ГЛАВА 3

1 Интерполирование полиномами. Интерполяционная формула Лагранжа

Задача: на $[a,b]$ опр-на $f(x)$, но нам известны лишь значения $x_0, x_1 \ldots x_n$ на $[a,b]$ $(a \le x_0 < x_1 \ldots < x_i < x_{i+1} < x_n \le b)$ нужно по $x_0 \ldots x_n$ построить $F(x)$ близкую к $f(x)$.

$F(x)$ – интерполирующая

$x_0 \ldots x_n$ – узлы интерполяции

Выбираем систему ф-ций $\varphi_0(x), \varphi_1(x) \ldots \varphi_n(x)$ на $[a,b]$

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x), \quad i=\overline{1,n}, \text{ причем } F(x_j) = f(x_j) \quad j=\overline{0,n}$$

т.е.
$$\begin{cases} c_0\varphi_0(x_0) + c_1\varphi_1(x_0) + \ldots + c_n\varphi_n(x_0) = f(x_0) \\ \ldots \\ c_0\varphi_0(x_n) + c_1\varphi_1(x_n) + \ldots + c_n\varphi_n(x_n) = f(x_n) \end{cases} \quad (*)$$

поиск φ – решение линейной системы при условии $|(*)| \ne 0$

Система $\varphi_i(x)$ $i=\overline{0,n}$ при фиксир. x_j, $j=\overline{0,n}$ $|(*)| \ne 0$ – чебышевская.

Интерполирование полиномами:

$$\varphi_0(x)=1, \ \varphi_1(x)=x, \ \varphi_2(x)=x^2, \ \ldots, \ \varphi_n(x)=x^n$$

т.е. $F(x) = P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$, $i=\overline{0,n}$

причём $\sum_{i=0}^{n} c_i x_j^i = f(x_j)$ $j=\overline{0,n}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j) \ne 0$$

определитель Вандермонда

т.к. $x_i \ne x_j$ $(i \ne j)$ $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,n}$

Пример:
$$\begin{cases} f(x) = c_0 + c_1 x \\ x_0 < x_1 \\ y_0 = f(x_0) \\ y_1 = f(x_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 + c_1 x_0 = f(x_0) \\ c_0 + c_1 x_1 = f(x_1) \end{cases} \Rightarrow c_0 = \frac{x_1 f(x_0) - x_0 f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

$$c_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\Rightarrow y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Лагранж

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, Q_{n,i}(x)$$

Причем $Q_{n,i}(x) = \begin{cases} 0 & x = x_j \\ 1 & x = x_i \end{cases} \quad \forall j \neq i$

$$Q_{n,i} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{j=n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$\begin{cases} Q_{n,0}(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} \\ \ldots \\ Q_{n,n}(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})} \end{cases}$$

интерполяционный полином в форме Лагранжа

Итак: $Q_{n,i}(x) = \dfrac{(x-x_0)\ldots[i]\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots[i]\ldots(x_i-x_n)}$

пример: $\begin{cases} y = \sin x \\ x_0 = 0 \\ x_1 = \pi/6 \\ x_2 = \pi/2 \end{cases}$

$$P(x) = \frac{1}{2}\,\frac{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{6}\left(-\frac{\pi}{3}\right)} + \frac{x\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{3}\right)} =$$

$$= \frac{x}{\pi^2}\left(\frac{7\pi}{2} - 3x\right)$$

② Погрешность интерполяционного полинома

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x), \quad x \in [a,b]$$

причем $R_n(x_i) = 0$, $i = 0, 1 \dots n$

Попробуем оценить при $x \neq x_i$. Допускаем, что $f(x)$ имеет $(n+1)$ непрерывную производную на $[a,b]$.

тогда $R_n(x) = \omega_{n+1}(x)\, r_n(x)$

$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$

Строим $g(t) = f(t) - P_n(t) - \omega_{n+1}(t)\, r_n(x)$ (фиксируем $x \in [a,b]$)

$$\left.\begin{array}{l} g(x_i) = 0 \quad i = 0 \dots n \\ g(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{n+2} \text{ нуля}$$

$$\left.\begin{array}{lll} x \in [x_0, x_n] & \Rightarrow & \text{нули на } [x_0, x_n] \\ x < x_0 & \Rightarrow & \text{—''— } [x, x_n] \\ x > x_n & & \text{—''— } [x_0, x] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ нули $g(t) \in [\alpha, \beta]$ $\quad \alpha = \min(x_0, x) \geq a$, $\quad \beta = \max(x_n, x) \leq b$

по Роллю $g'(t)$ имеет $\underline{n+1}$ нуль на $[\alpha, \beta]$

$\dots$

$g^{(n+1)}(t)$ имеет хотя бы один нуль на $[\alpha, \beta]$

ξ – фиксир. t. $\quad g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \underset{\overset{\parallel}{0}}{P_n^{(n+1)}(\xi)} - (n+1)!\, r_n(x) = 0$

$$\Rightarrow r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Rightarrow R_n(x) = \omega_{n+1}(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

если $x \in [x_0, x_n]$ – собственная интерполяция, иначе экстраполяция

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$$

$$M_{n+1} = \max_{x \in [\alpha, \beta]} |f^{(n+1)}(x)| \leq \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

3) Интерполирование с кратными узлами. Полиномы Эрмита.

