Московский Государственный университет им.М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Д.П.Костомаров

Введение в численные методы

Методическое пособие для 2 курса

1999

Содержание

Введение

Данное пособие представляет собой систематизированное содержание лекций по курсу “Ведение в численные методы”, который читается на втором курсе факультета ВМиК с 1994 г. и содержит последовательное изложение основных понятий, определений, теорем и утверждений, рассматриваемых и доказываемых на лекциях.

I. Интерполирование

§ 1. Интерполирование полиномами

1.1. Опр. Пусть функция f(x) задана таблично на [a,b]:

$x_0 = a,\ x_n = b\ ,\ x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n\ ,\ y_i = f(x_i)\ \ i = 0,\dots, n$

Тогда построение непрерывной на [a,b] функции $\varphi(x)$, такой что $\varphi(x_i) = y_i$ называется интерполяцией функции f(x) на [a,b].

1.2. Опр. Пусть полином степени **n** $L_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ интерполирует y=f(x) на [a,b],
т.е. $L_n(x_i) = y_i = f(x_i)$. Тогда $L_n(x)$ называется интерполяционным полиномом.

Утверждение. Интерполяционный многочлен степени n для функции y=f(x), заданной таблично в n+1 точках, существует и единственен.

Данное утверждение следует из того, что определитель Вандермонда отличен от нуля.

1.3. Интерполяционный многочлен в форме *Лагранжа* имеет вид $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\left[f(x_i)\prod_{j\neq i}\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right]$.

1.4. Теорема.

Пусть функция y=f(x) имеет n+1 непрерывную производную на [a,b], и L_n(x) - интерполяционный многочлен, $L_n(x_i) = f(x_i)$, i=0,1,...,n. Тогда для погрешности интерполяции $\psi(x) = |L(x) - f(x)|$ справедлива оценка

$$\psi(x) \le \frac{\max\limits_{\xi\in[a,b]} \left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!} \left|\omega_n(x)\right|,$$

где

$$\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n).$$

<u>1.5. Полиномы Эрмита</u>

Полиномы Эрмита интерполируют таблично заданную функцию с учетом известных значений производной в узлах сетки.

Пусть заданы n+1 узлов x_i , $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_n$, значения функции в них $y_i = f(x_i)$ и значения производной в них $y_i{}' = f'(x_i)$ i = 0,..., n. Требуется построить полином $P_{2n+1}(x)$ такой, что $P_{2n+1}(xi) = y_i$, $P_{2n+1}{}'(x_i) = y_i{}'$. Этот полином и называется полиномом **Эрмита**.

§ 2. Интерполированиие сплайнами

Пусть функция y=f(x) задана таблично :

$x_0 = a$, $x_n = b$, $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $y_i = f(x_i)$ i = 0,..., n.

<u>2.1. Опр.</u> Кубической сплайн-интерполяцией называется функция $\varphi(x)$ такая, что

€€€ $\varphi(x_i) = f(x_i)$, i=0,1,...,n ,

€€€ $\varphi'(x_i-0) = \varphi'(x_i+0)$, €€€ €€ (1)
€€€ $\varphi''(x_i-0) = \varphi''(x_i+0)$, i=1,...,n-1

€€€ $\varphi''(x_0) =0$, $\varphi''(x_n) =0$, и $\varphi(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$, $x_{i-1} \le x \le x_i$

Величины коэффициентов a,b,c,d, находятся из системы уравнений (1). Для нахождения значений этих коэффициентов удобно, с помощью последовательного исключения неизвестных, редуцировать систему (1) к системе трехточечных уравнений относительно коэффициентов c_i, и решать ее далее с помощью метода прогонки (см. далее).

II. Численное интегрирование

§ 1. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона

Опр. Выражение вида $S = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i), \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

предназначенное для вычисления определенного интеграла $I = \int_a^b f(x)dx$ называется квадратурной формулой.

Опр. Величина R=I - S называется погрешностью квадратурной формулы.

