ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ

ЛЕКЦИЯ #01

05 09 08

Сергей Юрьевич Никитин.

Механика. С.Ю. Никитин, С.С. Чесноков.

Физика – наука о элементарных процессах в природе.

МЕХАНИКА

Наука о движении тел. Движение – перемещение одного тела относительно другого.

1. Аристотель, Архимед 4-3 в до н.э.
2. Галилей, Кеплер, Юнг, Ньютон
3. Эйлер, Даламбер, Лагранж
4. Эйнштейн
5. Планк, Бор, Гейзенберг.

Основные абстракции механики.

- Материальная точка – тело, размерами которого можно пренебречь.
- Абсолютно твердое тело – система частиц, расстояние между ∀ парой которых всегда неизменно.
- Сплошная среда – среда, дискретностью которой можно пренебречь.

§1 Кинематика материальной точки.

Раздел механики, в котором изучают движение тел без рассмотрения причин. Цель: математически точно описать движение точки.

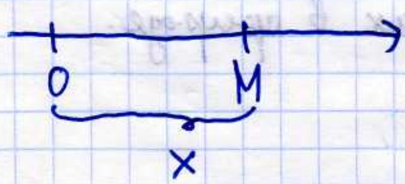
Движение точки по прямой

тело отсчета – тело, отн. которого рассм. движение.
Нужно уметь измерять расстояния и время.

• Чтобы измерить расстояние, нужно сравнить его с длиной тела, принятого за эталон.

Система СИ.

Метр – расстояние, проходимое светом в вакууме, за $\frac{1}{\text{трех-}}$сот миллионную долю секунды.



x[м]

t[c]

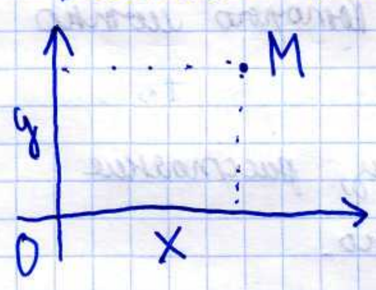
Чтобы измерить время, нужно сравнить его с продолжительностью некоторого процесса, принятого за эталон.

Секунда – продолжительность 10^{10} колебаний электрона в атоме цезия.

• Закон движения точки по прямой: $x = x(t)$

Ось к-т – прямая, на к-й выбрано начало отсчета, положительное направление и длина измерения.

Движение точки на плоскости.

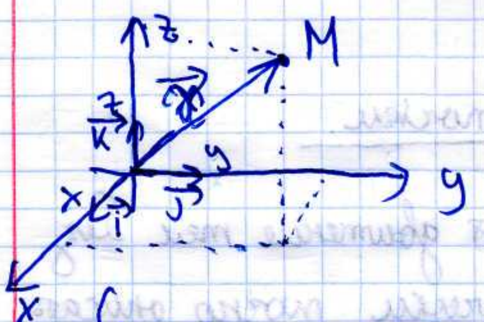


x, y – декартовые к-ты точки.

$x = x(t)$

$y = y(t)$

Движение точки в пространстве.



x, y, z – декартовы к-ты точки.

$x = x(t)$ $z(t)$

$y = y(t)$

Система отсчета: система координат и часы.

Радиус-вектор точки – вектор, проведенный из начала отсчета к данной мат. точке.

$\vec{r} = \vec{r}(t)$

• Орты декартовой системы координат – единичные векторы, направленные вдоль коорд. осей. $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$

$\vec{r}=\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z \qquad |\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \equiv r$ (без стрелки)

r [м]

• Перемещение – разность р.-в. в точках, взятых в два разных момента времени. $\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$; $\vec{r}_1=\vec{r}(t_1)$, $\vec{r}_2=\vec{r}(t_2)$

• Длительность перемещения $\Delta t=t_2-t_1$, Δt [c].

• Скорость – предел отношения перемещения точки к его длительности, когда длительность $\to 0$.

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\equiv\frac{d\vec{r}}{dt}\equiv\dot{\vec{r}}$$ ← точка означает дифф. по времени.

• Декартова компонента скорости: $\vec{v}=\vec{i}v_x+\vec{j}v_y+\vec{k}v_z$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z)=\vec{i}\frac{dx}{dt}+\vec{j}\frac{dy}{dt}+\vec{k}\frac{dz}{dt}$$

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\dot{x};\ v_y=\dot{y};\ v_z=\dot{z}$$

• Модуль скорости: $|\vec{v}|\equiv v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$

• Ускорение – производная скорости в точке по времени.

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\equiv\frac{dv}{dt}\equiv\dot{\vec{v}}\equiv\ddot{\vec{r}}$$

• Декартова компонента ускорения $\vec{a}=\vec{i}a_x+\vec{j}a_y+\vec{k}a_z$

$$\vec{a}=\dot{\vec{v}}=(\vec{i}v_x+\vec{j}v_y+\vec{k}v_z)^{\boldsymbol\cdot}=\vec{i}\dot{v}_x+\vec{j}\dot{v}_y+\vec{k}\dot{v}_z \quad a_x=\dot{v}_x=\ddot{x}$$ и т.д.

<u>Пример равноускоренного движения</u>

По прямой; $a_x=\mathrm{const}$. $\quad a_x=\dfrac{dv_x}{dt} \qquad \displaystyle\int_0^{v_x}dv_x=\int_0^t a_x\,dt$

$$v_x=a_x\cdot t$$

$$\int_0^x dx=a_x\int_0^t t\cdot dt \qquad x(t)=\frac{a_x t^2}{2}$$

Измерение ускорения: $a_x=\dfrac{2x}{t^2}\ \left[\dfrac{м}{с^2}\right]$

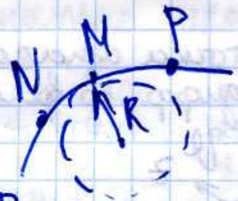
Свободное падение: $x(t)=\dfrac{g t^2}{2}$ $\quad g=9{,}8$ м/с^2 – ускор. своб. падения

• Естественные оси координат – оси, одна из которых ∥ вектору скорости точки, вторая ⊥ ей (скорости) и напр. к центру кривизны траектории.

τ – тангенциальная естеств. ось, орт

n – нормаль, орт

• Круг кривизны кривой в точке – предельное положение круга, проходящего через данную точку M кривой, и две другие т. кривой, N и P, в пределе: $N \to M$, $P \to M$.

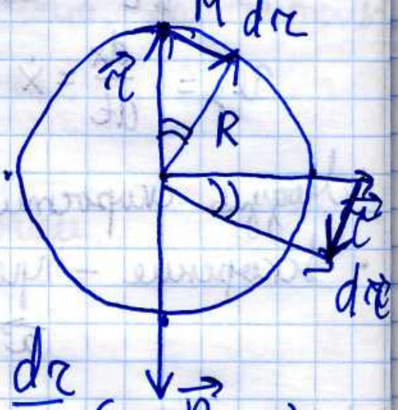


R – радиус кривизны в точке кривой.

Тангенциальное и нормальное ускорение точки.

• $\vec{a} = \vec{\tau} a_\tau + \vec{n} a_n$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ $\quad \vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v}$; $\quad \vec{v} = \vec{\tau} \cdot v$



$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{\tau} v) = \vec{\tau} \cdot \frac{dv}{dt} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}$

$d\vec{\tau} = \vec{n}\, d\tau$

$\frac{d\tau}{t} = \frac{dr}{R}$ (△ ∼ △)

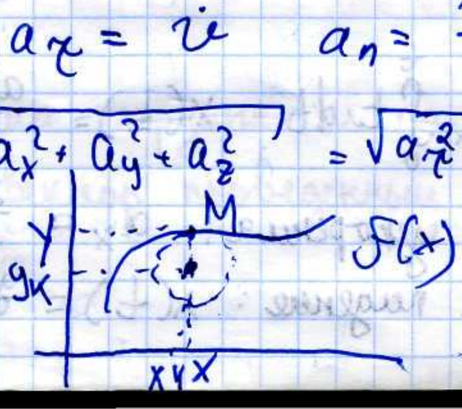
$d\tau = \frac{1}{R} dr$

$\vec{a} = \vec{\tau}\frac{dv}{dt} + \vec{n}\frac{v}{R}\underbrace{\frac{dr}{dt}}_{v} \Leftarrow d\vec{\tau} = \vec{n}\frac{dr}{R}$

$\vec{a} = \vec{\tau}\frac{dv}{dt} + \vec{n}\frac{v^2}{R}$ $\quad a_\tau = \dot{v}$ $\quad a_n = \frac{v^2}{R}$

Модуль ускорения: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$

Радиус кривизны кривой



$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=R^2$; $\begin{cases} y(x)=f(x); \text{ равные касат-ые:} \\ y'(x)=f'(x) \\ y''(x)=f''(x) \end{cases}$

$$R=\frac{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}{|y''|}$$

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \# 02}}$

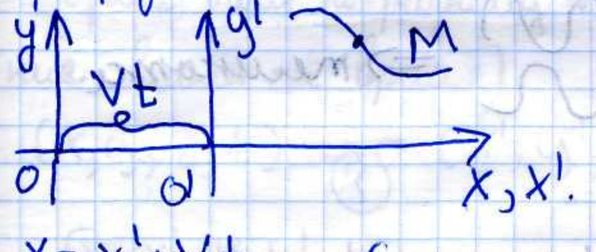
120908

§2 Принцип относительности. Преобразования Галилея и преобразования Лоренца.

Принцип относ. Галилея — никакими механич. опытами, проведенными внутри данной системы отсчета, нельзя установить, как-ая ли эта система в состоянии покоя или равн. пр-но движется.

Математ. фор-ка: уравн., ~~задающие~~ выражающие физ. законы, должны быть инвариантны относит. преобразования, описывающего переход от ин. системы отсчета к системе, движ. прям-но и равномерно. (преобр. Галилея).

Преобразования Галилея.



Штрихованная система движется вдоль со с-тью V.

Начальный момент: $O=O'$.

$x=x'+Vt$

$y=y'$

$z=z'$

Сложение скоростей.

$v_x=v'_x+V$

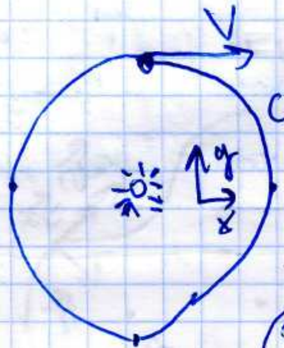
$v_y=v'_y$

$v_z=v'_z$.

Или: $\vec{v}_{абс}=\vec{v}_{отн}+\vec{v}_{с.о.}$

В конце XIX в. оказалось, что ур-я элект-магн. поля (ур-я Максвелла) не инвариантны относ. преобразов. Галилея. Было решено проверить, справедливо ли правило сложения скоростей для световых волн.

Опыт Майкельсона (1881 гд)



$V = 3\cdot 10^4$ м/с $\quad \frac{V}{c} = 10^{-4} \ll 1$

$c = V_{св.} = 3\cdot 10^8$ м/с

Майкельсон предложил сравнить продольную и поперечную скорости света относит. Земли

Гипотеза неподвижного эфира.

$$\begin{cases} u_x^2 + u_y^2 = c^2 \\ u_x = v'_x + V \\ u_y = v'_y \end{cases}$$

Продольная скорость света:

$v'_y = 0.$

$v'_x = -v \pm c$

$|v'_x| = c \pm v \equiv v_{\parallel}$

Поперечная скорость:

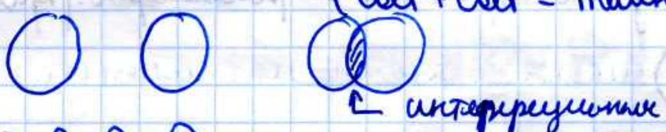
$v'_x = 0$

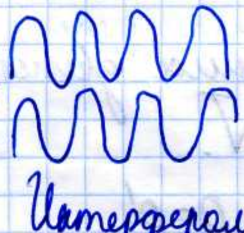
$v'_y = \pm\sqrt{c^2 - V^2} \quad |v'_y| = \sqrt{c^2 - V^2} \equiv v_{\perp}.$

$v_{\parallel} \neq v_{\perp}$

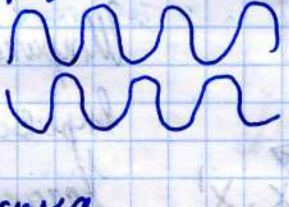
Интерференция света - взаимная компенсация действия световых волн в нек. точках простр.-ва.

(свет + свет = темнота)



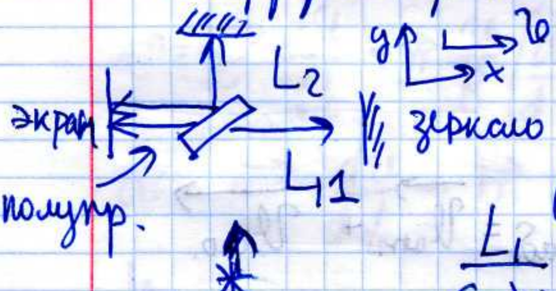


⇒ свет



⇒ темнота

Интерферометр Майкельсона.



$$\frac{L_1}{c-V} + \frac{L_2}{c+V} = \frac{2L_2}{\sqrt{c^2-V^2}} \quad \text{(свет)}$$

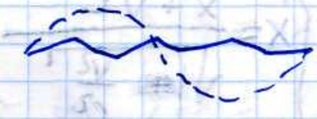
(повернем прибор на 90)

$$\frac{L_1}{c-V} + \frac{L_2}{c+V} = \frac{2L_1}{\sqrt{c^2-V^2}} + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{c} \quad \text{(темнота)}$$

λ - длина световой волны

c - скорость света.

$L_1 \simeq L_2 = \frac{7}{4}\left(\frac{c}{V}\right)^2 \simeq 10м.$ И что увидели:



В экспер-те не наблюдалось смещения полос интерференционной картины. Майкельсон сделал вывод: гипотеза неподвижного эфира. Правило Галилея неприменимо к световым волнам.

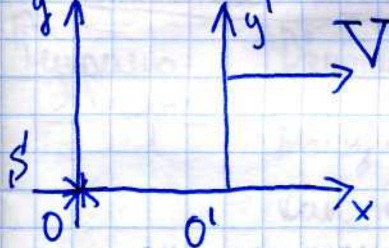
Принцип постоянства скорости света — скорость света не зависит от того, по отношению к какой системе отсчета, покоящейся или движущейся, она определяется.
Иными словами, луч света нельзя догнать.

$v_{абс} = v_{отн} = c.$

Было решено использовать этот принцип как исходный пункт новой теории (Эйнштейном.)

Теория относительности.

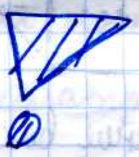
Основная идея — относительность времени.



К-ты фронта световой волны:

$x = ct$

$x' = ct'$ $(t' \neq t)$



В подв. системе оно течет медленнее.

Время течет по-разному в разных с-мах отсчета. (Движение влияет на время)

$(x, y, z, t) \xrightarrow{?} (x', y', z', t')$

$$\begin{cases} x = x' + V \cdot t' \\ t = t' + Vx'/c^2 \end{cases}$$ — удов-т принципу пос-ва скорости света

t не обратимы...

Обратные преобразования:

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ t' = t - Vx/c^2 \end{cases}$$ (если S' неподвижно, движется S)

Но при подстановке этих формул в предыдущие не получается тождества. Поэтому преобразуем:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad t = \dfrac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$ — Преобразования Лоренца.

Оказалось, что ур-я магнитного поля инвариантны относительно преобразования Лоренца.

