момент $\boldsymbol M_{\text{внеш}}$, т.е. уравнения движения (44.1) и (44.2) остаются без изменения. Подобное перемещение недопустимо в случае деформируемого тела, так как оно приводит к перераспределению деформаций и изменению внутренних движений тела.

3. Если твердое тело покоится, то уравнения (44.1) и (44.2) переходят в

$$\boldsymbol F_{\text{внеш}} = 0, \qquad \boldsymbol M_{\text{внеш}} = 0. \tag{44.3}$$

Это *необходимые условия* равновесия твердого тела. Но они не являются достаточными. При их выполнении центр масс может еще двигаться прямолинейно и равномерно с произвольной скоростью, а само тело может вращаться с сохранением вращательного импульса. Так как при равновесии результирующая внешних сил $\boldsymbol F_{\text{внеш}}$ равна нулю, то момент этих сил $\boldsymbol M_{\text{внеш}}$ в состоянии равновесия не зависит от положения неподвижного начала O, относительно которого он берется [см. формулу (30.7)]. Поэтому при решении любой задачи на равновесие твердого тела начало O можно выбирать произвольно, что можно использовать для упрощения самого решения.

4. Не всегда можно заменять реальные твердые тела идеализированными абсолютно твердыми моделями даже в тех случаях, когда деформации пренебрежимо малы.

производные векторов $\boldsymbol i$ и $\boldsymbol j$:

$$\frac{di}{dt} = \dot\varphi[ki] = \dot\varphi j, \quad \frac{dj}{dt} = \dot\varphi[kj] = -\dot\varphi i. \tag{46.12}$$

Представим радиус-вектор движущейся точки в виде $r = ri$. Дифференцируя его один раз, находим скорость:

$$\mathbf v = \dot r = \dot r i + r\frac{di}{dt} = \dot r i + r\dot\varphi j.$$

Дифференцируя вторично, находим ускорение:

$$a = \dot{\mathbf v} = \ddot r i + r\frac{di}{dt} + \dot r\dot\varphi j + r\ddot\varphi j + r\dot\varphi\frac{dj}{dt} = (\ddot r - \dot\varphi^2 r)i + (2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi)j.$$

Эти формулы дают разложение скорости и ускорения на радиальные (направленные

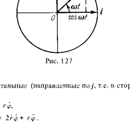


Рис. 127

вдоль радиуса) и азимутальные (направленные по j, т.е. в сторону возрастания угла φ) составляющие:

$$v_r = \dot r, \qquad v_\varphi = r\dot\varphi, \tag{46.13}$$

$$a_r = \ddot r - \dot\varphi^2 r, \quad a_\varphi = 2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi. \tag{46.14}$$

5. С помощью соотношения (46.10) получить формулы для дифференцирования синуса и косинуса.

Р е ш е н и е. Рассмотрим единичный вектор A, равномерно вращающийся вокруг начала координат O (рис. 127). Если координатные оси неподвижны, то

$$A = i\cos\omega t + j\sin\omega t.$$

Производная этого вектора по t равна

$$\dot A = i\frac{d}{dt}(\cos\omega t) + j\frac{d}{dt}(\sin\omega t).$$

С другой стороны, ту же производную можно вычислить по формуле (46.10). Так как $\vec\omega = \omega k$, то эта формула дает

$$\dot A = \omega[kA] = \omega\cos\omega t\,[ki] + \omega\sin\omega t\,[kj] = j\omega\cos\omega t - i\omega\sin\omega t.$$

Сравнивая оба результата, получим

$$\frac{d}{dt}(\sin\omega t) = \omega\cos\omega t, \quad \frac{d}{dt}(\cos\omega t) = -\omega\sin\omega t.$$

Можно сказать, что векторная формула (46.10) эквивалентна правилам дифференцирования синуса и косинуса.

§ 47. Теорема Эйлера. Общее движение твердого тела

1. Рассмотрим *плоское движение* твердого тела, т.е. такое движение, когда все точки тела движутся параллельно одной плоскости. Не теряя общности, можно считать само тело плоским, а движение — происходящим в плоскости тела. Положение плоского тела однозначно определяется заданием положений каких-либо двух точек его. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением движения какой-либо одной прямой плоского тела. Пусть выбранная прямая твердого тела перешла из положения AB в положение A_1B_1 (рис. 128). Соединим точку A с точкой A_1, а точку B с точкой B_1. Из середин отрезков AA_1 и BB_1 восстановим перпендикуляры EO и DO, пересекающиеся в точке O. Докажем, что прямую AB можно перевести в положение A_1B_1 путем одного поворота вокруг точки O. Действительно, из построения следует, что точка O равноудалена от точек

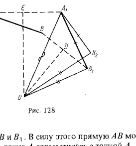


Рис. 128

A и A_1, а также от точек B и B_1. В силу этого прямую AB можно повернуть вокруг точки O так, чтобы точка A совместилась с точкой A_1. Докажем, что при этом точка B также совместится с точкой B_1. Для доказательства допустим, что точка B не совместилась с B_1, а заняла положение B_2. Разумеется, точка B_2 будет находиться на таком же расстоянии от O, что и точка B, а потому $OB_1 = OB_2$. Кроме того, в треугольниках OA_1B_1 и OA_1B_2 сторона OA_1 — общая, а стороны A_1B_1 и A_1B_2 равны, так как тело твердое, а потому расстояние между концами отрезка AB не меняется при его движении.

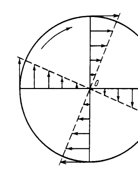


Рис. 111

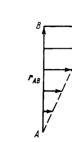


Рис. 112

Их скорости пропорциональны радиусам соответствующих окружностей. Модули скоростей могут меняться с течением времени, но ось вращения остается одной и той же.

2. Рассмотрим теперь более общее движение плоского твердого тела. Плоскость вращения совпадает с плоскостью самого тела. Никакой неподвижной оси, вокруг которой происходило бы вращение тела, не предполагается. Если A и B — две произвольные точки твердого тела (рис. 112), то расстояние между ними остается неизменным, а потому $(\boldsymbol r_B - \boldsymbol r_A)^2 = \text{const}$. Дифференцируя это соотношение по времени, получим $(\boldsymbol r_B - \boldsymbol r_A) \times (\dot{\boldsymbol r}_B - \dot{\boldsymbol r}_A) = 0$, или

$$\boldsymbol r_{AB}(\mathbf v_B - \mathbf v_A) = 0, \tag{45.1}$$

где $\boldsymbol r_{AB} \equiv \overrightarrow{AB}$. Допустим, что в рассматриваемый момент времени в теле существует точка, скорость которой в этот момент времени равна нулю. (В § 47 будет показано, что такая точка существует для произвольного плоского движения твердого тела.) Примем ее за точку A. Тогда для рассматриваемого момента времени

$$\boldsymbol r_{AB}\mathbf v_B = 0,$$

каково бы ни было положение точки B. Отсюда видно, что скорость $\mathbf v_B$ перпендикулярна к $\boldsymbol r_{AB}$, т.е. направлена по касательной к окружности с центром в A. При движении твердого тела всякая прямая в теле остается прямой. Это справедливо и для прямой, соединяющей точки A и B. Поскольку в рассматриваемый момент точка A неподвижна, то модуль скорости $\mathbf v_B$ в этот момент пропорционален расстоянию AB от точки B до точки A. На основании всего этого можно сказать, что *мгновенное распределение ско-*

ростей в теле в рассматриваемый момент времени будет в точности таким же, как и при вращении вокруг неподвижной оси, проходящей через точку A. Движение тела в этом случае называют *мгновенным вращением*. Прямая, проходящая через точки тела, скорости которых в рассматриваемый момент времени равны нулю, называется *мгновенной осью вращения*. В нашем примере мгновенная ось проходит через точку A. Словом "мгновенная" хотят подчеркнуть, что это понятие служит для описания распределения скоростей только в какой-то заданный *момент времени*. В отличие от неподвижной оси, сохраняющей свое положение в теле и в пространстве, *мгновенная ось, вообще говоря, перемещается как в теле, так и в пространстве*. Если получить моментальную фотографию распределения скоростей в теле, то по виду этой фотографии нельзя сказать, происходит ли вращение вокруг неподвижной или вокруг мгновенной оси. Чтобы отличить эти два вращения, надо получить такие фотографии по крайней мере в два различных момента времени.

3. *Мгновенная ось служит для описания мгновенного распределения только скоростей.* Той же осью нельзя пользоваться для описания мгновенного распределения ускорений или высших производных скорости по времени. Распределение ускорений при вращении вокруг мгновенной оси может существенно отличаться от соответствующего распределения ускорений при вращении вокруг неподвижной оси, хотя бы угловые скорости вращения в обоих случаях и совпадали. Дело в том, что для определения ускорений недостаточно знать распределение скоростей только в рассматриваемый момент времени. Надо знать это распределение также в бесконечно близкий момент времени. А в этот момент может оказаться, что движение тела уже перестанет быть вращением вокруг прежней мгновенной оси.

Следующий простой пример хорошо разъясняет суть дела. Рассмотрим качение обруча или диска по плоскости без скольжения (рис. 113). Отсутствие скольжения означает, что точка обруча A, которой он касается плоскости, в рассматриваемый момент неподвижна. Следовательно, движение обруча можно рассматривать как мгновенное вращение его вокруг мгновенной оси, проходящей через точку касания A. Распределение скоростей при таком движении показано на рис. 113. С течением времени в соприкосновении с плоскостью будут приходить другие точки обруча. При этом точка касания будет перемещаться по

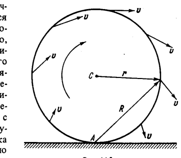


Рис. 113

Скорость поступательного движения $\mathbf v_O$, конечно, зависит от выбора точки O. Но *угловая скорость $\vec\omega$ не зависит от положения точки O, к которой отнесено вращение твердого тела*. Поэтому *можно говорить об угловой скорости вращения твердого тела, не указывая эту точку*. Докажем это.

Выберем другую произвольную точку тела O' и отнесем к ней вращение твердого тела. Соответствующую угловую скорость вращения обозначим через $\vec\omega'$. Тогда скорость $\mathbf v$ прежней точки A можно представить в другом виде:

$$\mathbf v = \mathbf v_{O'} + [\vec\omega'\boldsymbol r'],$$

где $\boldsymbol r'$ — радиус-вектор, проведенный из O' в A. Так как речь идет о скорости одной и той же точки, то эта величина должна совпадать с (47.1). Это дает

$$\mathbf v_O + [\vec\omega\boldsymbol r] = \mathbf v_{O'} + [\vec\omega'\boldsymbol r'].$$

Подставим сюда $\boldsymbol r' = \boldsymbol r + \boldsymbol R$, где $\boldsymbol R$ означает вектор $\overrightarrow{O'O}$. Кроме того, примем во внимание, что скорость точки O можно получить векторным сложением скорости точки O' и скорости вращения вокруг нее с угловой скоростью $\vec\omega'$, т.е.

$$\mathbf v_O = \mathbf v_{O'} + [\vec\omega'\boldsymbol R].$$

С учетом этого получим

$$\mathbf v_{O'} + [\vec\omega'\boldsymbol R] + [\vec\omega\boldsymbol r] = \mathbf v_{O'} + [\vec\omega'(\boldsymbol r + \boldsymbol R)],$$

или

$$[\vec\omega\boldsymbol r] = [\vec\omega'\boldsymbol r].$$

В силу произвольности $\boldsymbol r$ отсюда следует $\vec\omega' = \vec\omega$.

4. Допустим, что твердое тело вращается вокруг неподвижной точки. Примем эту точку за начало координат O. Кинетическая энергия такого тела, очевидно, равна

$$K = \tfrac12\int \mathbf v^2\,dm,$$

где интегрирование ведется по всей массе тела. Воспользовавшись формулой $\mathbf v = [\vec\omega\boldsymbol r]$, можем написать $\mathbf v^2 = (\mathbf{vv}) = ([\vec\omega\boldsymbol r]\mathbf v)$, или после перестановки порядка сомножителей $\mathbf v^2 = (\vec\omega[\boldsymbol r\mathbf v])$. Так как $\vec\omega$ одинакова для всех точек тела, то

$$K = \tfrac12\vec\omega\int[\boldsymbol r\mathbf v]\,dm,$$

или

$$K = \tfrac12(\boldsymbol L\vec\omega), \tag{47.2}$$

где $\boldsymbol L$ — момент импульса тела относительно точки O.

В общем случае векторы $\boldsymbol L$ и $\vec\omega$ направлены под углом друг к другу. В этом проще всего убедиться на примере одной материальной точки M, вращающейся вокруг неподвижной или мгновенной оси. Возьмем начало O на этой оси. Тогда

$$\vec L = m[\vec r\vec v] = m[\vec r[\vec\omega\vec r]] = m r^2\vec\omega - m(\vec r\vec\omega)\vec r \quad {}^{0,\ \text{т.к.}\ \vec r \perp \vec\omega} = I\vec\omega.$$

Последнее слагаемое в нуль, ~~вообще говоря,~~ ~~не~~ обращается, ~~а потому в общем случае~~ т.к. векторы $\vec r$ и $\vec\omega$ ~~не~~ коллинеарны. Они коллинеарны только тогда, когда в качестве начала O взято основание перпендикуляра, опущенного из M на ось вращения. В этом случае момент $\boldsymbol L$ относительно точки O сводится к моменту относительно оси вращения. Обозначая последний через L_x, можем написать $L = L_x = I\omega$, где I — момент инерции точки относительно оси вращения. Таким образом, формула (47.2) переходит в $K = \tfrac12 L_x\omega = \tfrac12 I\omega^2$. Последняя формула справедлива не только для одной материальной точки, но и для всего тела, поскольку последнее можно рассматривать как систему материальных точек, вращающихся вокруг общей оси. Таким образом, формула (47.2) эквивалентна формуле (33.6), полученной ранее иным путем.

§ 48. Скатывание тел с наклонной плоскости

1. Пусть скатывающееся тело обладает *симметрией вращения* относительно геометрической оси C (рис. 130). Будем предполагать, что при движении не возникает скольжения. Это означает, что скорость тела в точке касания A равна нулю. Отсутствие скольжения обеспечивается действием сил со стороны наклонной плоскости на скатывающееся тело. Эти силы

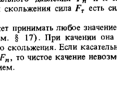


Рис. 130

сводятся к силе нормального давления $\boldsymbol F_n$ и к касательной силе трения $\boldsymbol F_\tau$. При отсутствии скольжения сила $\boldsymbol F_\tau$ есть сила трения покоя или сила трения сцепления.

Модуль силы F_τ может принимать любое значение от 0 до kF_n, где k — коэффициент трения (см. § 17). При качении она устанавливается как раз такой, чтобы не было скольжения. Если касательная сила, требующаяся для этого, превышает kF_n, то чистое качение невозможно — оно будет сопровождаться скольжением.

лярной к вектору $\vec{\omega}$ (рис. 119 слева). Тогда $h_1 = OC \cdot \operatorname{tg}\alpha_1$, $h_2 = OC \cdot \operatorname{tg}\alpha_2$. Если углы α_1 и α_2 малы, то их тангенсы можно заменить синусами. Сделав это, получим

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \qquad (46.7)$$

Устремив точку O в бесконечность, получим предельный случай одинаково направленных вращений вокруг параллельных осей (рис. 119 справа). Такие два вращения складываются в одно вращение вокруг мгновенной оси с угловой скоростью $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Мгновенная ось проходит между осями *1* и *2* и делит расстояние между ними обратно пропорционально угловым скоростям ω_1 и ω_2.

Аналогично рассматривается случай, когда векторы $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ направлены противоположно. Если $\omega_1 > \omega_2$, то $\omega = \omega_1 - \omega_2$. Мгновенная ось проходит вне отрезка AB со стороны большей угловой скорости (рис. 120).

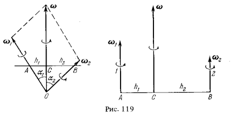


Рис. 119

Она делит отрезок AB *внешним образом* на части h_1 и h_2, обратно пропорциональные угловым скоростям ω_1 и ω_2.

5. Рассмотрим, наконец, сложение поступательного и вращательного движений. Если поступательное движение совершается параллельно оси вращения, то при сложении, очевидно, получится *винтовое движение*. Достаточно поэтому ограничиться случаем, когда поступательное движение перпендикулярно к оси вращения. В этом случае все точки тела будут двигаться, параллельно одной и той же плоскости, перпендикулярной к той же оси. Такое движение называется *плоским*. Плоскость, параллельно которой происходит движение, можно принять за плоскость рисунка. Поступательное движение можно рассматривать как вращение вокруг бесконечно удаленной оси. Поэтому разбираемый случай можно свести к сложению двух вращений вокруг параллельных осей, удаляя одну из осей в бесконечность. Ясно, что в результате возникает вращение вокруг какой-то мгновенной

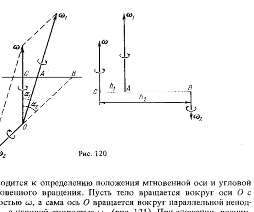


Рис. 120

оси. Задача сводится к определению положения мгновенной оси и угловой скорости мгновенного вращения. Пусть тело вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω, а сама ось O вращается вокруг параллельной неподвижной оси O_1 с угловой скоростью ω_1 (рис. 121). При сложении возникнет вращение вокруг мгновенной оси A, причем

$$\frac{h}{h_1} = \frac{\omega_1}{\omega}.$$

Вследствие вращения вокруг оси O_1 ось O получает скорость $v = \omega_1 (h + h_1)$, перпендикулярную к линии O_1O. Будем удалять O_1 в бесконечность, одновременно уменьшая ω_1 так. чтобы скорость v оставалась неизменной. В пределе вращение оси O вокруг оси O_1 перейдет в поступательное движение со скоростью v. Положение мгновенной оси вращения A определится ее расстоянием до оси O. Это расстояние равно

$$h = \frac{h_1\omega_1}{\omega} = \frac{(h_1 + h)\omega_1 - h\omega_1}{\omega} = \frac{v - h\omega_1}{\omega}.$$

Отсюда

$$h\left(1 + \frac{\omega_1}{\omega}\right) = \frac{v}{\omega}.$$

Так как $\omega_1 \to 0$, то в пределе

$$h = \frac{v}{\omega}. \qquad (46.8)$$

тегрирования обозначена t', чтобы не смешивать ее с нижним пределом t.) Входящий сюда интеграл достаточно вычислить в нулевом приближении, т.е. считать при вычислении, что за время T параметр k не меняется. Возникающая вследствие этого ошибка в выражении для ΔE будет второго или высшего порядка малости по $\dot{k}$. По той же причине можно отбросить поправку β. Наконец, можно опустить индекс нуль в множителе перед интегралом $(\dot{k}/k)_0$. Иными словами, можно написать

$$\Delta E = \frac{\dot{k}}{k}\int_t^{t+T} U[x(t')]\,dt', \qquad (43.4)$$

где интеграл (но не множитель перед интегралом) вычисляется в предположении постоянства k. При вычислении интеграла момент времени t можно принять за начало отсчета времени, т.е. положить $t = 0$. Это, конечно, не изменит результата. При $k = \text{const}$ координата x совершает гармонические колебания $x = x_0\cos(\omega t + \delta)$, а потому

$$U = \tfrac{1}{2} kx_0^2\cos^2(\omega t + \delta) = \tfrac{1}{2} E[1 + \cos(2\omega t + \delta)],$$

так как полная энергия равна $E = \tfrac{1}{2}kx_0^2$. Используя полученное выражение и выполняя интегрирование, получим

$$\int_0^T U\,dt = \tfrac{1}{2}E\int_0^T [1 + \cos(2\omega t + \delta)]\,dt = \tfrac{1}{2}ET.$$

Произведение $T\dot{k}$ с точностью до величин высшего порядка малости по $\dot{k}$ дает приращение Δk параметр k за период T. Таким образом, вместо (43.4) можно написать

$$\Delta E = \frac{\Delta k}{2k}E. \qquad (43.5)$$

Приращение Δk за период колебаний может быть сделано сколь угодно малым. Поэтому если энергию E рассматривать как функцию параметра k, то в пределе приближенное соотношение (43.5) перейдет в точное дифференциальное уравнение

$$\frac{dE}{E} - \frac{dk}{2k} = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\ln(E/\sqrt{k}) = \text{const},$$

а потому

$$E/\sqrt{k} = \text{const}. \qquad (43.6)$$

Используя формулы (40.3) и (40.4), из этого соотношения получим еще два других:

$$ET = \text{const}, \qquad (43.7)$$

$$E/\omega = \text{const}. \qquad (43.8)$$

Эти соотношения означают, что *величины ET и E/ω для гармонического осциллятора являются адиабатическими инвариантами.* При этом *период колебания T и частота ω*, входящие в эти соотношения, *должны вычисляться так, как если бы при колебаниях параметр k оставался постоянным*, т.е. по формулам (40.3) и (40.4). Например, в случае медленного укорочения нити математического маятника, совершающего малые колебания, его период T медленно уменьшается от колебания к колебанию. Одновременно энергия колебаний возрастает таким образом, что произведение ET остается постоянным.

3. Для правильного понимания доказанной теоремы необходимо точно отдавать себе отчет, что понимается под медленностью изменения параметра осциллятора k. Недостаточно, чтобы изменения параметра k на каждом периоде колебаний были бесконечно малы. Надо, чтобы эти изменения удовлетворяли условию (43.2). Представим себе, например, что вблизи нижнего положения нить математического маятника действием внешних сил немного укорачивается, а вблизи крайних положений удлиняется, принимая исходное значение. Работа внешних сил при укорочении нити вблизи нижнего положения будет больше работы, производимой маятником над внешними полями при удлинении нити вблизи каждого крайнего положения. Причина этого в том, что при колебаниях маятника натяжение нити меняется, достигая максимума в нижнем положении. Поэтому за каждое колебание в систему дважды будет вкладываться энергия. И если число колебаний взять достаточно большим, то и прирост энергии можно сделать также большим, хотя длина маятника, а с ней и период T останутся неизменными. Колебания с периодически меняющимися параметрами называются *параметрическими*. Примером могут служить качели. К параметрическим колебаниям результаты (43.7) и (43.8) не применимы, сколь бы малыми ни были изменения параметра k в пределах каждого периода колебаний. Причина этого в том, что эти изменения не удовлетворяют условию (43.2). Грубо говоря, *условие (43.2) сводится к требованию, чтобы изменения параметра k происходили медленно и монотонно.* Так, в приведенном примере адиабатическая инвариантность выражений (43.7) и (43.8) будет иметь место, если длина нити изменяется медленно и монотонно. Если же на такие изменения наложить еще малые изменения колебательного характера, подобные тем, которые имеют место при параметрическом возбуждении колебаний, то к таким случаям теорема об адиабатической инвариантности выражений (43.7) и (43.8) не применима.

рот φ_3 надо произвести по дуге меридиана AC также на 90°. В рассматриваемом случае все три вектора, $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \vec{\varphi}_3$, взаимно перпендикулярны и имеют одну и ту же длину. Ни один из них не может быть геометрической суммой двух других.