1.1. Формула прямоугольников

Простая : $S_0 = (b-a)\, f\left((b+a)/2\right)$, $R_0 = -(b-a)^3 f''(\xi)/24$, $\xi \in (a,b)$

Составная: $S = h\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \qquad R_{0,n} = -\frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi)$, h=(b-a)/n

Формула трапеций

Простая : S_1 $= (b-a)\left(f(b) + f(a)\right)/2$, $R1 = (b-a)^3 f''(\xi)/12$, $\xi \in (a,b)$

Составная: $S = h\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \qquad R_{1,n} = \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$, h=(b-a)/n

Формула Симпсона

Простая : S$_2$ = (b-a)(f (a) + 4f((b+a)/2) + f(b))/ 6,

$R_2 = (b-a)^5 f^{(4)}(\xi)/ 90$, $\xi \in (a,b)$

Составная: $S = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + f_n\right] \quad R_{2,n} = \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$,

h=(b-a)/n, здесь - четное число.

§ 2. Квадратурные формулы Гаусса

2.1.
В квадратурных **формулах Гаусса** ищутся не только коэффициенты **C**$_i$, но и точки x_i - из соображений обеспечения точности квадратурной формулы для полинома максимальной степени.

Квадратурная формула Гаусса $S = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)$
будет точна для произвольного полинома степени 2n+1,если величины c_i и x_i удовлетворяют системе уравнений:

$$\int_a^b x^k dx = \frac{(b-a)^{k+1}}{k+1} = \sum_{i=0}^{n} c_i x_i^k = c_0 x_0^k + c_1 x_1^k + \ldots + c_n x_n^k \quad , k = 0,1,\ldots,2n+1$$

2.2.
Можно показать, что узлы x_j квадратурной формулы на отрезке [-1,1] являются корнями **полинома Лежандра**:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left\{(x-1)^n (x+1)^n\right\}$$
,

а коэффициенты квадратурной формулы вычисляются по формулам

$$C_m = \int_{-1}^{1} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-1})(x-x_{m+1})\ldots(x-x_n)}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-1})(x-x_{m+1})\ldots(x_m-x_n)} dx, \quad m = 0,\ldots,n$$

III. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений

Постановка задачи

Найти вектор x , удовлетворяющий уравнению

A**x** = f ,

где A - квадратная матрица порядка n,

$A = \{ a_{i,j} \}$, $i,j = 1,2,...,n$,
$\mathbf{x}^T = \{x_1,x_2,..., x_n \}$, $f^T = \{ f_1,f_2,...,f_n \}$,

или, что тоже самое, найти $x_{1,x2,..., xn}$ удовлетворяющие системе уравнений

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n = f_1$

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n = f_2$

....

$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + ... + a_{nn} x_n = f_n$

§ 2. Метод Гаусса

<u>2.1. Метод Гаусса</u> состоит в приведении матрицы к треугольному виду.

Приведение матрицы к треугольному виду осуществляется по формулам

$$a_{ml}^{[k+1]} = a_{ml}^{[k]} - \frac{a_{mk}^{[k]}}{a_{kk}^{[k]}} a_{kl}^{[k]}$$

$$f_{m}^{[k+1]} = f_{m}^{[k]} - \frac{a_{mk}^{[k]}}{a_{kk}^{[k]}} f_{k}^{[k]}$$

, m= k+1,...,n, l= k,..., n, k=1,...,n-1.

(прямой ход метода Гаусса), в результате чего получается система

$a^{(n)}_{11} x_1 + a^{(n)}_{12} x_2 + ... + a^{(n)}_{kk} x_k + ... + a^{(n)}_{1n} x_n = \varphi^{(n)}_1$

$a^{(n)}_{22} x_2 + ... + a^{(n)}_{kk} x_k + ... + a^{(n)}_{2n} x_n = \varphi^{(n)}_2$

....

