Глава 2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

В школьном курсе математики изучают линейные и квадратные уравнения, корни которых могут быть найдены по известным формулам. Существуют также формулы для решения уравнений третьей и четвертой степени, однако они сложны и неудобны для практического применения. На их обсуждении мы останавливаться не будем. Если рассматривать неалгебраические уравнения, то задача усложняется еще больше. В этом случае получить для корней ответ в виде формул, за редким исключением, не удается.

В условиях, когда формулы «не работают», когда рассчитывать на них можно только в самых простейших случаях, важное значение приобретают универсальные вычислительные алгоритмы. Их много и они достаточно разнообразны. Если записать уравнение в виде

$$f(x)=0, \tag{1}$$

то эти алгоритмы обычно не накладывают никаких ограничений на конкретный вид функции $f(x)$, а предполагают только, что она обладает свойствами типа непрерывности, дифференцируемости и т. д.

В этой главе мы познакомимся с тремя алгоритмами. Они основаны на разных идеях, каждый из них обладает определенными достоинствами и недостатками, поэтому в конце главы будет интересно сравнить алгоритмы между собой.

§1. Метод вилки. Теорема о существовании корня непрерывной функции.

Метод вилки и его применение к доказательству фундаментальной теоремы о существовании корня у функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$ и принимающей на его концах значения разных знаков, подробно разбирается в курсе математического анализа. Несмотря на это мы конспективно изложим его вновь, поскольку без метода вилки картина численного решения уравнений была бы неполной.

Теорема о существовании корня непрерывной функции.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то на этом отрезке существует по крайней мере один корень уравнения (1).

Предположим для определенности, что функция $f(x)$ принимает на левом конце отрезка $[a,b]$ отрицательное значение, на правом – положительное:

$$f(a)<0,\ f(b)>0. \tag{2}$$

Возьмем на отрезке $[a,b]$ среднюю точку $\xi=(b-a)/2$ и вычислим в ней значение функции $f(\xi)$. Если $f(\xi)=0$, то утверждение теоремы доказано: мы нашли на отрезке $[a,b]$ точку $c=\xi$, в которой функция $f(x)$ обращается в ноль. При $f(\xi)\neq 0$ поступим следующим образом: рассмотрим два отрезка $[a,\xi]$ и $[\xi,b]$ и выберем один из них, исходя из условия, чтобы функция $f(x)$ на его левом конце была отрицательной, на правом – положительной. Выбранный отрезок обозначим $\left[a_1, b_1\right]$. По построению

$$f(a_1) < 0,\ f(b_1) > 0.$$

Повторим описанную процедуру: возьмем на отрезке $\left[a_1, b_1\right]$ среднюю точку $\xi_1 = \left(b_1 - a_1\right)/2$ и вычислим в ней значение функции $f(\xi_1)$. Если $f(\xi_1) = 0$, то доказательство теоремы закончено. Если же $f(\xi_1) \neq 0$, то снова рассмотрим два отрезка $\left[a_1, \xi_1\right]$ и $\left[\xi_1, b_1\right]$ и выберем тот, на левом конце которого функция $f(x)$ отрицательна, на правом – положительна. Выбранный отрезок обозначим $\left[a_2, b_2\right]$. По построению

$$f(a_2) < 0,\ f(b_2) > 0.$$

Будем продолжать этот процесс. В результате он либо оборвется на некотором шаге n в силу того, что $f(\xi_n) = 0$, либо будет продолжаться неограниченно. В первом случае вопрос существования корня уравнения (1) решен, поэтому нам нужно рассмотреть второй случай. Неограниченное продолжение процесса дает последовательность отрезков $\left[a, b\right]$, $\left[a_1, b_1\right]$, $\left[a_2, b_2\right]$, … . Эти отрезки вложены друг в друга – каждый последующий отрезок принадлежит всем предыдущим:

$$a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n, \tag{3}$$

причем

$$f(a_n) < 0,\ f(b_n) > 0. \tag{4}$$

Длины отрезков с возрастанием номера n стремятся к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}\left(b_n - a_n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n} = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим левые концы отрезков $\left\{a_n\right\}$. Согласно (3) они образуют монотонно неубывающую ограниченную последовательность. Такая последовательность имеет предел, который мы обозначим через c_1:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c_1. \tag{6}$$

По теореме о переходе к пределу в неравенствах

$$c_1 \le b_n. \tag{7}$$

Теперь рассмотрим правые концы отрезков $\left\{b_n\right\}$. Они образуют монотонно невозрастающую ограниченную последовательность, которая тоже имеет предел. Обозначим этот предел через c_2:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = c_2. \tag{8}$$