Если $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ означают проекции вектора $\vec{\varphi}$ на координатные оси, то $\vec{\varphi} = \varphi_x\boldsymbol{i} + \varphi_y\boldsymbol{j} + \varphi_z\boldsymbol{k}$. Здесь сложение понимается в математическом смысле (по правилу параллелограмма). Однако, как следует из изложенного, слагаемые $\varphi_x\boldsymbol{i}, \varphi_y\boldsymbol{j}, \varphi_z\boldsymbol{k}$ нельзя рассматривать как последовательно

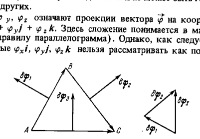


Рис. 125

выполняемые повороты вокруг координатных осей, приводящее к единому повороту, представляемому вектором $\vec{\varphi}$.

8. Допустим, однако, что углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ неограниченно стремятся к нулю. Тогда сферический треугольник ABC (см. рис. 123) становится бесконечно малым и может считаться плоским (рис. 125). Дуги больших кругов AB, BC и AC могут рассматриваться как прямолинейные отрезки. Векторы угловых перемещений $\delta\vec{\varphi}_1, \delta\vec{\varphi}_2, \delta\vec{\varphi}_3$ будут лежать в плоскости треугольника ABC. (Мы пишем $\delta\vec{\varphi}$ вместо $\vec{\varphi}$, чтобы подчеркнуть, что речь идет о бесконечно малых углах.) Они, очевидно, перпендикулярны к сторонам AB, BC и AC соответственно, а их длины пропорциональны этим сторонам (рис. 125). Отсюда следует, что бесконечно малый вектор $\delta\vec{\varphi}_3$ является геометрической суммой векторов $\delta\vec{\varphi}_1$ и $\delta\vec{\varphi}_2$. Это значит, что *бесконечно малые угловые перемещения складываются геометрически* (в указанном выше физическом смысле), *т.е. по правилу параллелограмма.* Иными словами, такое *физическое сложение угловых перемещений в пределе бесконечно малых углов поворота переходит в математическое.*

ЗАДАЧИ

1. Показать, что элементарная работа, совершаемая над системой материальных точек при ее повороте на бесконечно малый угол $\delta\vec{\varphi}$, выражается скалярным произведением

$$\delta A = (\boldsymbol{M}\delta\vec{\varphi}), \qquad (46.9)$$

где $\boldsymbol{M}$ – геометрическая сумма моментов сил, действующих на материальные точки системы, относительно вершины угла поворота.

Решение. $\delta A = \Sigma(\boldsymbol{F}_i\,\delta\boldsymbol{r}_i)$. Здесь суммирование ведется по всем точкам системы. При повороте $\delta\boldsymbol{r}_i = [\delta\vec{\varphi}\boldsymbol{r}_i]$, причем угол $\delta\vec{\varphi}$ один и тот же для всей системы. Подставив это выражение в предыдущую формулу и заметив, что $\boldsymbol{F}_i[\delta\vec{\varphi}\boldsymbol{r}_i] = \delta\vec{\varphi}[\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{F}_i] = (\boldsymbol{M}_i\delta\vec{\varphi})$, получим требуемый результат.

2. Используя изотропию пространства, доказать, что геометрическая сумма моментов внутренних сил, действующих в системе материальных точек, равна нулю (см. § 38).

Решение. Допустим, что система замкнута. Пусть $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \ldots$ – моменты внутренних сил, действующие на материальные точки системы, относительно произвольного неподвижного начала O. Повернем всю систему вокруг точки O на произвольный бесконечно малый угол $\delta\vec{\varphi}$ и притом так, чтобы скорости всех материальных точек повернулись на тот же угол без изменения своего модуля. Ввиду изотропии пространства на такой поворот не требуется затраты работы. Но эта работа представляется скалярным произведением $(\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \ldots)\,\delta\vec{\varphi}$. Значит, это скалярное произведение равно нулю, каков бы ни был поворот $\delta\vec{\varphi}$. Отсюда следует, что для замкнутой системы $\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \ldots = 0$.

3. Пусть вектор A неизменной длины вращается вокруг своего начала с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Показать, что его производная по времени определяется формулой

$$\dot{A} = [\vec{\omega}A]. \qquad (46.10)$$

В частности, при вращении координатной системы орты $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ дифференцируются по формулам

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = [\omega\boldsymbol{i}], \quad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = [\omega\boldsymbol{j}], \quad \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = [\omega\boldsymbol{k}]. \qquad (46.11)$$

Решение. Вектор A неизменной длины можно отождествить с абсолютно твердым тонким стержнем той же длины. Если начало вектора A неподвижно, то производная $\dot{A}$ имеет смысл скорости движущегося конца стержня. При такой интерпретации формула (46.10) становится частным случаем формулы (46.4).

Рис. 126

4. Движение точки на плоскости можно задать полярными координатами r и φ (рис. 126). Найти выражения для скорости и ускорения точки в этой системе координат.

Решение. Введем единичные векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Вектор $\boldsymbol{i}$ направив вдоль радиуса r. Вектор $\boldsymbol{j}$ перпендикулярен к нему и направлен в сторону возрастания угла φ. Вектор $\boldsymbol{k}$ (не изображенный на рисунке) перпендикулярен к плоскости рисунка и образует с векторами $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ правовинтовую систему. При движении точки векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ вращаются вокруг начала координат с угловой скоростью $\omega = \dot{\varphi}$. Вектор угловой скорости направлен вдоль $\boldsymbol{k}$, так что $\omega = \dot{\varphi}\boldsymbol{k}$. Применяя формулы (46.11), находим

где l – расстояние между поршнем и дном цилиндра. *Интеграл надо вычислить в предположении, что поршень закреплен, т.е. при постоянном l.* Вычисление дает

$$J = \frac{2m}{3g}(v_1^2 + 2gl)^{3/2} - v_1^3 = \frac{2m}{3g}(v_2^3 - v_1^3),$$

где v_2 – скорость шара в нижнем положении. Таким образом, надо доказать, что разность $v_2^3 - v_1^3$ является адиабатическим инвариантом. Для этого вычислим значения скоростей v_1 и v_2 спустя период T. Обозначим эти значения через v_1' и v_2' соответственно. Разумеется, вычисление надо по-прежнему провести для неподвижного поршня, но переместившегося в новое положение. За период T поршень переместится вверх на расстояние uT. Шар пройдет это расстояние за время $\Delta T = uT/v_1$ (если пренебречь величинами более высокого порядка малости). При этом под действием силы тяжести его скорость уменьшится на $g\Delta T = guT/v_1$. Кроме того, при отражении движущегося поршня эта скорость дополнительно уменьшится на $2u$. Поэтому

$$v_1' = v_1 - (gT/v_1 + 2)u = v_1 - 2(v_2/v_1)u,$$

так как

$$v_2 = v_1 + gT/2.$$

На уровне AB скорость шара будет $v_1'' = v_1 - 2u$, а около дна цилиндра

$$v_2'^2 = v_1''^2 + 2gl = (v_1 - 2u)^2 + 2gl = v_2^2 - 4v_1u,$$

если пренебречь квадратом u. Извлекая квадратный корень и снова пренебрегая u^2 получим

$$v_2' = v_2 - 2uv_1/v_2.$$

С той же степенью точности

$$v_2'^3 = v_2^3 - 6v_1v_2u, \quad v_1'^3 = v_1^3 - 6v_1v_2u.$$

Значит, $v_2'^3 - v_1'^3 = v_2^3 - v_1^3$, или $J' - J = 0$, причем это соотношение верно с точностью до членов порядка $u^2 = \dot{l}^2$. Разделив его на время T и отождествив частное $(J' - J)/T$ с производной $\frac{dJ}{dt}$, получим

$$\frac{dJ}{dt} = A\dot{l}^2,$$

где A от $\dot{l}$ не зависит. Имея в виду, что нас интересуют изменения величины J при *конечных изменениях l*, преобразуем это соотношение, введя вместо дифференциала времени дифференциал длины $dl = \dot{l}\,dt$. Тогда получится

$$\frac{dJ}{dl} = A\dot{l},$$

или в пределе при $\dot{l} \to 0$

$$\frac{dJ}{dl} = 0.$$

Следовательно, $J = \text{const}$, как бы велики ни были изменения параметра l, т.е. *величина J является адиабатическим инвариантом.* Такая адиабатическая инвариантность

получилась благодаря тому, что производная $\frac{dJ}{dt}$ оказалась пропорциональной *второй*, а не первой степени $\dot{l}$. Если бы $\frac{dJ}{dt}$ была пропорциональна первой степени производной $\dot{l}$, то адиабатической инвариантности J не получилось бы.

ЗАДАЧИ

1. Шарик математического маятника (или шарик, прикрепленный к пружине с заданной жесткостью) медленно испаряется (система с переменной массой). Будет ли величина ET адиабатическим инвариантом и почему?

Ответ. Нет.

2. Шарику массой m, надетому на тонкую стальную спицу, масса которой пренебрежимо мала по сравнению с m, сообщена продольная скорость в направлении к точке закрепления спицы, а также скорость в перпендикулярном направлении. Предполагая, что за период колебания шарика его смещение вдоль спицы мало по сравнению с ее длиной, и пренебрегая трением, определить характер последующего движения шарика.

Решение. Если $v_\perp$ – поперечная скорость шарика, то величина $v_\perp^2T$ является адиабатическим инвариантом. Период T пропорционален расстоянию l шарика от точки закрепления спицы (см. задачу 20 к § 42). Поэтому адиабатическим инвариантом будет также $A = v_\perp^2 l$. Кроме того, движение шарика подчиняется закону сохранения энергии, который требует, чтобы полная скорость шарика v сохранялась по абсолютной величине. Если $v_\parallel$ – скорость шарика вдоль спицы, то $v^2 \equiv v_\parallel^2 + v_\perp^2 = \text{const}$. Таким образом, величина $A = (v^2 - v_\parallel^2)l$ есть адиабатический инвариант. На расстоянии l_0, при котором $v^2l_0 = A$, продольная скорость $v_\parallel$ обратится в нуль. Поэтому шарик не может подойти к точке закрепления ближе расстояния l_0. Достигнув положения $l = l_0$, он должен отразиться.

Следовательно, треугольники OA_1B_1 и OA_1B_2 равны. Отсюда делаем вывод, что $\angle OA_1B_1 = \angle OA_1B_2$, так что точка B_2 должна совпадать с точкой B_1.

Таким образом, *при плоском движении твердое тело может быть переведено из любого положения в другое произвольное положение с помощью одного поворота вокруг некоторой оси.* Это положение является частным случаем *теоремы Эйлера* (по имени Леонарда Эйлера (1707–1783)), доказываемой ниже.

Произвольное плоское движение тела можно разбить на ряд следующих друг за другом бесконечно малых перемещений. В результате получится ряд бесконечно близких положений *1, 2, 3, 4, . . .*, последовательно проходимых телом. Согласно доказанной теореме переход тела из положения *1* в положение *2* может быть осуществлен поворотом вокруг некоторой оси O_1; переход из положения *2* в положение *3* – поворотом вокруг другой бесконечно близкой оси O_2 и т.д. Если число промежуточных положений *1, 2, 3, . . .* стремить к бесконечности, а смещение тела из каждого положения в соседнее – к нулю, то *произвольное плоское движение твердого тела может рассматриваться как вращение вокруг мгновенной оси, движущейся как в теле, так и в пространстве.*

2. Совершенно аналогично формулируется *теорема Эйлера*. Согласно теореме Эйлера *твердое тело, имеющее одну неподвижную точку, может быть переведено из произвольного положения в другое произвольное положение путем поворота вокруг некоторой оси, проходящей через эту неподвижную точку.* Доказательство теоремы Эйлера проводится совершенно так же, как и соответствующей теоремы для плоского движения. Если одна из точек твердого тела C неподвижна, то его положение однозначно определяется заданием положений каких-либо двух точек A и B, не лежащих на одной прямой с точкой C. В качестве точек A и B можно взять две точки на поверхности сферы с центром в точке C. Проведем через центр сферы C и точки A и B плоскость. Она пересечет сферу по дуге большого круга AB (см. рис. 128; мы не рисуем отдельно соответствующую сферу и дуги больших кругов, а пользуемся прежним плоским рисунком, мысленно заменяя, где это нужно, прямолинейные отрезки дугами больших кругов; понятно, что центр сферы C на плоском рисунке изобразить нельзя.) Движение дуги AB по поверхности сферы однозначно определяет и движение всего твердого тела. Пусть выбранная дуга перешла из положения AB в положение A_1B_1. Соединим дугами больших кругов точку A с точкой A_1, а точку B с точкой B_1. Через середины этих дуг E и D проведем перпендикулярные к ним дуги больших кругов EO и DO, пересекающиеся в точке O сферы. Точку O соединим с центром сферы C прямой OC. Докажем, что дуга AB может быть переведена в положение A_1B_1 путем поворота вокруг оси CO. Действительно, по построению точки A и A_1, а также точки B и B_1 равноудалены от точки O. Ввиду этого твердое тело можно повернуть

вокруг оси CO так, чтобы точка A перешла в положение A_1. Докажем, что при таком повороте точка B также перейдет в положение B_1. Для доказательства допустим, что точка B при повороте перешла не в положение B_1, а в положение B_2. Проведем дуги больших кругов OA_1, A_1B_2 и OB_2. Так как точка B_2 находится на том же расстоянии от O, что и точка B, то $\smile OB_1 = \smile OB_2$. Кроме того, в сферических треугольниках OA_1B_1 и OA_1B_2 дуга OA_1 общая, а дуги A_1B_1 и A_1B_2 равны, так как тело твердое, и, следовательно, при его движении длина дуги AB не изменяется. Поэтому сферические треугольники OA_1B_1 и OA_1B_2 равны. Значит, $\angle OA_1B_1 = \angle OA_1B_2$, а потому точка B_2 должна совпадать с точкой B_1. Тем самым теорема Эйлера доказана.

Доказанная в начале этого параграфа теорема является частным случаем теоремы Эйлера, так как плоское движение плоского тела может рассматриваться как предельный случай движения по сферической поверхности бесконечно большого радиуса.

Рассуждая так же, как в случае плоского движения, из теоремы Эйлера можно вывести следующее следствие. *Любое движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, можно рассматривать как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через эту неподвижную точку. С течением времени мгновенная ось, вообще говоря, непрерывно перемещается как в теле, так и в пространстве.*

3. Рассмотрим теперь самый общий случай движения твердого тела. Выберем в теле произвольную точку O. Всякое движение твердого тела

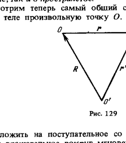


Рис. 129

можно разложить на поступательное со скоростью $\mathbf{v}_0$, равной скорости точки O, и вращательное вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку. Обозначая через $\vec{\omega}$ вектор угловой скорости мгновенного вращения, можем написать для скорости другой произвольной точки A твердого тела

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + [\vec{\omega}\boldsymbol{r}], \qquad (47.1)$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки O в точку A (рис. 129).

В качестве примера рассмотрим задачу о равновесии твердой балки. Пусть однородная балка весом P лежит на двух опорах *1* и *2* (рис. 108). Центр масс балки находится посередине между опорами. Найдем силы F_1 и F_2, с которыми балка давит на опоры. Механика твердого тела дает два условия равновесия:

$$F_1 + F_2 = P, \quad F_2l = Pl/2, \qquad (44.4)$$

где l – расстояние между опорами. Второе из них означает, что должен обращаться в нуль момент действующих сил относительно опоры *1*. Из этих условий получаем $F_1 = F_2 = P/2$. Это разумный результат. Деформации балки в рассматриваемой задаче не играют существенной роли. Идеализация абсолютно твердого тела допустима.

Рассмотрим теперь балку на трех опорах (рис. 109). Механика твердого тела по-прежнему дает два условия равновесия:

$$F_1 + F_2 + F_3 = P, \quad F_3x + F_2l = Pl/2, \qquad (44.5)$$

где l – расстояние между опорами *1* и *2*, а x – между опорами *1* и *3*. (Второе уравнение (44.5) получится, если приравнять нулю момент внешних сил относительно опоры *1*.) Двух уравнений недостаточно для определения трех неизвестных сил F_1, F_2, F_3. Одной из этих сил можно придать произвольное значение, тогда из уравнений (44.5) найдутся остальные две. Задача о распределении веса абсолютно твердой балки между тремя опорами, на которых она лежит, оказалась неопределенной.

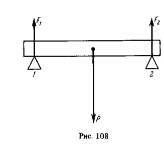


Рис. 108

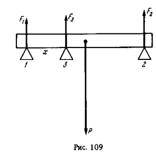


Рис. 109

Механические системы, подобные абсолютно твердой балке на трех опорах, называют *статически неопределенными*.

Аналогичная ситуация встречается также в задаче о равновесии стола, стоящего на горизонтальной плоскости. Механика твердого тела дает в этом случае три независимых уравнения равновесия. Если число ножек стола равно трем, то из этих трех уравнений можно однозначно определить три силы, с которыми ножки давят на плоскость опоры. Но если стол стоит на четырех ножках, то трех уравнений мало для определения четырех сил давления ножек на плоскость опоры. Идеально твердый стол с четырьмя ножками, стоящий на идеально твердой горизонтальной плоскости, является также статически неопределенной системой.

Конечно, вес реальной балки, лежащей на трех опорах, вполне определенным образом распределяется между ними. Точно так же вполне определенным образом распре-

деляется сила давления реального стола между четырьмя ножками, на которых он стоит. Неопределенность, к которой мы пришли, указывает просто на то, что в рассматриваемых задачах балку на трех опорах или стол на четырех ножках *нельзя считать идеально твердыми*. Надо учитывать их деформации, а также деформации опор.

5. Следующее простое рассуждение выясняет, почему деформации могут оказаться существенными. Допустим, что идеально твердая балка лежит на трех опорах (см. рис. 109). Сместим среднюю опору немного вниз. Так как идеально твердая балка не может деформироваться, то между ней и опорой *3* сразу же возникает зазор – балка перестанет опираться на опору *3* и давить на нее. Сила давления на опору *3* скачком обратится в нуль, а вес балки вполне определенным образом и тоже скачком распределится между оставшимися опорами *1* и *2*. То же произойдет, если у твердого

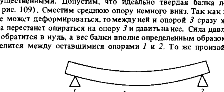


Рис. 110

стола бесконечно мало укоротить одну из четырех ножек. Не то будет в случае реальной балки или реального стола. При бесконечно малом опускании опоры *3* балка прогнется и по-прежнему будет на нее опираться. Сила давления на опору *3* не обратится в нуль, а уменьшится бесконечно мало. Аналогично когда стол стоит на четырех ножках, то все ножки деформируются, укорачиваясь под действием силы веса. Если подпилить одну из ножек, укоротив ее бесконечно мало, то деформация ножки уменьшится, ножка удлинится и снова будет касаться плоскости опоры. Таким образом, и в этом случае давление на ножку изменяется бесконечно мало, т.е. непрерывно.

Допустим теперь, что реальная балка лежит на двух опорах, *1* и *2* (рис. 110). Под действием силы веса балка прогнется. Будем подводить под балку третью опору *3*, непрерывно поднимая ее. Как только опора *3* коснется балки, с балкой не произойдет еще никаких изменений. Но дальнейшее поднятие опоры *3* будет связано с выпрямлением балки, а для этого опора должна действовать на балку с некоторой силой. По мере поднятия опоры *3* эта сила будет непрерывно возрастать, принимая вполне определенное значение при каждом положении опоры *3*. Приведенное рассуждение ясно показывает, почему при решении задачи о распределении веса балки между тремя опорами надо учитывать ее упругие свойства. Эта задача будет решена в гл. X (см. задачу 3 к § 80). Аналогичное рассуждение можно провести и для стола на четырех ножках.

§ 45. Мгновенная ось вращения

1. Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси. Чтобы получить представление о распределении скоростей в нем, достаточно рассмотреть движение точек тела, лежащих в какой-либо одной плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Это значит, что тело можно считать как бы плоским. Соответствующее распределение скоростей показано на схематическом рис. 111. Точка O тела, через которую проходит ось вращения, неподвижна. Все другие точки тела движутся по окружностям с центром в O.

Решим задачу о скатывании тела тремя различными способами.

Способ 1. Применим уравнение моментов относительно мгновенной оси вращения. При отсутствии скольжения мгновенная ось проходит через точку касания A. Так как мгновенная ось и ось, проходящая через центр масс C, движутся параллельно друг другу, то уравнение моментов имеет обычную простую форму

$$I_A\frac{d\omega}{dt} = M_A, \qquad (48.1)$$

где I_A – момент инерции скатывающегося тела относительно мгновенной оси, а M_A – момент внешних сил относительно той же оси. Внешними силами являются сила тяжести mg и реакция опоры, действующая со стороны наклонной плоскости на скатывающееся тело. Сила реакции опоры выпадает из уравнения моментов, так как она проходит через ось A, и ее момент относительно этой оси равен нулю. Таким образом,

$$I_A\frac{d\omega}{dt} = mgr\sin\alpha.$$

Обозначим через v линейную скорость точки C. Она связана со скоростью v_A точки A тела соотношением $v = v_A + \omega r$. При отсутствии скольжения $v_A = 0$, а потому $v = \omega r$. Для линейного ускорения точки C получаем $a = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$. Поэтому предыдущее уравнение дает

$$a = \frac{mgr^2}{I_A}\sin\alpha. \qquad (48.2)$$

По теореме Гюйгенса – Штейнера $I_A = I_C + mr^2$, где I_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс C. Следовательно,

$$a = \frac{g\sin\alpha}{1 + I_C/mr^2}. \qquad (48.3)$$

Преимущество рассмотренного способа состоит в том, что в исходное уравнение (48.1) совсем не входит неизвестная реакция опоры.

Способ 2. Применим уравнение моментов относительно оси, проходящей через центр масс C. Оно также имеет простой вид

$$I_C\frac{d\omega}{dt} = M_C,$$

где M_C – момент внешних сил относительно оси C. В это уравнение не войдет сила тяжести, так как она проходит через ось C. Момент создается си-

лой реакции опоры. При этом играет роль только слагаемая F_τ этой силы, параллельная наклонной плоскости, т.е. сила трения сцепления. Ее момент $M_C = rF_\tau$, а потому

$$I_C\frac{d\omega}{dt} = rF_\tau.$$

Это уравнение содержит два неизвестных: угловое ускорение $\frac{d\omega}{dt}$ и силу F_τ. Недостающее уравнение дает теорема о движении центра масс:

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\alpha - F_\tau. \qquad (48.4)$$

Присоединив сюда прежнее соотношение $a = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$ и разрешив полученные уравнения относительно a, найдем прежний результат (48.3). Кроме того, получаем следующее выражение для силы трения сцепления:

$$F_\tau = \frac{I_C}{I_C + mr^2}mg\sin\alpha. \qquad (48.5)$$

Способ 3. Применим закон сохранения энергии. Кинетическая энергия тела равна $K = \tfrac{1}{2}I_A\omega^2$. Поэтому $\tfrac{1}{2}I_A\omega^2 = mgh$, где h – высота, с которой опустилось тело при скатывании из состояния покоя. Если оно прошло вдоль наклонной плоскости путь x, то $h = x\sin\alpha$, и, следовательно,

$$\frac{1}{2}I_A\omega^2 = \frac{I_A}{2r^2}v^2 = mgx\sin\alpha.$$

Дифференцируя это соотношение по времени и замечая, что $\frac{dx}{dt} = v$, снова получим формулу (48.2).