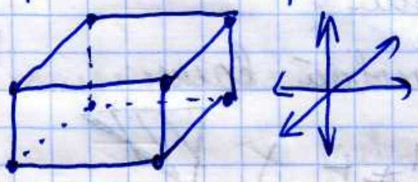
<u>Принцип относительности Эйнштейна</u> — уравнения, выражающие физ. законы, должны быть инвариантны относительно преобразования Лоренца.

§3. <u>Кинематика твердого тела.</u>

Твердое тело — система частиц, расстояние между $\forall$ парой которых неизменно.

Поступательное движение тела — движение, при котором ориентация тела в пр-ве остается неизменной.

- При этом скорости всех точек тела одинаковы.

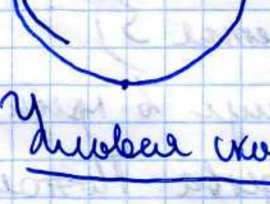


$\vec{v}_i = \vec{v}$

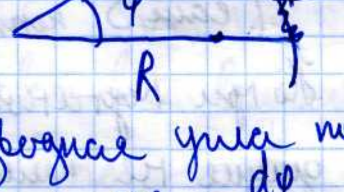
Вращение вокруг неподвижной оси.

- Движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, а центры всех окр-тей лежат на одной прямой, наз-ой осью вращения.
- Ось вращения — прямая линия, на которой лежат неподвижные точки тела.

<u>Угол поворота</u>



Угол в радианах



<u>Угловая скорость</u> — производная угла поворота тела по времени $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$

$v = \frac{dS}{dt}$

$dS = r_0\, d\varphi$

$v = r_1 \frac{d\varphi}{dt} = r_1 \omega$

$\boxed{v = \omega r_1}$

Вектор скорости в произв. точке тела.

Вектор угловой скорости — вектор, направленный вдоль оси тела по правилу правого винта, равный по модулю угловой скорости.

$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ — р.-в. точки.

$\vec{v} \oplus$

$v = \omega \cdot r \cdot \sin(\angle(\omega, r))$

Движение тела с одной неподвижной точкой

Теорема Эйлера. Движение тела с одной неподвижной точкой в каждый момент времени можно рассматривать как вращение вокруг нек-ой оси, проходящей через точку закрепления.

$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$, $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$

Ось вращения — прямая линия, на которой лежат неподвижные в данный момент точки тела.

ЛЕКЦИЯ #03

19.09.08

Матрица поворота тела.

Посмотрим, как меняются к-ты тела.

$\vec{r} = \vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 x_2 + \vec{e}_3 x_3 =$ (Лаборат. с-ма к-т)

$= \vec{e}_1' x_1' + \vec{e}_2' x_2' + \vec{e}_3' x_3'$ (С-ма к-т, связанная с телом)

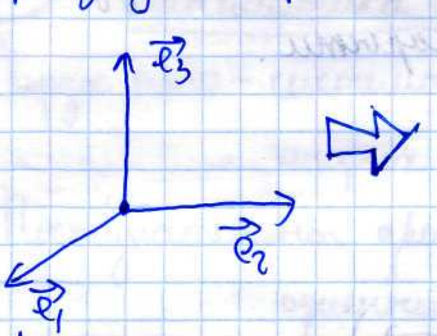
Умножим скалярно это равенство на орт $\vec{e}_1$

$$\begin{cases} x_1 = \vec e_1 \vec e_1' x_1' + \vec e_1 \vec e_2' x_2' + \vec e_1 \vec e_3' x_3', \\ x_2 = \vec e_2 \vec e_1' x_1' + \vec e_2 e_2' x_2' + \vec e_2 \vec e_3' x_3', \\ x_3 = \vec e_3 \vec e_1' x_1' + \vec e_3 \vec e_2' x_2' + \vec e_3 \vec e_3' x_3'. \end{cases} \qquad x_i = \sum_{j=1}^{3} e_i e_j' x_j'$$

$S_{ij} = \vec e_i \vec e_j'$ – матрица S – матрица поворота тела.

По такому же правилу преобр. компоненты $\forall$ векторов при поворотах системы координат.

S – матрица, элементами к-рой являются скалярные произведения ортов к.с.



$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Двойной поворот тела.

$$x_i = \sum_j A_{ij} x_j' \qquad x_j' = \sum_k B_{jk} x_k''.$$ А теперь все вместе!

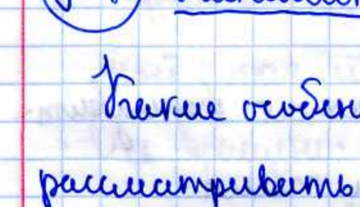
$$x_i = \sum_j A_{ij} \sum_k B_{jk} x_k'' = \sum_j \sum_k A_{ij} B_{jk} x_k' = \sum_k x_k C_{ik}$$

$AB \neq BA$.

§4 Кинематика вращ-ся систем отсчета.

Какие особенности приобретают физ. явления, если их рассматривать отн-но вращ. систем координат?

Найдем связь кинематич. хар-к движения точки относительно неподв. и вращ. с-мы отсчета.



$\vec\omega = const$. Радиус-вектор: $\vec r = \vec r_0 + \vec r'$

Перемещение: $d\vec r = d\vec r_0 + d\vec r'$

$$d\vec r' = d'\vec r' + [\vec\omega, \vec r']\,dt$$

относительное перемещение   вызвано поворотом

$d\vec r = d\vec r_0 + d'\vec r' + [\vec\omega_0, \vec r']\,dt \quad ||:dt$

$\vec v = \vec v_0 + \vec v' + [\vec\omega_0, \vec r']$

отн. неп. скор подв. отн. неп.

$[\vec\omega_0, d\vec r]$

<u>Связь ускорений.</u> $d\vec v = d\vec v_0 + d\vec v' + d[\vec\omega_0, \vec r]$

$d\vec r' = d'\vec r' + [\vec\omega, \vec r']\,dt$

аналогично $d\vec v' = d'\vec v' + [\vec\omega, \vec v]\,dt$

$d'\vec v'$ - приращение скорости относительно вращ. с-м. Пусть она равна нулю.

$d\vec v = d\vec v_0 + d'\vec v' + [\vec\omega, \vec v]\,dt + [\vec\omega_0, d\vec r]\,dt =$

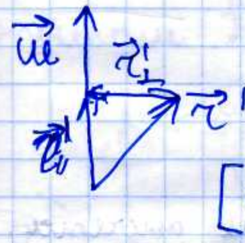
$= d\vec v_0 + d'\vec v' + [\vec\omega, \vec v']\,dt + [\vec\omega, d'\vec r']\,dt + [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r']]\,dt \quad ||:dt$

$\vec a = \vec a_0 + \vec a' + [\vec\omega, \vec v] + [\vec\omega, \vec v'] + [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r']]$

$\vec a = \vec a_0 + \vec a' + 2[\vec\omega, \vec v] + [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r]]$

$\vec a'$ - относит. ускорение; $\vec a_r = \vec a_0 + \cancel{2}[\vec\omega, [\vec\omega, \vec r']]$ - переносное ускорение; $2[\vec\omega, \vec v] = \vec a_k$ - кориолисово ускорение.

<u>Переносное ускорение.</u>



$\vec r' = \vec r'_{\parallel} + \vec r'_{\perp}$

$[\vec\omega, \vec r'] = \underbrace{[\vec\omega, \vec r'_{\parallel}]}_{=0} + [\vec\omega, \vec r'_{\perp}]$

$[\vec\omega, [\vec\omega, \vec r']] = [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r'_{\perp}]] = \vec\omega(\vec\omega, \vec r'_{\perp}) - \vec r_{\perp}(\vec\omega, \vec\omega) = -\vec r'_{\perp}\omega^2$

$\vec a_п = \vec a_0 - \omega^2 \vec r'_{\perp}$

§5 <u>Законы Ньютона.</u>

① $\exists$ системы отсчета, относительно которых всякое тело, бесконечно удаленное от других тел, не испытывает ускорения. Такие системы – инерциальные.

② Произведение массы мат. точки на ее ускорение равно действующей на нее силе. $m\vec a = \vec F$

③ Действия двух тел друг на друга равны и противоположно направлены. $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Законы Ньютона - обобщение опытных данных. (1687)

Как показывает опыт, система отсчета, связанная с Землей, является инерциальной. Вроде.

Сила и масса.

- Масса - мера отклика тела на действие силы.
- Сила - мера действия на данное тело других тел.

Измерение. Сначала введем единицы измерения этих величин.

m [кг.]. 1 Килограмм - масса эталонного тела, представляющий собой цилиндр из сплава платины и иридия, радиуса 39 мм и такой же высоты.

F [H] 1 Ньютон - это сила, вызывающая ускорение 1 м/с² у тела в один кг.

Подействуем на тело эталонной силой и измерим ускорение. Измерим массу. Подействуем силой на тело эталонной массы, измерим ускорение. Получим силу.

Второй закон не работает:

а) Для слишком маленьких тел;

б) Для слишком больших скоростей;

Третий закон действует только в инерциальных системах отсчета. При этом силы взаимодействия, приложенные к разным телам, направленные вдоль одной прямой, имеют одинаковую природу.

Сложение сил.

Если на мат. точку действуют одновр. 2 силы, то она начинает двигаться так, как будто бы была приложена одна сила, равная век. сумме.

Импульс мат. точки - произведение массы точки на ее скорость. $\vec{p} = m\vec{v}$ $\left[кг \cdot \frac{м}{с}\right]$

ЛЕКЦИЯ #04

§6. Силы в механике.

Силы в природе.

Гравитационные, электромагнитные, сильные и слабые.
(менее 10^{-15} метра)

Слабые (превращения элем. частиц ($n \to p + e + \nu$))
нейтрино

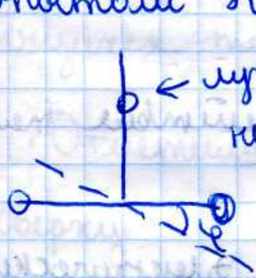
Гравитационные силы.

Закон всемирного тяготения: $\forall$ две мат. точки притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной их массам, и обратно пропорционально квадрату расстояния между ними.

$m_1 \; F \quad F \quad m_2 \qquad F \sim \frac{m_1 m_2}{r^2}$

$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$, G - гравитационная постоянная, $G = 6{,}6 \cdot 10^{-11} \left[\frac{Н \cdot м^2}{кг^2}\right]$

Опыт, в котором нашли константу G, наз-ся опытом Кавендиша (1785): крутильные весы.



Принцип суперпозиции.

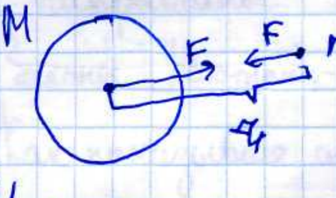
Каждая пара частиц взаимодействует независимо, т. е. так, как будто бы других не было.

$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ Это верно и для многих сил: $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$

$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} F_{ij}$

разбиваем на мат. точки.

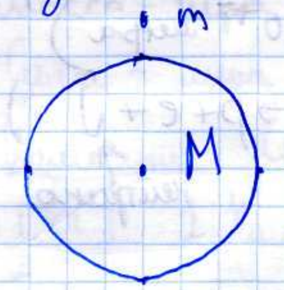
Притяжение точки к однородному шару.



Сила такова оказывается, что тела взаимодействуют так, как если бы вся масса шара находилась в его центре

$\frac{mM}{r^2}G = F$

Взвешивание Земли.



$mg = G\frac{Mm}{R^2}$ (точка недалеко)

$M = \frac{gR^2}{G}$ $g \approx 10$ м/с²

$R \approx 6400$ км $= 6{,}4 \cdot 10^6$ м.

$G \approx 6{,}6 \cdot 10^{-11} \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$

$M \approx 6 \cdot 10^{24}$ кг.

Измерение радиуса Земли.

$\varphi = S/R$

$R = \frac{S}{\varphi}$

Факты, подтв. закон(ы) всемирного тяготения.

1. Одинаковое ускорение свободного падения у поверхности Земли
2. Период обращения Луны. ($m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}$; $T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}}$)

Электромагнитные силы

Сила Кулона.

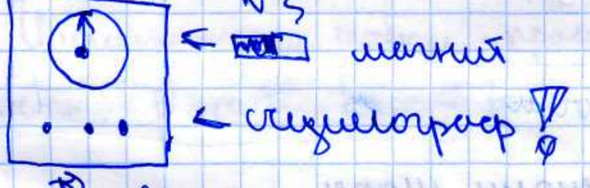
• Электрический заряд – мера электрического взаимодействия тел.

•  – электрометр.

• Электрическое поле – поле, создаваемое электрическими зарядами и проявляющее себя действием на электрические заряды.

• Напряженность электрического поля – мера действия поля на заряд. $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \Rightarrow \vec{F} = \vec{E}q$ – сила Кулона.

Магнитная сила (сила Лоренца)



$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]$

• $\vec{B}$ – вектор магнитной индукции.

Сила, действующая на движущийся заряд в э.-м. поле:

$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$ – сила Лоренца.

Сила упругости.

· Силы, препятствующие деформации упругих тел.

Опыт показывает, что сила пропорциональна деформации.

$F_{упр} = kx \cdot (-1)$ упругой деформации

↑ проекция на ось X, k - коэффициент упругости пружины

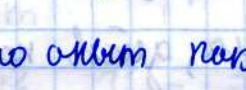
· Это не фундаментальный закон, а приближенное соотношение, верное при не слишком больших деформациях.

· Сила трения.

· Сила трения - сила, препятствующая относительному перемещению соприкасающихся тел.

· Сухое трение.

· Трение покоя - трение в отсутствии перемещения соприкасающихся тел.

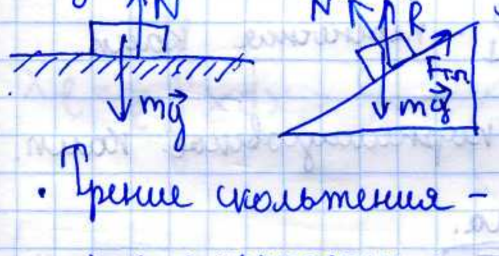


← толкаем, а оно не движется....

$\vec{F} + \vec{F}_{тр.п} = 0$ (нет ускорения)

· Отметим, что опыт показывает, что $F_{тр.п.}$ ограничена сверху.

· Сила нормального давления - составляющая силы взаимодействия тел, перпенд-ая поверхности соприкосновения.



R - сила реакции.

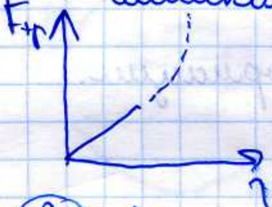
· Трение скольжения - трение при наличии относит. перемещения соприкасающихся тел. Опыт показывая, что $F_{тр} \approx F_{max\,тр.п} = \mu N$. Опыт показывает: $F_{max} = \mu N$, μ - коэффициент требования. Это тоже приближенное соотношение, верные при не очень больших N.

Вязкое трение.

• Трение, препятствующее движению тела в сплошной среде.

1) Нет трения покоя;

2) Зависит от скорости. Опыт показывает, что сила тр. пропорциональна скорости тела, если эта сила не слишком велика. $F_{тр} \sim v$, v - не слишком велика



§7 Неинерциальные системы отсчета. Сила инерции.

Неинерциальной является любая система отсчета, которая движется с ускорением относ. земли.

Выведем у-е движ. тела в не-инерц. системе отсчета. Пусть S - инерциальная, а S' - не-инерциальная система отсчета.

В инер. системе: $m\vec{a} = \vec{F}$ (a' - ускорение относ. не-инерц. сист.)

$$m\vec{a} + m\vec{a}' - m\vec{a}' = \vec{F}$$

$$m\vec{a}' = F - \underbrace{m(\vec{a} - \vec{a}')}_{\text{сила инерции: } -m(\vec{a}-\vec{a}')} = \vec{F} + \vec{F}_{инер}$$

сила инерции: $-m(\vec{a}-\vec{a}')$ (*)

• Сила инерции - добавочная сила, действ. на тело в не-инерц. системе, и опр. формулой (*).