$a^{(n)}_{kk} x_k + ... + a^{(n)}_{kn} x_n = \varphi^{(n)}_k$

....

$a^{(n)}_{nn} x_n = \varphi^{(n)}_n$

Вычисление решения $x_{1,x2,..., xn}$ осуществляется следующим образом

$$x_k = \frac{1}{a^{(n)}_{kk}}\left[\varphi^{(n)}_k - \sum_{l=k+1}^{n} a^{(n)}_{kl} x_l\right], \quad k = n, n-1, ..., 1$$

(формулы обратного хода Гаусса)

2.2. Общее число действий в методе Гаусса порядка $(n^{3} + 3n2)/3$.

§ 3. Системы с трёхдиогональными матрицами. Метод прогонки

<u>Метод прогонки</u>

Метод прогонки применяется для решения систем линейных уравнений с матрицей специального вида - трехдиагональной матрицей :

$- a_i x_{i-1} + c_i x_i - b_i x_{i+1} = f_{i,}$ $i=2, ... , n-1$

$x_1 = \kappa_1 x_2 + \nu_1$ (2)

$x_n = \kappa_2 x_{n-1} + \nu_2$

На первом этапе находятся коэффициенты

$\alpha_{i+1} = b_i /(c_i - a_i \alpha_i)$, $\beta_{i+1} = (\beta_i a_i + f_i)/(c_i - a_i \alpha_i)$ i=2, ... , n-1 (прямой ход), $\alpha_2 = \kappa_1$, $\beta_2 = \nu_1$,

а на втором этапе находится решение

$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}$, i = n-1, ... ,2,1

$x_n = (\nu_2 + \beta_n) / (1-\alpha_n \kappa_2)$.

Для корректности метода прогонки достаточно, чтобы коэффициенты α_i были по модулю меньше единицы, а выражения в знаменателях формул были отличны от нуля. Достаточные условия корректности прогонки формулируются в следующих теоремах.

Теорема

Пусть система уравнений (2) такова, что $a_i > 0$, $b_i > 0$, $c_i > 0$, $c_i \geq a_i + b_i$, i=2,..., n-1,
и $|\kappa_1| + |\kappa_2| < 2$, $|\kappa_1| \leq 1$, $|\kappa_2| \leq 1$.

Тогда метод прогонки корректен.

Теорема

Пусть система уравнений (2) такова, что $a_i > 0$, $b_i > 0$, $c_i > 0$, $c_i \geq a_i + b_i$, i=2,..., n-1,
и существует $i_0 > 1$ такое, что $c_{i0} > a_{i0} + b_{i0}$, и $|\kappa_1| \leq 1$, $|\kappa_2| \leq 1$.

Тогда метод прогонки корректен.

Теорема

Пусть система уравнений (2) такова, что $|a_i|$, $|b_i|$, $|c_i| > 0$, $|c_i| > |a_i| + ... + |b_i|$, i=2,..., n-1,
и $|\kappa_1| \leq 1$, $|\kappa_2| \leq 1$.

Тогда метод прогонки корректен.

§ 4. Обусловленность систем линейных алгебраических уравнений

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$$

<u>4.1. Опр.</u> Под **нормой матрицы** А будем понимать

§ 5. Итерационные методы решения систем линейных алгебрпических уравнений

5.1. Канонический вид одношаговых итерационных методов для решения системы линейных алгебраических уравнений
Ax = f :

$$B_{k+1} \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau_{k+1}} + A x_k = f \ , \ \ k = 0,1,2,\ldots,$$

где B_{k+1} - квадратная матрица $n \times n$, $\tau_{k+1} > 0$ - итерационный параметр. В дальнейшем будем использовать следующие согласованные нормы в конечномерном пространстве размерности n:

- евклидова норма $\|y\| = \sqrt{(y, y)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}$

- норма в С $\|y\|_C = \max |y_j|$

- энергетическая норма $A = A^* > 0$ $\|y\|_A = (Ay, y)$

5.2. Итерационный метод сходится, если $\lim_{k \to \infty} \|x_k - x\| = 0$.