Согласно соотношениям (3), (6), (7), (8) пределы c_1 и c_2 удовлетворяют неравенствам

$$a_n \le c_1 \le c_2 \le b_n,$$

и, следовательно,

$$c_2 - c_1 \le b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}. \tag{9}$$

Таким образом, разность $c_2 - c_1$ меньше любого наперед заданного числа. Это означает, что $c_2 - c_1 = 0$, т. е.

$$c_2 = c_1 = c. \tag{10}$$

Найденная точка c интересна тем, что она является единственной общей точкой для всех отрезков построенной последовательности. Используя непрерывность функции $f(x)$, докажем, что она является корнем уравнения (1).

Мы знаем, что $f(a_n) < 0$. Согласно определению непрерывной функции и возможности предельного перехода в неравенствах имеем

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f\left(a_n\right) \le 0. \tag{11}$$

Аналогично, учитывая, что $f(b_n) > 0$, получаем

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f\left(b_n\right) \ge 0. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует, что

$$f(c) = 0, \tag{13}$$

т. е. c – корень уравнения (1). Теорема доказана.

Процесс построения последовательности вложенных стягивающихся отрезков методом вилки является эффективным вычислительным алгоритмом решения уравнения (1). На n-ом шаге получаем

$$a_n \le c \le b_n. \tag{14}$$

Это двойное неравенство показывает, что число a_n определяет искомый корень c с недостатком, а число b_n - с избытком, с ошибкой, не превышающей длину отрезка $\left[a_n, b_n\right]$. При увеличении n ошибка стремится к нулю по закону геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1/2$. Если задана точность ε, то, чтобы ее достигнуть, достаточно сделать число шагов N,удовлетворяющее условию

$$N > \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}. \tag{15}$$

То, что процедура отыскания корня основана на многократном делении исходного отрезка пополам, оправдывает второе название метода – метод бисекции.

Теорема и метод ее доказательства сами по себе не позволяют определить общее число корней функции $f(x)$ на отрезке $\left[a,b\right]$. Однако, если функция $f(x)$ не только непрерывна, но и дифференцируема, то дополнительное ее исследование с помощью производной может во многих случаях решить и этот вопрос. Например, в случае знакоопределенной производной функция $f(x)$ является монотонной на отрезке $\left[a,b\right]$, так что корень у нее может быть только один.

Задача 1.

Рассмотреть на отрезке $\left[a,b\right]$ *уравнение*

$$f(x) = x - \cos x = 0. \tag{16}$$

Показать, что оно имеет единственный корень и найти его приближенное значение с помощью метода вилки.

В данном случае

$$f(0) = -1 < 0,\ f(1) = 1 - \cos 1 > 0, \tag{17}$$

$$f'(x) = 1 + \sin x > 0,\ \text{при}\ 0 \le x \le 1. \tag{18}$$

Неравенства (17) говорят о том, что уравнение (16) имеет корни. Условие монотонности функции $f(x)$ (18) означает, что корень единственный. Результаты, связанные с 12-кратным делением отрезка $[0,1]$ пополам даны в таблице 1. Они определяют корень с точностью $\varepsilon = (1/2)^{12} < 0.00025$. Искомый корень c принадлежит отрезку

$$[0.739013671875, 0.739257812500]$$

Отбрасывая знаки, лежащие за пределом достигнутой точности, получим

$$0.73901 < c < 0.73926$$

График функции (16), иллюстрирующий разобранный пример, приведен на рис. 1.

Таблица 1.

n	a_n	b_n	$\xi_n = (a_n + b_n)/2$	$f(\xi_n)$
0	0,000000000000	1,000000000000	0,500000000000	-0,377582561890
1	0,500000000000	1,000000000000	0,750000000000	0,018311131126
2	0,500000000000	0,750000000000	0,625000000000	-0,185963119505
3	0,625000000000	0,750000000000	0,687500000000	-0,085334946152
4	0,687500000000	0,750000000000	0,718750000000	-0,033879372418
5	0,718750000000	0,750000000000	0,734375000000	-0,007874725459
6	0,734375000000	0,750000000000	0,742187500000	0,005195711744
7	0,734375000000	0,742187500000	0,738281250000	-0,001345149752
8	0,738281250000	0,742187500000	0,740234375000	0,001923872781
9	0,738281250000	0,740234375000	0,739257812500	0,000289009147
10	0,738281250000	0,739257812500	0,738769531250	-0,000528158434
11	0,738769531250	0,739257812500	0,739013671875	-0,000119596671
12	0,739013671875	0,739257812500		

§2. Метод итераций (метод последовательных приближений).