Из §4: $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_п + \vec{a}_к$ кориолисово ускорение $\vec{a}_к = 2[\vec{\omega}, \vec{v}']$

переносное ускорение $\vec{a}_п = \vec{a}_0 - \omega^2 \vec{r}_\perp$

$\vec{F}_{инер.} = \vec{F}_п + \vec{F}_к$ $\vec{F}_п = -m\vec{a}_0 + m\omega^2 \vec{r}_\perp$ - переносная комп.

$\vec{F}_к = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}']$ - кориолисовская комп.

$F_{цент.} = m\omega^2 \vec{r}_\perp$ - центростремит. сила.

30908

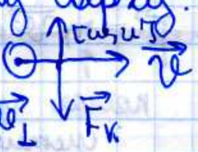
ЛЕКЦИЯ # 05

Маятник Фуко

Маятник Ф. - маятник, у которого плоскость колебаний поворачивается во времени в следствие вращения Земли.

Сила Кориолиса: $\vec{F}_к = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}'] = -2m[\vec{\omega}_\perp, \vec{v}']$

Вид сверху:



(вправо.

Свойства силы инерции.

① Силы отличные от нуля только для наблюдателя, связанного с неинерц. системы отсчета.

② Нельзя указать тело, от которого действует сила инерции (т. е. не подчиняется 3-му з. Ньютона)

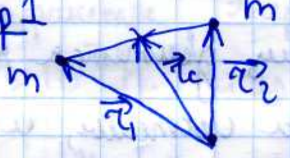
§8 Импульс системы частиц; движение центра масс.

- Импульс мат. точки: $\vec{p} = m\vec{v}$
- Импульсом системы частиц называется сумма импульсов отдельных частиц системы. $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$

Как вычислить импульс системы?

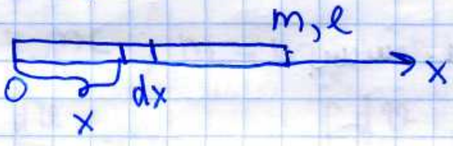
Центр масс системы частиц - точка, радиус-вектор которой определяется $\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{r}_i$, $m = \sum_i m_i$ - масса системы.

Пример 1



$\vec{r}_c = \frac{1}{2m}(m(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)) = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$

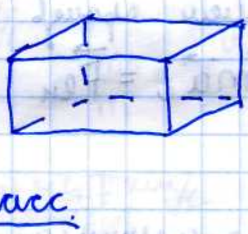
Пример 2



$dm = \frac{m}{l}dx \quad x_l = \frac{1}{m}\sum_i m_i x_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{m}\int x\,dm = \cancel{\frac{1}{l}\int_0}$

$x_l = \frac{1}{l}\int_0^l x\,dx = l/2$



Скорость и ускорение центра масс.

- Скоростью ц.м. называется производная рад.-вектора ц.м. по времени. $\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{\vec{p}}{m} = \vec{v}_c$

• Ускорение ц.м. – производная скорости ц.м. по времени.

$$\vec a_c = \frac{d\vec v_c}{dt} = \dot{\vec v}_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i \dot{\vec v}_i = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec a_i$$

Импульс системы: $\vec p = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{полная масса системы}}}{m}\vec v$ ← в-р скорости ц.м.

Уравнение движения ц. масс.

Внутренние и внешние силы с. частиц.

↳ силы взаимодействия между телами данной системы.

По 3-му закону Ньютона, $\vec f_{ij} = -\vec f_{ji}$ $\quad \vec f_{ij} + \vec f_{ji} = 0$

$$\Rightarrow \sum_i \sum_j \vec f_{ij} = 0$$

Внешние силы – силы, действующие на тела системы со стороны тел, не входящих в данную систему.

Р-м i-ю точку: $m_i \vec a_i = \vec F_i + \sum_j \vec f_{ij}$ – просуммируем по i.

$$\sum_i m_i \vec a_i = \sum_i \vec F_i + \underbrace{\sum_i \sum_j \vec f_{ij}}_{=0}$$

$$\sum_i m_i \vec a_i = \sum_i \cancel{m_i} \vec F_i = \vec F_{внеш}$$

$$\sum_i m_i \vec a_i = \boxed{m \vec a_c = \vec F_{вн}}$$

Закон движения ц.м. – ц.м. системы частиц движется так, как если бы в этой т. находилась вся масса системы, и к ней были бы приложены все вн. силы.

§9 Закон сохранения импульса.

$\vec p = \sum_i m_i \vec v_i$ – возьмем произв. по времени.

$$\dot{\vec p} = \sum_i m_i \vec a_i = m \vec a_c = \vec F_{вн}$$

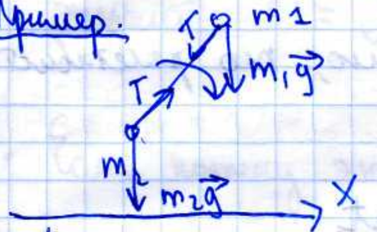
$$\boxed{\dot{\vec p} = \vec F_{вн}}$$

Скорость изменения импульса системы равна сумме внешних сил.

• Если сумма внешних сил равна нулю, то импульс системы сохраняется.

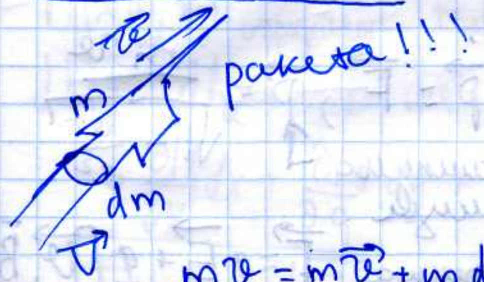
Более сильная формулировка – если существует такая ось, в проекцию на которую сумма внеш. сил равна нулю, то направленная вдоль этой оси импульс системы сохраняется. ($F_{вн}^{(x)} = 0 \Rightarrow p_x = \sum_i m_i v_{ix}$)

Пример.



$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = const$

Реактивная сила.



$$m\vec v = (m - dm)(\vec v + d\vec v) + dm\cdot\vec U$$
$$\vec U = \vec v + \vec c$$

c – скорость струи относ. ракеты.

$$m v = m\vec v + m\,d\vec v - \vec v\,dm - dm\,d\vec v + \vec v\,dm + \vec c\,dm$$
$$m\,d\vec v - \underbrace{dm\,d\vec v}_{\to 0\ (\text{при } \Delta t \to 0)} + \vec c\,dm = 0$$
$$m\,d\vec v = -\vec c\,dm \quad \Big|:dt$$
$$m\frac{d\vec v}{dt} = -\vec c\,\frac{dm}{dt} \qquad m\frac{d\vec v}{dt} = \underbrace{-c\frac{dm}{dt}}_{\text{реактивная сила}} = \vec F_p \equiv -c\mu \to \text{скорость расхода топлива}$$

Пример ракеты "Энергия": $c = 3$ км/с; $\mu = 10$ т/с; $F = 3000\cdot 10000$ Н $= 3\cdot 10^7$ Н. Стартовая масса ракеты: $m\frac{d\vec v}{dt} = \vec F_p = -\mu\vec c$

$$m\frac{dv}{dt} = \mu c;\quad m = m(t) = m_0 - \mu t;$$
$$(m_0 - \mu t)\frac{dv}{dt} = \mu c \qquad \int_0^v \frac{dv}{c} = \frac{\mu\,dt}{m_0 - \mu t} = \int_0^t -\frac{d(m_0 - \mu t)}{m_0 - \mu t}$$
$$\frac{v}{c} = -\ln\frac{m}{m_0};\quad \frac{m}{m_0} = e^{-v/c};\quad \frac{m_0}{m} = e^{v/c};\quad m_0 = m\,e^{v/c}$$

(m_0 – нач. масса; m – масса на орбите; v – скор. на орбите; c – скор. вылета струи)

И снова "Энергия": $m = 100$ тонн; $c = 2{,}7$ км/с; $v = 8$ км/с;

Фотонная ракета.

Реактивная сила: $F_p = \frac{P}{c}$ (P – мощн. света, c – скор. света)

Пример: $F_p = 1\,H$. $P = F_p \cdot c = 1 \cdot 3 \cdot 10^8\ H \cdot \frac{м}{с} = 3 \cdot 10^8$ Вт

10.10.08

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \# 06}}$

Закон сохранения импульса в теории относительности.

• Если сумма внешних сил равна нулю, то релятивистский импульс системы сохраняется.

Если $\vec{F}_{внеш} = 0$, то $\vec{p} = \sum\limits_i \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} = const$.

релятивисткий импульс системы.

Релятивистское уравнение движения: $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$, $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

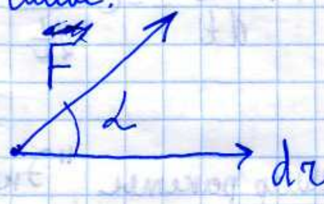
релятивистский импульс частицы.

Это выражение верно для силы Лоренца: $\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$

§10 Работа и потенц. энергия.

• Элементарная работа - скалярное произведение силы на беск. малое перемещение точки приложения силы.

$dA = \vec{F} d\vec{r}$ [Н·м = Джоуль]



Скалярное произведение $\vec{F} d\vec{r} \equiv (\vec{F}, d\vec{r})$

$\vec{F} d\vec{r} = F_x \cdot dx + F_y\, dy + F_z\, dz$.

• Работа - сумма элементарных работ. $A = \int dA$ [Дж]

• Потенциальная сила - если работа силы, действующей на мат. точку, равна нулю при перемещении этой т. по любому замкнутому контуру, то сила наз-ся потенциальной.

$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0$

Примеры потенц. сил.

1) Сила тяжести.  2) Сила упругости.

3) Сила Кулона.

Примеры непотенц. сил

1) Сила трения. 2) Мышечная сила.

• Потенциальная энергия. •

• Элементарная потенциальная энергия - элементарная работа потенц. силы, взятая со знаком минус. $d\Pi = -dA_п$

• Полная п. энергия - сумма элементарных потенциальных энергий. $\Pi = \int d\Pi = -\int_{\vec r_0}^{\vec r} \vec F\, d\vec r = \Pi(\vec r, \vec r_0)$ - зависит от выбора системы отсчета.

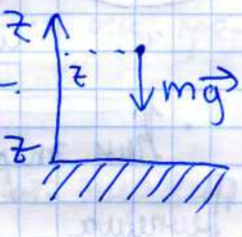
• Если потенц. энергия известна как функция координат, то можно вычислить силу в $\forall$ т. пространства.

$\Pi(x,y,z) \xrightarrow[\text{определяет}]{\text{полностью}} \vec F(x,y,z)$.

$$d\Pi = -dA_a = -\vec F\, d\vec r = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) =$$
$$= \frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz; \quad F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec F = -\mathrm{grad}\,\Pi}$$

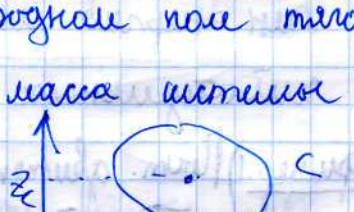
Примеры. 1) Силы тяжести вблизи пов-ти Земли.



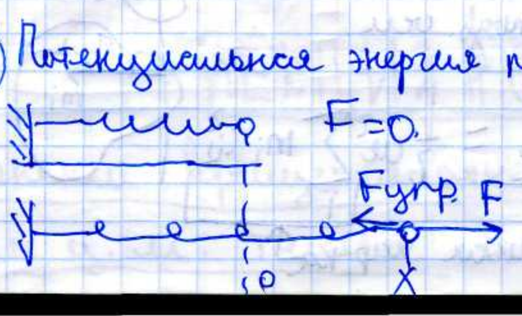
$$d\Pi = -dA_п = -\vec F d\vec r = -m\vec g\, d\vec r = mg\,dz$$
$$\Pi = \int d\Pi = mg\int dz = mgz = \Pi$$

• Потенц. энергия системы частиц — сумма потенц. энергий отдельных частиц системы.

$$\Pi = \sum_i \Pi_i; \quad \Pi = \sum_i m_i g z_i = g\sum_i m_i z_i =$$
$$= g\cdot m\cdot \underbrace{z_c}_{\text{центр масс}}.$$ Потенц. энергия системы частиц в однородном поле тяготения такова, как если бы вся масса системы находилась в ее центре масс.



2) Потенциальная энергия пружины.



$$d\Pi = -dA = -\vec F d\vec r = -F_{упр}^{(x)}dx = kx\,dx$$

$$A=\int d\Pi = k\int_0^x x\,dx = \frac{kx^2}{2} = \Pi$$

3) Центральное силовое поле – поле силы, направленной всегда в сторону одной и той же точки, наз. силовым центром.

$$\vec{F} = -\frac{\vec{r}}{r}F \qquad F = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$d\Pi = -dA_n = -\vec{F}\,d\vec{r} = \frac{F}{r}\vec{r}\,d\vec{r} = \frac{F}{r}\frac{1}{2}d(x^2+y^2+z^2) =$$

$$= \frac{F}{r}\cdot\frac{1}{2}dr^2 = r\,dr\cdot\frac{F}{r}.$$

$$d\Pi = \frac{F}{r}(r\,dr) = GMm\frac{dr}{r^2} \qquad \Pi = \int d\Pi = GMm\int\frac{dr}{r^2} =$$

$$= GMm\cdot\left(-\frac{1}{r}+\frac{1}{r_0}\right) = \left|\text{Пусть } r_0 \xrightarrow[\text{ТИТ?}]{\text{КТО НАМ ЗАПРЕ-}} \infty\right| =$$

$$= -\frac{GMm}{r}.$$

§11 Кинетическая энергия. Закон сохранения энергии в механике.

• Кин. энергией м. точки называется величина $K = \frac{mV^2}{2}$ [Дж]

Теорема (О изм. кин. энергии)

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}; \quad \frac{m\,d\vec{v}\,d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\vec{F}d\vec{r}}_{dA} \Rightarrow dA = m\vec{v}\,d\vec{v} =$$

$$= m(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z) = m\frac{1}{2}d(v_x^2+v_y^2+v_z^2)$$

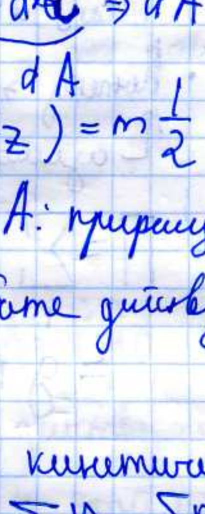
$$= d\frac{mv^2}{2} = dK \Rightarrow dK = dA:$$ приращение кин. энергии мат. точки равно работе действующих на не сил.