2. Так как на скатывающееся тело действует сила трения, то может возникнуть вопрос, почему в рассматриваемой задаче можно применять закон сохранения энергии в его механической форме. Ответ заключается в том, что *при отсутствии скольжения сила трения приложена к тем точкам тела, которые лежат на мгновенной оси вращения*. Мгновенная скорость таких точек равна нулю, а потому приложенная к ним сила трения сцепления *работы не производит* и не влияет на полную кинетическую энергию скатывающегося тела. Роль силы трения сцепления F_τ сводится к тому, чтобы привести тело во вращение и обеспечить чистое качение. При наличии силы трения сцепления работа силы тяжести идет на увеличение кинетической энергии не только поступательного, но и вращательного движения тела.

плоскости в ту же сторону, куда движется обруч. Это означает, что мгновенная ось перемещается как относительно катящегося обруча, так и относительно плоскости, по которой происходит качение. В этом и состоит смысл утверждения, что мгновенная ось перемещается как в теле, так и в пространстве. Допустим теперь, что качение происходит с постоянной скоростью. Было бы грубой ошибкой вычислять ускорение по формуле $\boldsymbol{a} = -\omega^2\boldsymbol{R}$, понимая под $\boldsymbol{R}$ радиус-вектор, проведенный от мгновенной оси к рассматриваемой точке обруча. Действительно, полная скорость $\mathbf{v}$ любой точки обруча векторно складывается из скорости $\mathbf{v}_C$ поступательного движения центра обруча C и скорости $\mathbf{v}_{\text{вр}}$ вращения ее относительно того же центра: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{\text{вр}}$. Если обруч катится равномерно, то $\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = 0$, и ускорение будет равно $\boldsymbol{a} = \frac{d\mathbf{v}_{\text{вр}}}{dt}$. Поступательное движение не влияет на ускорение $\boldsymbol{a}$. Оно такое же, как и при вращении вокруг неподвижного центра, т.е. $\boldsymbol{a} = -\omega^2\boldsymbol{r}$, где радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ проведен из центра обруча O. Таким образом, при равномерном качении ускорение $\boldsymbol{a}$ направлено к центру обруча, а не к мгновенной оси.

§ 46. Угловая скорость как вектор. Сложение вращений

1. Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной или мгновенной оси OA с угловой скоростью $\vec{\omega}$ (рис. 114). Возьмем какую-либо произвольную точку этого тела M, отстоящую от оси вращения на расстояние $r_\perp$. Линейная и угловая скорости точки M связаны соотношением

$$v = \omega r_\perp. \qquad (46.1)$$

Введем аксиальный вектор $\vec{\omega}$, определяемый векторным произведением

$$\vec{\omega} = [\boldsymbol{r}_\perp\boldsymbol{v}]/r_\perp^2, \qquad (46.2)$$

где $\boldsymbol{r}_\perp$ – радиус-вектор, проведенный от оси вращения к точке M перпендикулярно к этой оси. Длина вектора $\vec{\omega}$ в силу соотношения (46.1) численно равна угловой скорости вращения, а направление совпадает с направлением оси вращения. Взаимное расположение векторов $\vec{\omega}$, $\boldsymbol{r}_\perp$ и $\mathbf{v}$ мы уясним лучше, если отложим их из общего начала (рис. 115). Эти три вектора взаимно перпендикулярны. Из рисунка видно, что

$$\mathbf{v} = [\vec{\omega}\boldsymbol{r}_\perp]. \qquad (46.3)$$

Эта формула является обобщением формулы (46.1), поскольку она определяет не только модуль скорости $\mathbf{v}$, но и ее направление. Вектор $\vec{\omega}$ называется *вектором угловой скорости*, или просто *угловой скоростью вращения*. Таким образом, *угловую скорость можно рассматривать как вектор.* Если расположить буравчик с правой нарезкой параллельно оси вращения

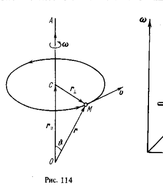


Рис. 114

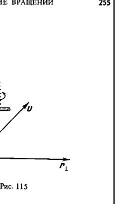


Рис. 115

и вращать его в ту же сторону, в какую вращается само тело, то направление ввинчивания буравчика укажет направление вектора $\vec{\omega}$.

Формуле (46.3) можно придать более общий и удобный вид. Возьмем на оси вращения произвольную точку O в качестве начала координат (см. рис. 114). Тогда радиус-вектор $\boldsymbol{r}$, проведенный из этого начала к точке M, можно представить в виде векторной суммы $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\perp + \boldsymbol{r}_\parallel$, где $\boldsymbol{r}_\parallel$ – слагающая вектора $\boldsymbol{r}$ вдоль оси вращения. Так как $[\vec{\omega}\boldsymbol{r}_\parallel] = 0$, то вместо формулы (46.3) можно написать более общую формулу

$$\mathbf{v} = [\vec{\omega}\boldsymbol{r}]. \qquad (46.4)$$

Из нее получаем $v = \omega r\sin\vartheta$, что совпадает с формулой (46.1), так как $r\sin\vartheta = r_\perp$.

2. *То, что угловая скорость $\vec{\omega}$ есть вектор, не требует специального доказательства, поскольку она определена как векторное произведение двух векторов. Векторный характер $\vec{\omega}$ означает,* разумеется, *только то, что при повороте координатных систем проекции $\vec{\omega}$ на их оси преобразуются так же, как разности координат концов направленного геометрического отрезка.* Над векторами угловых скоростей можно выполнять все математические операции, как над всякими векторами. В частности, можно ввести математическое сложение векторов $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ по правилу параллелограмма. Но как будут складываться угловые скорости, если сложение определить с помощью той или иной *физической* операции, – это требует особого исследования. Введем понятие *сложения вращений*, вложив в него следующий смысл. Пусть тело вращается вокруг некоторой оси OA с угловой ско-

3. Комбинация I_C/m, входящая в формулу (48.3), имеет размерность квадрата длины. Введем для нее обозначение

$$\rho^2 = \frac{I_C}{m}$$

и назовем ρ *радиусом инерции* тела. Формула (48.3) принимает вид

$$a = \frac{g\sin\alpha}{1+(\rho/r)^2}. \tag{48.6}$$

Величину r можно назвать *радиусом качения* тела. Радиус качения есть расстояние между центром масс скатывающегося тела и мгновенной осью вращения. Для цилиндра или шара радиус качения равен геометрическому радиусу этих тел.

Ускорение скатывающегося тела и приобретенная им скорость поступательного движения зависят от отношения радиуса инерции к радиусу качения. Чем больше это отношение, тем медленнее скатывается тело. Особенно просто этот результат можно уяснить с помощью закона сохранения энергии. Если тело скатывается с высоты h, то вся его потенциальная энергия mgh переходит в кинетическую. Последняя складывается из кинетических энергий поступательного и вращательного движений. Полная кинетическая энергия тела в нижнем положении равна mgh, т.е. зависит только от высоты h. Чем большая доля кинетической энергии приходится на вращение тела, тем медленнее оно скатывается с наклонной плоскости. Отношение кинетической энергии вращательного движения к кинетической энергии поступательного движения равно

$$\frac{E_{вр}}{E_{пост}} = \frac{I_C\omega^2}{mv^2} = \left(\frac{\rho}{r}\right)^2.$$

Максимальное значение для ускорения a получается в случае чистого скольжения при отсутствии сил трения.

Пользуясь выражениями для моментов инерции, полученными в § 36, легко найти соответствующие радиусы инерции, а затем вычислить ускорение a. Таким путем получим следующие результаты.

Полый цилиндр (без торцов): $\rho^2 = r^2$, $a = ½ g\sin\alpha$.
Сплошной цилиндр: $\rho^2 = ½ r^2$, $a = {}^2/_3\, g\sin\alpha$.
Полый шар: $\rho^2 = {}^2/_3\, r^2$, $a = {}^3/_5\, g\sin\alpha$.
Сплошной шар: $\rho^2 = {}^2/_5\, r^2$, $a = {}^5/_7\, g\sin\alpha$.

Полые тела скатываются медленнее, чем сплошные тела той же геометрической формы. При одинаковых массах моменты инерции полых тел больше, чем сплошных. Поэтому на долю вращательного движения у полых тел приходится относительно бо́льшая кинетическая энергия, чем у сплошных.

Возьмем маховичок, насаженный на ось. Положим ось на наклонные рельсы, чтобы маховичок находился между ними (рис. 131). Радиус качения в этом случае совпадает с радиусом оси маховичка r. Отношение ρ/r здесь велико, и маховичок будет скатываться очень медленно.

4. Когда угол наклона α равен нулю, ускорение a обращается в нуль. Вместе с ним обращается в нуль и сила трения сцепления F_τ, как это видно из формулы (48.5). Таким образом, твердое тело, обладающее осевой

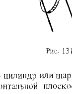


Рис. 131

симметрией, например цилиндр или шар, при отсутствии скольжения катится по твердой горизонтальной плоскости прямолинейно и равномерно, совсем не испытывая силы сопротивления. Этот результат относится к идеализированным моделям тел. Тело и плоскость, по которой оно катится, должны быть идеально твердыми и гладкими. Для реальных тел он не справедлив или справедлив только приближенно. В этом случае тело и плоскость деформируются. На плоскости возникает углубление, тело соприкасается с ней не в одной геометрической точке, а на некотором участке конечной площади. В результате при качении по горизонтальной плоскости возникает сила, замедляющая движение. Это есть сила *трения качения*. Она обычно мала по сравнению с силой трения скольжения, и во многих случаях ею можно пренебречь (см. § 17).

ЗАДАЧИ

1. Определить ускорение a центра шарика, скатывающегося без скольжения по наклонному желобу, образующему угол α с горизонтом. Форма поперечного сечения желоба изображена на рис. 132 *а* и *б*.

Ответ. *а*) $a = \dfrac{R^2-h^2}{\rho^2+(R^2-h^2)}\, g\sin\alpha$, где ρ — радиус инерции шарика, $2h$ — ширина желоба; *б*) $a = \dfrac{R^2}{4\rho^2+R^2}\, g\sin\alpha$.

2. С какой высоты H должен скатиться шарик с радиусом инерции ρ, для того чтобы он смог без скольжения описать мертвую петлю по желобу радиуса R? Радиусом шарика r по сравнению с R пренебречь.

Рис. 144

$B'B$, проходящей через подшипники на концах диаметра *наружного кольца*. Наконец, наружное кольцо может совершать вращение вокруг третьей оси $D'D$, проходящей через неподвижные подшипники подставки. Ось $B'B$ перпендикулярна к оси $A'A$. Все три оси пересекаются в одной точке, называемой *центром карданова подвеса*. Гироскоп в кардановом подвесе имеет *три* степени свободы и может совершать любые повороты вокруг центра подвеса. Во всех вопросах мы будем пренебрегать кинетической энергией и моментами импульсов колец, считая их пренебрежимо малыми по сравнению с кинетической энергией и моментом импульса маховичка гироскопа. Если центр карданова подвеса или точка опоры совпадает с центром масс гироскопа, то гироскоп называется *уравновешенным*.

3. Согласно теореме Эйлера (§ 47) движение гироскопа с неподвижной точкой опоры O можно представить как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку. Обозначим через $\vec{\omega}$ вектор мгновенной угловой скорости, с которой вращается гироскоп, L — момент импульса гиро-

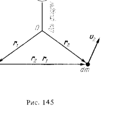


Рис. 145

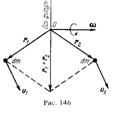


Рис. 146

скопа относительно точки O. Найдем связь между векторами L и $\vec{\omega}$ для симметричного гироскопа. Если угловая скорость $\vec{\omega}$ направлена вдоль оси фигуры гироскопа или перпендикулярно к ней, то векторы L и $\vec{\omega}$ параллельны между собой. Убедиться в этом проще всего можно следующим образом. Мысленно разобьем все тело гироскопа на пары одинаковых материальных точек, симметрично расположенных относительно оси фигуры гироскопа, как указано на рис. 145 и 146. Момент импульса такой пары точек относительно точки O будет $dL = dm\,[r_1 v_1] + dm\,[r_2 v_2]$, где dm — масса каждой из них. Если гироскоп вращается вокруг оси своей фигуры (рис. 145), то скорости v_1 и v_2 равны по модулю, но направлены противоположно. В этом случае $dL = dm\,[v_2(r_2 - r_1)]$. Векторы v_2 и $(r_2 - r_1)$ перпендикулярны к оси вращения. Поэтому вектор dL, а с ним и момент импульса всего гироскопа L будут направлены вдоль оси вращения. Вектор L совпадает с моментом импульса относительно оси вращения, а потому $L = I_\parallel \vec{\omega}$, где $I_\parallel$ — момент инерции гироскопа относительно оси его фигуры. Если теперь гироскоп вращается вокруг оси, перпендикулярной к оси фигуры (рис. 146), то $v_1 = v_2$, а потому $dL = dm\,[v_1(r_1 + r_2)]$. Отсюда видно, что dL и L опять направлены вдоль оси вращения, причем $L = I_\perp \vec{\omega}$, где $I_\perp$ — момент инерции гироскопа относительно оси, перпендикулярной к его оси фигуры.

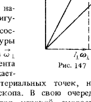


Рис. 147

Допустим теперь, что мгновенная ось направлена под произвольным углом к оси фигуры гироскопа. Разложим вектор $\vec{\omega}$ на две составляющие: направленную вдоль оси фигуры гироскопа $\vec{\omega}_\parallel$ и перпендикулярную к ней $\vec{\omega}_\perp$ (рис. 147). Из общего определения момента импульса (см. § 30) следует, что он выражается линейно через линейные скорости материальных точек, на которые мысленно можно разбить тело гироскопа. В свою очередь, эти скорости выражаются линейно через вектор угловой скорости $\vec{\omega}$, одинаковый для всех точек гироскопа. Отсюда следует, что *вектор L линейно выражается через $\vec{\omega}$*. Рассматривая его как функцию $\vec{\omega}$, можно написать $L = L(\vec{\omega}) = L(\vec{\omega}_\parallel + \vec{\omega}_\perp)$, или, в силу указанной линейности, $L = L(\vec{\omega}_\parallel) + L(\vec{\omega}_\perp)$. Но функция $L(\vec{\omega}_\parallel)$ была бы равна моменту импульса гироскопа, если бы последний вращался только вокруг его оси фигуры с угловой скоростью $\vec{\omega}_\parallel$. Значит, $L(\vec{\omega}_\parallel) = I_\parallel \vec{\omega}_\parallel$. Аналогично

энергии системы.)

Ответ. $a = \dfrac{mg\sin\alpha}{2M + m(1+\cos\alpha)}$, $F_{тр} = (M+m)a$, $t = \dfrac{P_{макс}}{2M+m}\dfrac{1}{a^2}$, $v_{макс} = \dfrac{P_{макс}}{(2M+m)a}$.

8. Определить ускорение a, с которым цилиндрическая бочка, целиком заполненная жидкостью, скатывается без скольжения с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (рис. 137). Трение между жидкостью и стенками бочки считать пренебрежимо малым.

Решение. При отсутствии трения между жидкостью и стенками бочки вращение бочки не передается жидкости. Жидкость движется поступательно как

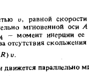


Рис. 136

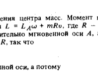


Рис. 137

целое со скоростью v, равной скорости движения центра масс. Момент импульса системы относительно мгновенной оси A равен $L = L_A\omega + mRv$, где R — внешний радиус бочки, I_A — момент инерции ее относительно мгновенной оси A, m — масса жидкости. Из-за отсутствия скольжения $v = \omega R$, так что

$$L = (I_A/R + mR)\,v.$$

Центр масс бочки движется параллельно мгновенной оси, а потому

$$\frac{dL}{dt} = \left(\frac{I_A}{R} + mR\right)\frac{dv}{dt} = (M+m)\,Rg\sin\alpha,$$

где M — масса бочки. Отсюда

$$a = \frac{(M+m)R^2}{I_A + mR^2}\, g\sin\alpha.$$

В предельном случае, когда бочка не заполнена жидкостью ($m = 0$), получается ранее выведенная формула (48.2). В другом предельном случае, когда толщина стенок бочки пренебрежимо мала по сравнению с радиусом R, $I_A = 2MR^2$,

$$a = \frac{M+m}{2M+m}\, g\sin\alpha.$$

При этом мы не учитывали моменты инерции днищ бочки, считая их пренебрежимо малыми.

Читателю рекомендуется решить ту же задачу с помощью уравнения моментов относительно центра масс, а также с помощью уравнения сохранения энергии.

9. Диск Максвелла (по имени выдающегося английского физика Джемса Максвелла (1831–1879) подвешен на очень длинных нитях (рис. 138). Части нитей длиной l = 50 см каждая были намотаны на ось диска, после чего диск стал

опускаться под действием силы тяжести. Достигнув нижнего положения, диск стал подниматься, сообщив "рывок" нитям. Найти ускорение диска и натяжение нити во время его опускания и поднятия, а также оценить приближенно натяжение нити во время рывка. Масса диска M = 1 кг, его радиус R = 10 см, радиус оси r = 0,5 см. Растяжением нити во время рывка пренебречь. (Сравните эту задачу с задачей 2 к § 37).

Ответ. Пока движение совершается без рывка, диск опускается и поднимается с одним и тем же ускорением, направленным вниз:

$$a = \frac{2r^2}{R^2 + 2r^2}\, g.$$

Натяжение нити при опускании и поднятии диска также одно и то же и равно

$$T_0 = \frac{Mg}{2}\left(1 - \frac{a}{g}\right) \approx 4{,}83\ Н.$$

Во время рывка нить испытывает дополнительное натяжение ΔT, определяемое приближенным выражением

$$\Delta T \approx \frac{l}{\pi r}\,\frac{2a}{g}\,Mg \approx 3{,}14\ Н.$$

Полное натяжение нити во время рывка $T = T_0 + \Delta T \approx 8{,}0$ Н.

10. На каком расстоянии l от оси баллистического маятника должно находиться место попадания горизонтально летящего снаряда, чтобы ось маятника при ударе снаряда не испытывала добавочной нагрузки?

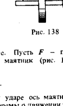


Рис. 138

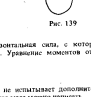


Рис. 139

Решение. Пусть F — горизонтальная сила, с которой ударяющий снаряд действует на маятник (рис. 139). Уравнение моментов относительно точки подвеса O дает

$$I\frac{d\omega}{dt} = Fl.$$

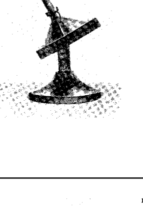
Так как при ударе ось маятника не испытывает дополнительной нагрузки, то на основании теоремы о движении центра масс можно написать

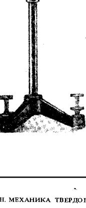
$$m\frac{dv}{dt} = F,$$

интеграл (49.6), а с ним и приращение момента импульса будут малы. Значит, при кратковременных воздействиях даже очень больших сил движение свободного гироскопа изменяется мало.

Гироскоп как бы сопротивляется всяким попыткам изменить его момент импульса. С этим связана замечательная устойчивость, которую приобретает движение гироскопа после приведения его в быстрое вращение.

Возьмем массивный гироскоп, имеющий конусообразную форму (рис. 148). Вдоль оси его фигуры может ввинчиваться стержень с острым концом, которым гироскоп опирается на подставку. Ввинтим стержень настолько, чтобы точка опоры совпала с центром масс гироскопа. Тогда гироскоп станет уравновешенным. При любом наклоне его оси фигуры он будет находиться в безразличном равновесии. Пока гироскоп не вращается, малейший толчок далеко уводит его из положения равновесия. Приведем теперь гироскоп в быстрое вращение вокруг его оси фигуры. Если палкой нанести сильный удар по стержню гироскопа, то направление стержня в пространстве почти не изменится. Стержень начнет лишь совершать свободную регулярную прецессию, т. е. вращательное движение по поверхности конуса малого угла раствора. Осью конуса будет служить направле-





ние момента импульса гироскопа, которое он примет после нанесения удара.

Вот другая демонстрация устойчивости движения быстро вращающегося гироскопа. Гироскоп состоит из массивного металлического маховичка, помещаемого внутри разборного полого металлического шара, состоящего из двух полушарий, которые могут сцепляться между собой. Концы оси маховичка входят в подшипники полого шара, так что маховичок может вращаться вокруг одного из диаметров шара. На ось маховичка наматывается нить, свободный конец которой выходит наружу через отверстие в полом шаре. Дергая за нить, можно привести маховичок в быстрое вращение. Если такой шар попытаться скатить с наклонной плоскости, то он будет упорно сопротивляться этим попыткам. "Послушным" шар будет только тогда, когда ось маховичка горизонтальна и перпендикулярна к направлению скатывания. В этом положении шар может свободно скатываться без изменения направления оси маховичка, т.е. без изменения направления вектора момента импульса L. Во всяком другом положении для "нормального" скатывания ось маховичка, а с ней и вектор L должны менять свое направление в пространстве. "Упрямый" гироскоп этого "делать не хочет". Под действием силы тяжести шар гироскопа приобретает медленное вращение и скатывается с наклонной плоскости "боком", стремясь сохранить неизменной ориентацию оси маховичка в пространстве.

Если шар с вращающимся внутри него маховичком поставить на острие иглы даже в наклонном положении, то он не падает (рис. 149), а приобретает медленное вращение вокруг вертикальной оси под действием силы тяжести. Такое вращение называется *вынужденной прецессией*. Вынужденную прецессию мы рассмотрим в следующем параграфе.

6. Посмотрим теперь, как изменится основное уравнение (49.3), если точка опоры гироскопа движется. Ответ можно получить из уравнения (37.2). Скорость каждой точки движущегося гироскопа представим в виде $v = v_O + v_{вр}$, где v_O — скорость точки опоры O, а $v_{вр} = [\vec{\omega} r]$ — скорость, возникающая из-за вращения вокруг этой точки. Тогда момент импульса гироскопа относительно точки опоры представится выражением

$$L = \int [r v_O]\,dm + L_{вр},$$

где $L_{вр}$ — момент импульса, возникающий только из-за вращения. Если ввести радиус-вектор центра масс r_C, то

$$L = L_{вр} + m[r_C v_O]. \tag{49.7}$$

Продифференцировав это выражение и подставив в формулу (37.2), получим

$$\dot{L}_{вр} = M - m[r_C \dot{v}_O]. \tag{49.8}$$

...ются, вычислить скорость каждого шара после столкновения, когда установится чистое качение.