<u>Опр.</u> Величина z_k $= x_k - x$ называется погрешностью решения.

<u>Опр</u>. Если $B_{k+1} = B$ и $\tau_{k+1} = \tau$ то метод называется стационарным

<u>Теорема</u>.

Пусть $A = A^* > 0$, и $B - 0.5\tau A > 0$ тогда итерационный метод

$$B \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} + A x_k = f \ , \ \ k = 0,1,2,\ldots,$$

сходится в норме | | * | | $_A$, $\|z\|_A = \sqrt{(Az,z)}$.

5.3. Метод простой итерации

Канонический вид метода простой итерации - $\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} + A x_k = f$

Теорема

Пусть $A=A^*>0$, $\tau \le \frac{2}{\|A\|}$, тогда метод простой итерации сходится.

Замечание. Если $A=A^*>0$ то у матрицы A существует n собственных значений λ_k таких, что

$0<\lambda_{min}=\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_{n-1}<\lambda_n=\lambda_{max}$,

при этом $\|A\| = \lambda_{max}$ и $\lambda_{min} E \le A \le \lambda_{max} E$.

Можно найти оптимальное значение итерационного параметра $\tau = \tau_0$ такое, что заданная точность решения будет достигаться за минимальное число итераций.

Теорема

Пусть $A=A^*>0$, тогда при $\tau = \tau_0 = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}$ для погрешности явного метода простой итерации z_k справедлива оценка $\|z_{k+1}\| \le \rho_0 \|z_k\|, \quad \rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \quad \xi = \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}$.

5.4. Метод Зейделя

Каноническому виду метода Зейделя соответствует **B=(D+L),** τ =1, где D -диагональная матрица, L - нижняя треугольная матрица $(D+L)(x_{k+1} - x_k) + A x_k = f , \; k = 0,1,2,\ldots,$

Индексный вид метода Зейделя: $\sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{k} = f_i \quad i = 1,\ldots,n$

Теорема

Пусть A=A*>0, тогда метод Зейделя сходится.

Теорема

Пусть матрица A такова, что $\sum_{j\neq i}|a_{ij}| \le q|a_{ii}|$, i=1,..., n, $|q|<1$, тогда метод Зейделя сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q, т.е. $\|z^{k+1}\| = \|x^{k+1} - x\| \le |q|^{k+1}\|x^0 - x\| = |q|^{k+1}\|z^0\|$.

Метод релаксации

Канонический вид:

$$(L + \frac{1}{\omega}D)(x^{k+1} - x^k) + Ax^k = f \qquad (\tau = 1)$$

$\omega < 1$- метод нижней релаксации

$\omega = 1$- метод Зейделя

$\omega > 1$- метод верхней релаксации

Теорема Пусть A=A*>0, $0<\omega<2$, тогда метод релаксации сходится.

IV. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

§ 1. Разностные уравнения

1.1. Опр. Пусть дан отрезок [a,b]. **Равномерной сеткой** на этом отрезке назовем множество узлов ω_h такое, что $\omega_h = \{ x_j = jh,\ j=0,...,n,\ h=(b-a)/n) \}$.

Опр. Сеточной функцией y = y$_j$ = $y(x_j)$ называется функция, заданная в узлах сетки.

Любую сеточную функцию $y_j = y(x_j)$ можно представить в виде вектора $Y=(y_0, y_1, ..., y_{n-1}, y_n)$, и, следовательно, множество сеточных функций образует конечномерное пространство, в данном случае размерности n+1. В этом пространстве можно ввести норму, например

$\|y\|_C = \max_{0\le i\le n}|y_i|$ или $\|y\| = \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2\right)^{1/2}$.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$Lu(x) = f(x,u)$ (например, $\frac{du}{dx} = f(x,u)$) .