В этом параграфе мы познакомимся еще с одним численным методом решения уравнений. Предположим, что уравнение можно записать в виде

$$x = \varphi(x). \tag{19}$$

Возьмем произвольную точку x_0 из области определения функции $\varphi(x)$ и будем строить последовательность чисел $\{x_n\}$, определенных с помощью рекуррентной формулы

$$x_{n+1} = \varphi(x_n). \tag{20}$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется итерационной последовательностью. При ее изучении встают два вопроса:

1. Можно ли процесс построения последовательности $\{x_n\}$ *продолжать неограниченно, т. е. будут ли эти числа принадлежать области определения функции* $\varphi(x)$*?*

2. Если итерационная последовательность (20) бесконечна, то как ведут себя ее члены при $n \to \infty$*?*

Ответ на оба вопроса дает следующая теорема.

Теорема о сходимости итерационной последовательности.
Пусть c *- корень уравнения (19) и пусть функция* $\varphi(x)$ *удовлетворяет на отрезке* $[c-\delta, c+\delta]$ *условию Липшица с константой* $L<1$

$$|y_2 - y_1| = |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \le L|x_2 - x_1|,\ L<1. \tag{21}$$

Тогда при любом выборе x_0 *на отрезке* $[c-\delta, c+\delta]$ *существует бесконечная итерационная последовательность* $\{x_n\}$ *(20), сходящаяся к корню уравнения (19)* $x=c$*. Этот корень является единственным на отрезке* $[c-\delta, c+\delta]$*.*

Напомним известный факт из математического анализа: выполнение условия Липшица (21) будет заведомо обеспечено, если предположить, что функция $\varphi(x)$ имеет на отрезке $[c-\delta, c+\delta]$ непрерывную производную, $\varphi'(x)$ модуль которой меньше единицы: $|\varphi'(x)| \le m < 1$. В этом случае согласно формуле конечных приращений Лагранжа будем иметь

$$|y_2 - y_1| = |\varphi'(\xi)(x_2 - x_1)| \le m|x_2 - x_1|. \tag{22}$$

Мы получили неравенство (21) с константой Липшица $L=m$.

После этого замечания перейдем к доказательству теоремы. Число c является корнем уравнения (19), так что $c=\varphi(c)$. Возьмем произвольную точку x_0 на отрезке $[c-\delta, c+\delta]$. Она отстоит от точки c не больше, чем на δ: $|x_0 - c| \le \delta$.

Вычислим $x_1 = \varphi(x_0)$. При этом будем иметь

$$|x_1 - c| = |\varphi(x_0) - \varphi(c)| \le L|x_0 - c| \le L\delta. \tag{23}$$

Неравенство (23) показывает, что точка x_1 принадлежит отрезку $[c-\delta, c+\delta]$ и расположена ближе к точке c чем x_0.

Продолжим построение итерационной последовательности. Вычислим $x_2 = \varphi(x_1)$. При этом

$$|x_2 - c| = |\varphi(x_1) - \varphi(c)| \le L|x_1 - c| \le L^2|x_0 - c| \le L^2\delta.$$

Точка x_2 тоже принадлежит отрезку $[c-\delta, c+\delta]$ и расположена ближе к точке c чем x_1. На второй итерации мы опять приблизились к c.

По индукции легко доказать, что все последующие итерации также существуют и удовлетворяют неравенствам

$$\left|x_n - c\right| \le L^n \left|x_0 - c\right| \le L^n \delta . \qquad (24)$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n - c\right) = 0 \text{, т. е. } \lim_{n\to\infty} x_n = c . \qquad (25)$$

Нам остается доказать, что корень $x = c$ является единственным решением уравнения (19) на отрезке $\left[c-\delta, c+\delta\right]$. Действительно, предположим, что существует еще один корень $x = c_1$

$$c_1 = \varphi\left(c_1\right),\ c-\delta \le c_1 \le c+\delta . \qquad (26)$$

Примем c_1 за нулевое приближение и будем строить итерационную последовательность (20). С учетом (26) получим $x_n = c_1$, $n = 0,1,2,\ldots$ С другой стороны, по доказанному $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, т. е. $c_1 = c$. Никаких других решений, кроме $x = c$, уравнение (19) на рассматриваемом отрезке не имеет.