Решение. При столкновении шары обмениваются поступательными скоростями, тогда как вращательные скорости их сохраняются неизменными. Очевидно, достаточно найти движение одного из шаров. Непосредственно после столкновения начальные скорости рассматриваемого шара будут $v_{нач} = -v_0$, $\omega_{нач} = \omega_0 = v_0/r$. Поэтому на основании (48.7) для движения шара после столкновения можно написать $mvr + I\omega = -mv_0 r + I\omega_0$. После установления чистого качения $v = \omega r$ и, следовательно,

$$v = \frac{I - mr^2}{I + mr^2}\,v_0 = -\frac{3}{7}\,v_0.$$

18. Бильярдный шар, катящийся без скольжения со скоростью v_0, отражается упруго при нормальном столкновении с неподвижной стенкой. Предполагая, что за время соударения угловая скорость шара не меняется, определить его скорость v после отражения, когда движение перейдет в чистое качение.

Ответ. $v = \dfrac{I - mr^2}{I + mr^2}\,v_0 = \dfrac{3}{7}\,v_0$.

19. Как надо ударить кием по бильярдному шару, чтобы сила трения шара о сукно бильярдного стола заставляла его двигаться: а) ускоренно, б) замедленно, в) равномерно? Предполагается, что удар наносится горизонтально в вертикальной плоскости, проходящей через центр шара и точку касания его с плоскостью бильярдного стола.

Ответ. Шар будет двигаться равномерно, если точка удара лежит выше его центра на расстоянии ${}^2/_5$ радиуса. Такие удары называются *нормальными*. Если она лежит еще выше, то движение шара будет ускоренным. Если же точка удара лежит ниже, то шар будет двигаться замедленно. Соответствующие удары называют *высокими* и *низкими*. Решение получено в предположении, что сила трения шара о плоскость стола пренебрежимо мала по сравнению с силой, с которой на шар действует кий во время удара.

20. Как надо ударить кием по бильярдному шару, чтобы при столкновении с другим (неподвижным) шаром: а) оба шара стали двигаться вперед (*удар с накатом*), б) первый шар остановился, а второй двигался вперед, в) второй шар двигался вперед, а первый откатился назад (*удар с оттяжкой*)? Относительно направления и плоскости удара ввести те же предположения, что и в предыдущей задаче.

Ответ. Случай а) реализуется при высоких ударах, случай б) — при нормальных, случай в) — при низких.

21. Виртуозный парижский биллиардист Миньо в 1883 г. в Варшаве ставил на краю бильярда стакан с водой. Бильярдный шар располагался на противоположном конце бильярда. Миньо наносил по шару сильный кратковременный удар кием, наклоненным под большим углом к горизонтальной плоскости, быстро убирая кий после удара. Кий располагался в вертикальной плоскости, проходившей через центр шара и линию, соединявшую его со стаканом. Шар быстро приближался к стакану, но затем внезапно отбрасывался назад, не дойдя 1–2 см до стакана. Объяснить явление.

Решение. Если удар наклонным кием нанести левее центра шара (рис. 140*a*), то возникнет как поступательное движение вправо, так и его вращение со скольжением против часовой стрелки. Из-за скольжения поступательная и вращательная скорости шара будут уменьшаться. Удар кием надо нанести так, чтобы в некоторый момент поступательное движение шара пропало, а вращение продолжалось в том же направлении. Тогда в этот момент шар на мгновение остановится, а затем из-за вращения откатится назад — возникнет чистое качение.

22. По бильярдному шару нанесен боковой удар горизонтальным кием, так что вертикальная плоскость удара не проходит через центр шара. Как отразится такая нецентральность удара на движении шара?

Ответ. Возникнет дополнительное вращение шара вокруг вертикальной оси — верчение. Сила трения верчения и ее момент пренебрежимо малы. Поэтому шар, пока он не ударился о борт бильярда, будет двигаться так же, как и при ударе, нанесенном в вертикальной плоскости, проходящей через центр шара. Верчение скажется при ударе шара о борт бильярда. Так как борт бильярда "мягкий", то время соприкосновения

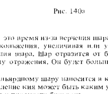


Рис. 140*а*

с ним шара конечно. За это время из-за верчения шара на него будет действовать касательная сила трения скольжения, увеличивая или уменьшая касательную скорость поступательного движения шара. Шар отразится от борта бильярда, но угол падения уже не будет равен углу отражения. Он будет больше или меньше, в зависимости от направления верчения.

23. Удар кием по бильярдному шару наносится в какой-то точке в верхней половине шара, причем направление кия может быть каким угодно. Определить в общем случае вид траектории шара в плоскости бильярда.

Решение. Поместим начало координатной системы в центр шара. Координатные оси X и Y направим параллельно плоскости бильярда, а ось Z — вертикально вверх. Пусть F_x, F_y, F_z — слагающие мгновенной силы удара. Сила F_x вызовет вращение вокруг осей Y и Z с угловыми скоростями $\vec{\omega}_y'$ и $\vec{\omega}_z'$, сила F_y — вращение с угловыми скоростями $\vec{\omega}_x'$ и $\vec{\omega}_z''$, сила F_z — вращения с угловыми скоростями $\vec{\omega}_x''$ и $\vec{\omega}_y''$. Вращение с угловыми скоростями $\vec{\omega}_z'$ и $\vec{\omega}_z''$ есть верчение вокруг вертикальной оси. Пока шар не ударяется о борт бильярда, от верчения можно отвлечься, так как силы трения верчения и их моменты пренебрежимо малы. Надо принять во внимание только угловые скорости $\vec{\omega}_x = \vec{\omega}_x' + \vec{\omega}_x''$ и $\vec{\omega}_y = \vec{\omega}_y' + \vec{\omega}_y''$. Они складываются в угловую скорость $\vec{\omega} = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_y$. Не нарушая общности, оси X и Y можно повернуть, направив ось X вдоль вектора угловой скорости $\vec{\omega}$. Тогда шар будет вращаться только вокруг оси X в общем случае со скольжением. Помимо вращения силы F_x и F_y вызовут поступательное движение центра шара параллельно осям X и Y, которое передается и движению точки соприкосновения шара с плоскостью бильярда. (Сила F_z на поступательное движение не влияет, так как ее действие компенсируется нормальным давлением.) Благодаря этому изменяется и сила трения скольжения шара по плоскости бильярда. Существенно однако, что результирующая сила трения скольжения постоянна, т.е. не зависит от скорости движения шара. Так как в общем случае эта сила на-

В нашем примере вектор $\vec{\Omega}$ перпендикулярен к оси фигуры гироскопа, а потому

$$\Omega = M/L = M/I_\parallel\omega. \tag{50.3}$$

Легко найти вектор $\vec{\Omega}$ и в более общем случае, когда ось фигуры гироскопа наклонена к оси, вокруг которой совершается его прецессия. Для этого подставим в уравнение (50.2) выражение $M = [aF] = a[sF]$, где s — единичный вектор вдоль оси фигуры гироскопа. Так как приближенная теория пренебрегает различием направлений вектора L и оси фигуры гироскопа, то $L = Ls$. В результате уравнение (50.2) преобразуется к виду

$$L[\vec{\Omega} s] = a[sF].$$

Отсюда

$$\vec{\Omega} = -\frac{a}{L}F = -\frac{a}{I_\parallel\omega_\parallel}F. \tag{50.4}$$

Приведенные рассуждения справедливы при условии $\Omega \ll \omega$, т. е. для быстро вращающегося гироскопа. *Вращение гироскопа считается быстрым, если угловая скорость вращения вокруг его оси фигуры $\omega_\parallel$ очень велика по сравнению с угловой скоростью вращения вокруг перпендикулярной оси $\omega_\perp$*. В частности, она должна быть очень большой и по сравнению с угловой скоростью прецессии Ω. Для быстро вращающихся гироскопов, применяющихся в технике, угловая скорость прецессии Ω бывает в миллионы раз меньше ω.

3. Для демонстрации вынужденной прецессии совсем не обязательно, чтобы у гироскопа было два маховичка. Можно обойтись и одним маховичком. На рис. 151 изображен небольшой гироскоп с одним маховичком, подвешенный на нити. Вращающий момент M создается собственным весом P маховичка. Он и вызывает прецессию вокруг вертикальной оси. На схематическом рис. 152 тот же опыт воспроизведен в более крупном масштабе. Маховиком служит массивное велосипедное колесо с наращенной осью, приведенное в быстрое вращение. Колесо подвешивается на длинном проволочном канате за наращенный конец оси. Оси колеса придается приблизительно горизонтальное положение. Колесо прецессирует вокруг вертикальной оси под действием собственного веса. Опыт производит сильное впечатление. Уж очень неожиданным кажется движение колеса, когда оно не опускается под действием собственного веса, а непрерывно "уходит вбок".

4. Наконец, для наблюдения прецессии под действием собственного веса гироскопа нить также не обязательна. Можно взять симметричный гиро-

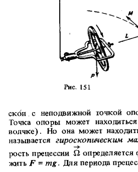


Рис. 151

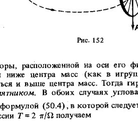


Рис. 152

скоп с неподвижной точкой опоры, расположенной на оси его фигуры. Точка опоры может находиться ниже центра масс (как в игрушечном волчке). Но она может находиться и выше центра масс. Тогда гироскоп называется *гироскопическим маятником*. В обоих случаях угловая скорость прецессии $\vec{\Omega}$ определяется формулой (50.4), в которой следует положить $F = mg$. Для периода прецессии $T = 2\pi/\Omega$ получаем

$$T = 2\pi I_\parallel\omega/(amg). \tag{50.5}$$

В случае гироскопического маятника время T называется его *периодом*. Этому периоду можно привести в соответствие *приведенную длину l* гироскопического маятника по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}. \tag{50.6}$$

Она равна

$$l = I_\parallel^2\omega^2/(m^2a^2g). \tag{50.7}$$

При больших скоростях вращения ω и малых a приведенная длина гироскопического маятника может быть сделана очень большой, а его период доведен до десятков минут. Направление оси фигуры такого гироскопиче-

Решение. Задача сводится к нахождению выражений для потенциальной и кинетической энергии системы. С этой целью мысленно заполним полость тем же веществом, из которого сделан цилиндр. Образовавшийся таким образом сплошной однородный цилиндр назовем цилиндром *1*, а цилиндр вдвое меньшего радиуса, заполняющий полость, — цилиндром *2*. Массы цилиндров обозначим соответственно m_1 и m_2. Энергия системы, как потенциальная, так и кинетическая, будет равна разности энергий цилиндров *1* и *2*. При повороте системы из положения равновесия на угол φ (рис. 142*б*) центр масс цилиндра *1* остается на прежней высоте, его потенциальная энергия U_1 не изменяется. Потенциальная же энергия цилиндра *2* становится равной

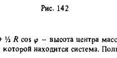


Рис. 142

$U_2 = m_2 g h_2$, где $h_2 = R + ½ R\cos\varphi$ — высота центра масс этого цилиндра над горизонтальной плоскостью, на которой находится система. Полная потенциальная энергия всей системы

$$U = U_1 - U_2 = \mathrm{const} - m_2 gR(1 + ½\cos\varphi).$$

Единственное переменное слагаемое, которое она содержит, есть $-½ m_2 gR\cos\varphi$. Поэтому при надлежащем выборе аддитивной постоянной величину U всегда можно представить в виде

$$U = \mathrm{const} + ½ m_2 gR(1 - \cos\varphi) = \mathrm{const} + m_2 gR\sin^2(\varphi/2),$$

или для малых углов φ

$$U \approx \mathrm{const} + {}^1/_4\, m_2 gR\varphi^2.$$

Кинетическая энергия системы $K = ½(I_1 - I_2)\dot\varphi^2$, где I_1 и I_2 — моменты инерции цилиндров относительно мгновенной оси. При изменении угла φ величины I_1 и I_2 изменяются. Но для малых колебаний этими изменениями можно пренебречь и отнести I_1 и I_2 к тому моменту, когда система находится в положении равновесия. В этом положении с помощью теоремы Гюйгенса — Штейнера нетрудно получить

$$I_1 = {}^3/_2\, m_1 R^2, \qquad I_2 = {}^{19}/_8\, m_2 R^2.$$

Приняв еще во внимание, что $m_1 = 4m_2$, найдем

$$K = {}^{29}/_{16}\, m_2 R^2\dot\varphi^2.$$

Из полученных выражений для U и K делаем вывод, что малые колебания системы будут гармоническими с периодом

$$T = \pi\sqrt{29R/g}.$$

28. Большой однородный свинцовый шар массой M лежит на плоской горизонтальной поверхности. Небольшая пуля массой m выпущена из ружья горизонтально со скоростью V в направлении к центру шара. После выстрела пуля застревает внутри шара. Определить линейную скорость шара v после того, как его движение перейдет в чистое качение. При рассмотрении движения шара после удара считать его однородным, пренебрегая массой застрявшей пули. Трением качения пренебречь.

Ответ. $v = {}^5/_7\,(m/M)\,V$.

29. Шар массой M = 1000 г, лежащий на горизонтальной плоскости, пробивается по диаметру пулей, летящей горизонтально с начальной скоростью V_0 = 500 м/с. После удара шар начинает скользить по плоскости. Спустя некоторое время его движение переходит в чистое качение с постоянной скоростью v = 3 м/с. Определить скорость пули V после вылета ее из шара, если масса пули m = 10 г. Трением качения пренебречь.

Ответ. $V = V_0 - {}^7/_5\,(M/m)\,v$ = 80 м/с.

30. На гладком горизонтальном столе лежит однородный стержень длиной l, который может двигаться по столу без трения рис. 143. В начальный момент, когда скорость стержня равна нулю, в него ударяется шарик, движущийся перпендикулярно к стержню. На каком расстоянии x от центра стержня C ударился шарик, если непосредственно после удара концы стержня A и B начали двигаться со скоростями v_A и v_B соответственно? (Скорости v_A и v_B считаются положительными, когда они направлены в ту же сторону, что и скорость шарика до удара, и отрицательными — в противоположном случае.)

Ответ. $x = {}^1/_6\, l\,(v_A - v_B)/(v_A + v_B)$. Результат на зависит от характера удара.

31. На идеально гладкой горизонтальной поверхности лежит стержень длиной l и массой M, который может скользить по этой поверхности без трения (см. рис. 143). В одну из точек стержня ударяет шарик массой m, движущийся перпендикулярно

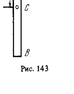


Рис. 143

к стержню. На каком расстоянии x от середины стержня должен произойти удар, чтобы шарик передал стержню всю свою кинетическую энергию? Удар считать абсолютно упругим. При каком соотношении масс M и m это возможно?

Ответ. $x = \dfrac{l}{2\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{M}{m} - 1}$. Для возможности описанного процесса необходимо $M \geqslant m$. Условие $x \leqslant l/2$ дает еще $M \leqslant 4m$.

в потенциальную энергию поднятого грузика. Таким образом, идет непрерывное превращение потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Никакого нарушения закона сохранения энергии не получается.

Если нутации малы, то прецессия называется *псевдорегулярной*. Для быстровращающихся технических гироскопов псевдорегулярная прецессия практически не отличается от регулярной. Здесь нутации представляют собой чрезвычайно мелкое и частое дрожание оси фигуры гироскопа, не имеющее никакого значения при изучении основного прецессионного движения (см. пример в § 52, п. 8). Кроме того, мелкомасштабные нутации быстро затухают под действием сил трения, и псевдорегулярная прецессия переходит в регулярную.

8. Существованием нутации объясняется и другое поведение гироскопа, кажущееся парадоксальным. Согласно уравнению (49.3) момент импульса гироскопа L изменяется только тогда, когда на него действуют внешние силы. Если действие внешних сил прекращается, то мгновенно прекращается изменение вектора L, а с ним и прецессия гироскопа. Ось фигуры гироскопа становится неподвижной. Не противоречит ли закону инерции такая *безынерционность* оси фигуры гироскопа? Действительно, такое противоречие существовало бы, если бы указанная безынерционность относилась к движению самой оси фигуры гироскопа. На самом деле эта безынерционность относится не к оси фигуры, а к вектору L. К выводу о безынерционности движения оси фигуры приводит приближенная теория гироскопа, пренебрегающая нутациями. Мы видим, таким образом, что учет нутаций устраняет противоречия с законом инерции.

9. Согласно изложенному в п. 6 *вынужденная регулярная прецессия должна продолжаться неограниченно долго, если только момент внешних сил M, поддерживающих ее, остается постоянным.* Например, под действием груза P гироскоп на рис. 150 должен был бы как угодно долго совершать прецессионное вращение вокруг вертикальной оси Y. При этом груз P все время должен был бы находиться на одной и той же высоте. На самом деле груз P медленно и непрерывно опускается. Это объясняется действием *сил трения* и других *тормозящих сил*. Они создают *тормозящий вращающий момент M_1*, направленный вниз — в отрицательную сторону оси Y. Теперь полный момент внешних сил, действующих на гироскоп, будет $M + M_1$. Согласно основному уравнению (49.3) производная $\dot{L}$, т. е. линейная скорость вращения конца вектора L, направлена вдоль результирующего момента $M + M_1$. Она имеет вертикальную составляющую, направленную по M_1. В результате этого конец вектора L, а с ним и груз P будут опускаться. Можно сказать, что *тормозящий момент M_1 вызывает дополнительную прецессию вокруг горизонтальной оси X, приводящую к опусканию груза P.*

Правильность такого объяснения легко подтвердить экспериментально. Будем подталкивать прецессирующий гироскоп, действуя против направления прецессионного вращения, вызванного грузом P. Груз начнет опускаться. Если, наоборот, подталкивать гироскоп в направлении прецесссионного вращения, то груз поднимается. В первом случае мы создаем вращательный момент M_1, направленный вниз, во втором — вверх. Он вызывает прецессионное вращение вокруг горизонтальной оси X, опуская или подни-

мая груз. Таким образом, *если пытаться ускорить прецессию, то гироскоп отвечает на эту попытку поднятием груза. Если же тормозить прецессионное движение, то это ведет к опусканию груза.*

10. Интересно переформулировать полученное правило в свете общефизического *принципа Ле Шателье* (по имени французского ученого Ле Шателье (1850–1936)). Согласно этому принципу, установленному его автором в результате рассмотрения отдельных примеров, *на всякое внешнее воздействие система отвечает такими изменениями, которые стремятся ослабить это воздействие.* Когда мы подвешиваем грузик к оси фигуры вращающегося гироскопа, последний отвечает на это воздействие прецессией. Такая прецессия с точки зрения принципа Ле Шателье и должна рассматриваться как реакция гироскопа, ослабляющая внешнее воздействие, т. е. не позволяющая грузику опускаться. Ясно, что если такую реакцию усилить, т. е. вынудить гироскоп прецессировать быстрее, то этот эффект *только усилится.* Иными словами, грузик *должен подниматься.* Наоборот, искусственное замедление прецессионного вращения гироскопа эквивалентно *ослаблению реакции его на воздействие грузика.* В результате такого замедления грузик *должен опускаться.* Изложенная точка зрения оказывается полезной, например, при рассмотрении различного рода стабилизирующих гироскопических приборов, когда надо быстро получить ответ на вопрос, как надо воздействовать на гироскоп, чтобы усилить его стабилизирующее действие.

11. В свете изложенного становится ясным и поведение гироскопа с *двумя степенями свободы.* Для того чтобы свободный гироскоп обладал устойчивостью, а гироскоп под действием внешних сил мог совершать вынужденную прецессию в том виде, как она описана выше, необходимо, чтобы он обладал *тремя степенями свободы*, т. е. мог свободно вращаться вокруг всех трех осей, проходящих через точку опоры O. Одной из таких осей является ось фигуры гироскопа. Вращение вокруг такой оси должно быть возможно во всех случаях. Иначе ни о каких гироскопических эффектах говорить не приходится. Закрепим гироскоп так, чтобы вращение вокруг одной из остальных двух осей сделалось невозможным. Тогда гироскоп становится системой с двумя степенями свободы. Пусть, например, уравновешенный гироскоп закреплен винтами так, что вращение вокруг вертикальной оси OY происходить не может (см. рис. 150). Если повесить грузик P, то гироскоп начнет вращаться вокруг горизонтальной оси OX как обычное твердое тело, а грузик P — опускаться в направлении действия силы веса F. Это радикальное изменение поведения гироскопа так же объясняется обычным правилом прецессии. Сила F создает момент M, стремящийся вызвать прецессию гироскопа вокруг вертикальной оси OY. Так как гироскоп закреплен, то эта прецессия развиться не может. Она вызовет лишь деформацию кручения вертикальной оси. Со стороны подшипников на эту закрученную ось начнет действовать вращающий мо-

$L(\vec{\omega}_\perp) = I_\perp \vec{\omega}_\perp$. В результате получим

$$L = I_\parallel \vec{\omega}_\parallel + I_\perp \vec{\omega}_\perp. \qquad (49.1)$$

Пользуясь этой формулой, легко найти построением вектор L, если известен вектор $\vec{\omega}$ (рис. 147). Из построения видно, что векторы L, $\vec{\omega}$ и ось фигуры гироскопа лежат в одной плоскости. Однако в общем случае направления векторов L и $\vec{\omega}$ не совпадают.

Если воспользоваться формулой (47.2), то из (49.1) можно получить следующие два выражения для кинетической энергии вращающегося гироскопа:

$$K = \tfrac{1}{2}(I_\parallel \omega_\parallel^2 + I_\perp \omega_\perp^2) = \tfrac{1}{2}(L_\parallel^2/I_\parallel + L_\perp^2/I_\perp). \qquad (49.2)$$

Эти выражения показывают, что *кинетическая энергия симметричного гироскопа равна сумме кинетических энергий двух вращений, из которых одно совершается вокруг оси фигуры, а другое – вокруг оси, к ней перпендикулярной.*

На практике гироскоп всегда приводится в быстрое вращение вокруг оси фигуры. По сравнению с этим быстрым вращением вращение, возникающее по тем или иным причинам вокруг перпендикулярной оси, всегда происходит *медленно.* Тогда различие в направлениях векторов L и $\vec{\omega}$ становится очень малым. Оба эти направления практически совпадают с направлением оси фигуры гироскопа.

За положительное направление оси фигуры гироскопа принимают направление ее, совпадающее с направлением вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ (точнее, образующее с ним острый угол). Если от точки опоры O отложить отрезок OS единичной длины в положительном направлении оси фигуры гироскопа, то конец этого отрезка S называется *вершиной гироскопа.* Если известно движение вершины гироскопа и угловая скорость вращения его вокруг оси фигуры, то движение гироскопа определено полностью. Поэтому основная задача теории гироскопа сводится к нахождению движения вершины гироскопа и угловой скорости вращения его вокруг оси фигуры.