• Кин. энергия системы частиц – сумма кинетических энергий отдельных частиц системы. $K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{m_iV_i^2}{2}$ [Дж]

Пример. 1) Пост. движение тв. тела

$$\vec{v}_i = \vec{v}. \quad K = \frac{V^2}{2}m, \quad m = \sum_i m_i$$

2) Вращ. тела вокруг неподв. оси.



$$v_i = \omega\cdot r_{i\perp} \quad (§3)$$

$$K = \sum_i \frac{1}{2}m_i\omega^2 r_{i\perp}^2 = \frac{1}{2}\omega^2\sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

Эта сумма есть некая хар-ка

тела по отношению к данной оси. Назовем ее момент инерции тела. $J=\sum_i m_i r_{i\perp}^2$ [кг·м²]

$$\boxed{K=\frac{J\omega^2}{2}}$$

3) Плоское дв. тв. тела. — движение, при котором все т. тела движутся ∥ некоей неподв. плоскости.

$$r_c=\frac{1}{m}\sum_i m\vec{r}_i \qquad \vec{r}_i=\vec{r}_c+\vec{r}_{ic}$$

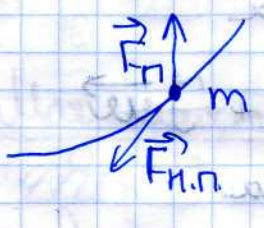
$$\vec{v}_i=\vec{v}_c+\vec{v}_{ic} \qquad \vec{v}_c=\frac{1}{m}\sum_i m_i\vec{v}_i$$

$$K=\sum_i\frac{m_i v_i^2}{2}=\frac{1}{2}\sum_i m_i\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i=\frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{v}_c+\vec{v}_{ic})\cdot(\vec{v}_c+\vec{v}_{ic})=\frac{mv_c^2}{2}+\frac{1}{2}\sum_i m_i v_{ic}^2+\vec{v}_c\underbrace{\sum_i m_i\vec{v}_{ic}}_{\text{Оказывается, }=0}\ \circleddash$$

$$\sum_i m_i\vec{v}_{ic}=\sum_i m_i(\vec{v}_i-\vec{v}_c)=\sum_i m_i\vec{v}_i-\sum_i m_i\vec{v}_i=0.$$

$\circleddash\ \frac{mv_c^2}{2}+\frac{J\omega^2}{2}$ (J — момент инерции относит. оси, проходящей через ц.м.)

• Полная механическая энергия — сумма кин. и пот. энергии системы. $E=K+\Pi$. Закон изменения E:



$$dK=dA=dA_{п}+dA_{н.п.}=-d\Pi+dA_{н.п.}$$

$$\underbrace{d(K+\Pi)}_{E}=dA_{н.п.}$$

$$\boxed{dE=dA_{н.п.}}$$

• Изменение полн. мех. энергии равно работе непот. сил.

• Закон сохранения энергии.

• Если работа непотенц. сил равна нулю, то полная мех. энергия системы сохраняется.

ЛЕКЦИЯ #09

311008

Уравнение вращения отн. движ. оси, проходящей через ц.м. тела.

Вычислим суммарный момент сил инерции.

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{n} m_n \vec{r}_n$$

$$\vec{r}_{ic} = \vec{r}_i - \vec{r}_c$$

$$\vec{M}_{\text{ин.}} = \sum_i [\vec{r}_{ic}, \vec{F}_{\text{ин}}] = [\underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_{ic}}_{=0}, -\vec{a}_c]$$

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m_i \vec{a}_c$$

$$\sum_i m_i \vec{r}_{ic} = \sum_i m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_c) = m\vec{r}_c - m\vec{r}_c$$

Значит, урав. вращения имеет такой же вид, как и для неподв. оси. $J\varepsilon_z = M_z$

<u>Плоское дв. тв. тела. Сводка формул.</u>

① Ур. движ. ц. м.: $m\vec{a}_c = \vec{F}_{\text{внеш.}}$

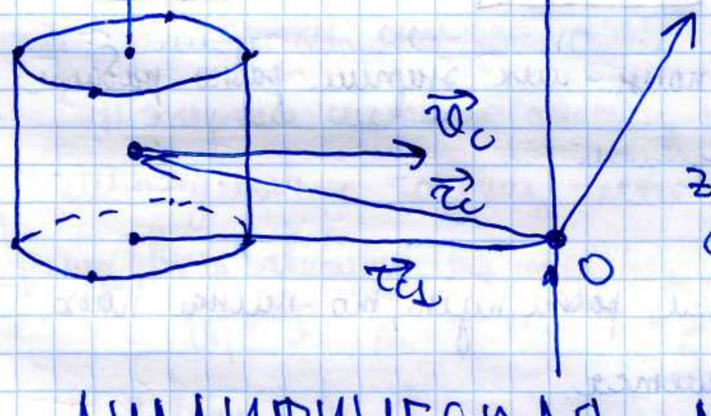
② Ур. вращ.: $J\varepsilon_z = M_z$ (применимо по случаю неподв. оси и дв. оси, проходящей через ц. м. тела)

③ $\vec{P} = m\vec{v}_c$

④ $K = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$

⑤ $\vec{N}_{\Pi} = [\vec{r}_{c\perp}, m\vec{v}_c] + J\vec{\omega}$

↑ момент импульса



⑥ $J = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$

⑦ $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

Механика систем со связью.

§16 Системы со связями. Степени свободы. Обобщенные координаты.

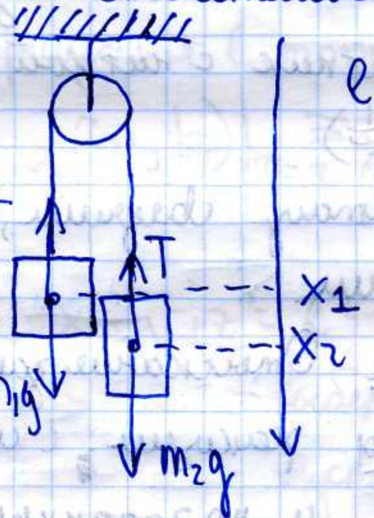
Опр. Связи — не вытекающие из уравнений движений ограничения на координаты, скорости и ускорения точек мех. системы.

Опр. Силы, с которыми тела, осуществ. связь, действуют на тела системы, наз. силами реакции (реакции связей).

Опр. Мат-ки связи выражаются урав. связи, т. е. соотношениями между координатами, скор-ми и ускорениями т. мех. системы.

Машина Атвуда.

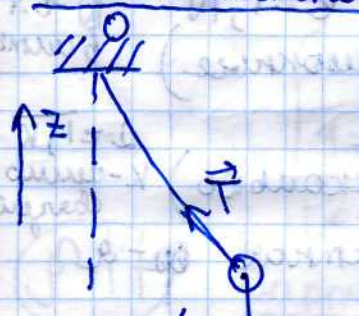
$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - T \\ m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - T \end{cases}$$



$l = x_1 + x_2 + \pi R$ — урав. связи

дважды дифф-м: $\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0$

Мат. маятник.



$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ → $(\vec{r}, \vec{v}) = 0$, $(\vec{v}, \vec{a}) + v^2 = 0$, $(\vec{r}, \vec{a}) = r a_r$, $a_r = -\frac{v^2}{r}$

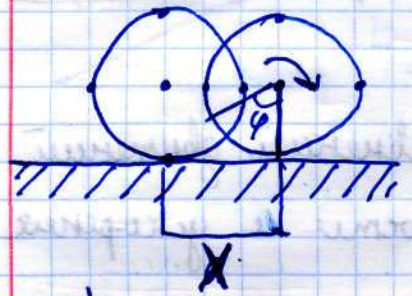
$$m\ddot{x} = T_x$$
$$m\ddot{y} = T_y$$
$$m\ddot{z} = T_z - mg$$

• Ан. механика позволяет получить уравнения, в которые силы реакции не входят.

Классификация связей.

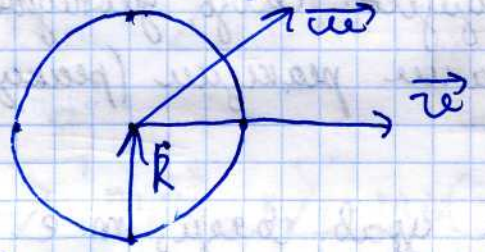
1) Голономные / не —//—
2) Стационарные / не —//—

Опр. Голономные — связи, сводящиеся к ограничениям только на коорд. тела: $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots \vec{r}_n, t) = 0$



$x = R\cdot\varphi$ (без проскальзывания)

Не-г. связь: качение шара по плоскости



$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$

Катиться можно по-разному...

<u>Опр.</u> Стац. связи — связь, уравнение которой не содержит времени в явном виде.

Не с.-связь: маятник с ниткой переменной длины.

$x^2+y^2+z^2 = \ell^2(t)$

Система с не-стац. связями, возможно, не сохраняет полной мех. энергии.

<u>Задача механики</u> Отыскание закона движения и сил <u>несвободной системы</u> реакции, с использованием ур. связи и по заданным силам.

$m_e \ddot{\vec{r}}_e = \vec{F}_e + \vec{R}_e$ ← сила реакции $\quad e = \overline{1,N}$ N-г.т. в системе

↑ заданные (пусть связи голономные)

$f_\lambda(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_n, t) = 0$. (возможно, их несколько) $\lambda = \overline{1,K}$ K-число связей

<u>Опр</u> Заданные — известная постоянная или известная ф-я к-т и скоростей.

Ищем: $\vec{r}_e(t)$ — ? $\vec{R}_e(t)$ — ?

<u>Опр.</u> Число степеней свободы системы — число незав. к-т, полностью опред. положение системы в пр-ве. Обозначим s.

<u>Опр</u> Обобщенные к-ты — $\forall$ s к-т, полностью определ. положение с-мы в пр-ве.

Обозначим $(q_1, q_2, \dots, q_s) = q$.

Опр Обобщенная ск-ть – производные обобщенных к-т по времени: $(\dot q_1, \dots, \dot q_s) = \dot q$

Как найти число степеней свободы? $s = 3N - k$.

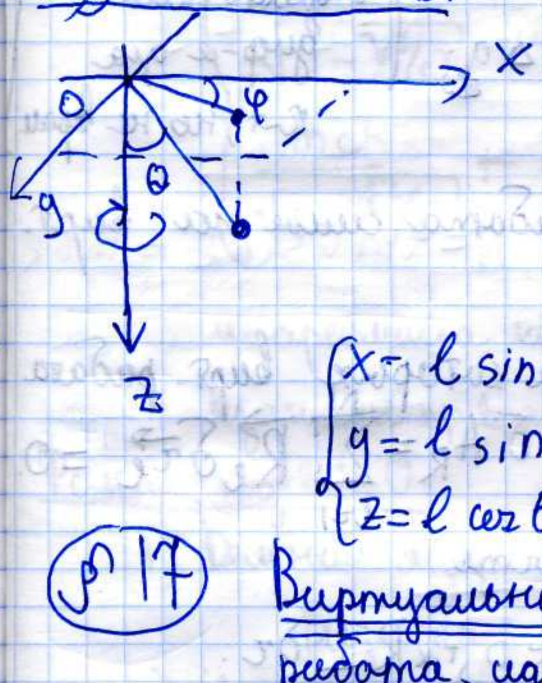
• $N=1$, $k=0$, $s=3$ | стержень $N=2$, $K=1$, $S=5$ | $N=3$, $K=3$, $S=6$ | (вообще $\forall$ тв. тело: 3 точки однознач. определяют положен.)

Свойства обобщенных к-т.

1) Радиус-вектора т. системы явл-ся однозначными ф-ми набора обобщенных координат. $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots q_s, t)$

2) Обобщен. к-ты обращают в тождество уравнения связи. $f_\alpha(r_1, \dots, r_N, t)\big|_{r=r(q)} \equiv 0 \quad \forall \alpha = \overline{1, k}$

3) Лат. маятник.



$x^2+y^2+z^2=l^2$

$S=2$ – выберем углы в сфер. системе к-т.

$q_1 = \theta, \; q_2 = \varphi$

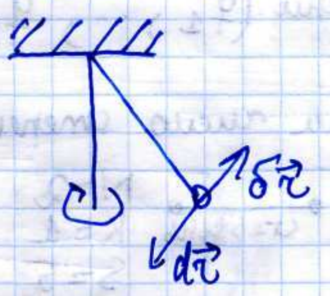
$$\begin{cases} x = l\sin\theta\cos\varphi \\ y = l\sin\theta\sin\varphi \\ z = l\cos\theta \end{cases}$$

§ 17 Виртуальное перемещение, виртуальная работа, идеальные связи.

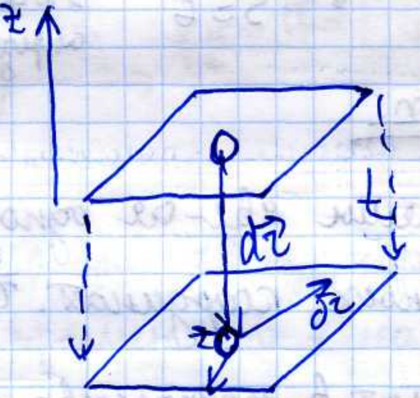
Опр Действительное перемещение $d\vec{r}$ – перемещение, происходящее под действием как заданных сил, так и сил реакции. Оно происходит за время dt в соотв. с уравн. движ. и уравн. связи.

Опр. Виртуальное перемещение — воображаемое беск. малое перемещение т., допускаемое связями в данный момент времени t. Не обладает длительностью и не зав. от заданных сил.

Примеры с стац. связями.



Без стац. связи



$Z = Vt$

Мат. опр. δr. $\vec r_l = r_l(q_1, \dots, q_s, t)$; пусть $t = const$ и возьмем дифф.

$$\delta \vec r_l = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec r_l}{\partial q_j} \Delta q_j$$

(δ действ. как дифф-е для к-т, но не врем.)

Опр. Виртуальная работа — работа силы на вирт. перемещении. $\delta A = \vec F \delta \vec r$.

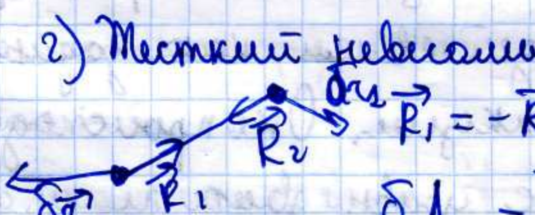
Опр. Идеальные связи — связи, для которых вирт. работа сил реакции равна нулю. $\delta A_R = \sum_{l=1}^{N} \vec R_l \delta \vec r_l = 0$.

Примеры. 1) Идеально гладкая плоскость.

$\delta A_r = R\delta r = 0$, т.к. $R \perp \delta r$.

Верно для $\forall$ гладкой пов-ти

2) Жесткий невесомый стержень.



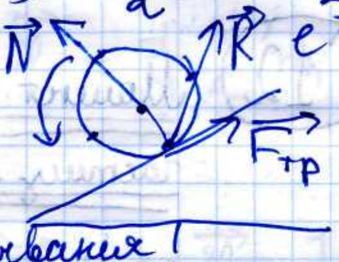
$\vec R_1 = -\vec R_2$

$\delta A_R = \vec R_1 \delta \vec r_2 + \vec R_2 \delta \vec r_2 =$

$$= \vec{R}_1 (\delta \vec{r}_1 - \delta \vec{r}_2) = \vec{R}_1 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{R}_1 \delta \vec{r} =$$

$$= 2\vec{r}\, d\vec{r} = 2 (x \delta x + y \delta y + z \delta z) = \frac{2}{2} \delta (x^2 + y^2 + z^2) =$$

$$= 0.$$



3) Качение без проскальзывания.

$\delta A = \vec{R}\,\delta\vec{r} = 0$: нет проскальзывания!

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \# 07}}$

17.10.08

Законы сохранения в теории относительности.

Если $F_{вн} = 0$, то $\sum\limits_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = const$, также

$$\vec{p}_ц = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} = const.$$

Пример. Неупругий удар.

$$\begin{cases} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{M\vec{V}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{cases}$$

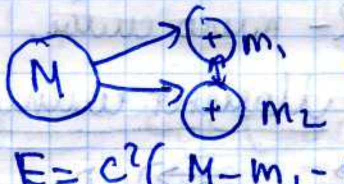
$\vec{V} = 0$

$\Rightarrow M = \frac{2m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

$M > 2m$ — при неупругом ударе масса не сохраняется. Видим, что возможны взаимные превращ. массы и энергии.

Факты, подтв. Т.О.

1) Деление ядер урана.