Доказанная теорема имеет простой смысл. Будем говорить, что функция $\varphi\left(x\right)$ осуществляет отображение точки x отрезка $\left[c-\delta, c+\delta\right]$ на точку $y = \varphi\left(x\right)$. Рассмотрим пару точек x_1, x_2 и их образы y_1, y_2.Условие Липшица (21) приводит к тому, что расстояние между образами оказывается меньше расстояния между исходными точками, т. е. отображение $y = \varphi\left(x\right)$ является сжимающим. Корень c - неподвижная точка отображения: $c = \varphi\left(c\right)$. В результате каждый шаг в итерационном процессе, сжимая расстояние, приближает очередную итерацию к корню.

Центральная идея метода итераций – сжимающие отображения – является весьма общей. Например, одно из доказательств теоремы существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений основано на методе последовательных приближений в условиях, когда действует принцип сжимающих отображений. Для многих сложных нелинейных задач принцип сжимающих отображений оказывается основным методом исследования.

Задача 2.

Записать уравнение (16) в виде

$$x = \cos x , \qquad (27)$$

и найти приближенное значение его корня методом итераций.

В данном случае

$$\varphi\left(x\right) = \cos x,\ \varphi'\left(x\right) = -\sin x .$$

На отрезке $\left[0,1\right]$, на котором расположен корень уравнения (27), для модуля производной справедлива оценка

$$\left|\varphi'\left(x\right)\right| \le \sin 1 < 0.85$$

Она обеспечивает выполнение условия Липшица с константой Липшица $L = 0.85$.

Результаты вычислений по рекуррентной формуле

$$x_{n+1} = \cos x_n$$

даны в таблице 2. За нулевое приближение выбрана средняя точка отрезка $x_0 = 0.5$. Для удобства анализа итерационной последовательности ее члены расположены по два в строке. В результате образовались столбцы членов с четными и нечетными номерами. Сравнивая их между собой, мы видим, что четные члены меньше нечетных: итерационная последовательность «скачет» то вверх, то вниз. С возрастанием номера четные члены последовательности возрастают, а нечетные убывают, приближаясь друг к другу. Такое поведение последовательности означает, что корень уравнения лежит между ними. Четные члены дают его значение с недостатком, нечетные – с избытком. Это позволяет легко контролировать точность, достигнутую после любого числа итераций: погрешность не превышает разности между последним нечетным и четным членами. Мы остановили процесс вычислений на 19-ой итерации и можем написать для корня c двойное неравенство

$$x_{18} = 0.738912449332 < c < x_{19} = 0.739201444135$$

или, отбрасывая лишние десятичные знаки,

$$0.73891 < c < 0.73921.$$

Таким образом, члены итерационной последовательности x_{18} и x_{19} определяют c с недостатком и с избытком с погрешностью, которая не превышает разности $x_{19} - x_{18}$:

$$\varepsilon < \Delta_{19} = x_{19} - x_{18} < 0.0003.$$

Точность, которой мы достигли после 19 итераций, примерно соответствует точности 12 шагов метода вилки. Причина такого различия ясна. В обоих методах погрешность убывает по закону геометрической прогрессии. Для метода вилки знаменатель прогрессии равен 1/2. Он не зависит от вида функции $f(x)$. Для метода итераций знаменатель прогрессии равен константе Липшица. В рассматриваемом примере $L = 0.85$. Поэтому скорость сходимости метода итераций медленнее скорости сходимости метода вилки. Метод итераций имеет преимущество перед методом вилки в скорости сходимости только при $L < 1/2$.

Таблица 2

n	x_{2n}	x_{2n+1}
0	0,500000000000	0,877582561890
1	0,639012494165	0,802685100682
2	0,694778026788	0,768195831282
3	0,719165445942	0,752355759422
4	0,730081063138	0,745120341351
5	0,735006309015	0,741826522643
6	0,737235725442	0,740329651878
7	0,738246238332	0,739649962770
8	0,738704539357	0,739341452281
9	0,738912449332	0,739201444136

§3. Метод касательных (метод Ньютона).