4. Вся теория гироскопа построена на уравнении моментов

$$\dot{L} = M, \qquad (49.3)$$

причем моменты L и M берутся относительно неподвижной точки опоры гироскопа O. Если момент внешних сил M равен нулю, то гироскоп называется *свободным.* Для свободного гироскопа $\dot{L} = 0$, и следовательно,

$$L \equiv I_\parallel \vec{\omega}_\parallel + I_\perp \vec{\omega}_\perp = \text{const}. \qquad (49.4)$$

Это уравнение выражает сохранение момента импульса гироскопа. К нему следует присоединить уравнение сохранения энергии

$$K \equiv \tfrac{1}{2}(L\vec{\omega}) = \tfrac{1}{2}(I_\parallel \omega_\parallel^2 + I_\perp \omega_\perp^2) = \text{const}, \qquad (49.5)$$

которое также является следствием уравнения (49.3). Если уравнение (49.4) возвести в квадрат, то получится

$$I_\parallel^2 \omega_\parallel^2 + I_\perp^2 \omega_\perp^2 = \text{const}.$$

Из этого и предыдущего уравнений следует, что *при движении свободного гироскопа длины векторов $\vec{\omega}_\parallel$ и $\vec{\omega}_\perp$ остаются постоянными.* Вместе с ними *остаются постоянными и обе составляющие момента импульса:* $L_\parallel = I_\parallel \omega_\parallel$ и $L_\perp = I_\perp \omega_\perp$. Следовательно, *остается постоянным угол между векторами L и $\vec{\omega}$,* как это видно из уравнения (49.5). *Из постоянства $L_\parallel$ и $L_\perp$ следует также постоянство угла между вектором L и осью фигуры гироскопа.* В каждый момент времени ось фигуры гироскопа совершает вращение вокруг мгновенной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Векторы $\vec{\omega}$ и L, как мы видели, лежат в одной плоскости с осью фигуры гироскопа. А так как вектор L сохраняет неизменным свое направление в пространстве, то мгновенная ось и ось фигуры должны вращаться вокруг этого неизменного направления с одной и той же угловой скоростью. Все это приводит к следующей картине движения свободного гироскопа.

В каждый момент времени движение свободного гироскопа есть вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через неподвижную точку опоры. С течением времени мгновенная ось и вектор L меняют свое положение в теле, описывая конусы вокруг оси фигуры гироскопа с одной и той же постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}_1$, вообще говоря, не равной $\vec{\omega}$. Направление вектора L неизменно в пространстве. Ось фигуры гироскопа и мгновенная ось равномерно вращаются в пространстве вокруг этого направления с той же угловой скоростью $\vec{\omega}_1$, но в противоположном направлении. Такое движение называется *свободной регулярной прецессией гироскопа.* Слово "регулярная" надо понимать в том смысле, что на конические вращения оси фигуры гироскопа и мгновенной оси не накладываются никакие дрожания.

5. Если гироскоп с достаточно большим моментом инерции привести в быстрое вращение, то он будет обладать большим моментом импульса. Приращение момента импульса, как это следует из уравнения (49.3), определяется интегралом

$$\Delta L = \int M\,dt. \qquad (49.6)$$

Если внешняя сила действует в течение короткого промежутка времени, то

Ответ. $H = \dfrac{5r^2 + \rho^2}{2r^2}R$. Для сплошного шара $H = (27/10)R$, для полого $H = (17/6)R$.

3. Цилиндр или шар радиусом r катится по плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. Определить, при каком значении угла α начнется качение со скольжением, если коэффициент трения скольжения между катящимся телом и плоскостью равен k.

Ответ. $\operatorname{tg}\alpha > \dfrac{r^2 + \rho^2}{\rho^2}k$, где ρ – радиус инерции катящегося тела. Для сплошного шара $\operatorname{tg}\alpha > {}^7/_2 k$, для полого $\operatorname{tg}\alpha > {}^5/_2 k$. Для сплошного цилиндра $\operatorname{tg}\alpha > 3k$, для полого $\operatorname{tg}\alpha > 2k$.

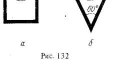


Рис. 132

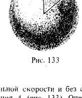


Рис. 133

4. Шарик радиусом r скатывается без начальной скорости и без скольжения по поверхности сферы из самого верхнего положения A (рис. 133). Определить точку, в которой он оторвется от сферы и начнет свободно двигаться под действием силы тяжести.

Ответ. Положение точки B, в которой шарик отрывается от сферы и начинает свободно двигаться под действием силы тяжести, определяется углом α, косинус которого равен

$$\cos\alpha = \frac{2r^2}{3r^2 + \rho^2},$$

где ρ – радиус инерции шарика. Результат не зависит от радиуса сферы. Для сплошного шарика $\cos\alpha = {}^{10}/_{17}$ ($\alpha = 54°$), для полого $\cos\alpha = {}^6/_{11}$ ($\alpha = 57°$).

5. Цилиндр массой M и радиусом r катится по горизонтальной поверхности стола (рис. 134). Обвитая вокруг цилиндра нить горизонтально проходит через неподвижный блок, а к другому концу ее подвешен груз массой m. Пренебрегая массами блока и нити, найти ускорение центра масс цилиндра.

Ответ. $a = \dfrac{2mr^2}{M(\rho^2 + r^2) + 4mr^2}g$, где ρ – радиус инерции цилиндра. Для сплошного цилиндра $a = \dfrac{4m}{3M + 8m}g$, для полого $a = \dfrac{m}{M + 2m}g$.

6. По наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, скатывается массивный полый цилиндр массой M и радиусом r. По поверхности цилиндра бежит собака

таким образом, что она все время занимает наивысшее положение на поверхности цилиндра. Определить, с каким ускорением a скатывается цилиндр, если масса собаки m.

Решение. Метод решения этой задачи поучителен. Для решения проще всего воспользоваться уравнением моментов относительно мгновенной оси вращения A (рис. 135). При этом все движения должны рассматриваться относительно системы отсчета, в которой наклонная плоскость неподвижна. В этой системе собака, все время находящаяся в наивысшей точке цилиндра S, движется параллельно наклонной плоскости и притом с той же скоростью v, с какой движется центр цилиндра. Момент импульса системы L слагается из момента импульса цилиндра $I\omega$ и момента импульса собаки mvh, где $h = r(1 + \cos\alpha)$ – длина перпендикуляра, опущенного на наклонную плоскость из точки S. Итак,

$$L = I\omega + mrv(1 + \cos\alpha),$$

причем под I следует понимать момент инерции цилиндра относительно мгновенной оси, т.е. величину $2Mr^2$. Из-за отсутствия скольжения $v = \omega r$, а потому

$$L = [2M + m(1 + \cos\alpha)]\,rv.$$

Так как центр масс системы и мгновенная ось A движутся параллельно, то производная L по времени должна равняться моменту внешних сил относительно мгновенной оси A, т.е. $(M + m)gr\sin\alpha$. Приравнивая оба выражения, получим

$$a = \frac{M + m}{2M + m(1 + \cos\alpha)}g\sin\alpha.$$

7. По поверхности большого полого цилиндра, лежащего на горизонтальной плоскости, начинает бежать собака массой m в направлении к наивысшей точке A и притом

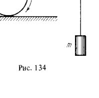


Рис. 134

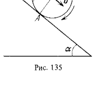


Рис. 135

так, что она все время находится на одном и том же расстоянии от этой точки (рис. 136). В результате цилиндр начинает катиться по горизонтальной плоскости без скольжения. Масса цилиндра M, а угол AOm равен α. Определить: 1) ускорение оси цилиндра a; 2) силу трения между цилиндром и плоскостью во время качения $F_{тр}$; 3) время t, в течение которого собака способна оставаться на указанном расстоянии от точки A, если максимальная полезная мощность, которую она способна развить, равна $P_{макс}$. Какая при этом будет достигнута максимальная скорость $v_{макс}$ поступательного движения цилиндра? (Полезной мощностью здесь называется мощность, которая затрачивается собакой на увеличение кинетической

Эта формула показывает, что от движения точки опоры можно отвлечься. Но тогда к моменту действующих сил M надо прибавить момент "фиктивной силы", или "силы инерции", $F_{ин} = -m\dot{v}_O$, приложенной к центру масс гироскопа. Этот результат становится совершенно естественным, если отнести движение к системе отсчета, в которой точка опоры гироскопа неподвижна (см. гл. IX).

§ 50. Гироскоп под действием сил. Приближенная теория

1. Наиболее интересным видом движения гироскопа является *вынужденная прецессия.* Она возникает под действием внешних сил. Возьмем, например, гироскоп, изображенный на схематическом рис. 150. Он состоит из двух одинаковых маховичков, свободно насаженных на общую ось.

Рис. 150

Гироскоп устроен так, что он может свободно вращаться не только вокруг его оси фигуры OZ, но также и вокруг вертикальной и горизонтальной осей OY и OX. Про такой гироскоп говорят, что он имеет *три степени свободы.* Приложим в какой-либо точке A оси фигуры гироскопа постоянную силу F, например подвесим в этой точке небольшой груз P. Когда маховички гироскопа не вращаются, наблюдается привычное явление: под действием веса груза правый маховичок опускается, левый – поднимается.

Однако движение приобретает совсем иной характер, если предварительно маховички были приведены в быстрое вращение в одну и ту же сторону *). В этом случае ось фигуры гироскопа вместе с грузиком P не опус-

*) В демонстрационных опытах маховичок гироскопа приводят в быстрое вращение, прижимая его обод к шкиву электромотора. Существуют гироскопы (например, волчки-компасы), которые сами представляют собой электродвигатели с вращающимся магнитным полем и приводятся во вращение трехфазным током.

кается, а начинает медленно вращаться с постоянной скоростью вокруг вертикальной оси OY. Такое вращение называется *вынужденной прецессией.* Вынужденная прецессия проще всего объясняется *приближенной теорией гироскопа.* Гироскопу всегда стремятся сообщить быстрое вращение вокруг оси его фигуры. Но вследствие различных причин гироскоп, вообще говоря, получает также вращение вокруг перпендикулярной оси. Специфические гироскопические эффекты проявляются тогда, когда это вращение является медленным по сравнению с вращением вокруг оси фигуры гироскопа. В приближенной теории им пренебрегают. В формуле (49.4) отбрасывают второе слагаемое, т. е. полагают

$$L \approx I_\parallel \vec{\omega}_\parallel \approx I_\parallel \vec{\omega}. \qquad (50.1)$$

В этом приближении векторы $\vec{\omega}$ и L не отличаются по направлению, оба они направлены вдоль оси фигуры гироскопа. Поэтому о движении оси его фигуры можно судить по изменению направления вектора L, описываемому уравнением (49.3). Если рассматривать L как радиус-вектор, то производная $\dot{L}$ геометрически может быть истолкована как скорость движения конца вектора L. Допустим, что точка приложения внешней силы F лежит на оси фигуры гироскопа. Момент этой силы будет $M = [aF]$, где a – радиус-вектор, проведенный от точки опоры гироскопа к точке приложения силы F. В силу уравнения (49.3) вектор "скорости" $\dot{L}$ будет перпендикулярен к оси фигуры гироскопа Z. Такой момент сил может изменить только направление вектора L, а не его длину. Следовательно, если внешняя сила F постоянна, то вектор L, а с ним и ось фигуры гироскопа должны совершать равномерное вращение вокруг оси OY. Это вращение и есть вынужденная прецессия. Вектор угловой скорости прецессии $\vec{\Omega}$ в рассматриваемом примере направлен вдоль оси OY.

Если один из маховичков (см. рис. 150) закрутить в одну, а другой – в противоположную сторону с той же угловой скоростью, то прецессии не возникает. В этом случае $L = 0$, и под действием груза P гироскоп поворачивается вокруг горизонтальной оси OX, как если бы его маховички не вращались.

2. Найдем длину вектора $\vec{\Omega}$. Вектор L изменяется только вследствие вращения с угловой скоростью прецессии $\vec{\Omega}$. Для линейной скорости движения его конца, т.е. производной $\dot{L}$, можно написать $\dot{L} = [\vec{\Omega}L]$. Поэтому уравнение (49.3) дает

$$[\vec{\Omega}L] = M. \qquad (50.2)$$

Из этого уравнения и можно найти угловую скорость прецессии $\vec{\Omega}$.

где v – скорость центра масс, m – масса маятника. Массой снаряда пренебрегаем. Почленным делением из этого и предыдущего уравнений исключаем силу F и получаем

$$l = \frac{I}{m}\frac{d\omega}{dv}.$$

Если a – расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника, то $v = \omega a$. В результате находим

$$l = \frac{I}{ma}.$$

Отсюда видно, что l есть приведенная длина физического маятника, а точка A совпадает с центром качания его. Соответствующая ей точка подвеса маятника O называется *"центром удара".* Кузнец точно знает, в каком месте нужно держать рукоятку своего тяжелого молота (именно – в центре удара), чтобы при ударе не ощущать в руке неприятную отдачу.

11. Каким местом шашки следует наносить удар по лозе, чтобы при рубке не ощущалась неприятная отдача? Шашку считать однородной полосой длины l, которую при ударе держат за конец.

Ответ. Расстояние от руки до места удара должно составлять $2l/3$.

12. Твердый цилиндр или шар, положенный на твердую горизонтальную плоскость, катится по ней со скольжением. Показать, что во время качения поступательная и вращательная скорости этого тела связаны соотношением

$$mrv + I\omega = \text{const}, \qquad (48.7)$$

где I – момент инерции относительно геометрической оси тела.

Решение. Уравнения движения центра масс и моментов имеют вид

$$m\frac{dv}{dt} = \pm F, \quad I\frac{d\omega}{dt} = \mp M = \mp rF.$$

Верхний знак относится к случаю, когда сила трения F направлена вперед (поступательное движение ускоряется, вращение замедляется), нижний – когда F направлена назад (поступательное движение замедляется, вращение ускоряется). Исключая F и dt, найдем в обоих случаях $mrdv = -Id\omega$, откуда и следует (48.7).

13. Согласно уравнению (48.7) качение твердого тела по горизонтальной плоскости не может прекратиться, если нет никаких дополнительных сил, помимо горизонтальной силы трения, действующей в точке касания. В чем причина расхождения этого вывода с опытом?

Решение. Реальные тела деформируемы. На плоскости, по которой катится тело, возникает углубление. Силы трения, действующие на катящееся тело, на рис. 140 изображены маленькими стрелками, их результирующая $F = \vec{AB}$. Ясно, что момент сил трения M больше момента результирующей, т.е. $M > rF$ (F и M – величины положительные). Из уравнений $mdv = \pm Fdt$, $Id\omega = \mp Mdt$ почленным делением и умножением на r получаем

$$mrdv + Id\omega\,(rF/M) = 0.$$

С учетом неравенства $rF < M$ отсюда следует $mrdv + Id\omega < 0$, или

$$\frac{d}{dt}(mrv + I\omega) < 0. \qquad (48.8)$$

Таким образом, в случае реального качения величина $mrv + I\omega$ убывает со временем и в конце концов обращается в нуль.

14. Сплошному однородному шару радиусом r, лежащему на горизонтальной плоскости, в момент $t = 0$ сообщена скорость v_0 без вращения. Учитывая трение скольжения, но пренебрегая трением качения, найти угловую скорость шара, когда его движение перейдет в чистое качение. Определить потерю кинетической энергии на трение.

Решение. На основании (48.7)

$$mrv_0 = mrv + I\omega = (mr^2 + I)\,\omega,$$

где v – поступательная, а ω – вращательная скорости шара после установления

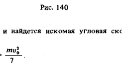


Рис. 140

чистого качения. Отсюда и найдется искомая угловая скорость ω. Потеря кинетической энергии равна

$$\Delta K = \frac{1}{2}\frac{I}{I + mr^2}mv_0^2 = \frac{mv_0^2}{7}.$$

15. Сплошной однородный шар радиусом r, вращающийся вокруг горизонтального диаметра с угловой скоростью ω_0, ставится на горизонтальную плоскость без сообщения ему поступательного движения. Учитывая трение скольжения, но пренебрегая трением качения, найти линейную скорость v центра шара, когда его движение перейдет в чистое качение. Определить потерю кинетической энергии на трение.

Ответ. $v = \dfrac{Ir}{I + mr^2}\omega_0 = \dfrac{2}{7}r\omega_0$, $\Delta K = \dfrac{1}{2}\dfrac{mr^2}{I + mr^2}\cdot I\omega_0^2 = \dfrac{1}{7}mr^2\omega_0^2$.

16. Бильярдный шар катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью v и ударяется в покоящийся такой же бильярдный шар, причем линия центров параллельна скорости движения. Определить скорости обоих шаров после того, как их движения перейдут в чистые качения. Какая доля первоначальной кинетической энергии перейдет в тепло? Считать, что при столкновении шаров передачи вращательного движения не происходит. Потерей энергии на трение при чистом качении пренебречь.

Ответ. Скорость первого шара $v_1 = {}^2/_7 v$, второго $v_2 = {}^5/_7 v$. Потеря кинетической энергии на трение составляет ${}^{20}/_{49}$ начального значения кинетической энергии.

17. Два одинаковых бильярдных шара катятся без скольжения навстречу друг другу с одной и той же скоростью v_0 и претерпевают упругий удар. Предполагая, что удар центральный и за время соударения шаров угловые скорости не изменя-

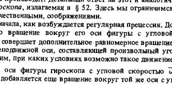


Рис. 153

Рис. 141

и уравнение моментов (относительно геометрической оси цилиндра)

$$I\frac{d\omega}{dt} = -Fr.$$

Исключая F, получим

$$mr\frac{dv}{dt} = -I\frac{d\omega}{dt} - mgr\sin\alpha.$$

Интегрирование этого уравнения с учетом начального условия ($\omega = \omega_0$ при $t = 0$) дает

$$mrv = I(\omega_0 - \omega) - mgrt\sin\alpha.$$

Это соотношение справедливо в течение всего времени движения, независимо от того, происходит ли оно со скольжением или является чистым качением. В наивысшей точке должно быть $v = 0$. Отсюда следует, что в той же точке $\omega = 0$. В противном случае цилиндр продолжал бы вкатываться и рассматриваемая точка не была бы наивысшей. Поэтому время подъема t найдется, если в предыдущем уравнении положить $v = \omega = 0$. Это дает

$$t = \frac{I\omega_0}{mgr\sin\alpha} = \frac{r\omega_0}{2g\sin\alpha}.$$

$$H = H_1 + H_2 = \frac{k\cos\alpha - \sin\alpha}{4g(3k\cos\alpha - \sin\alpha)}\omega_0^2 r^2;$$

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{2H}{a_2\sin\alpha}} = \frac{\omega_0 r_0}{2g\sin\alpha}\sqrt{\frac{3(k\cos\alpha - \sin\alpha)}{3k\cos\alpha - \sin\alpha}}.$$

26. Вращающийся с угловой скоростью ω_0 сплошной однородный цилиндр массой m_1 ставится без начальной поступательной скорости на длинную доску массой m_2, лежащую на гладкой горизонтальной плоскости. Начальная скорость доски равна нулю. Пренебрегая силой трения качения, но учитывая трение скольжения между доской и цилиндром, найти угловую скорость вращения цилиндра после того, как его движение перейдет в чистое качение. Доска предполагается настолько длинной, что чистое качение успевает установиться до того, как цилиндр скатится с доски.

Ответ. $\omega = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1 + 3m_2}\omega_0$.

27. В сплошном однородном цилиндре радиусом R сделана цилиндрическая полость радиусом $R/2$ с осью, проходящей через середину радиуса цилиндра (рис. 142а). Определить период малых колебаний T, которые возникнут, если положить цилиндр на горизонтальную плоскость и дать ему возможность кататься по ней без скольжения.

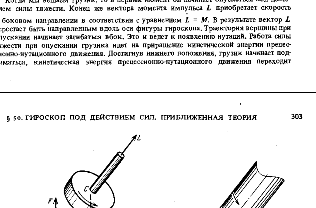


Рис. 154

32. На гладком горизонтальном столе лежит однородный упругий стержень длиной l и массой M. В конец стержня ударяет упругий шарик массой m, движущийся со скоростью v перпендикулярно к стержню. Найти значение энергии деформации системы в момент, когда она максимальна. Трением между стержнем и столом пренебречь.

Ответ. $U = \dfrac{M}{M + 4m}\dfrac{mv^2}{2}$. В предельных случаях 1) $M = 0$ и 2) $M = \infty$ получаем 1) $U = 0$, 2) $U = \tfrac{1}{2}mv^2$.

33. На гладком горизонтальном столе лежит однородный твердый стержень длиной l и массой M, в край которого ударяет твердый шарик массой m, движущийся со скоростью v_0, перпендикулярной к оси стержня. Считая удар идеально упругим и предполагая, что силы трения между поверхностью стола и лежащими на ней телами пренебрежимо малы, вычислить угловую скорость вращения стержня после удара.

Решение. Если F – сила, действующая на шарик во время удара, то

$$m\frac{dv}{dt} = -F, \qquad M\frac{dV}{dt} = F, \qquad I\frac{d\omega}{dt} = F\frac{l}{2}.$$

Почленным делением исключаем F и получаем

$$\frac{m}{I}\frac{dv}{d\omega} = -\frac{2}{l}, \qquad \frac{M}{I}\frac{dV}{d\omega} = \frac{2}{l}.$$

Интегрируя в пределах от начального значения угловой скорости $\omega = 0$ до конечного, найдем

$$v - v_0 = \frac{2}{l}\frac{I}{m}\omega,$$

$$V = \frac{2}{l}\frac{I}{M}\omega,$$

причем в этих уравнениях v, V и ω означают величины соответствующих скоростей после удара. Угловая скорость ω найдется из уравнения сохранения энергии. Если в него подставить значения v и V, то для ω получится квадратное уравнение

$$\left[1 + \frac{4I}{l^2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\right]\omega^2 - 4\frac{v_0}{l}\omega = 0.$$

Один из корней этого уравнения ($\omega = 0$) дает угловую скорость стержня до удара, второй – после удара. По условию задачи надо взять второй корень. С учетом соотношения $I = {}^1/_{12}Ml^2$ для него получаем

$$\omega = \frac{12mv_0}{(4m + M)l}.$$

§ 49. Гироскопы. Движение свободного гироскопа

1. В буквальном переводе слово "гироскоп" означает прибор для обнаружения вращения. В широком смысле *гироскопом* называется быстро вращающееся твердое тело, ось вращения которого может изменять свое направление в пространстве. Гироскоп, в особенности когда на него действуют внешние силы, может совершать удивительные движения, кажущиеся на первый взгляд неожиданными и непонятными. Они всегда воспринимаются с захватывающим интересом. Быстро вращающийся волчок может служить не только забавной игрушкой, но и прекрасным демонстрационным прибором при изучении законов механики. Все явления, обусловленные быстрым вращением гироскопа, называются *гироскопическими.* Они нашли широкое научно-техническое применение (см. § 51).

Гироскопические эффекты проявляются также у атомов благодаря наличию у них моментов импульса, связанных с внутренними орбитальными движениями или собственными вращениями (спинами) электронов и атомных ядер. Конечно, эти, как и всякие другие, атомные явления должны рассматриваться на основе квантовой механики. Однако есть много общего в гироскопических свойствах атомных и макроскопических систем. Поэтому теория гироскопов может оказаться полезной и при изучении атомной физики.

Наибольшее значение в науке и технике имеют *симметричные гироскопы. Симметричным* называется гироскоп, обладающий симметрией вращения относительно некоторой оси, называемой *геометрической осью* или *осью фигуры гироскопа.* Теория симметричного гироскопа более проста и более важна, чем теория несимметричного гироскопа. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только симметричных гироскопов. Обычно одна из точек оси фигуры гироскопа бывает закреплена. Закрепленную точку оси фигуры называют *точкой опоры гироскопа.* В более общем смысле *точкой опоры гироскопа* называют такую точку O оси фигуры его, относительно которой рассматривают вращение гироскопа. В общем случае движение гироскопа слагается из движения точки опоры O и вращения вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку. Примером гироскопа с движущейся точкой опоры может служить детская игрушка – *волчок.* Основным в теории является случай, когда точка опоры *неподвижна.* К этому частному случаю можно свести и общий случай, когда точка опоры движется (см. п. 6).