1.2. Заменим Lu в узле сетки x_i линейной комбинацией значений сеточной функции y_i на некотором множестве узлов сетки, называемом шаблоном. Такая замена Lu на $L_h y_h$ называется аппроксимацией на сетке дифференциального оператора L разностным оператором L_h . Замена непрерывной функции $f(x,u)$ в узлах сетки на сеточную функцию $\varphi(x_h, y_h)$ называется аппроксимацией правой части.

Таким образом дифференциальное уравнение можно аппроксимировать (заменить) на сетке **разностной схемой**

$L_h y_h = \varphi(x_h, y_h)$ (например, $\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = f(x_j, y_j)$).

Изучение разностных аппроксимаций проводится сначала локально, т.е. в любом фиксированном узле сетки.

Пусть u_h - проекция непрерывной функции $u(x)$ на сетку (например, $u_h = u(x_j) = u_j$).

<u>Опр.</u> Погрешностью аппроксимации дифференциального оператора Lu разностным оператором L_h назовем величину
$\psi_1 = (Lu)_h - L_h u_h$, где $(Lu)_h$ - проекция на сетку результата действия дифференциального оператора L на функцию u

(например, $\frac{du}{dx}(x_j)$) .

<u>Опр.</u> Говорят, что погрешность аппроксимации дифференциального оператора имеет в узле x_i порядок k , если
$\psi_1(x_i) = O(h^k) \to 0$ при $h \to 0$.

<u>Опр.</u> Погрешностью аппроксимации правой части f сеточной функцией φ_h назовем величину $\psi_2 = f_h - \varphi_h$, где f_h - проекция на сетку функции $f(x,u)$ (например, $f(x_{j}, u_{j})$.

<u>Опр.</u> Погрешность аппроксимации правой части имеет в узле x_i порядок m , если $\psi_2 = O(h^m) \to 0$ при $h \to 0$

<u>Опр.</u> Погрешностью аппроксимации разностной схемы на решении в узле x_i (локальной погрешностью) назовем величину ψ , равную

$\psi = \psi_1 - \psi_2 = (Lu)_h - L_h u_h - (f_h - \varphi_h) = \varphi_h - L_h u_h$, здесь использовано, что Lu=f.

$$\left(\text{например } \psi_1 = \frac{du}{dx}(x_j) - \frac{u_{j+1} - u_j}{h} - \left(f\left(x_j, u_j\right) - f(x_j, u_j)\right), \text{ здесь } \psi_2 = 0. \right).$$

<u>Опр.</u> Значения локальной погрешности аппроксимации в каждом узле x_i образуют сеточную функцию погрешности аппроксимации ψ_i .

Обычно требуется оценка погрешности аппроксимации на сетке, т.е. оценка функции ψ_i в некоторой сеточной норме.

<u>Опр.</u> Говорят, что погрешность аппроксимации разностной схемы имеет m-ый порядок на сетке, если $\|\psi\| = O(h^m)$.

<u>Опр.</u> Решение разностной схемы сходится к решению дифференциального уравнения с порядком k на сетке, если погрешность решения

$\| z_h \| = \| u_h - y_h \| = O(h^k) \to 0$ при $h \to 0$.

§ 2. Численное решение задачи Коши

2.1. Требуется найти численное решение задачи **Коши** для ОДУ первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(t,u), \quad 0 < t < T, \quad u = u(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

На отрезке [0,T] вводим разностную сетку $\omega_\tau = \{ t_n = n\tau , n=0,...,N, \tau = T/N \}$ и сеточную
функцию $y_n = y(t_n)$.

2.2. Метод Эйлера

Явный метод Эйлера.

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f(t_n, y_n) \qquad n = 0,1,\ldots,N \\ y_0 = u_0 \end{cases}$$

Погрешность аппроксимации явного метода Эйлера $\psi = O(\tau)$ - первого порядка
($\psi_1 = O(\tau)$, $\psi_2 = 0$).