Метод касательных, связанный с именем Ньютона, является одним из наиболее эффективных численных методов решения уравнений. Идея метода очень проста. Предположим, что функция $f(x)$, имеющая корень c на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на этом отрезке и ее производная $f'(x)$ не обращается на нем в ноль. Возьмем произвольную точку $x_0 \in [a,b]$ и запишем уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в этой точке

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (28)$$

График функции $f(x)$ и ее касательной близки около точки касания, поэтому естественно ожидать, что точка x_1 пересечения касательной с осью x будет расположена недалеко от корня c (см. рис. 2). Для определения точки x_1 имеем уравнение

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0,$$

согласно которому

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Повторим проделанную процедуру: напишем уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_1 и найдем для нее точку пересечения x_2 с осью x (см. рис. 2):

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Продолжая этот процесс, получим последовательность $\{x_n\}$, определенную с помощью рекуррентной формулы

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (29)$$

При ее исследовании, как и при исследовании последовательности (20) метода итераций, встают два вопроса:

1. Можно ли процесс вычисления чисел $\{x_n\}$ по рекуррентной формуле (29) продолжать неограниченно, т. е. будут ли эти числа принадлежать отрезку $[a,b]$?

2. Если процесс (29) бесконечен, то как ведет себя последовательность $\{x_n\}$ при $n \to \infty$?

При анализе этих вопросов предположим, что корень $x = c$ является внутренней точкой отрезка $[a,b]$, а функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на данном отрезке, причем ее производные удовлетворяют неравенствам

$$|f'(x)| \ge m > 0, \; |f''(x)| \le M, \; x \in [a,b]. \qquad (30)$$

Следует обратить внимание на то, что в неравенствах (30) величина m дает оценку модуля первой производной $f'(x)$ снизу, а величина M оценку модуля второй производной $f''(x)$ сверху.

Теорема о сходимости метода касательных.
Если функция $f(x)$ удовлетворяет сформулированным условиям, то найдется такое δ: $0<\delta\le\min(c-a,b-c)$, что при любом выборе начального приближения x_0 на отрезке $\left[c-\delta,c+\delta\right]\subset\left[a,b\right]$ существует бесконечная итерационная последовательность (29) и эта последовательность сходится к корню c.

В силу предположения о дифференцируемости функции $f(x)$ и неравенстве нулю ее производной, уравнение (1) эквивалентно на отрезке $\left[a,b\right]$ уравнению

$$x=\varphi\left(x\right),\text{ где }\varphi\left(x\right)=x-\frac{f\left(x\right)}{f'\left(x\right)},\tag{31}$$

так что корень $x=c$ исходного уравнения является одновременно корнем уравнения (31). Исследуем возможность отыскания этого корня с помощью метода итераций.

Вычислим и оценим производную функции $\varphi\left(x\right)$ (31):

$$\varphi'\left(x\right)=1-\frac{\left(f'\left(x\right)\right)^2-f\left(x\right)f''\left(x\right)}{\left(f'\left(x\right)\right)^2}=\frac{f\left(x\right)f''\left(x\right)}{\left(f'\left(x\right)\right)^2},\tag{32}$$

$$\left|\varphi'\left(x\right)\right|\le\frac{M}{m^2}\left|f\left(x\right)\right|.\tag{33}$$

Теперь воспользуемся непрерывностью функции $f(x)$ и ее равенством нулю в точке $x=c$. Возьмем $\varepsilon=m^2/\left(2M\right)$. Для данного ε можно указать такое δ: $0<\delta\le\min(c-a,b-c)$, что для всех $x\in\left[c-\delta,c+\delta\right]$ выполняется неравенство

$$\left|f\left(x\right)-f\left(c\right)\right|=\left|f\left(x\right)\right|\le\varepsilon=\frac{m^2}{2M}.\tag{34}$$

Учитывая это, получим окончательную оценку производной

$$\left|\varphi'\left(x\right)\right|\le\frac{1}{2},\ c-\delta\le x\le c+\delta.\tag{35}$$

В соответствии с результатами предыдущего параграфа, неравенство (35) означает, что уравнение (31) можно решать методом итераций: при любом выборе нулевого приближения на отрезке $\left[c-\delta,c+\delta\right]$ существует бесконечная последовательность (20), сходящаяся к корню $x=c$. Нам остается только заметить, что итерационной последовательностью для уравнения (31) является последовательность (29) метода касательных.

Требование близости нулевого приближения к искомому корню $x=c$ является существенным для метода касательных. На рис. 3 изображен график той же функции $f(x)$, что и на рис. 2, однако x_0 выбрано дальше от корня $x=c$, чем в первом случае. В результате после первого шага получается точка x_1, которая не принадлежит исходному отрезку $[a,b]$ и процесс построения рекуррентной последовательности обрывается. Таким образом, для правильного выбора нулевого приближения нужно еще до начала расчетов знать область локализации искомого корня $x = c$. В случае необходимости ее можно уточнить с помощью нескольких шагов по методу вилки. Затруднения, связанные с предварительным исследованием уравнения, вполне окупаются высокой скоростью сходимости метода касательных.