2. Чтобы ось фигуры гироскопа могла свободно поворачиваться в пространстве, гироскоп обычно помещают в так называемом *кардановом подвесе* (рис. 144). Маховичок гироскопа закрепляется на его оси фигуры $A'A$, которая может вращаться по возможности с малым трением в подшипниках, укрепленных в концах диаметра *внутреннего кольца.* Внутреннее кольцо, в свою очередь, может вращаться вокруг перпендикулярной оси касательным ускорением. Эта "сила" приложена к центру масс C и направлена противоположно касательному ускорению, т.е. на рис. 154*а* – от читателя. Ее момент относительно точки опоры O имеет вертикальную составляющую, направленную вверх. Этот момент вызывает прецессию, в результате которой вершина волчка поднимается.

14. Случай, когда центр масс лежит ниже точки опоры, рассматривается совершенно аналогично. Силы трения скольжения, возникающие в точке опоры, и в этом случае приводят к поднятию центра масс. Однако здесь оно сопровождается опусканием вершины волчка. Волчок, запущенный наклонно, наклоняется еще больше.

15. Любопытным примером может служить *китайский волчок*, который имеет форму гриба (рис. 155). Из-за действия сил трения центр масс волчка непрерывно

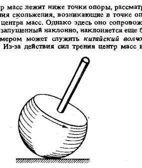


Рис. 155

поднимается, а ось фигуры все более и более наклоняется. В конце концов это приводит к *опрокидыванию* волчка. Волчок становится на ножку. Ось фигуры все более и более приближается к вертикальному положению, если только волчок не потеряет устойчивость из-за замедления осевого вращения.

16. Для того чтобы повернуть ось фигуры гироскопа, к нему надо приложить силы, момент которых M определяется уравнением (50.2), в котором под $\vec{\Omega}$ следует понимать угловую скорость вынужденного вращения. Такие силы создаются, например, давлением подшипников на ось фигуры гироскопа. Ось фигуры гироскопа действует на подшипники с равными и противоположно направленными силами противодавления. Эти силы противодавления и создаваемые ими вращающие моменты называются *гироскопическими* *). Гироскопические силы легко почувствовать, если взять за ось быстро вращающееся велосипедное колесо и попытаться повернуть эту ось. Колесо будет стремиться "вырваться из рук" в перпендикулярном направлении. При быстром повороте требуется значительное усилие, чтобы удержать ось в руках.

В опыте со скамьей Жуковского (§ 34, п. 7) демонстратор, поворачивающий ось велосипедного колеса, испытывает с его стороны гироскопические силы. Момент этих сил направлен вертикально. Они и приводят во вращение скамью или изменяют ее угловую скорость. Гироскопические силы действуют на подшипники вала турбины корабля или винта самолета, когда при маневрах корабля и самолета направления их

*) Термин "гироскопические силы" употребляется здесь в ином смысле, чем в § 24.

движения изменяются быстро. Они вызывают "рыскание по курсу". Для крупных судов это явление незаметно, оно наблюдается у мелких судов и самолетов.

17. Поднесем к оси гироскопа, изображенного на рис. 148, горизонтальный стержень. (Ось фигуры гироскопа изображена на рис. 156*а*. Сечение стержня плоскостью рисунка изображено заштрихованным кружком. Предполагается, что стержень перпендикулярен к плоскости рисунка.) Возникает сила трения скольжения $F_{тр}$, параллельная стержню и, следовательно, перпендикулярная к плоскости рисунка. Она изображена штриховой стрелкой. Момент этой силы относительно точки опоры $M_{тр} = [r F_{тр}]$ лежит в плоскости рисунка и направлен перпендикулярно к стержню и радиусу-вектору r. Он будет стремиться вызвать прецессию оси гироскопа в том же направлении. Но эта прецессия возникнуть не может, так как ей препятствует стержень. Она проявится только в том, что ось гироскопа будет прижиматься к стержню. В результате возникает сила давления $F_{дав}$, действующая со стороны стержня на ось гироскопа. Действие этой силы проявится, во-первых, в увеличении силы $F_{тр}$. Во-вторых, она вызовет прецессию оси фигуры гироскопа, заставляя эту ось перемещаться вдоль стержня в ту же сторону, куда направлена сила $F_{тр}$, так как момент силы давления $M_{дав} = [r F_{дав}]$ направлен в ту же сторону. Возрастание силы $F_{тр}$, в свою очередь, приведет к возрастанию силы $F_{дав}$ и к ускорению прецессионного перемещения оси фигуры гироскопа вдоль стержня. Это ускорение прекратится, когда движение оси фигуры со скольжением перейдет в чистое качение. (В описываемом нами опыте для этого может не хватить времени из-за изменения наклона оси фигуры гироскопа при движении.) Начиная с этого момента сила $F_{тр}$ практически обратится в нуль, сила $F_{дав}$ станет постоянной, а прецессионное движение оси фигуры гироскопа вдоль стержня – равномерным.

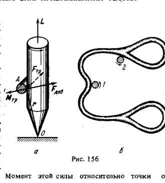


Рис. 156

Вместо стержня можно взять какой-либо замкнутый или незамкнутый контур произвольной формы из толстой проволоки. Для демонстрационных опытов может служить контур, изображенный на рис. 156 *б*. Контур закрепляется на штативе в горизонтальном положении вблизи оси фигуры гироскопа. Если ось фигуры верхним концом привести в соприкосновение с контуром, то она начинает "бегать" по этому контуру, переходя последовательно из положения *1* в положение *2*, *3* и т. д. При этом ось фигуры гироскопа сильно прижимается к контуру. Это очень красивый десонстрационный опыт. Описанное явление называется *периметрическим движением* гироскопа.

ЗАДАЧИ

1. Герой романа Жюля Верна "Вверх дном" предлагал повернуть земную ось, выпустив с Земли тяжелый снаряд. Оценить, с какой минимальной скоростью v нужно выпустить на полюсе Земли снаряд массой $m = 1000$ т, чтобы повернуть в пространст-

П р и м е р. В авиагоризонте, рассмотренном в примере § 50, $I_\perp = {}^3/_5 I_\parallel$. Число нутаций на один прецессионный оборот равно

$$N = \frac{\Omega_н}{\Omega_п} = \frac{I_\parallel}{I_\perp}\,\frac{\omega_\parallel}{\Omega_п} = 4{,}77 \cdot 10^5.$$

Если начальная скорость вершины гироскопа равна нулю, то $v_п + v_н = 0$, а потому $r = v_п/\Omega_н$. Но $v_п = R\Omega_п$, где R – радиус прецессии. Таким образом,

$$\frac{r}{R} = \frac{\Omega_п}{\Omega_н} = \frac{1}{N} = \frac{1}{4{,}77 \cdot 10^5}.$$

Этот пример наглядно показывает, насколько мелким и частым дрожанием являются нутации в быстровращающихся технических гироскопах.

9. В заключение рассмотрим, как можно качественно объяснить характер траектории вершины гироскопа при наличии нутаций. Мы исходим непосредственно из уравнения движения вершины (52.11). Пусть на рис. 169 ось фигуры гироскопа своим положительным концом направлена в сторону читателя. Пусть в начальный момент времени вершина неподвижна и занимает положение A_1 (см. рис. 169*б*). В этот момент скорость $\dot{s}$, а потому и отклоняющая сила $I_\parallel\omega_\parallel[s\dot{s}]$ равны нулю. Под действием силы тяжести вершина получает скорость, направленную вниз. Но тогда появляется и боковая отклоняющая сила. Она начинает загибать траекторию вершины влево (если, встав на плоскость рисунка, идти в сторону движения). В положении B_1 скорость вершины становится горизонтальной, а отклоняющая сила – вертикальной. По величине отклоняющая сила превосходит силу веса, а вершина гироскопа начинает подниматься. В верхнем положении A_2 скорость вершины обращается в нуль. Это непосредственно следует из уравнения энергии, которому формально подчиняется движение вершины. Затем движение неограниченно повторяется. Получается траектория циклоидального типа. Траектория с петлями рис. 169*а* получится, если в начальный момент сообщить вершине скорость в направлении против прецессии. Если же начальная скорость сообщена в направлении прецессии, то получится траектория типа рис. 169*в*. В последнем случае скорость можно подобрать такой, что возникнет регулярная прецессия без нутаций.

§ 53. Тензор и эллипсоид инерции

1. Вычислим момент инерции I твердого тела относительно произвольной оси OA (рис. 170). Без ущерба для общности можно принять, что ось проходит через начало координат O. Координаты будем обозначать либо x, y, z, либо x_1, x_2, x_3. Таким образом, $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$. Разложим радиус-вектор r элемента массы тела dm на составляющие вдоль оси OA и перпендикулярную к ней: $r = r_\parallel + r_\perp$. По определению момента инерции

$$I = \int r_\perp^2 dm = \int (r^2 - r_\parallel^2)\, dm.$$

Если s – единичный вектор вдоль оси OA, то $r_\parallel = (rs) = xs_x + ys_y + zs_z$. Кроме того, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Учтя эти соотношения, а также соотношение $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$, получим

$$I = I_{xx}s_x^2 + I_{yy}s_y^2 + I_{zz}s_z^2 + 2I_{xy}s_xs_y + 2I_{yz}s_ys_z + 2I_{zx}s_zs_x, \tag{53.1}$$

где $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{xy} \equiv I_{yx}, I_{yz} \equiv I_{zy}, I_{zx} \equiv I_{xz}$ – постоянные, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int (y^2 + z^2)\, dm, & I_{xy} &\equiv I_{yx} = -\int xy\, dm,\\ I_{yy} &= \int (z^2 + x^2)\, dm, & I_{yz} &\equiv I_{zy} = -\int yz\, dm,\\ I_{zz} &= \int (x^2 + y^2)\, dm, & I_{zx} &\equiv I_{xz} = -\int zx\, dm. \end{aligned} \tag{53.2}$$

Для этих постоянных будем пользоваться также обозначениями $I_{11}, I_{22}, \ldots, I_{13}$. Величины I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, очевидно, имеют смысл моментов инерции тела относительно координатных осей X, Y, Z соответственно. Совокупность девяти величин

$$\begin{matrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz}\\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz}\\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{matrix} \tag{53.3}$$

называются *тензором инерции тела относительно точки O*, а сами эти величины – *компонентами этого тензора* *). *Тензор инерции симметричен*, т.е. $I_{ij} = I_{ji}$. Поэтому

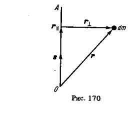


Рис. 170

он полностью определяется заданием *шести* компонентов. Формулу (53.1) можно записать в более краткой и симметричной форме:

$$I = \sum_{i,j=1}^{3} I_{ij}s_is_j. \tag{53.4}$$

Если известны для какой-либо координатной системы все шесть компонентов тензора инерции, то по формуле (53.1) или (53.4) можно вычислить момент инерции тела относительно произвольной оси, проходящей через начало координат O. Момент инерции относительно другой оси, не проходящей через начало координат, можно вычислить с помощью теоремы Гюйгенса – Штейнера.

2. Формула (53.4) допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Через начало координат O будем проводить прямые во всевозможных направлениях и на них откладывать отрезки длиной $r = 1/\sqrt{I}$. Геометрическим местом концов таких отрезков будет некоторая поверхность. Найдем ее уравнение. Согласно построению радиус-вектор точки, лежащей на этой поверхности, определяется выражением $r = s/\sqrt{I}$, а координаты той же точки – выражением $x_i = s_i/\sqrt{I}$. Исключая с помощью этих соотношений величины s_i из (53.4), получим уравнение искомой поверхности

$$\sum_{i,j} I_{ij}x_ix_j = 1. \tag{53.5}$$

Эта поверхность второго порядка, очевидно, является эллипсоидом, так как момент

*) Тензором называют упорядоченную совокупность девяти величин, заданную в каждой системе координат, причем при повороте координатных осей эти величины преобразуются как произведения компонентов двух векторов.

как вынужденную прецессию гироскопа, каковым является бегун. При вынужденной прецессии возрастает сила давления бегуна на горизонтальную плиту, по которой он катится. Эта сила растирает и измельчает материал, подсыпаемый под каток на плиту. Вычислить полную силу давления катка на опорную плиту.

О т в е т. $F_{дав} = P + I_\parallel \Omega^2/r = P + \frac{1}{2} m\Omega^2 r$, где P – вес бегуна, m – его масса, r – радиус. Пусть $r = 50$ см. Тогда при рабочей скорости 1 об/с и, следовательно, $\Omega = 2\pi$ рад/с получаем $\frac{1}{2} m\Omega^2 r \approx mg = P$. Следовательно, $F_{дав} \approx 2P$. Обратить внимание, что полный момент импульса L не направлен вдоль оси фигуры бегуна, так как имеется еще момент, возникающий из-за вращения вокруг вертикальной оси. Однако последний момент остается неизменным при вращении катка, а потому при решении задачи его можно не принимать во внимание.

7. Диск радиуса r, вращающийся вокруг собственной оси с угловой скоростью ω, катится без скольжения в наклонном положении по горизонтальной плоскости, описывая окружность за время T. Определить T и радиус окружности R, если $R \gg r$, а угол между горизонтальной плоскостью и плоскостью диска равен α.

О т в е т. $T = (3\pi\omega r/g)\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $R = {}^3/_2\, (\omega^2 r^2/g)\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

§ 51. Применения гироскопов

1. Научно-технические применения гироскопов весьма разнообразны. В курсе физики о них можно дать лишь общее представление. Рассмотрим принципы действия некоторых *гироскопических приборов*, совершенно отвлекаясь от деталей конструктивного или технического характера. Будем предполагать, что все приборы и условия, в которых они работают, являются *идеальными*. Так, будем считать, что сил трения и прочих вредных сил нет, что моменты инерции и моменты импульса кардановых колец пренебрежимо малы и т. д. В действительности все эти факторы оказывают существенное, иногда решающее, влияние на поведение реального гироскопа. Однако мы ограничиваем свою задачу выяснением лишь основных идей и принципов, на которых основано действие гироскопических приборов.

2. Начнем с *уравновешенного* (*астатического*) гироскопа с тремя степенями свободы. Пусть он быстро вращается вокруг своей оси фигуры. На направление оси фигуры гироскопа не оказывают влияния сила тяжести, вращение Земли, а также любые ускоренные движения точки опоры. В отсутствие сил, создающих вращающие моменты относительно точки опоры, ось фигуры уравновешенного гироскопа сохраняла бы неизменное направление относительно звезд. Если ось фигуры гироскопа направить на какую-либо звезду, то при перемещении последней по небесному своду она будет поворачиваться относительно Земли, оставаясь все время направленной на ту же звезду. Такой гироскоп позволяет обнаружить суточное вращение Земли, что и было впервые качественно продемонстрировано французским физиком Леоном Фуко (1819–1868). Трудности подобных опытов очень велики. Они связаны с тем, что невозможно полностью освободиться от неизбежного трения в подшипниках карданова подвеса и других вредных сил, создающих вращающие моменты относительно центра подвеса.

3. Свойство уравновешенного гироскопа сохранять неизменным направление оси своей фигуры используется для автоматического управления движением самодвижущихся мин (торпед), самолетов, судов, ракет и прочих аппаратов. Момент импульса гироскопа $L = I_\parallel \vec{\omega}$ должен быть достаточно большим, чтобы уменьшить влияние трения в подшипниках карданова подвеса и прочих вредных сил. Ось фигуры вращающегося гироскопа задает курс движения аппарата. При всяком отклонении аппарата от курса (например, вследствие удара волн или действия порывов ветра)

направление оси фигуры гироскопа в пространстве сохраняется. Значит, ось фигуры гироскопа вместе с рамами карданова подвеса поворачивается относительно движущегося аппарата. Поворот рам карданова подвеса с помощью тех или иных приспособлений включает двигатели, приводящие в действие *рули управления*. Последние и возвращают движение аппарата к заданному курсу. В случае торпеды, поскольку ее движение совершается в горизонтальной плоскости (по поверхности моря), достаточно одного гироскопа с осью фигуры, ориентированной в направлении движения. В случае самолета требуются два гироскопа. Один, с вертикальной осью, задает горизонтальную плоскость, в которой должен оставаться самолет. Другой, с горизонтальной осью, ориентированной вдоль оси самолета, задает его курс. Такими "*автопилотами*", освобождающими летчика от необходимости непрерывного управления самолетом, оборудованы почти все современные самолеты, предназначенные для длительных полетов.

4. Важным применением неуравновешенного гироскопа с тремя степенями свободы является создание *искусственных горизонта* и *вертикали*. Это необходимо в навигации в условиях отсутствия видимости линии горизонта. Направление вертикали в каждом месте земного шара можно просто определить с помощью обыкновенного маятника, применяемого в качестве отвеса. Однако такой способ не годится на корабле или самолете ввиду неизбежных ускорений, которые они получают при наборе скорости, поворотах, качке и пр. В этих случаях вместо обыкновенного маятника используется *гироскопический маятник* (*гирогоризонт*) с очень большой приведенной длиной (см. § 50, п. 4). При отсутствии ускорений ось гироскопического маятника устанавливается вертикально. Если аппарат движется ускоренно, то появляется прецессия, уводящая ось маятника от вертикального положения. Однако если период прецессии T очень велик, а время ускорения мало по сравнению с T, то за это время прецессия, ввиду ее медленности, не успеет заметно отклонить ось гиромаятника от вертикали (см. задачу 3 к § 50). Эти условия соблюдаются, например, при поворотах движущегося аппарата. Время поворота всегда мало по сравнению с периодом T. Еще меньше чувствителен гиромаятник к качке корабля. Период качки всегда много меньше периода прецессии T, а главное, при качке ускорение за время T многократно и периодически меняет знак. Качка приводит лишь к малозаметным колебаниям оси гироскопического маятника около вертикального положения. Наиболее неблагоприятно на направление оси гиромаятника влияют увеличение и уменьшение скорости, которые могут длиться значительное время и вызывать хотя и не очень большие, но все же заметные отклонения оси фигуры гироскопа.

5. Важнейшим применением гироскопа является *гироскопический компас*, получивший широкое распространение на кораблях. Обычный магнитный компас подвержен действию разнообразных возмущений земного магнитного поля (магнитных бурь). На его показания влияют возмущения магнитного поля, вызываемые большими массами железа на корабле, а также различные электродинамические воздействия со стороны сложного электротехнического оборудования корабля. В этих условиях использование магнитного компаса на корабле и становится практически невозможным. Гироскопический компас свободен от этих недостатков.

Идея гироскопического компаса впервые была высказана Фуко в 1852 г. Он предложил для этой цели использовать гироскоп с *двумя степенями свободы* в кардановом подвесе. Чтобы лучше уяснить идею гироскопического компаса, а также некоторых других гироскопических приборов, поставим вопрос шире и исследуем, как ведет себя гироскоп, закрепленный на вращающемся основании.

6. Закрепим неподвижно наружное кольцо карданова подвеса (см. рис. 144). Гироскоп будет лишен той устойчивости, какая была свойственна ему, когда он обладал тремя степенями свободы. Причина этого, как было выяснено в предыдущем параграфе, заключается в том, что закрепление наружного кольца лишает гироскоп

малое возмущение существенно меняет характер движения тела, т.е. далеко уводит мгновенную ось от исходного направления, вокруг которого первоначально вращалось тело, то это вращение называется *неустойчивым*. В следующем параграфе будет показано, что *вращение вокруг оси с наибольшим или наименьшим моментом инерции является устойчивым, а вращение вокруг оси с промежуточным значением момента инерции – неустойчивым*. Для демонстрации можно взять картонную коробку прямоугольной формы, у которой длины всех трех ребер различны. Ось с наибольшим моментом инерции будет, очевидно, параллельна наиболее короткому ребру, с наименьшим моментом инерции – наиболее длинному ребру, с промежуточным – ребру промежуточной длины. Коробку подбрасывают вверх, сообщая ей быстрое вращение вокруг одной из этих осей. Во время полета ось вращения сохраняется, если она является осью с наибольшим или наименьшим моментом инерции. Если же первоначальное вращение было сообщено вокруг оси с промежуточным значением момента инерции, то мгновенная ось вращения во время полета коробки непрерывно качается, далеко уходя от первоначального направления в теле. Движение коробки приобретает сложный и запутанный характер.

6. Допустим теперь, что твердое тело вращается вокруг какой-то закрепленной или мгновенной оси OA с постоянной или непостоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$. Найдем его момент импульса L относительно начала координат O, а также кинетическую энергию K. По определению

$$L = \int [r v]\, dm.$$

Подставим сюда $v = [\vec{\omega} r]$ и воспользуемся формулой $[r[\vec{\omega} r]] = r^2\vec{\omega} - (\vec{\omega} r) r$. Тогда получим

$$L = \vec{\omega}\int r^2 dm - \int (\vec{\omega} r) r\, dm.$$

В проекциях на координатные оси это соотношение записывается так:

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z,\\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z,\\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z, \end{aligned} \tag{53.9}$$

или короче –

$$L_i = \sum_{j=1}^{3} I_{ij}\omega_j \quad (i = 1, 2, 3). \tag{53.10}$$

Таким образом, *компоненты вектора момента импульса тела являются линейными однородными функциями компонентов вектора угловой скорости*. В системе главных осей формулы (53.9) упрощаются и принимают вид

$$L_x = I_x\omega_x, \quad L_y = I_y\omega_y, \quad L_z = I_z\omega_z. \tag{53.11}$$

Формулы ясно показывают, что в общем случае направления векторов L и $\vec{\omega}$ не совпадают. Кинетическую энергию вращающегося твердого тела легко найти по формуле (47.2). Она равна

$$K = \tfrac{1}{2}(L\vec{\omega}) = \tfrac{1}{2}\sum_{ij} I_{ij}\omega_i\omega_j. \tag{53.12}$$

§ 54. Вращение твердого тела по инерции вокруг неподвижной точки

1. Пуансо дал простую и наглядную интерпретацию движения твердого тела по инерции вокруг неподвижной точки опоры O. С твердым телом связывается его эллипсоид инерции с центром в точке опоры O. Движение тела заменяется движением этого эллипсоида (см. § 53, п. 3). В основе интерпретации Пуансо лежат три теоремы, которые мы и докажем. Для краткости будем называть *полюсом* точку пересечения P мгновенной оси с поверхностью эллипсоида инерции.

Т е о р е м а 1. *Радиус-вектор, соединяющий точку опоры O с полюсом P, пропорционален мгновенной угловой скорости вращения тела.*

При доказательстве исходим из уравнения энергии $\sum_{i,j} I_{ij}\omega_i\omega_j = 2K = \mathrm{const}$. Возьмем на мгновенной оси точку Q с радиусом-вектором $r = \vec{\omega}/\sqrt{2K}$. Тогда из уравнения энергии найдем, что координаты точки Q должны удовлетворять уравнению $\sum_{i,j} I_{ij}x_ix_j = 1$. Это значит, что точка Q лежит на поверхности эллипсоида инерции. Так как она лежит и на мгновенной оси, то она совпадает с полюсом P. Итак, радиус-вектор полюса P связан с вектором угловой скорости $\vec{\omega}$ соотношением $\vec{\omega} = \sqrt{2K}\, r$. Отсюда и следует доказываемая теорема.