$M > m_1 + m_2$

Выделилась энергия: $E = c^2 (M - m_1 - m_2)$

2) Световое давление. $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$; $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$;

$$\begin{cases} \vec{p}\, c^2 = E \vec{v} \\ E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 \end{cases}$$

Пусть $m = 0$: $E = pc \Rightarrow v = c$

Это фотон — элементарная порция света, у которой $E = pc$ и скорость равна c в инерц. системе отсчета.

$$F = \dot{p} = \frac{1}{c}\dot{E} = \frac{P}{c}$$, P – мощность света

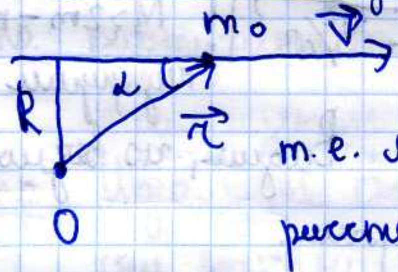
Пример. $P = 10^3$ Вт; $F = \frac{10^3}{3\cdot 10^8}$ Н $= 3\cdot 10^{-6}$ Н

§12 Момент импульса частицы и системы частиц. Момент силы.

Момент относит. точки

- Момент импульса частицы: величина, равная векторному произведению радиус-вектора частицы на вектор импульса. $\vec{N} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]$
- М.и. системы частиц: сумма м.и. частиц системы $\vec{N} = \sum_i \vec{N}_i = \sum_i [\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i]$
- Момент силы: векторное произведение рад.-век. точки приложения силы на вектор силы. $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$

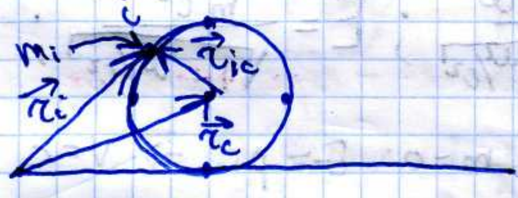
Момент импульса движущейся частицы.



$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}]$; $N = rmv\sin\alpha = mvR$, т.е. м.и. равен произведению импульса на расстояние до линии движения. В случае с силой: R – плечо силы.

Момент импульса тела.

$\vec{N} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i]$. Р-м катящийся шар.



$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_i \vec{r}_i m_i$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}$$

$$\vec{N} = \sum_i m_i[\vec{r}_c + \vec{r}_{ic}, \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}] = \overbrace{[\vec{r}_c, m\vec{v}_c]}^{N_c} +$$

$$+\underbrace{\sum_i [\vec{r}_{ic}, m_i \vec{v}_i]}_{N_{oc}} + [\vec{r}_c, \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_{ic}}_{=0}] + [\underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_{ic}}_{=0}, \vec{v}_c]$$

$$\sum_i m_i \vec{v}_{ic} = \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_c) = 0 \qquad \vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\sum_i m_i \vec{r}_{ic} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c) = 0$$

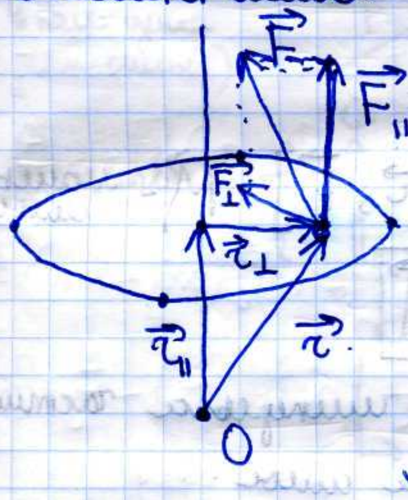
$$\vec{N} = \vec{N}_c + \vec{N}_{oc}, \text{ где } \vec{N}_{oc} = \sum_i [\vec{r}_{ic}, m_i \vec{v}_{ic}]$$

$$\vec{N}_c = [\vec{r}_c, m\vec{v}_c]$$

Момент относит. точки

- проекция вектора момента на эту ось.

Момент силы:



$$M = [\vec{r}, \vec{F}]; \quad \vec{r} = \vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel},$$
$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$$
$$M = [\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}] = \underbrace{[\vec{r}_{\parallel}, \vec{F}_{\parallel}]}_{=0} + \underbrace{[\vec{r}_{\parallel}, \vec{F}_{\perp}] + [\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\parallel}]}_{\vec{M}_{\perp}} + \underbrace{[\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}]}_{\vec{M}_{\parallel}} =$$
$$= \vec{M}_{\perp} + \vec{M}_{\parallel}$$

Аналогично, $\vec{N}_{\parallel} = \sum_i [\vec{r}_{i\perp}, m_i \vec{v}_{i\perp}]$

Рассмотрим вращение тела вокруг некоторой оси.

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i\perp} = [\vec{\omega}, \vec{r}_i] = [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}] \text{ (см. §3)}$$
$$\vec{N}_{\parallel} = \sum_i m_i [\vec{r}_{i\perp}, [\vec{\omega}, r_{i\perp}]] =$$
$$= \sum_i m_i [\vec{\omega} r_{i\perp}^2 - r_{i\perp} \underbrace{(r_{i\perp}, \vec{\omega})}_{=0}]$$
$$\vec{N}_{\parallel} = \omega \sum_i m_i r_{i\perp}^2 = I\vec{\omega}, \text{ где } I \text{ - момент}$$

инерции тела относит. оси.

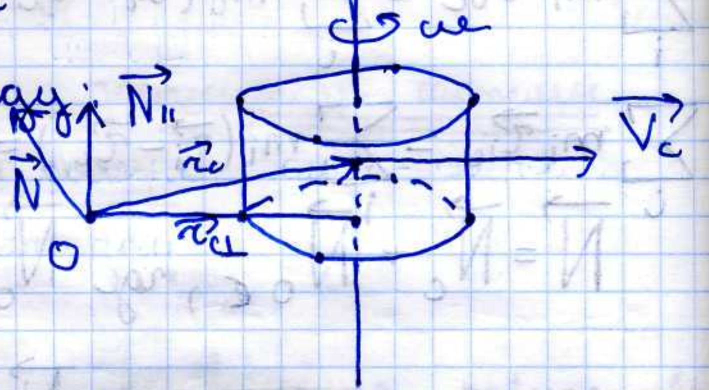
Момент импульса тела, совершающего плоское движение

Найдем компоненту момента импульса, $\parallel$ оси вращения.

$\vec{N}_{\parallel} = \vec{N}_{c\parallel} + \vec{N}_{oc\parallel}$; $\vec{N}_{c\parallel} = [\vec{r}_{c\perp}, m\vec{v}_c]$; $\vec{N}_{oc\parallel} = I\vec{\omega}$ – момент инерции относ. оси, проходящей через центр масс

$\vec{N}_{\parallel} = [\vec{r}_{c\perp}, m\vec{v}_c] + I\vec{\omega}$

Шайба скользит по льду:



§13 Теорема моментов. Закон сохр. импульса.

Расс-м мат. точку и вычислим скорость изменения момента импульса.

$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}]$ – берем произвольно.

$$\dot{\vec{N}} = \frac{d\vec{N}}{dt} = \underbrace{[\dot{\vec{r}}, m\vec{v}]}_{\dot{\vec{r}} = \vec{v},\ =0} + [\vec{r}, m\dot{\vec{v}}] = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}$$ – момент силы

$$\boxed{\dot{\vec{N}} = \vec{M}}$$

<u>Теорема моментов</u> Скорость изменения момента импульса частицы равна моменту действ. на нее силы.

Теперь р-м систему частиц. $\vec{N} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i]$

$$\dot{\vec{N}} = \underbrace{\sum_i [\dot{\vec{r}}_i, m_i\vec{v}_i]}_{=0} + \sum_i [\vec{r}_i, m_i\dot{\vec{v}}_i]$$

$m_i\dot{\vec{v}}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{f}_{ij}$ – внешние и внутр. силы.

$$\dot{\vec{N}} = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i] + \sum_i \sum_j [\vec{r}_i, \vec{f}_{ij}] = \vec{M}_{внеш} + \vec{M}_{внутр}$$

Покажем, что в общем случае $\vec{M}_{внутр} = 0$

$\vec{M}_{ij} = [\vec{r}_i, \vec{f}_{ij}] + [\vec{r}_j, \vec{f}_{ji}]$

$\vec{M}_{ij} = [\vec{r}_i, \vec{f}_{ij}] + [\vec{r}_j, -\vec{f}_{ij}] = [\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{f}_{ij}] = 0$

"$N_п$"

Скорость изменения момента импульса системы равна сумме моментов внешних сил.

ЛЕКЦИЯ # 08

23.10.08

Закон сохранения момента импульса. Более сильная формулировка.

• Если сущ-т такая ось, относительно которой сумма моментов внешних сил равна нулю, то относительно этой ~~оси~~ момент импульса системы сохраняется.

Пример 1. $\vec{M}=[\vec{r},\vec{F}]=0$; $\vec{N}=[\vec{r},m\vec{v}]=const$

(движение част. в поле центр. силы)

Следствия 1) Это движение является плоским.

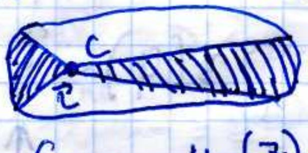
2) При таком движении сохраняется секторная скорость.

$$d\vec{S}=\frac{1}{2}[\vec{r},d\vec{r}]$$

→ отношение секторной площади к промеж. скорости: $\vec{\sigma}=\frac{d\vec{S}}{dt}$

$$\vec{\sigma}=\frac{1}{2}[\vec{r},\vec{v}]=\frac{1}{2m}[\vec{r},m\vec{v}]=\frac{\vec{N}}{2m}\Rightarrow\vec{\sigma}=const$$

Комета Галлея:



Пример

ω Если $M^{(z)}_{внеш}=0$, то $N_z=const$

$$N_z=J\omega_z\,,\quad J=\sum_i m_i r_i^2$$

§ 14 Материальная точка в центральном поле

Ц.п. – поле силы, направленной всегда в одну точку

Пример Поле тяготения Солнца.

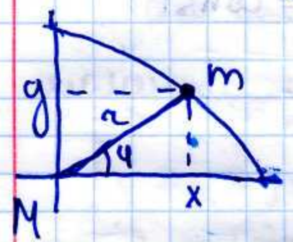
Законы Кеплера.

1) Планеты солн. системы движутся по эллипсам, в общем фокусе к-х находится Солнце.

2) За равные пром-ки времени радиус-вектор планеты очерчивает равные площади.

3) Квадраты периодов обращений планет относятся как кубы больших полуосей их эллиптических орбит.

Вывод 1-го закона Кеплера.



а) Закон сохр. энергии: $K+\Pi = E = const$

б) З-н сохр. момента импульса: $\vec{N} = const.$

$$K = \frac{mv^2}{2} \quad \Pi = -\frac{GMm}{r} \text{ (см. §10) } \Pi = -\frac{A}{r}$$

$$A = GMm;\ N = [\vec{r}, m\vec{v}] = m\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = m\vec{k}(x\dot{y} - \dot{x}y) =$$

$$= \vec{k}N;\ N = m(x\dot{y} - \dot{x}y) = const;\ \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{A}{r} = E = const$$

Перейдем к полярным координатам: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

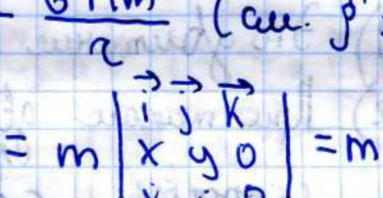
$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi. \end{cases} \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2(\dot{\varphi})^2$$

$$\begin{cases} N = mr^2\dot{\varphi} \\ E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}) - \frac{A}{r} \end{cases} \quad r(\varphi) - ? \quad r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

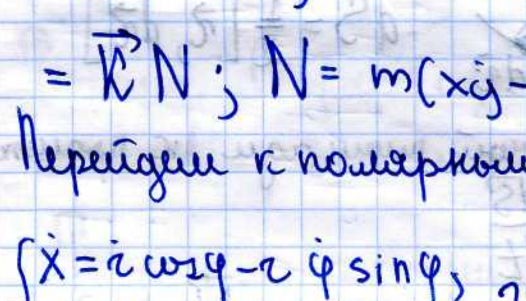
$p = const$

$\varepsilon = 0$:

$0 < \varepsilon < 1$:

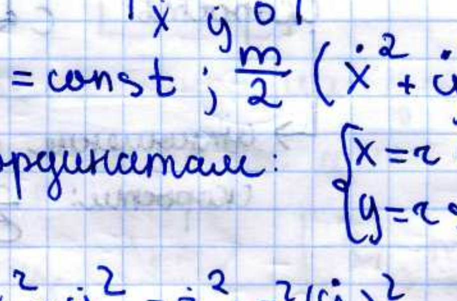


$\varepsilon = 1$



парабола

$\varepsilon > 1$



гипербола

$$\dot{\varphi} = \frac{N}{mr^2} \qquad \frac{2E}{m} = \dot{r}^2 + \frac{N^2}{m^2r^2} - \frac{2A}{mr} \quad \text{(дубль 1)}$$

$$\frac{2E}{m} = \dot{r}^2 + \frac{N^2}{m^2r^2} - \frac{2A}{mr} \quad \text{(дубль 2)} \qquad \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{N^2}{m^2r^2} + \frac{2A}{mr}} = \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{mr^2}{N}\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{N^2}{m^2r^2} + \frac{2A}{mr}} = \pm r^2\sqrt{\frac{2mE}{N^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2mA}{rN^2}};$$

$$\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{N^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2mA}{rN^2}}} = \pm d\varphi; \quad S = \frac{1}{r} \longrightarrow dS = -\frac{1}{r^2}dr$$

$$\frac{dS}{\sqrt{\frac{2mE}{N^2} - S^2 + \frac{2mA}{N^2}S}} = \pm d\varphi$$

$$\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2}S - S^2 = \frac{2mE}{N^2} - \left(S^2 - 2S\frac{mA}{N^2} + \frac{m^2A^2}{N^4} - \frac{m^2A^2}{N^4}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2A^2}{N^4}}_{a^2} - \Big(\underbrace{S - \frac{mA}{N^2}}_{x}\Big)^2 = a^2 - x^2$$

$$dS = dx$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pm d\varphi \qquad \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = d\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)$$

$\arcsin\frac{x}{a} = C_1 \pm \varphi$ Пусть $C = \frac{\pi}{2}$ и выберем знак "−"

$$\arcsin\frac{x}{a} = \frac{\pi}{2} - \varphi \qquad \frac{x}{a} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi; \; x = a\cos\varphi$$

$$\frac{1}{r} - \frac{mA}{N^2} = a\cos\varphi; \quad \frac{1}{r} = \frac{mA}{N^2} + a\cos\varphi;$$

$$r = \frac{N^2/mA}{1 + \frac{N^2}{mA}a\cos\varphi}; \quad \frac{N^2}{ma} = p; \quad a\frac{N^2}{mA} = \varepsilon$$

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}; \quad \varepsilon = \frac{a^2}{mA}\sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2A^2}{N^4}} = \sqrt{1 + \frac{2N^2E}{mA^2}}$$

$\varepsilon = 1 \Rightarrow E = 0; \quad \varepsilon > 1 \Rightarrow E > 0$

§15 Плоское движение тв. тела

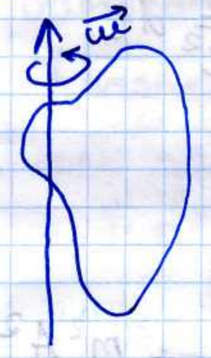
Плоское движение – все т. тела движ.-ся $\parallel$ некоторой плоскости.

• Ур-е движения ц. м.: $m\vec{a}_c = \vec{F}_{внеш}$

• Ур-е вращения.

• <u>Вращение вокруг неподв. оси</u>

<u>Теорема моментов</u>. Скорость изменения моментов импульса системы равна сумме внешних сил.