Задача 3.

Найти приближенное значение корня уравнения (16) методом касательных.

Рекуррентная формула метода касательных принимает в данном случае вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n}. \qquad (36)$$

Выберем, как и для метода итераций, в качестве нулевого приближения $x_0 = 0.5$ и подсчитаем следующие приближения. Результаты вычислений приведены в таблице 3. Мы видим, что, начиная с номера $n = 1$, последовательность убывает, приближаясь к корню $x = c$ сверху. После четвертого шага процесс «останавливается»: пятая итерация дает тот же результат. Причина этого явления заключается в следующем. Расчеты ведутся с 12 десятичными знаками. Когда погрешность оказывается меньше 10^{-12}, становится невозможно уловить разницу между x_n и x_{n+1}, лежащую за пределами ошибки округления.

Таблица 3.

n	x_n
0	0,500000000000
1	0,755222417106
2	0,739141666150
3	0,739085133921
4	0,739085133215
5	0,739085133215

Приведенный пример показывает очень высокую скорость сходимости метода Ньютона. После двух шагов мы достигли точности 10^{-4}. Это лучше результатов, которые мы имели в методе вилки на девятом шаге, в методе итераций – на девятнадцатом. После четырех шагов погрешность в определении корня составила 10^{-12}.

Задача 4.

Рассмотреть вычисление $\sqrt{a}$ как задачу решения уравнения

$$x^2 - a = 0 \qquad (37)$$

в области $x > 0$. Написать для вычисления корня уравнения (37) $x = \sqrt{a}$ итерационную последовательность по методу касательных. Вычислить с ее помощью $\sqrt{2}$.

Рекуррентная формула метода касательных (29) для уравнения (37) принимает вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{\ 2} - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right). \tag{38}$$

Она определяет монотонно убывающую последовательность, сходящуюся к $\sqrt{a}$ сверху.

Перейдем ко второй части задания. Напомним, что $\sqrt{2} \approx 1.414214$. Выбирая $x_0 = 2$, сделаем несколько итераций по формуле (38):

$$x_0 = 2,$$
$$x_1 = 1.5,$$
$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = 1.416666,$$
$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right) = 1.414216.$$

Третья итерация определяет $\sqrt{2}$ с погрешностью $\Delta = \sqrt{2} - x_3 =$ -0.000002.Расчет по формуле (38) много проще вычисления $\sqrt{a}$ по школьному алгоритму последовательного определения десятичных знаков.

§4. Заключительные замечания

Мы познакомились с тремя методами численного решения уравнений, наряду с ними существуют еще несколько методов, на которых мы не останавливались. Ситуация, когда одну и ту же математическую задачу можно решать с помощью разных методов, является довольно типичной. В таких случаях естественно возникает необходимость сравнения их между собой.

При оценке эффективности численных методов существенное значение имеют различные свойства:

1. Универсальность.
2. Простота организации вычислительного процесса и контроля точности.
3. Скорость сходимости.

Посмотрим с этой точки зрения на разобранные методы решения уравнений.

1. Наиболее универсальным является метод вилки: он требует только непрерывности функции $f(x)$. Два других метода накладывают более жесткие ограничения. Во многих случаях это преимущество метода вилки может иметь существенное значение.

2. С точки зрения организации вычислительного процесса все три метода очень просты. Однако и здесь метод вилки обладает определенными преимуществами. Вычисления можно начинать с любого отрезка $\left[a,b\right]$, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения разных знаков. Процесс будет сходиться к корню уравнения, причем на каждом шаге он дает двухстороннюю оценку, по которой легко контролировать достигнутую точность. Сходимость же метода итераций и касательных зависит от того, насколько удачно выбрано нулевое приближение.

3. Наибольшей скоростью сходимости обладает метод касательных. В случае, когда подсчет значений функции $f(x)$ сложен и требует существенных затрат машинного времени, это преимущество становится определяющим.

Итак, мы видим, что ответ на вопрос о наилучшем численном методе решения уравнений не однозначен. Он существенно зависит от того, какую дополнительную информацию о функции $f(x)$ мы имеем и, в соответствии с этим, каким свойствам метода придаем наибольшее значение.