Т е о р е м а 2. *Касательная плоскость к эллипсоиду инерции в точке нахождения полюса P перпендикулярна к вектору L момента импульса тела относительно точки опоры O.*

При доказательстве можно воспользоваться уравнением эллипсоида инерции в любой системе координат. Но проще взять уравнение этой поверхности в системе главных осей эллипсоида, т.е. $I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1$. Левую часть этого уравнения обозначим $F(x, y, z)$, т.е. запишем само уравнение в виде $F(x, y, z) = 1$. Как было показано в § 29 (п. 3), вектор

$$N = \frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j + \frac{\partial F}{\partial z} k \equiv \mathrm{grad}\, F$$

направлен по нормали к поверхности эллипсоида. Иными словами, вектор N перпендикулярен к касательной плоскости, о которой говорится в теореме. Он равен

$$N = 2(I_x x i + I_y y j + I_z z k).$$

На основании предыдущей теоремы его можно представить в виде

$$N = \mu(I_x\omega_x i + I_y\omega_y j + I_z\omega_z k),$$

т.е.

$$N = \mu L,$$

где μ – некоторый скаляр. Это соотношение и доказывает теорему.

Ввиду отсутствия моментов внешних сил относительно точки опоры O вектор L не меняется по времени. Поэтому не будет менять свое направление и касательная плоскость к эллипсоиду инерции, о которой говорится в теореме.

Т е о р е м а 3. *Длина перпендикуляра, опущенного из точки опоры O на плоскость, касательную к эллипсоиду инерции в точке нахождения полюса P, не меняется с течением времени.*

Применим для доказательства уравнение энергии в виде $(L\vec{\omega}) = 2K = \mathrm{const}$, или $L\omega_L = 2K = \mathrm{const}$, где ω_L – проекция вектора $\vec{\omega}$ на неизменное направление вектора L. Так как величины L и K постоянны, то отсюда следует, что постоянна и

вектора $\vec{\Omega}_2$. Однако при таком вращении длина составляющей $\vec{\Omega}_2$ уменьшается, а составляющей $\vec{\Omega}_1$ – увеличивается. Когда ось фигуры гироскопа установится параллельно полуденной линии, $\vec{\Omega}_2$ обратится в нуль. В этом положении поворот оси фигуры гироскопа, обусловленный вращением Земли, прекратится. При этом, в соответствии с правилом Фуко, собственное вращение гироскопа и вращение Земли вокруг полуденной линии будут происходить в одинаковых направлениях.

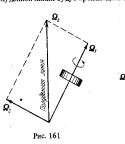


Рис. 161

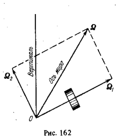


Рис. 162

Идею гирокомпаса Фуко можно уяснить и иначе. Вращение Земли стремится вызвать поворот оси фигуры гироскопа вокруг направления вектора $\vec{\Omega}_2$. Но такой поворот невозможен, поскольку он выводил бы ось фигуры гироскопа из плоскости рисунка, в которой она вынуждена находиться. Он проявляется лишь в деформациях и в появлении вследствие этого вращающего момента M, параллельного вектору $\vec{\Omega}_2$. Этот вращающий момент передается гироскопу и вызывает прецессию вокруг вертикали, в результате которой ось фигуры гироскопа поворачивается к полуденной линии, стремясь стать одноименно параллельной ей.

8. Фуко указал также, что гироскоп с двумя степенями свободы может быть использован в качестве *инклинометра*, т. е. прибора для определения географической широты места. Закрепим неподвижно наружное кольцо карданова подвеса гироскопа так, чтобы его плоскость совпала с плоскостью географического меридиана. У гироскопа останутся две степени свободы. Он может вращаться вокруг оси своей фигуры и (вместе с внутренним кольцом) вокруг горизонтальной оси $B'B$, перпендикулярной к плоскости меридиана. Пусть плоскость рис. 162 совпадает с плоскостью географического меридиана. Ось фигуры гироскопа может вращаться только в плоскости рисунка вокруг горизонтальной оси $B'B$, перпендикулярной к этой плоскости. Из плоскости рисунка она выходить не может. Разложим угловую скорость осевого вращения Земли $\vec{\Omega}$ на составляющую $\vec{\Omega}_1$ вдоль оси фигуры гироскопа и составляющую Ω_2, к ней перпендикулярную. Первая составляющая роли не играет. Существенно только вращение вокруг оси вектора $\vec{\Omega}_2$. Мы пришли к той же ситуации, что и в предыдущем пункте при разборе гирокомпаса Фуко. Повторив приведенные там рассуждения, видим, что ось фигуры гироскопа будет

поворачиваться по направлению к *оси мира* (т. е. к оси собственного вращения Земли). Этот поворот будет сопровождаться уменьшением длины вектора $\vec{\Omega}_2$. Когда ось фигуры гироскопа станет одноименно параллельной оси мира, вектор $\vec{\Omega}_2$ обратится в нуль, и дальнейший поворот гироскопа, вызванный осевым вращением Земли, прекратится. Таким образом, ось фигуры гироскопа устанавливается одноименно параллельно с осью мира. Угол между этим направлением и горизонтальной плоскостью и есть географическая широта рассматриваемого места.

9. Гирокомпас и гироинклинометр Фуко не получили практического применения. Они лишь теоретически решают поставленные перед нами задачи. Благодаря медленности вращения Земли силы, воздействующие на гироскоп из-за такого вращения, ничтожны и не в состоянии преодолеть (или способны преодолеть с трудом) трение в подшипниках этих приборов. Кроме того, такие приборы в принципе могли бы быть использованы только тогда, когда они установлены на неподвижном (относительно Земли) основании. Они не годятся на самолетах и судах, так как при движении последних развиваются угловые скорости вращения, а также ускорения, во много раз превосходящие соответствующие величины при суточном вращении земного шара.

Задача создания гирокомпаса была поставлена на практическую основу только после того, как стали использовать гироскоп не с двумя, а с *тремя степенями свободы*. Гироскоп должен быть *астатическим*. Но астатический гироскоп с тремя степенями свободы не подвержен влиянию вращения Земли. Эту трудность можно преодолеть, если взять гироскоп с каким-либо приспособлением, которое подвергалось бы воздействию указанного вращения и в свою очередь воздействовало бы на гироскоп. Поясним эту идею на примере одной из старых моделей гирокомпаса, построенного известным американским строителем гироскопических приборов Сперри в 1911 г. и

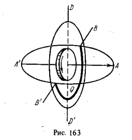


Рис. 163

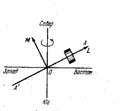


Рис. 164

оказавшегося вполне пригодным навигационным прибором. Приспособлением, о котором говорилось выше, здесь является *маятник*, жестко связанный с внутренним кольцом карданова подвеса. Маятником служит тяжелая дуга Q, плоскость которой перпендикулярна к плоскости внутреннего кольца, а значит, параллельна плоскости маховичка гироскопа (рис. 163). Принцип действия прибора чрезвычайно прост. Допустим, что ось наружного кольца $D'D$ установлена вертикально, а плоскость внутреннего кольца вместе с осью гироскопа $A'A$ – горизонтально. В этом положении на гироскоп не действуют никакие моменты сил. Ось фигуры гироскопа $A'A$, если ее

В этом виде уравнение (52.5) формально совпадает с уравнением Ньютона. Роль массы играет величина $I_\perp$, роль силы – вектор f. Вершина гироскопа движется по поверхности неподвижной сферы единичного радиуса $s^2 = 1$. Ее ускорение слагается из ускорения $(\ddot{s})_\perp$, направленного по касательной к этой сфере, и радиального, или центростремительного, ускорения $(\ddot{s})_\parallel = -\frac{\dot{s}^2}{s}\, s = -\dot{s}^2 s$, т.е. $\ddot{s} = (\ddot{s})_\perp - \dot{s}^2 s$. Подставив это выражение в уравнение (52.5), видим, что центростремительное ускорение из него выпадает. Уравнение принимает вид

$$I_\perp(\ddot{s})_\perp = [Ms] + I_\parallel\omega_\parallel[s\dot{s}]. \tag{52.7}$$

Следовательно, уравнение (52.5) или эквивалентное ему уравнение (52.7) определяют не полное ускорение вершины гироскопа $\ddot{s}$, а только его составляющую $(\ddot{s})_\perp$, касательную к поверхности единичной сферы $s^2 = 1$. Этого достаточно для нахождения движения вершины по начальным условиям (например, по начальному положению и начальной скорости вершины гироскопа). Действительно, движение вершины гироскопа аналогично движению не свободной, а связанной материальной точки, вынужденной находиться на заданной поверхности.

Воображаемую материальную точку, масса которой равна $I_\perp$, помещенную в вершине гироскопа, мы иногда будем называть *изображающей точкой*. На правую часть в уравнении (52.7) можно смотреть как на некоторую "силу", сообщающую ускорение изображающей точке. Первое слагаемое в этой "силе" связано с действием реальных сил, возникающих при взаимодействии гироскопа с окружающими телами. Его мы будем называть *реальной силой*

$$f_{реал} = [Ms]. \tag{52.8}$$

Второе слагаемое $I_\parallel\omega_\parallel[s\dot{s}]$ к взаимодействию тел не имеет отношения. Это есть фиктивная "сила", возникающая при вращении гироскопа вокруг оси фигуры. Она называется *отклоняющей силой*:

$$f_{откл} = I_\parallel\omega_\parallel[s\dot{s}]. \tag{52.9}$$

Отклоняющая сила отлична от нуля только тогда, когда изображающая точка движется. Она перпендикулярна как к оси фигуры гироскопа, так и к скорости движения изображающей точки. Эта сила стремится отклонить вершину гироскопа вбок от направления ее движения. Действием отклоняющей силы объясняются все характерные гироскопические эффекты.

Таким образом, основное уравнение движения симметричного гироскопа может быть записано в виде

$$I_\perp(\ddot{s})_\perp = f_{реал} + f_{откл}. \tag{52.10}$$

3. Приближенная теория гироскопа рассматривает такие движения его, при которых ускорением $(\ddot{s})_\perp$ в уравнении (52.10) можно пренебречь. Действительно, в этом случае $f_{реал} + f_{откл} = 0$ или

$$I_\parallel\omega_\parallel[s\dot{s}] + [Ms] = 0.$$

Так как оба вектора s и M не имеют составляющих вдоль оси фигуры, то отсюда получаем

$$I_\parallel\omega_\parallel\dot{s} = M,$$

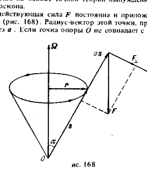
а это и есть основное уравнение приближенной теории гироскопа.

4. К движению изображающей точки, поскольку оно описывается уравнением (52.10), формально можно применять все теоремы механики точки, например урав-

нение сохранения энергии. При этом надо только иметь в виду, что отклоняющая сила, как перпендикулярная к скорости $\dot{s}$, работы не производит. Работа производится только реальной силой $f_{реал}$.

5. На основе точного уравнения движения симметричного гироскопа можно, конечно, исследовать движение свободного гироскопа. Поскольку, однако, относящиеся сюда результаты уже были получены в § 49, мы не будем заниматься этим исследованием, а рассмотрим на основе точной теории вынужденную прецессию и нутации симметричного гироскопа.

Допустим, что действующая сила F постоянна и приложена в одной из точек оси фигуры гироскопа (рис. 168). Радиус-вектор этой точки, проведенный из точки опоры, обозначим через a. Если точка опоры O не совпадает с центром масс гироскопа,



ис. 168

то роль силы F может выполнять вес самого гироскопа. Момент силы F равен $M = [aF] = [aF_\perp]$, где $F_\perp$ – слагающая этой силы, перпендикулярная к оси фигуры гироскопа. Следовательно, $f_{реал} = [Ms] = [[aF_\perp]s] = aF_\perp$, так как векторы a и s коллинеарны. Таким образом, уравнение (52.10) примет вид

$$I_\perp(\ddot{s})_\perp = aF_\perp + I_\parallel\omega_\parallel[s\dot{s}]. \tag{52.11}$$

Теперь поставим вопрос, можно ли вершине гироскопа сообщить такую начальную скорость, чтобы она совершала регулярную прецессию, т.е. равномерно вращалась вокруг оси, параллельной направлению действующей силы F и проходящей через точку гироскопа O. Угловую скорость такого вращения обозначим $\vec{\Omega}$. Конкретно под силой F будем понимать вес самого гироскопа: $F = mg$. За положительное направление вектора $\vec{\Omega}$ примем направление вверх, т.е. направление, противоположное силе F (см. рис. 168). Ответ на поставленный вопрос легко получить из уравнения (52.11). Для этого спроецируем уравнение (52.11) на направление вектора $F_\perp$. Вершина гироскопа при регулярной прецессии движется со скоростью $\dot{s} = [\vec{\Omega} s]$ и ускорением $\ddot{s} = -\Omega^2 r$, где r – радиус-вектор, проведенный от оси прецессионного вращения к вершине гироскопа ($r = s\sin\alpha = \sin\alpha$, причем α означает угол между осью фигуры гироскопа и вертикальным направлением). Взяв от ускорения $\ddot{s}$ его составляющую, перпендикулярную к оси фигуры, и выполнив указанное проецирование, получим после сокращения на $\sin\alpha$

$$I_\perp\Omega^2\cos\alpha - I_\parallel\omega_\parallel\Omega + aF = 0, \tag{52.12}$$

инерции I, а с ним и длина радиуса-вектора r имеют конечные значения, каково бы ни было направление оси s. Она называется *эллипсоидом инерции* тела относительно точки O, являющейся его центром. При перемещении начала координат O относительно тела будет меняться и эллипсоид инерции тела. Если в качестве O взят центр масс тела, то соответствующий эллипсоид называется *центральным*.

3. Как и всякий тензор, тензор инерции зависит от выбора начала координат и направления координатных осей. При изменении координатной системы меняются и значения компонентов тензора инерции тела. Существенно, однако, что какова бы ни была координатная система, всегда могут быть найдены все шесть компонентов тензора инерции, хотя бы по формулам (53.2). В частности, координатные оси можно направить вдоль главных осей эллипсоида инерции. В этой координатной системе в уравнении (53.5) пропадают члены, содержащие произведения координат, и это уравнение примет вид

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1, \qquad (53.6)$$

или

$$\sum_i I_i x_i^2 = 1. \qquad (53.7)$$

Тензор инерции приводится к *диагональному* виду

$$\begin{matrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z, \end{matrix} \qquad (53.8)$$

причем *диагональные элементы* тензора мы обозначили с помощью одного индекса. Второй индекс в системе главных осей эллипсоида инерции опущен как излишний.

Таким образом, *для всякого твердого тела, где бы ни было выбрано начало координат O, существуют три взаимно перпендикулярные оси, совпадающие с главными осями эллипсоида инерции тела относительно точки O, для которых недиагональные элементы тензора инерции обращаются в нуль.* Эти оси называются также *главными осями тензора инерции*. Они, очевидно, жестко связаны с телом. Точно так же жестко связан с твердым телом и эллипсоид инерции. Если известно положение эллипсоида инерции, то в тот же момент будет известно и положение всего тела. Поэтому задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки сводится к задаче о вращении его эллипсоида инерции вокруг той же точки. Этим воспользовался французский математик и механик Луи Пуансо (1777–1859) для наглядной геометрической интерпретации вращения твердого тела вокруг неподвижной точки. Она будет рассмотрена в следующем параграфе. Главные оси центрального эллипсоида инерции называют также *главными осями самого тела*.

Направление главных осей тела часто можно определить, пользуясь соображениями симметрии. Так, например, главные оси однородного прямоугольного параллелепипеда параллельны его ребрам. Если тело обладает симметрией вращения вокруг некоторой оси, то его эллипсоид инерции обладает такой же симметрией. К телам такого рода относится, например, цилиндр. В этом случае моменты инерции тела относительно всех осей, перпендикулярных к оси симметрии, одинаковы. Одной из главных осей тела является его ось симметрии. Всякая прямая, к ней перпендикулярная, также будет главной осью тела. Таким образом, существует бесконечное множество троек взаимно перпендикулярных главных осей тела, у которых одна ось, а именно ось симметрии, будет общей. Для шара эллипсоиды инерции относительно всех осей, проходящих через центр шара, одинаковы. В этом случае любая ось будет главной осью тела.

Для динамики вращательного движения твердого тела существенна симметрия не самого тела, а симметрия соответствующего ему эллипсоида инерции. Все тела с одинаковыми эллипсоидами инерции *динамически эквивалентны*. Чтобы эллипсоид инерции обладал симметрией вращения, не обязательно, чтобы само тело обладало той же симметрией. Возьмем, например, однородный параллелепипед с квадратным основанием. Поместим начало координат O в любой точке геометрической оси параллелепипеда. Тогда нетрудно показать, что эллипсоид инерции будет эллипсоидом вращения, ось симметрии которого совпадает с геометрической осью параллелепипеда. В динамическом отношении движение такого параллелепипеда описывается такими же уравнениями, что и движение однородного цилиндра. Если параллелепипед вырождается в куб, а начало координат помещено в его центре, то эллипсоид инерции вырождается в сферу. В динамическом отношении однородный куб ведет себя так же, как однородный шар.

4. Допустим теперь, что твердое тело равномерно вращается вокруг закрепленной оси, например оси, проходящей через неподвижные подшипники. Со стороны подшипников тело подвергается действию сил. Пусть это единственные внешние силы, действующие на тело. Их равнодействующая $\boldsymbol{F}$ найдется по теореме о движении центра масс. Она равна

$$\boldsymbol{F} = -m\omega^2 \boldsymbol{r}_C,$$

где $\boldsymbol{r}_C$ – радиус-вектор центра масс тела, проведенный от оси вращения перпендикулярно к ней. Момент внешних сил относительно начала координат равен

$$\boldsymbol{M} = -\int [\boldsymbol{r}\omega^2 \boldsymbol{r}_\perp]\, dm = \omega^2 \int [\boldsymbol{r}_\perp \boldsymbol{r}_\parallel]\, dm.$$

Примем ось вращения за координатную ось X, тогда $\boldsymbol{r}_\parallel = x\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{r}_\perp = y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Учтя соотношения $[\boldsymbol{ij}] = \boldsymbol{k}$, $[\boldsymbol{ik}] = -\boldsymbol{j}$, получим

$$\boldsymbol{M} = \omega^2 \boldsymbol{j} \int zx\, dm - \omega^2 \boldsymbol{k} \int xy\, dm,$$

или

$$\boldsymbol{M} = \omega^2 (I_{xy}\boldsymbol{k} - I_{zx}\boldsymbol{j}).$$

Уберем подшипники и спросим себя, при каких условиях движение тела не изменится, т.е. останется вращением вокруг прежней оси X. Для этого необходимо, чтобы $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{M} = 0$. Следовательно, ось вращения должна проходить через центр масс и, кроме того, должно быть $I_{zx} = I_{xy} = 0$. Последнее условие означает, что ось вращения должна быть одной из главных осей тела. Найденные условия являются и достаточными. Это следует из того, что при их выполнении удаление подшипников не меняет уравнения движения центра масс и уравнения моментов относительно центра масс. Эти же уравнения (при заданных начальных условиях) однозначно определяют движение твердого тела.

5. Итак, *во всяком твердом теле существуют три взаимно перпендикулярные оси, совпадающие с главными осями центрального эллипсоида инерции тела, вокруг которых тело может вращаться без воздействия внешних сил.* Такие оси называются поэтому *свободными* или *переменными осями вращения*. Последним термином хотят подчеркнуть, что вращение твердого тела по инерции в отсутствие возмущений может продолжаться сколь угодно долго. Иное дело, будет ли это вращение устойчивым по отношению к малым возмущениям, с которыми в реальных условиях всегда надо считаться. Если при наличии таковых характер движения тела меняется мало, т.е. мгновенная ось вращения хотя и непрерывно изменяет свое положение в теле и пространстве, но все время проходит очень близко от соответствующей свободной оси, то вращение вокруг последней будет *устойчивым*. Если же сколь угодно

ве мгновенную ось вращения Земли на угол $\alpha = 1°$. Масса Земли $M = 6 \cdot 10^{21}$ т. Длина градуса земного меридиана $l = 111$ км. Землю считать однородным твердым шаром (см. задачи 23 и 24 к § 37).

Р е ш е н и е. Максимальный поворот получится, когда скорость снаряда v перпендикулярна к земной оси. Снаряд уносит момент импульса $L = \dfrac{m[\boldsymbol{rv}]}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, перпендикулярный к скорости $\boldsymbol{v}$. Земля получает такой же момент в обратном направлении.

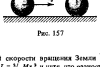


Рис. 157

При этом вектор угловой скорости вращения Земли $\vec{\omega}$ отклоняется вбок на угол $\alpha = L/I\omega$. Подставив сюда $I = {}^2/_5 Mr^2$ и учтя, что разность $c - v$ очень мала, получим

$$\frac{c - v}{c} \approx \frac{25\, m^2 c^2}{8\, M^2 l^2 \omega^2} \approx 1{,}3 \cdot 10^{-24}.$$

2. Симметричный волчок, ось фигуры которого наклонена под углом α к вертикали (см. рис. 154), совершает регулярную прецессию под действием силы тяжести. Точка опоры волчка O неподвижна. Определить, под каким углом β к вертикали направлена сила, с которой волчок действует на плоскость опоры.

О т в е т. $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{a^2 m^2 g \sin\alpha}{I^2 \omega^2}$.

3. Гироскопический маятник, используемый в качестве авиагоризонта характеризуется параметрами, приведенными в п. 4 этого параграфа. Когда самолет двигался равномерно, ось фигуры маятника была вертикальна. Затем в течение времени $\tau = 10$ с самолет двигался с горизонтальным ускорением $\dot{v}_0 = 1$ м/с². Определить угол α, на который отклонится от вертикали ось фигуры гироскопического маятника за время ускорения.

О т в е т. $\alpha \approx \dfrac{ma\dot{v}_0\tau}{I_\parallel \omega} \approx 0{,}43° \approx 25'$.

4. Однородный гладкий сплошной шар, находящийся на горизонтальном столе, быстро вертится вокруг своего вертикального диаметра с угловой скоростью $\vec{\omega}_0$ (рис. 157). В него ударяет второй, в точности такой же шар. Происходит абсолютно упругий удар без передачи вращения. Ударяемый шар начинает двигаться по столу со скольжением. Коэффициент трения скольжения k считается не зависящим от скорости. Найти угол α между мгновенной осью вращения ударяемого шара и вертикаль-

ной линией для любого момента времени t, когда еще не прекратилось скольжение. Найти также значение этого угла в момент, когда движение переходит в чистое качение. Трением верчения и трением качения пренебречь.