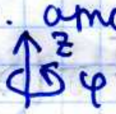


$$\dot{N} = \vec{M}; \ \dot{\vec{N}}_{\parallel} = \vec{M}_{\parallel}; \ \vec{N}_H = J\vec{\omega} \Rightarrow$$

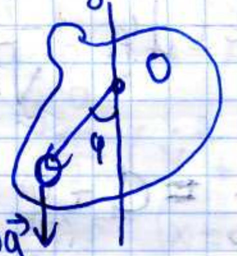
$$J\dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_{\parallel}. \quad \vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$$ – угловое ускорение вращения.

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{\parallel} \rightarrow J\varepsilon_z = M_z, \text{ где } \varepsilon_z = \ddot{\varphi}.$$

• Направление оси z связано с напр. отсчета угла φ правилом правого винта.



<u>Пример</u>. Физ. маятник – тело, имеющее неподв. гориз. ось вращения.



$$\vec{M} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i\vec{g}] =$$

$$= \sum_i [m_i\vec{r}_i, \vec{g}] =$$

$$= [m\vec{r}_c, \vec{g}] = [\vec{r}_c, m\vec{g}]$$ – как будто вся масса в ц. м...

$$M_z = -|\vec{M}| = -\underbrace{r_{c\perp}}_{l} mg\sin\varphi$$

$$J\varepsilon_z = M_z; \ J\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi; \ \ddot{\varphi} + \frac{mgl\sin\varphi}{J} = 0$$

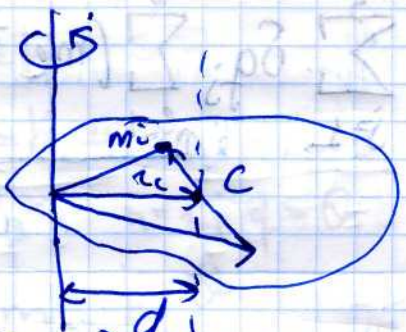
<u>Теорема Гюйгенса-Штейнера</u>.

• Момент инерции тела относит. произв. оси равен моменту инерции относит. оси, проходящей через ЦМ тела, ∥ данной, плюс масса тела, умноженная на квадрат расстояния между осями.

$J = J_c + md^2$

$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$

$J = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 \;;\; \vec{r}_{i\perp} = \vec{r}_{c\perp} + \vec{r}_{ic}$

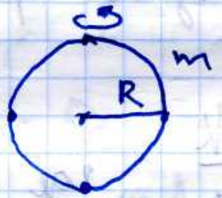


$J = \sum_i m_i \vec{r}_{i\perp} \vec{r}_{i\perp} = \sum_i m_i (\vec{r}_{c\perp} + \vec{r}_{ci\perp})^2 =$

$= m r_{c\perp}^2 + \sum_i m_i r_{ic\perp}^2 + 2 \vec{r}_{c\perp} \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_{ic}}_{=0}$

$\sum_i m_i \vec{r}_{ic} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c) = 0.$

Пример. Обруч.



$J = J_c + mR^2 = 2mR^2$

$J_c = mR^2.$

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ № 10}}$ 7.09.08

§ 18 Уравнение Лагранжа. Обобщенные силы.

Р-м замк. сист. с идеальными гол. силами

$\vec{r}_l = \vec{r}_l(q_1, \dots, q_s, t)$. $\begin{cases} \sum_{l=1}^{N} \vec{R}_l \cdot \delta\vec{r}_l = 0 \\ \delta\vec{r}_l = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j \end{cases}$

$m_l \ddot{\vec{r}}_l = \vec{F}_l + \vec{R}_l \quad (*) \quad l = \overline{1,N}$

Исключим силы реакции. Умножим $(*)$ скалярно на $\delta\vec{r}_l$ и суммируем по всем l.

$\sum_{l=1}^{N} m_l \delta\ddot{\vec{r}}_l \delta\vec{r}_l = \sum_{l=1}^{N} \vec{F}_l \delta\vec{r}_l + \underbrace{\sum_{l=1}^{N} \vec{R}_l \delta\vec{r}_l}_{=0.}$

$\sum_{l=1}^{N} (m_l \ddot{\vec{r}}_l - \vec{F}_l) \delta\vec{r}_l = 0$ Уравнение Даламбера-Лагранжа.

Перейдем к обобщенным координатам.

$\sum_{l=1}^{N} (m_l \ddot{\vec{r}}_l - \vec{F}_l) \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial r_l}{\partial q_j} = 0$. Меняем порядок суммирования

$$\sum_{j=1}^{s} \delta q_j \sum_{l=1}^{N} (m_l \ddot{\vec{r}}_l - \vec{F}_l) \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} = 0.$$

обозначим: $\sum_{l=1}^{N} m_l \ddot{\vec{r}}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} = X_j$

$$\sum_{l=1}^{N} \vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} = Q_j$$

Тогда: $\sum_{j=1}^{s} (X_j - Q_j) \delta q_j = 0$. Поскольку обоб. координаты независимые, то $X_j = Q_j$ $j = \overline{1,s}$

Покажем, что X_j можно выразить через производные кин. энергии системы.

$$X_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}, \text{ где } K = \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{2} m_l \vec{v}_l \vec{v}_l = K(q, \dot{q}, t)$$

$$\vec{r}_l = \vec{r}_l(q_1, \dots, q_s, t)$$

$$\vec{v}_l = \dot{\vec{r}}_l = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial t} = \vec{v}_l(q, \dot{q}, t) \longrightarrow \frac{\partial \vec{v}_l}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^{N} m_l \vec{v}_l \cdot \frac{\partial \vec{v}_l}{\partial q_j}; \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \underbrace{\sum_{l=1}^{N} m_l \vec{v}_l \frac{\partial \vec{v}_l}{\partial \dot{q}_j}}_{X_j} + \left.\sum_{l=1}^{N} m_l \vec{v}_l \frac{\partial \vec{v}_l}{\partial q_j}\right] \frac{\partial K}{\partial q_j}$$

$$X_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} \quad j = 1..s$$

$$Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}$$

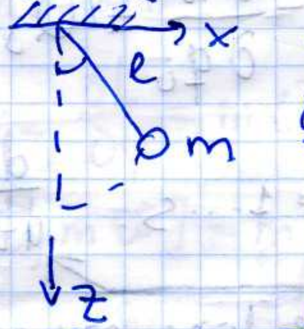
Уравнение Лагранжа

<u>Опр.</u> Обобщенной силой, соотв. обобщ. к-там $q_1, \dots, q_s$, наз-ся величина $Q_j = \sum_{l=1}^{N} \vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}$ $j = 1..s$

$[Q] = \frac{Дж}{[q]}$ 1) $[q] = м \Rightarrow [Q] = Н$

2) $[q] = 1 \Rightarrow [Q] = Н \cdot м$

Пример. (Мат. маят.)



$s = 1,\ q = \theta$

$\dot q = \dot\theta$

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot z^2)$$

$$\begin{cases} x = l\sin\theta \\ z = l\cos\theta \end{cases}$$

$$K = \frac{m}{2} l^2 \dot\theta^2 \qquad Q_j = \sum_{e=1}^{N} \vec F_e \cdot \frac{\partial \vec r_e}{\partial q_j} =$$

$$= \underset{(s=1)}{Q} = m\vec g \cdot \frac{\partial \vec r}{\partial \theta} =$$

$$= mg\frac{\partial z}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial K}{\partial \theta} = Q; \quad \frac{\partial K}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \dot\theta} = m l^2 \dot\theta$$

$$m l^2 \ddot\theta = Q = mgl\sin\theta$$

$$\boxed{\ddot\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

№19 Функция Лагранжа. Обобщенные импульсы.

Р-м систему с ид. гол. связями и задан. потенциальными силами.

$$\vec F_e = -\operatorname{grad}\Pi_e \qquad \Pi_e = \Pi_e(\vec r_1, \dots \vec r_N) = \Pi_e(\vec r)$$

$$\vec F_e \frac{\partial \vec r_e}{\partial q_j} = -\left(\frac{\partial \Pi_e}{\partial x_e}\frac{\partial x_e}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_e}{\partial y_e}\cdot\frac{\partial y_e}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_e}{\partial z_e}\frac{\partial z_e}{\partial q_j}\right) =$$

$$= -\frac{\partial \Pi_e}{\partial q_j}, \text{ где } \Pi_e = \Pi_e(q, t)$$

$$\vec r_e = \vec r_e(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$$

$$Q_j = \sum_{e=1}^{N}\left(-\frac{\partial \Pi_e}{\partial q_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial q_j}\underbrace{\sum_e \Pi_e}_{\Pi}$$

Уравн. движение в ф-ме у-я Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_j = \frac{\partial П}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial П}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad j = 1 \ldots s \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

где $L = K - П$

У-е Л-жа отн. ф-ии Л-жа.

<u>Опр</u> Функцией Л-жа системы энергии наз-ся разность кин. и пот. энергии системы, выраженной через обобщ. к-ты, ск-ти и время

$$L = K - П = L(q, \dot{q}, t)$$

<u>Опр.</u> Обобщенный импульс – ЧП ф-ии Лагранжа по обобщенной скорости.

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad j = \overline{1,s} \quad [p] = \frac{Дж \cdot с}{[q]}$$

Закон изменения обобщенного импульса

Из уравнения Лаг-жа:

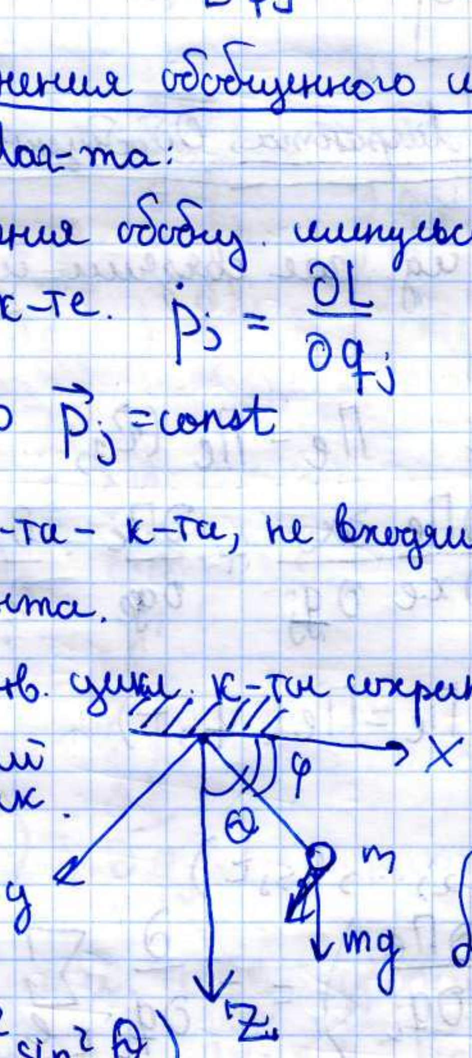
• Скорость изменения обобщ. импульса равна ЧП ф-ии Лаг-жа по соотв. к-те. $\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$

• Если $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, то $\vec{p}_j = const$

<u>Опр</u> Циклическ. к-ты – к-ты, не входящие явным образом в ф-ю Лагранжа.

• Об. импульс соотв. цикл. к-ты сохраняется.

<u>Пример.</u> Сферический маятник.



$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

$$\begin{cases} x = l \sin\theta \cos\varphi \\ y = l \sin\theta \sin\varphi \\ z = l \cos\theta \end{cases}$$

$$v^2 = l^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta)$$

$\Pi = -mgz = -mgl\cos\theta$

$L = \frac{m}{2}l^2(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta) + mgl\cos\theta$

$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad p\varphi = const., \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = ml^2\dot\varphi\sin^2\theta = const$

$p_\varphi = N_z$ (???) $\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] = m\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot x & \dot y & \dot z \end{vmatrix}$

$N_z = m(x\dot y - y\dot x) = ml^2\dot\varphi\sin^2\theta$

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \#11}}$ 141108

§20 Уравнение Гамильтона. Канонические ~~элемент~~ переменные

Р-м систему с ид. гол. связями и потенц. заданными силами и выведем уравнение движения, исп. в качестве переменных обобщ. к-ты и обобщ. импульсы системы.

q - обобщ. к-ты; p - обобщ. импульсы. q, p - канонические переменные.

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) + \frac{\partial L}{q_i} = 0 \;\; \forall i = \overline{1,s}. \;\; L = K - \Pi = L(q, \dot q, t)$

Вычислим диф-л ф-ии Лагранжа. $dL = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right) + \frac{\partial L}{\partial t}\cdot dt \qquad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}$ - обобщ. импульс.

$\dot p_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$; т.е. $dL = \sum_{j=1}^{s}(\dot p_j dq_j + p_j d\dot q_j) + \frac{\partial L}{\partial t}dt$

Введем новую ф-ю: $H = \sum_{j=1}^{s} p_j\dot q_j - L$

$dH = \sum_{j=1}^{s}(p_j d\dot q_j + \dot q_j dp_j) - dL = \sum_{j=1}^{s}(\cancel{p_j d\dot q_j} + \dot q_j dp_j - \dot p_j dq_j - \cancel{p_j d\dot q_j}) - \frac{\partial L}{\partial t}dt = \sum_{j=1}^{s}(\dot q_j dp_j - \dot p_j dq_j) + \frac{\partial L}{\partial t}dt = dH.$ Допустим, мы выразили H через

q, p и t: $H = H(q,p,t)$. Тогда $dH = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$. Приравняем коэф. при соотв. дифференциалах.

$$\boxed{\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j},\quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}} \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}$$

$j = \overline{1,s}$ } уравнения Гамильтона.

H – ф-я Гамильтона, или гамильтониан системы.

$$H = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L = H(q,p,t)$$

Свойства гамильтониана.

1. Если г-н не зависит от времени неявно, то и неявной зависимости тоже нет. $\left(\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0\right)$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \cancel{dt} = \sum_{j=1}^{s} \left(-\dot{p}_j \dot{q}_j + \dot{q}_j \dot{p}_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t},\ H = H(q,p) = \text{const}!$$

Опр. Консервативные системы. Системы, в которых гамильтониан не зависит от времени, т.е. гамильтониан консер. системы есть постоянное движение

Гамильтониан консервативной системы.

$$H = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L = H(q,p);\ p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(K - \Pi) = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}$$

$K = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N} m_l \vec{v}_l \vec{v}_l$. В силу голон-ти $\vec{r}_l = \vec{r}_l(q_1, \dots, q_s)$

$$\vec{v}_l = \dot{\vec{r}}_l = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \dot{q}_j$$ и получим:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N} m_l \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_\alpha} \cdot \dot{q}_\alpha \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_\beta} \cdot \dot{q}_\beta =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s} \dot q_\alpha \dot q_\beta \sum_{e=1}^{N} m_e \underbrace{\frac{\partial \vec r_e}{\partial q_\alpha}\,\frac{\partial \vec r_e}{\partial q_\beta}} \qquad K_{\alpha\beta}=K_{\alpha\beta}(q)=K_{\beta\alpha}$$

$$K=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s} K_{\alpha\beta}\,\dot q_\alpha \dot q_\beta$$

Теперь вычислим обобщ. импульс.

$$p_j=\frac{\partial K}{\partial \dot q_j}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s} K_{\alpha\beta}\left(\dot q_\alpha \frac{\partial \dot q_\beta}{\partial \dot q_j}+\dot q_\beta \frac{\partial \dot q_\alpha}{\partial \dot q_j}\right)$$

Символ Кронекера: $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & (\alpha \ne \beta) \\ 0 & \end{cases}$

$$p_j=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} K_{\alpha\beta}\left(\dot q_\alpha \delta_{\beta j}+\dot q_\beta \delta_{\alpha j}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\dot q_\alpha \sum_{\beta=1}^{s} K_{\alpha\beta}\delta_{\beta j}+\sum_{\beta=1}^{s}\dot q_\beta\sum_{\alpha=1}^{s}K_{\alpha\beta}\delta_{\alpha j}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\dot q_\alpha K_{\alpha j}+\sum_{\beta=1}^{s}\dot q_\beta K_{\beta j}\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}K_{\alpha j}\,\dot q_\alpha = p_j \quad \forall j=\overline{1,s}$$

Таким образом, $H=\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}K_{\alpha j}\,\dot q_\alpha \dot q_j = 2K$

$$H=2K-L=K+\Pi$$

Оказалось, что гамильтониан консерват. мех. системы имеет смысл полной мех. энергии

Пример: частица в потенц. силовом поле

$\Pi=\Pi(x,y,z)$ $\quad s=3$

$q_1=x,\ q_2=y,\ q_3=z$

$\dot q_1=\dot x \quad \dot q_2=\dot y \quad \dot q_3=\dot z$

$$H=K+\Pi=H(q,p)$$

$$K=\frac{mv^2}{2}=\frac{m}{2}\left(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2\right)$$

$$p_{\substack{x\\y\\z}}=\frac{\partial K}{\partial \substack{\dot x\\ \dot y\\ \dot z}}=m\substack{\dot x\\ \dot y\\ \dot z}$$

Выразим $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$: $K = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi(x, y, z)$$

§21 Равновесие системы и ее устойчивость.