2.3. Одним из способов повышения порядка сходимости разностных схем для ОДУ является использование **методов Рунге-Кутта**. Общий вид схем Рунге -Кутта для решения задачи Коши для ОДУ первого порядка имеет следующий :

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = p_1 k_1 + p_2 k_2 + \ldots + p_l k_l \\ k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + \alpha_2 \tau, y_n + \alpha_2 \tau k_1) \\ k_3 = f(t_n + \alpha_3 \tau, y_n + \alpha_3 \tau k_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_l = f(t_n + \alpha_l \tau, y_n + \alpha_l \tau k_{l-1}) \\ \sum_{i=1}^{l} p_i = 1, \quad p_i > 0, i = 1,\ldots,l \end{cases}$$

Величины p_k и α_k выбираются из соображений аппроксимации.

Метод Рунге - Кутта второго порядка

Величины p_1, p_2, α определяются из условия второго порядка аппроксимации, для данной схемы $p_1 = (2\alpha - 1)/\alpha$, $p_2 = 1/2\alpha$.

Метод Рунге- Кутта второго порядка можно записать в другом виде

Условие второго порядка аппроксимации (1-σ)α =0.5.

На практике широко распространен **Метод Рунге - Кутта четвертого порядка :**

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1}-y_n}{\tau} = \dfrac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right] \\ k_1 = f\left(t_n, y_n\right) \\ k_2 = f\left(t_n + \dfrac{\tau}{2}, y_n + \dfrac{\tau k_1}{2}\right) \\ k_3 = f\left(t_n + \dfrac{\tau}{2}, y_n + \dfrac{\tau k_2}{2}\right) \\ k_4 = f\left(t_n + \tau, y_n + \tau k_{i-1}\right) \end{cases}$$

Данная схема имеет четвертый порядок аппроксимации.

2.4.

Другую возможность для повышения порядка сходимости разностных схем для решения ОДУ предоставляют **Методы Адамса.**

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} = b_0 f_{n+1} + b_1 f_n + \ldots + b_p f_{n-(p-1)}$$

$$\sum_{i=0}^{p} b_i = 1, \quad f_j = f(x_j, y_j)$$

В методах Адамса коэффициенты b_i находятся из условий наивысшего для данного p порядка погрешности аппроксимации.

Методы Адамса являются многошаговыми и являются разновидностью p - шаговых методов. P-шаговый метод может быть записан в следующем общем виде:

$$\frac{a_0 y_{n+1} + a_1 y_n + a_2 y_{n-1} + \ldots + a_p y_{n-(p-1)}}{\tau} = b_0 f_{n+1} + b_1 f_n + \ldots + b_p f_{n-(p-1)}$$

$$\sum_{i=0}^{p} b_i = 1, \quad \sum_{i=0}^{p} a_i = 0, \quad f_n = f(t_n, y_n)$$

P- шаговому методу Адамса соответствует набор коэффициентов a_i вида

$a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = \ldots = a_p = 0$

Явный двухшаговый метод Адамса.

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{3}{2} f_n - \frac{1}{2} f_{n-1} \quad n = 1,2,\ldots$$

Погрешность аппроксимации имеет второй порядок. Для нахождения y_1 (со вторым порядком) используется обычно схема Рунге-Кутта второго порядка.

Неявный двухшаговый метод Адамса.

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{6}\left[\frac{5}{2} f_{n+1} + 4 f_n - \frac{1}{2} f_{n-1}\right] \quad n = 1,2,\ldots$$

Погрешность аппроксимации имеет третий порядок . Для начала решения задачи Коши для ОДУ первые р шагов нужно сделать с помощью какого-либо другого метода, например, метода Рунге - Кутта.

Литература.

[1] А.А. Самарский. Введение в численные методы. Москва: Наука, 1987.
[2] А.А. Самарский, А.В. Гулин. Численные методы. Москва: Наука, 1989.
[3] А.Н.Тихонов, Д.П.Костомаров. Вводные лекции по прикладной математике. Москва: Наука, 1984.