Р е ш е н и е. После удара центр ударяемого шара начнет двигаться с начальной скоростью v_0. По теореме о движении центра масс его скорость в момент времени t будет $v = v_0 - kgt$. Пусть $\vec{\omega}$ – мгновенное значение вектора угловой скорости. Момент силы трения относительно центра шара будет $kmgr\boldsymbol{i}$, где $\boldsymbol{i}$ – единичный вектор, направленный за плоскость рисунка и перпендикулярный к ней.

Из уравнения моментов $I\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = kmgr\boldsymbol{i}$ получаем $\dfrac{2}{5} r \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = kg\boldsymbol{i}$. Отсюда $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + 5\,kgt\boldsymbol{i}/2r$. Мгновенная ось вращения всегда лежит в плоскости, перпендикулярной к плоскости рисунка. Угол α определяется уравнением $\operatorname{tg}\alpha = 5\,kgt/(2r\omega_0)$. Определим теперь момент времени начала чистого качения. Скорость поступательного движения шара зависит только от горизонтальной составляющей вектора $\vec{\omega}$. Момент времени начала чистого качения найдется из условий ${}^5/_2\, kgt = v_0 - kgt$. С этого момента угол α становится и продолжает оставаться постоянным, причем $\operatorname{tg}\alpha = {}^5/_7\, v_0/r\omega_0$. Если $v_0 = \omega_0 r$, то $\operatorname{tg}\alpha = {}^5/_7$, $\alpha = 35°32'$. Вращение шара вокруг фиксированного диаметра неустойчиво. Поэтому найденное решение определяет поворот оси вращения относительно *внешнего пространства*, а не внутри самого шара.

5. Гироскоп, изображенный на рис. 148, совершает установившееся параметрическое движение по круглому металлическому кольцу радиусом R, плоскость которого горизонтальна. Радиус стержня гироскопа r мал по сравнению с R ($r \ll R$). Ось гироскопа наклонена к вертикали под углом α. (В рассматриваемом случае она движется по поверхности кругового конуса с вершиной в точке опоры O.) Найти силу $F_{\text{дав}}$, с которой стержень гироскопа давит на металлическое кольцо.

Р е ш е н и е. В установившемся режиме периметрическое движение оси фигуры гироскопа есть чистое качение. Если $r \ll R$, то угловая скорость прецессии найдется из условия $\Omega R = \omega r$. Пользуясь этим, легко найти искомую силу:

$$F_{\text{дав}} = (I_\parallel \omega^2 r/R^2) \sin^2\alpha.$$

Пусть $\omega = 100$ об/с $= 628$ рад/с, $I_\parallel = 2 \cdot 10^4$ г·см², $r = 0{,}5$ см, $R = 8$ см, $\alpha = 20°$. Тогда $F_{\text{дав}} \approx 70$ Н.

6. Гироскопические эффекты используются в дисковых мельницах. Массивный цилиндрический каток (бегун), могущий вращаться вокруг своей геометрической оси,

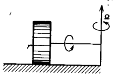


Рис. 158

приводится во вращение вокруг вертикальной оси (с угловой скоростью Ω) и катится по горизонтальной опорной плите (рис. 158). Такое вращение можно рассматривать

возможности совершать прецессию вокруг горизонтальной оси. Утраченную степень свободы можно, однако, в известной степени восстановить, если закрепить наружное карданово кольцо на основании, которое может свободно вращаться вокруг вертикальной оси. Такое закрепление просто эквивалентно увеличению момента инерции наружного кольца. Подвесим к оси гироскопа грузик. Он вызовет прецессионное вращение вокруг вертикальной оси. Это вращение передастся основанию, на котором закреплено карданово кольцо. Благодаря наличию у основания собственного момента инерции угловая скорость вращения его Ω будет меньше угловой скорости Ω_0, с которой прецессировал бы гироскоп, если бы он не был закреплен. Наличие основания, таким образом, ведет к торможению прецессии, вызванной грузиком. По этой причине грузик будет опускаться (см. § 50, пп. 9 и 10). Если, воздействуя на основание, увеличить угловую скорость его вращения, чтобы она сделалась равной Ω_0, то при прецессии грузик будет оставаться на постоянной высоте. Если же основание вращать со скоростью, большей Ω_0, то грузик начнет подниматься, пока ось фигуры гироскопа не примет вертикальное положение, причем положительный конец ее будет обращен вверх. При вращении со скоростью $\Omega < \Omega_0$ или в противоположном направлении ось фигуры установится также вертикально, но положительный конец ее будет обращен вниз.

Описанное поведение гироскопа объясняется тем, что гироскоп вместе с основанием вынужден вращаться вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω, отличной от скорости Ω_0, с которой он прецессировал бы только под действием веса грузика. Благодаря этому возникает деформация кручения вертикальной оси $D'D$ (см. рис. 144). Деформация кручения создает вращающий момент $\boldsymbol{M}$, параллельный той же оси. Под действием этого момента возникает прецессионное вращение вокруг горизонтальной оси $B'B$, в результате которого ось гироскопа устанавливается вертикально в том или ином направлении, в зависимости от того, с какой скоростью и в какую сторону вращается основание. Такая ориентация оси фигуры гироскопа будет наблюдаться и в предельном случае, когда масса грузика равна нулю, т. е. когда грузика нет и $\Omega_0 = 0$. Легко сообразить, что в этом случае *ось фигуры гироскопа устанавливается параллельно оси вращения основания и притом так, что оба вращения совершаются в одинаковых направлениях* (правило Фуко). Про такие оси говорят, что они *одноименно параллельны*.

Все это легко демонстрировать с помощью небольшого гироскопа в кардановом подвесе. Для большей наглядности мы заменили на рис. 159 круглые кольца прямоугольными рамками. Раскрутив гироскоп вокруг оси фигуры, возьмемся руками за внешнюю рамку и будем медленно поворачивать ее вокруг вертикальной оси. Ось гироскопа примет вертикальное положение и притом такое, что оба вращения – вращение рамки и вращение гироскопа вокруг собственной оси – будут происходить в одну и ту же сторону. Если начать вращать рамку в противоположном направлении, то произойдет "опрокидывание" гироскопа, т. е. поворот оси его фигуры вокруг горизонтальной оси $A'A$ на 180°. В результате оба вращения будут снова совершаться в одном направлении. И такое опрокидывание гироскопа будет наблюдаться всякий раз, когда мы меняем направление вращения наружной рамки. Во время опрокидывания гироскопа демонстратор испытывает заметное воздействие гироскопических сил, стремящихся повернуть его вокруг горизонтальной оси, перпендикулярно к плоскости наружной рамки.

В другой демонстрации уравновешенный гироскоп с двумя степенями свободы ставят на горизонтальный диск, который может вращаться вокруг вертикальной оси (рис. 160). При вращении диска ось гироскопа становится вертикально. При изменении направления на противоположное гироскоп опрокидывается.

7. Рассмотрим теперь идею гироскопического компаса, предложенную Фуко. Пусть наружное кольцо в кардановом подвесе гироскопа может свободно вращаться

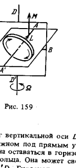


Рис. 159

Рис. 160

вокруг вертикальной оси $D'D$ (см. рис. 159). Внутреннее кольцо жестко закреплено в наружном под прямым углом. При этих условиях ось фигуры гироскопа $A'A$ вынуждена оставаться в горизонтальной плоскости, совпадающей с плоскостью внутреннего кольца. Она может свободно вращаться в этой плоскости вокруг вертикальной оси $D'D$. Гироскоп ставится на горизонтальную подставку. Последняя, конечно, участвует в суточном вращении Земли. Пусть $\vec{\Omega}$ – угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси. Разложим вектор $\vec{\Omega}$ на вертикальную $\vec{\Omega}_{\text{в}}$ и горизонтальную $\vec{\Omega}_{\text{г}}$ составляющие. Вертикальная составляющая не влияет на поведение гироскопа, так как вокруг вертикальной оси он может вращаться совершенно свободно. Поэтому от наличия $\Omega_{\text{в}}$ можно отвлечься. Горизонтальная составляющая $\Omega_{\text{г}}$ лежит в плоскости меридиана, т. е. направлена вдоль *полуденной линии*. Таким образом, на поведении гироскопа сказывается вращение Земли лишь вокруг полуденной линии рассматриваемого места. Пусть плоскость рис. 161 совпадает с горизонтальной плоскостью. Разложим вектор $\Omega_{\text{г}}$ на составляющую вдоль оси фигуры гироскопа Ω_1 и составляющую Ω_2, к ней перпендикулярную. Первая составляющая на движение гироскопа не влияет, так как вращению вокруг его оси фигуры ничто не препятствует. Остается единственная составляющая $\vec{\Omega}_2$, изменение которой обусловливается вращением Земли. Гироскоп не может вращаться вокруг оси $\vec{\Omega}_2$, так как его ось фигуры вынуждена оставаться в горизонтальной плоскости (в плоскости рисунка). Но он может свободно вращаться вокруг своей оси фигуры и вокруг вертикальной оси, т. е. оси, перпендикулярной к плоскости рисунка. Тем самым рассматриваемый случай сведен к случаю, подробно разработанному в п. 6, причем роль вертикали играет направление вектора $\vec{\Omega}_2$. Поэтому ось фигуры гироскопа должна поворачиваться в плоскости рисунка в направлении к полуденной линии, стремясь стать одноименно параллельной оси

направить на какую-либо звезду, начнет двигаться вместе с ней. Допустим, что ось фигуры гироскопа отклонена от полуденной линии, например, к востоку (рис. 164). Звезда, на которую направлена эта ось, будет подниматься. Вместе с ней начнет подниматься и положительный конец оси фигуры гироскопа A. Но тогда начнет поворачиваться вокруг оси $B'B$ и дуга Q. Момент силы тяжести кольца M относительно точки O будет стремиться опустить точку A и вызовет прецессию гироскопа вокруг вертикальной оси $D'D$, в результате которой ось фигуры гироскопа будет поворачиваться

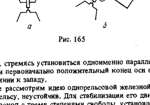


Рис. 165

к полуденной линии, стремясь установиться одноименно параллельно с ней. То же самое произойдет, если первоначально положительный конец оси фигуры A был отклонен от полуденной линии к западу.

10. В заключение рассмотрим идею однорельсовой железной дороги. Вагон, катящийся по одному рельсу, неустойчив. Для стабилизации его движения можно применить массивный гироскоп с тремя степенями свободы, установленный внутри вагона, как указано на рис. 165*а*. Роль наружного кольца карданова подвеса выполняют стенки вагона. Допустим, что вагон накренился вправо. Сила тяжести еще больше будет стремиться опрокинуть вагон в ту же сторону. Она создает вращающий момент, направленный за плоскость рисунка параллельно продольной оси вагона. Через подшипники этот момент передастся гироскопу. Гироскоп начнет прецессировать, что вызовет наклон внутренней рамы (рис. 165*б*). Если каким-либо способом ускорить эту прецессию, то возрастет вращающий момент сил противодействия со стороны гироскопа (см. § 50, пп. 9 и 10). Центр тяжести вагона начнет подниматься, и вагон вернется в вертикальное положение. Такое вынужденное ускорение прецессионного движения рамы должно выполняться автоматически. В устройстве соответствующего автомата и заключается вся трудность практического осуществления идеи однорельсовой дороги.

§ 52. Основы точной теории симметричного гироскопа

1. Точная теория симметричного гироскопа учитывает различие направлений мгновенной оси вращения, оси фигуры и момента импульса гироскопа относительно его точки опоры. Она справедлива при любых соотношениях между угловыми скоростями $\omega_\parallel$ и $\omega_\perp$, с которыми гироскоп вращается вокруг своей оси фигуры и перпендикулярной к ней оси. Однако наиболее важные гироскопические эффекты, которым гироскоп обязан своими научными и техническими применениями, проявляются лишь при соблюдении условия $\omega_\parallel \gg \omega_\perp$.

Отложим от точки опоры O в положительном направлении оси фигуры гироскопа единичный вектор $\boldsymbol{s}$ (рис. 166). Конечная точка этого вектора называется *вершиной гироскопа*. Производная $\dot{\boldsymbol{s}}$ имеет смысл линейной скорости движения вершины гироскопа, а потому может быть представлена в виде $\dot{\boldsymbol{s}} = [\vec{\omega}\boldsymbol{s}] = [\vec{\omega}_\perp \boldsymbol{s}]$. Три вектора $\dot{\boldsymbol{s}}$, $\vec{\omega}_\perp$ и $\boldsymbol{s}$ взаимно перпендикулярны и образуют правовинтовую систему, как указано на рис. 167. Из этого рисунка видно, что $\vec{\omega}_\perp = [\boldsymbol{s}\dot{\boldsymbol{s}}]$. Поэтому

$$\boldsymbol{L} = I_\parallel \vec{\omega}_\parallel + I_\perp \vec{\omega}_\perp = I_\parallel \vec{\omega}_\parallel \boldsymbol{s} + I_\perp [\boldsymbol{s}\dot{\boldsymbol{s}}]. \qquad (52.1)$$

Подставив это выражение в уравнение (49.3), получим

$$I_\parallel \dot{\vec{\omega}}_\parallel \boldsymbol{s} + I_\parallel \vec{\omega}_\parallel \dot{\boldsymbol{s}} + I_\perp [\boldsymbol{s}\ddot{\boldsymbol{s}}] = \boldsymbol{M}. \qquad (52.2)$$

Это основное уравнение точной теории симметричного гироскопа. Его удобно разделить на два уравнения. Первое уравнение получается из (52.2) скалярным умножением на $\boldsymbol{s}$. С учетом соотношения $(\boldsymbol{s}\dot{\boldsymbol{s}}) = 0$ такое умножение дает

$$I_\parallel \dot{\vec{\omega}}_\parallel = M_\parallel, \qquad (52.3)$$

где $M_\parallel \equiv (\boldsymbol{Ms})$ – проекция вектора $\boldsymbol{M}$ на ось фигуры гироскопа. Второе уравнение найдем также из (52.2), но векторным умножением на $\boldsymbol{s}$. Учитывая при этом тождество $[\boldsymbol{s}[\boldsymbol{s}\ddot{\boldsymbol{s}}]] = -s^2\ddot{\boldsymbol{s}} + (\boldsymbol{s}\ddot{\boldsymbol{s}})\boldsymbol{s} = -\ddot{\boldsymbol{s}} + (\boldsymbol{s}\ddot{\boldsymbol{s}})\boldsymbol{s}$, получим

$$I_\parallel \omega_\parallel [\boldsymbol{s}\dot{\boldsymbol{s}}] - I_\perp \ddot{\boldsymbol{s}} + I_\perp (\boldsymbol{s}\ddot{\boldsymbol{s}})\boldsymbol{s} = [\boldsymbol{sM}].$$

Дифференцируя соотношение $(\boldsymbol{s}\dot{\boldsymbol{s}}) = 0$, найдем $(\boldsymbol{s}\ddot{\boldsymbol{s}}) + \dot{s}^2 = 0$. С учетом этого преобразуем последнее уравнение к виду

$$I_\perp \ddot{\boldsymbol{s}} = [\boldsymbol{Ms}] + I_\parallel \omega_\parallel [\boldsymbol{s}\dot{\boldsymbol{s}}] - I_\perp \dot{s}^2 \boldsymbol{s}. \qquad (52.4)$$

2. Уравнение (52.3) определяет изменение во времени угловой скорости вращения гироскопа $\omega_\parallel$ вокруг оси фигуры. Оно совпадает с соответствующим уравнением вращения твердого тела вокруг закрепленной оси.

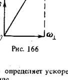


Рис. 166

Рис. 167

Уравнение (52.4) определяет ускорение $\ddot{\boldsymbol{s}}$, с которым движется вершина гироскопа. Запишем его в виде

$$I_\perp \ddot{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{f}, \qquad (52.5)$$

где введено обозначение

$$\boldsymbol{f} = [\boldsymbol{Ms}] + I_\parallel \omega_\parallel [\boldsymbol{s}\dot{\boldsymbol{s}}] - I_\perp \dot{s}^2 \boldsymbol{s}. \qquad (52.6)$$

откуда

$$\Omega = \frac{1}{2I_\perp \cos\alpha}\left(I_\parallel \omega_\parallel \pm \sqrt{I_\parallel^2 \omega_\parallel^2 - 4aFI_\perp \cos\alpha}\,\right). \qquad (52.13)$$

Если центр масс гироскопа лежит выше точки опоры, то угол α – острый (см. рис. 168). В этом случае при недостаточно быстром собственном вращении гироскопа подкоренное выражение в формуле (52.13) может оказаться отрицательным. Тогда рассматриваемая регулярная прецессия становится невозможной, а положение гироскопа – неустойчивым. Вообще, для устойчивости гироскопа необходимо выполнение условия

$$I_\parallel^2 \omega_\parallel^2 - 4aFI_\perp \cos\alpha > 0. \qquad (52.14)$$

Это условие выполняется всегда, когда центр масс гироскопа лежит ниже точки опоры. Если же центр масс расположен выше точки опоры, то гироскоп должен вращаться достаточно быстро.

Допустим, что условие (52.14) выполнено. Тогда квадратное уравнение (52.12) имеет два вещественных корня. В этом случае регулярная прецессия возможна, и притом не одна, а две. Прецессия, которой соответствует меньший по абсолютной величине корень уравнения (52.12), называется *медленной*. Прецессия, соответствующая другому корню, называется *быстрой*.

6. Допустим, что выполнено условие $I_\parallel^2 \omega_\parallel^2 \gg |4aFI_\perp \cos\alpha|$. Тогда для квадратного корня в формуле (52.13) можно написать приближенно

$$I_\parallel \omega_\parallel \left(1 - \frac{4aFI_\perp \cos\alpha}{I_\parallel^2 \omega_\parallel^2}\right)^{1/2} \approx I_\parallel \omega_\parallel - \frac{2aFI_\perp \cos\alpha}{I_\parallel \omega_\parallel}.$$

В результате получится

$$\Omega_{\text{медл}} \approx \frac{aF}{I_\parallel \omega_\parallel}, \qquad (52.15)$$

$$\Omega_{\text{быстр}} \approx \frac{I_\parallel}{I_\perp \cos\alpha}\, \omega_\parallel. \qquad (52.16)$$

Формула (52.15) совпадает с формулой (50.4), к которой приводит приближенная теория гироскопа. Таким образом, регулярная прецессия, о которой говорится в приближенной теории, есть *медленная прецессия*. Угловая скорость быстрой прецессии, как видно из формулы (52.16), по порядку величины совпадает с $\omega_\parallel$. Здесь не выполнено основное условие применимости приближенной теории $\omega_\perp \ll \omega_\parallel$. Поэтому быструю прецессию нельзя рассматривать в рамках приближенной теории. Регулярная прецессия свободного гироскопа, рассмотренная в § 49, есть частный случай быстрой прецессии, при котором $F = 0$.

7. Для того чтобы у читателя не сложилось впечатления, что быстрая прецессия является каким-то чисто умозрительным явлением, рассмотрим тривиальный пример конического маятника, когда $\omega_\parallel = 0$ и ни о каких гироскопических эффектах говорить не приходится. Разумеется, в этом случае центр масс должен лежать ниже точки подвеса. Поэтому угол α целесообразно заменить дополнительным углом $\beta = \pi - \alpha$, который ось маятника образует с вертикалью, направленной вниз. Формула (52.13) переходит в

$$\Omega = \pm\sqrt{aF/I}\,\cos\beta,$$

т.е. в известную формулу для круговой частоты конического маятника.

8. Регулярная прецессия, как медленная, так и быстрая, является весьма специальным частным случаем движения вершины гироскопа, реализующимся при вполне определенных начальных условиях. Для исследования общего случая в уравнении (52.7) сделаем замену $\dot{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{v}_{\text{п}} + \boldsymbol{v}_{\text{н}}$. Вектор $\boldsymbol{v}_{\text{п}}$ определим из условия $[\boldsymbol{Ms}] + I_\parallel \omega_\parallel [\boldsymbol{s}\boldsymbol{v}_{\text{п}}] = 0$. Тогда $I_\perp(\ddot{\boldsymbol{s}})_\perp = I_\parallel \omega_\parallel [\boldsymbol{s}\boldsymbol{v}_{\text{н}}]$. Величина $\boldsymbol{v}_{\text{п}}$ есть скорость вершины гироскопа, с которой она двигалась бы, если бы совершала медленную регулярную прецессию. (Вторая слагающая скорости $v_{\text{н}}$ будет описывать нутацию). Если пренебречь ускорением при такой прецессии, то $\ddot{\boldsymbol{s}} = \dot{\boldsymbol{v}}_{\text{н}}$, а потому

$$I_\perp \dot{\boldsymbol{v}}_{\text{н}} = I_\parallel \omega_\parallel [\boldsymbol{s}\boldsymbol{v}_{\text{н}}], \qquad (52.17)$$

причем мы опустили у $\dot{\boldsymbol{v}}_{\text{н}}$ значок $\perp$, так как слагающая ускорения вдоль оси фигуры гироскопа сейчас не представляет интереса, и от нее можно отвлечься. Если на правую часть уравнения (52.17) смотреть как на аналог силы, то эта сила будет перпендикулярна к скорости $\boldsymbol{v}_{\text{н}}$, а потому она не может производить работы. Поэтому модуль скорости $\boldsymbol{v}_{\text{н}}$ меняться не может, и уравнение (52.17) описывает равномерное движение по окружности. Если r – радиус такой окружности, а $\Omega_{\text{н}}$ – угловая скорость вращения, то $v_{\text{н}} = \Omega_{\text{н}} r$, $|\dot{\boldsymbol{v}}_{\text{н}}| = \vec{\Omega}_{\text{н}}^2 r$. При этом ввиду перпендикулярности между $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{v}_{\text{н}}$ из уравнения (52.17) получается

$$I_\perp \Omega_{\text{н}}^2 r = I_\parallel \omega_\parallel \Omega_{\text{н}} r,$$

откуда

$$\Omega_{\text{н}} = \frac{I_\parallel}{I_\perp}\, \omega_\parallel. \qquad (52.18)$$

Таким образом, в общем случае на медленное прецессионное движение вершин гироскопа накладывается равномерное круговое движение с круговой частотой $\Omega_{\text{н}}$, определяемой уравнением (52.18). Радиус кругового движения равен $r = \dfrac{v_{\text{н}}}{\Omega_{\text{н}}} = \dfrac{v_{\text{н}}}{\omega_\parallel} \dfrac{I_\perp}{I_\parallel}$.

В результате такого наложения траектория вершины гироскопа может быть либо циклоидального типа (рис. 169*б*), либо петлеобразного (рис. 169*а*), либо она будет

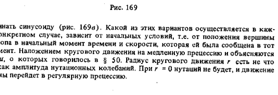


Рис. 169

напоминать синусоиду (рис. 169*в*). Какой из этих вариантов осуществляется в каждом конкретном случае, зависит от начальных условий, т.е. от положения вершины гироскопа в начальный момент времени и скорости, которая ей была сообщена в тот же момент. Наложением кругового движения на медленную прецессию и объясняются *нутации*, о которых говорилось в § 50. Радиус кругового движения r есть не что иное, как амплитуда нутационных колебаний. При $r = 0$ нутаций не будет, и движение вершины перейдет в регулярную прецессию.