Равновесие - состояние, в котором система, предоставленная сама себе, может находиться сколь угодно долго.

Условие равновесия: $m\ddot{\vec{r}}_e = \vec{F}_e + \vec{R}_e$ $(e = 1, \dots$

$\ddot{\vec{r}}_e = 0 \Rightarrow \vec{F}_e + \vec{R}_e = 0$ (*) : сумма сил, действующая на каждую т. системы, должна быть равна нулю.

- Системы с идеальными связями $\sum_{l=1}^{N} \vec{R}_l \delta \vec{r}_e = 0$.

Умножим (*) на вирт. перемещ. и суммируем по всем точкам: $\sum_{l=1} \vec{F}_e \delta \vec{r}_e = 0$. (**)

принцип виртуальных перемещений.

Переходим к обобщенным координатам.

$\delta \vec{r}_e = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \delta q_j$ (подставим в (**))

$$\sum_{l=1}^{N} \vec{F}_l \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \delta q_j = 0; \quad \sum_{j=1}^{s} \delta q_j \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}}_{Q_j \text{ — обобщ. сила}} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j = 0 \Rightarrow Q_j = 0 \ \forall j = 1, .., s$$

Т.е. в положении равновесия все обобщенные силы должны быть равны нулю.

Пример. равновес. m, l! $F = 0$? $s = 1$: $q = \varphi$.

$$Q = \sum_{e=1}^{N} \vec{F}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial \varphi}$$

$$Q = m\vec{g}\,\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \varphi} + \vec{F}\,\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \varphi} = -mg\,\frac{\partial y_1}{\partial \varphi} - F\,\frac{\partial x_2}{\partial \varphi}$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{l}{2}\cos\varphi \\ x_2 = \frac{l}{2}\sin\varphi \end{cases} \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} = -\frac{l}{2}\sin\varphi \qquad \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} = l\cos\varphi$$

$$Q = mg\,\frac{l}{2}\sin\varphi - Fl\cos\varphi \Rightarrow \underline{F = \frac{1}{2}mg\,\mathrm{tg}\,\varphi}$$

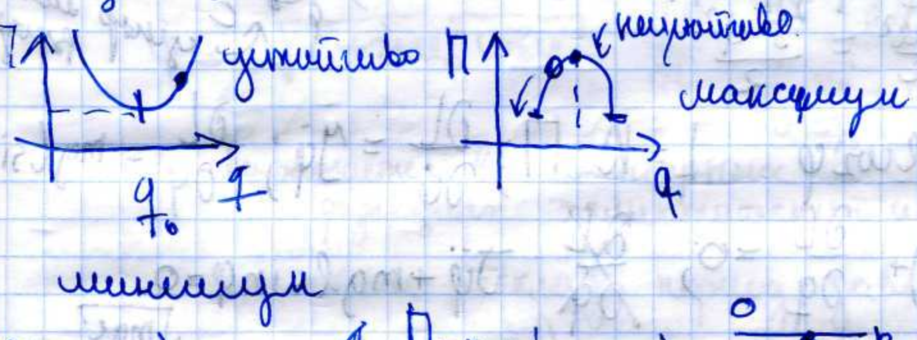
~~§22~~ Устойчивость равновесия

Равновесие устойчиво, если система, из него выведенная и предоставлена сама себе, начинает двигаться в его сторону.

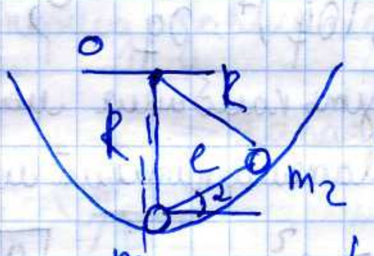
• Системы с потенц. заданными силами.

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0 \qquad (4) \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, \dots s$$

Потенц. ~~энергия~~ должна иметь экстремум по всем обобщенным к-там.



Пример.  $\Pi = mg\,h_c$



$s = 1;\ q = \alpha$

$h_1 = R\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$

$h_2 = R\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{3}(m_1 + m_2)}$

21.11.08

ЛЕКЦИЯ #12

§22 Колебания в системах с одной степенью свободы.

Опр. Колебания — повторяющиеся движения в окрестности положения устойчивого равновесия.

Колебания описываются уравнением гармонических колебаний при одной степени свободы, если ~~они~~ малые:

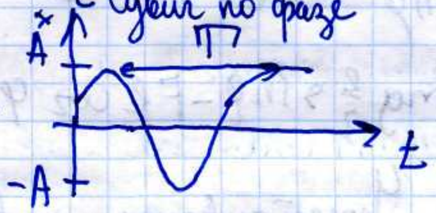
$\ddot{x}+\omega^2 x=0$; x — обобщ. коор-та, отсчитыв. от положения равн.

ω — частота колебаний

Решение: $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ — гармоническ. функция.

амплитуда ↑ ↑ сдвиг по фазе

$T=\frac{2\pi}{\omega}$ — период колебаний.



Пусть есть начальные условия: $x(t=0)=x_0$, $\dot{x}(t=0)=\dot{x}_0$

$$\begin{cases}\dot{x}_0=-A\omega\sin\varphi\\ A\cos\varphi=x_0\end{cases} \Rightarrow A=\sqrt{x_0^2+\frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}} \quad \sin\varphi=-\frac{\dot{x}_0}{A\omega}$$

• Метод определения частоты колебаний.

1. Написать уравнение дв. системы.
2. Привести ур-е к стандартному виду.

Пример 1. Физический маятник (Тело произвольной формы, имеющее неподв. ось вращения)

$s=1$, $q=\varphi$, $\dot{q}=\dot{\varphi}$.

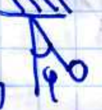
$K=\frac{J\omega^2}{2}=\frac{J\dot{\varphi}^2}{2}$

$\Pi=mgl\cos\varphi$. $L=K-\Pi$; $\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=J\dot{\varphi}$; $\frac{\partial L}{\partial\varphi}=mgl\sin\varphi$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)+\frac{\partial L}{\partial q}=0$, $\cancel{\frac{\partial K}{\partial\varphi}}$ $J\ddot{\varphi}+mgl\sin\varphi=0$.

Пусть колебания малые: $\sin\varphi\approx\varphi$. $\omega=\sqrt{\frac{mgl}{J}}$

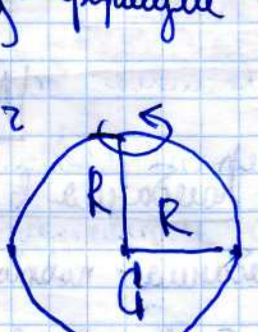
Пример 2 Математический маятник.



$J=ml^2 \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$; $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ — формула Гюйгенса.

Проверка: $l=1$ м, $T\approx 2$ с

Пример 3. Обруч $J=J_c+mR^2$ $J_c=MR^2$



$$\omega=\sqrt{\frac{mgR}{2mR^2}}=\sqrt{\frac{g}{2R}}$$

Пример 4. Осциллятор $m\ddot{x}=-k(x-l_0)+mg$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

§23 Физические эффекты в колеблющихся системах.

I) Гармонические колебания: $\ddot{x}+\omega^2 x=0$

II) Затухающие колебания. $\ddot{x}+\alpha\dot{x}+\omega^2 x=0$

- Время затухания – время, за которое амплитуда уменьшается вдвое.

- Период затуханий, T
- Добротность колебаний: $Q=\frac{T_{зат.}}{T}$

III) Нелинейные колебания: $\ddot{x}+f(x,\dot{x})=0$.

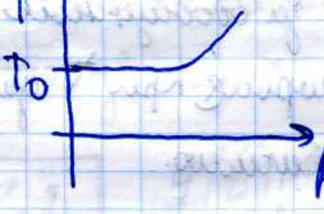
Мат. маятник при "не-маленьких" колебаниях.

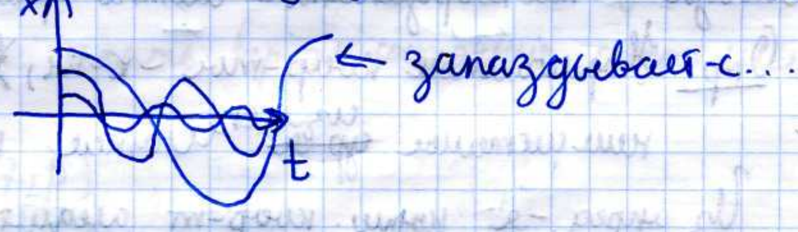
$K=\frac{mv^2}{2};\ v=l\dot{\varphi};\ \Pi=-mgl\cos\varphi;\ E=K+\Pi=\frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2-mgl\cos\varphi$

$\dot{\varphi}^2=\frac{2E}{ml^2}+\frac{2g}{l}\cos\varphi=C+2\omega_0^2\cos\varphi_0$ (из нач. усл., вроде)

$\dot{\varphi}=\pm\sqrt{C+2\omega_0^2\cos\varphi}=\frac{d\varphi}{dt};\ \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\sqrt{C+2\omega_0^2\cos\varphi}}=\pm\int_0^{t}dt_1=\pm t$

не выражается в элементарных функциях: эллиптический интеграл. При таком раскладе период зависит от амплитуды.





IV) Параметрические колебания: $\ddot{x}+\omega^2(t)x=0$.

Параметрический резонанс.

(правильным образом

тягать нитку в м.-маятнике с нитью переменной длины).

V) Вынужденные колебания: $\ddot{x}+\alpha\dot{x}+\omega_0^2x=f(t)$.

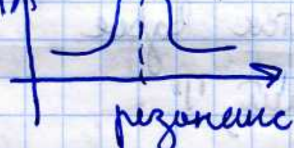
$f(t)$ описывает внешнюю силу.

Пусть $f(t)$ - гармоническая: $f(t) = f_0 \cos \omega t$.

Ищем решение. $\cos \omega t = \frac{1}{2}\left(e^{it\omega} + e^{-it\omega}\right)$

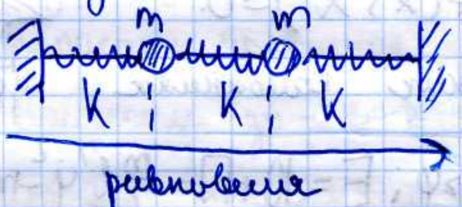
$x(t) = \frac{1}{2}A\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$. Найдем установившиеся колебания, $t \to \infty$ $(-\omega^2 + i\,2\omega + \omega_0^2)A = f_0$

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\,2\omega}$$



резонанс - совпадение внешней силы с собственной частотой колебаний системы.

VI) Связанные колебания.



$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2 \end{cases}$$

Эти уравнения связаны.

Однако сущ-т такие лин комб коор-т, при которых уравнения движ. независимы. Пусть $x_1 + x_2 = \Theta_1$, $x_1 - x_2 = \Theta_2$. Сложим и вычтем ур-я системы.

$$\begin{cases} m\ddot{\Theta}_1 + k\Theta_1 = 0 \\ m\ddot{\Theta}_2 = -3k\Theta_2 \end{cases} \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Такие лин комб сущ-т для систем с $\forall$ числом степеней свободы. Эти координаты можно принять за обобщенные.

Опр Нормальные коор-ты - к-ты, ~~к~~ которых при $\forall$ движении системы ~~ур-я~~ изменяются независимо.

Из опред-я норм. коор-т следует, что возможны такие режимы колебаний, когда отлична от нуля только одна нормал. коор-та (это - Нормальные Колебания): гармонические колебания на одной из собств. частот системы.

$x_1 = \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2}$ $\quad x_2 = \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{2}$

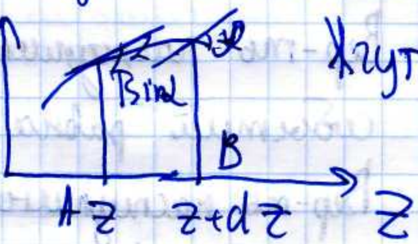
На ω_1: $\Theta_2(t=0) = \dot{\Theta}_2(t=0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1(t=0) = x_2(t=0) \\ \dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_2(t=0) \end{cases}$

На ш$_2$: $\begin{cases} x_1(t=0) = x_2(t=0) \\ \dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_2(t=0) \end{cases}$

VIII) Волна. – колебания, распространяющиеся в сплошной среде.

отклонение U от положения равновесия.

$\rho = \frac{m}{l}$ (лин. плотность)



$dm \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = T \sin\beta$ $\qquad dm = \rho\, dz$

$\sin\alpha \approx tg\,\alpha = \frac{\partial U}{\partial z}\Big|_A$

$$dm \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial U}{\partial z}\Big|_B - \frac{\partial U}{\partial z}\Big|_A\right) = T \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} dz$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \qquad v^2 = \frac{T}{\rho}$$

Решение: $U(z,t) = F_1(z - vt) + F_2(z + vt)$

$\cancel{U(z,t)}$ $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ $\quad z = vt$ скорость волны.

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \#13}}$ 281108

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Механика систем с большим числом частиц. Вместо закона движения будем искать вер-ть состояния системы.

$\boxed{?!}$ $q(t) \to w(q,p)$ ← вер-ть

§24 Случайные величины и вероятность

Случайное событие – исход нельзя предсказать, но опыт можно много раз повторить.

~~Случайная~~ Вероятность – в серии испытаний отношение числа "появлений события" к числу испытаний при числе исп. $\to \infty$.

$\mathbb{P}(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_A}{N}$ Из определения, $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$. $\mathbb{P}=0$: невозможное, 1 - достоверное событие.

Аксиомы.

- Вер-ть наступления одного из взаимоисключающих событий равна сумме вероятностей. $\mathbb{P}(A+B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
- Вер-ть наступления двух незав. событий равна произведению их вероятностей $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Опр. Случ. величина – величина, значение которой нельзя предсказать заранее, но измерение которой можно повторить.

Дискретные с. в.

Может принимать счетное (мн-во) число значений.

Пример. Число молекул в выделенной части сосуда.

$P\begin{pmatrix}\text{молекула в}\\ \text{части}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}$ $n = 0, 1, 2, \dots$

$n \to P(n)$

$P(n) = C\frac{\alpha^n}{n!}$ C – нормир. постоянная

α – параметр

– Распред. Пуассона.

Свойства. 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(n) = 1$ (нормировка) $\longrightarrow C = e^{-\alpha}$

2) Правило выч. среднего. $f(n)$ – с. в.;

$\langle f(n) \rangle = \overline{f(n)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)\,\mathbb{P}(n)$

Среднее значение для Пуассона $\bar{n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n\,\mathbb{P}(n) = \alpha$

Непрерывные с. в.

Принимает несчетное мн-во значений.

Пример Коорд-та x: $0 \le x \le 1$.

Опр. Плотность вероятности – отношение вер-ти попадания с.в в малый интервал вблизи заданного значения к величине интервала в пределе (когда длина интервала $\to 0$)

$$w(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x_0 \le x \le x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

В) <u>Свойства плотности.</u>

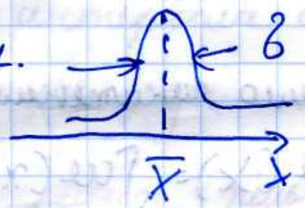
1) $w(x) \geq 0$.
2) Размерность: x^{-1}.
3) Нормировка: $\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\,dx = 1$

Правило вычисления среднего. $f(x)$ — с.в., то $\langle f(x) \rangle = \bar{f}(x) = \int\limits_{\text{все значения } x} f(x)\, w(x)\, dx$

Среднее значение с.в. $\bar{x} = \int x\, w(x)\, dx$

<u>Опр.</u> Дисперсия — средний квадрат отклонения от среднего значения. $\sigma^2 = \overline{(x-\bar{x})^2}$

• Гауссово распределение вероятности.



$$w(x) = \frac{1}{\sigma 2\pi} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

• Центральная предельная теорема.

Сумма большого числа н.с.в. имеет гауссово распределение вероятности.

<u>Пример.</u> Проекция скорости v_z $\quad -\infty < v_z < +\infty$

$$w(v_z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v_z^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma^2 = \overline{v_z^2}$$

• Гауссова статистика сохраняется при линейном преобразовании с.в.

Пример. К-та молекулы, $z(t)=\int^{t} v(\theta)d\theta$

$$w(z)=\frac{1}{6\sqrt{2\pi t}}e^{-z^2/2\sigma^2 t}, \quad \delta^2=\overline{z^2(t)}$$

Многомерная плотность вероятности.

Отношение вер-ти попадания нескольких с.в. в малые интервалы вблизи заданных значений к произведению величин интервалов, в пределе, когда интервалы стремятся к нулю.

$$w(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\frac{P(x_0\le x\le x_0+\Delta x,\ y_0\le y\le y_0+\Delta y)}{\Delta x\Delta y}$$

Свойства.

1) Неотрицательна,

2) Размерность: $[w]=[x^{-1}y^{-1}]$

3) Условие нормировки: $\iint\limits_{\text{по всем значениям}} w(x,y)\,dx\,dy$

4) Правило понижения порядка:

$w(x)=\int\limits_{\text{по всем зн. } y} w(x,y)dy$ Для независ. x,y: $w(x,y)=w_x(x)\,w_y(y)$

5) Вычисление среднего значения:

$$\overline{f}(x,y)=\iint f(x,y)\,w(x,y)\,dx\,dy.$$

§25 Распределение Гиббса.

Основной закон статистической механики равновесной сис-мы.

В состоянии термодинамического равновесия распределение плотности вероятности динам. состояний системы определяется формулой:

$w(z) = Ce^{-H(z)/kT}$

↑ совокупность канонических переменных. $z = q, p$. $H = K + П$ — гамильтониан. k — пост. Больцмана

$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/градус;

T — абсолютная температура; C — нормировочная постоянная.

$\int w(z)dz = 1 \Rightarrow C$.

Опр. Термодинамическое равновесие — состояние, в котором система, предоставленная сама себе, может находиться неогр. долго. $\boxed{T_1 \,;\, T_2}$ — неравновесное $\boxed{T \,|\, T}$ — равновес.

Опр. Температура — то, что измеряет термометр.

Опр. Градус Цельсия — 1/100 часть интервала между темп. плавления льда и т. кипения воды. t.

$T = t + 273°$ — абсолютная температура (Кельвина)

Следствия распр. Гиббса.

1) Распред. молекул по скоростям. $w(v_x, v_y, v_z) = Ce^{-m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/2kT}$ m — масса молекулы.
распред. Максвелла.

2) Распред. частиц в поле (внешнем, силовом)

$w(x,y,z) = Ce^{-П(x,y,z)/kT}$ ← распред. Больцмана.

Пример. В поле силы тяжести: $П = mgz$

$w(z) = Ce^{-mgz/kT}$

$n(z)$ концентрация $\sim w(z)$

$n(z) = n_0 e^{-mgz/kT}$ — барометр. ф-я.

Измерение постоянной Больцмана.

Опыт Перрена. (1908г.)

$$K = \frac{mgz}{T\ln(n_0/n)}$$

Броуновское движение.

$d = 0{,}4$ мкм $\quad m = (\rho - \rho_0)V \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3;\ r = d/2$

$\rho - \rho_0 = 0{,}2\ \Gamma/см^3$

$\frac{n_0}{n} = 4{,}5. \qquad T = 300K.$

$$K = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{Дж}{град}$$

Пример: воздух. концентрация $n = N/V$

Газ в сосуде. $\boxed{N, VT \atop p=?}$ S $\quad dp = 2m v_x \frac{v_x\, dt \cdot S}{S dt} n v_x v_x$

$$p = \int dp = 2mn \int_0^\infty v_x^2\, w(v_x)\, dv_x$$

$$w(v_x) = c e^{-mv_x^2/2KT}$$

$$p = mn\overline{v_x^2} \qquad \overline{v_x^2} = c\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-mv_x^2/2KT} dv_x$$

$$= c\int_{-\infty}^{\infty} v_x \frac{d}{dv_x} e^{-mv_x^2/2KT}\left(-\frac{KT}{m}\right) dv_x = \frac{KT}{m}$$

$\boxed{p = nKT} \qquad n_0 = \frac{p_0}{KT} \quad p_0 = 10^5 Па;\ T_0 = 273\ K$

$n_0 = 2{,}7 \cdot 10^{25}\ м^{-3}$ - число Лошмидта.

Масса молекулы

$\rho = m \cdot n \to m = \frac{\rho}{n} \qquad \rho = 1{,}3\ кг/м^3$

$m = 0{,}5 \cdot 10^{-25}$ кг

$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{d^3} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}} \Rightarrow 4 \cdot 10^{-10}$ м - d - диаметр

Скорость молекулы: $v = \sqrt{\overline{v_x^2}} = \sqrt{\frac{KT}{m}} = 300$ м/с.

51208

ЛЕКЦИЯ # 14

§ :)

Факты, подтверждающие распред. Гиббса.

1) Свойства газов: $p = nKT$, $n = \frac{N}{V}$

$\frac{PV}{T} = KN = const$. Подтверждается экспериментами.

Опыт: урав. Менделеева-Клайперона: $PV = \frac{m}{M} RT$

$R = 8{,}31 \frac{Дж}{град \cdot моль}$ - газовая п-я

• Моль - масса вещ-ва, отв. молярной массе.

$H_2 = 2$ г/моль; N_2: $\mu = 28$ г/моль

$\frac{PV}{T} = KN = \frac{mR}{M}$ $\quad N = N_A \frac{m}{\mu}$

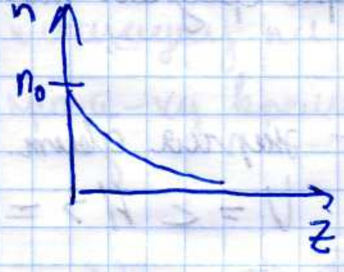
↑ число молекул в 1 моле, число Авогадро.

$N_A = \frac{R}{K} = 6{,}02 \cdot 10^{23} \frac{молекул}{моль} = моль^{-1}$

2) Распределение воздуха в атмосфере.

$w(x,y,z)\ C \cdot exp(-П(x,y,z)/KT)$

В поле силы тяжести: $П = mgz$, $w(z) = C \cdot exp(-mgz/KT) \sim n(z)$; $n(z) = n(0) exp(-mgz/KT)$



На какой в-те изменилось в e раз?

$n(z) = n(0) \cdot e^{-z/z_0}$

$z_0 = \frac{KT}{mg}$ $\quad m = 0{,}5 \cdot 10^{-25}$ кг. $\quad T = 300\ K$

$g = 10$ м/с^2 $\quad K = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град

$z_0 = 8$ км,

§26 Распределение энергии по степеням свободы.

Теорема о равном ↑ В состоянии т-д. равновесия на каждую квадратичную степ. свободы приходится в среднем одинаковая энергия, равная $\frac{kT}{2}$.

<u>Опр.</u> Квадратичная степень свободы – переменная, вклад которой в гамильтониан ~ квадрату этой переменной.

$$H = a z_1^2 + H'(z')$$

z' – сов-ть переменных без z_1

Пример: частица в потенциальном силовом поле: $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi(x, y, z)$

$$E = \langle a z_1^2 \rangle = \int a z_1^2 \, \underset{\text{р. Гиббса}}{w(z)} dz = \int a z_1^2 \, c \exp\left(-\frac{H(z)}{kT}\right)$$

$$= c \int e^{-H'(z')/kT} dz' \int a \, z_1^2 \, e^{-a z_1^2/kT} dz_1 \ominus$$ Вычислим по частям. $a z_1^2 e^{-a z_1^2/kT} = -\frac{kT}{2} z_1 \frac{d}{dz_1} e^{-a z_1^2/kT}$

$$\ominus -\frac{kT}{2}\left[z_1 e^{-a z_1^2/kT} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int e^{-a z_1^2/kT} dz_1 \right] =$$

$$= \frac{kT}{2} \int e^{-a z_1^2/kT} dz_1$$

$$E = \frac{kT}{2} c \int e^{-H'(z')/kT} dz' \int e^{-a z_1^2/kT} dz_1 =$$

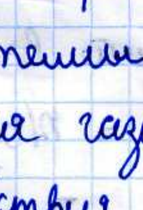
$$= \frac{kT}{2} \underbrace{c \int w(z)\, dz}_{1} = \frac{kT}{2}$$

<u>Следствие 1.</u> (Физ. смысл. температуры) Мера средней кин. энергии системы.

<u>Следствие 2</u> (Внутр. энергия газов) В.э. – энергия движ. и взаимодействия частиц $U = \langle H \rangle = N E$

$s = 3$ (гелий, неон) $E = \frac{3}{2} kT$

$S = 5$ (H_2, O_2) $E = \frac{5}{2} kT$



$S = 6$ (H_2O) $E = 3 kT$

Теплоемкость газа - отношение полученной теплоты к изменению температуры. $C=\frac{dQ}{dT}$

$dQ=dU+dA$; $dA=dpV$. $V=const \Rightarrow dA=0$

↑ какое-то начало термодинамики

$$C=\frac{dU}{dT}=\frac{d}{dT}N\frac{kT}{2}S=\frac{NkS}{2}$$

$C=C_V=\frac{R}{2}S$; $S\Rightarrow C_V=\frac{3}{2}R$, $S=5\Rightarrow C_V=\frac{5}{2}R$, $S=6\Rightarrow C_V=3R$

Тепловое излучение.

$h\nu=kT$ $\nu=\frac{1}{T}=\frac{c}{\lambda}$

↑ другая Т. Период.

$$h\frac{c}{\lambda}=kT \to \lambda=hc/kT$$

$$\left.\begin{array}{l} h=6{,}6\cdot10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с} \\ c=3\cdot10^{8}\ \text{м/с}.\quad T=300\ \text{К} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda=10\ \text{мкм}$$

Зрение - способность видеть свет с $\lambda=0{,}5$ мкм.

§27 Диффузия и теплопроводность.

Исследуем неравновесные системы.

Д. - процесс проникновения одного вещ-ва в другое

Закон Диффузии - поток частиц пропорц. градиенту их концентрации.

Поток частиц - отношение числа частиц, прошедших через площадку пл-S за время Δt, к площади S и пром-ку времени. $\frac{\Delta N_x}{S\Delta t}=j_x$

$$j_x=-D\frac{\partial n}{\partial x}$$

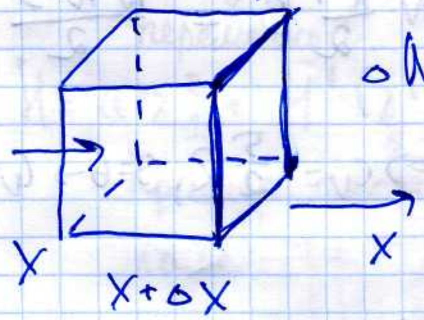
↑

Коэф. диффузии - коэф. пропорциональности между потоком частиц и градиентом их концентрации.

Размерность D. $n=\frac{N}{V}$ $[м^{-3}] \Rightarrow [D]=\frac{м\cdot м^3}{м^2\cdot с}=м^2/с$

скорость расплывания дифф. пятна.

Уравнение сохранение числа частиц



$\Delta N_x(x)=S\Delta t\, j_x(x)$ – входит

$\Delta N_x(x+\Delta x)=S\Delta t\, j_x(x+\Delta x)$ выходят

Приращение числа частиц

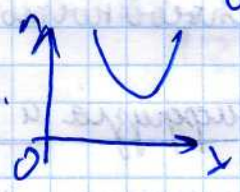
$$\Delta N=\Delta N_x(x)=\Delta N_x(x+\Delta x)=$$
$$=S\Delta t\left(-\frac{\partial j_x}{\partial x}\Delta x\right)=\Delta V\Delta t\left(-\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)$$

Рост концентрации: $\frac{\Delta N}{\Delta V}=-\Delta t\,\frac{\partial j_x}{\partial x} \xrightarrow{\text{п. перех.}} \boxed{\frac{\partial n}{\partial t}=-\frac{\partial j_x}{\partial x}}$

уравнение непрерывности

$$j_x=-D\frac{\partial n}{\partial x}$$

$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t}=D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}}$ – Уравнение диффузии.



Теплопроводность.

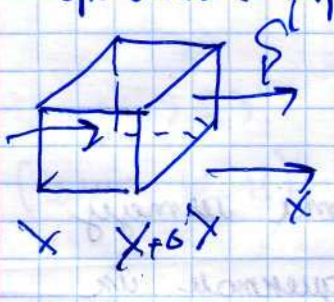
Процесс переноса тепла в неоднородно нагретом теле.

$T_1 | T_2 \rightarrow T | T$ Закон. Поток тепла пропор. градиенту температуры

$$j_x=\frac{\Delta Q_x}{S\Delta t}=-\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}$$

$\varkappa$ – коэф. теплоподности.

Уравнение сохр. энергии.



Входит тепло: $\Delta Q_x(x)=S\Delta t\, j_x(x)$

Выходит: $\Delta Q_x(x+\Delta x)=S\Delta t\, j(x+\Delta x)$

Прирощ. тепла внутри кубика:

$$\Delta Q=\Delta Q_x(x)-\Delta Q_x(x+\Delta x)=$$

$= S\Delta t(j_x(x) - j_x(x+\Delta x))$ $\quad j_x(x+\Delta x) = j_x(x) + \frac{\partial j_x}{\partial x}\Delta x$

$\Delta Q = S\Delta t \frac{\partial j_x}{\partial x}\Delta x$; $\Delta Q = -\Delta V \Delta t \frac{\partial j_x}{\partial x}$;

$\Delta Q = c\rho\Delta V \cdot \Delta T$. $\quad c\rho\Delta V\Delta T = \Delta V \Delta t \frac{\partial j_x}{\partial x}$

уд. теплоемкость — плотность

$$\boxed{c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial j_x}{\partial x}}$$ сохр. энергии.

$j_x = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial x}$ $\quad c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \to \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\varkappa}{c\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$

ур. теплопровод.

коэф. теплопр.

$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, $\chi = \frac{\varkappa}{c\rho}$ — коэф. температуропр.