$x_k \in [a,b]$
$k = 0,1..,m$ — несовпадающих

$f(x_k) \Rightarrow f^{(i)}(x_k)$ $\quad i = 1,2,..N_k - 1$, — кратность узла x_k.

в каждой точке $f(x_k), f'(x_k) \dots f^{(N_k-1)}(x_k)$

то есть на $x_0 \dots x_m$ известно $N_0 + N_1 + \dots + N_m \Rightarrow$

$$\deg(H_n(x)) = n = N_0 + \dots + N_m - 1$$

т.ч.: $H_n^{(i)}(x_k) = f^{(i)}(x_k)$, $k = 0,1 \dots m$, $i = 0,1 \dots N_k - 1$

полином Эрмита
Лагранж — частный случай

$\exists!$: $H_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ ← нужно найти a_i, $i = \overline{0,n}$

число уравнений = числу неизвестных

$$n+1 = N_0 + \dots + N_m$$

$\Rightarrow$ рассмотрим систему $\overline{H}_n^{(i)}(x_k) = 0$, $k = 0,1 \dots m$, $i = 0,1 \dots N_k - 1$

$\overline{H}_n(x)$ имеет $\geq n+1 = N_0 + \dots + N_m$ корней
но $\deg \overline{H}_n(x) = n \Rightarrow \overline{H}_n(x) = 0$

Погрешность также как в Лагранже $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)^{N_0} \dots (x-x_m)^{N_m}$

Пример: $f(x_k) = f_k$ $\quad k = 0, 1 \ldots m$

$f'(x_j) = f'_j \quad x = x_j$

Построить полином.

$\deg H_m(x) = m+1$

лагранж + доп. мн-ль

$$H_{m+1}(x) = \sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{m} f_k \frac{(x-x_0)\ldots[k]\ldots(x-x_m)}{(x_k-x_0)\ldots[k]\ldots(x_k-x_m)}\left(\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right)$$

$$+\left[f_j + \alpha_j(x-x_j)\right]\frac{(x-x_0)\ldots[j]\ldots(x-x_m)}{(x_j-x_0)\ldots[j]\ldots(x_j-x_m)}$$

$$H'_{m+1}(x_j) = \underbrace{f_j\left(\frac{1}{x_j-x_0}+\ldots+\frac{1}{x_j-x_{j-1}}+\frac{1}{x_j-x_{j+1}}+\ldots+\frac{1}{x_j-x_m}\right)}_{(*)}+\alpha_j$$

но $H'_{m+1}(x_j) = f'_j \Rightarrow \alpha_j = f'_j - (*)$

т.е. $$H_{m+1}(x) = \sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{m} f_k \frac{(x-x_0)\ldots[k]\ldots(x-x_m)}{(x_k-x_0)\ldots[k]\ldots(x_k-x_m)}\left(\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right)+$$

$$+\left[f_j + (f'_j - (*))(x-x_j)\right]\frac{(x-x_0)\ldots[j]\ldots(x-x_m)}{(x_j-x_0)\ldots[j]\ldots(x_j-x_m)}$$

4 Интерполирование сплайнами.

Пусть на $[a,b]$ задана функция $y=f(x)$. Рассмотрим

$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b \quad (*)$$

$$h_i=x_i-x_{i-1},\ i=1\dots n$$

Опр. кубическим сплайном функции $y=f(x)$ $x\in[a,b]$ с сеткой $(*)$ функцию $S(x)$:

1) На каждом $[x_{i-1},x_i]$ $S(x)$ полином 3й степени
2) $S(x), S'(x), S''(x)$ непрерывны на $[a,b]$
3) $S(x_i)=f(x_i)$, $i=0..n$
4) $S''(a)=S''(b)=0$

Теорема: $\exists!\, S(x)$

Д-во: $\forall [x_{i-1},x_i]: S_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+\frac{c_i}{2}(x-x_i)^2+\frac{d_i}{6}(x-x_i)^3$

$i=\overline{1,n}$

$$S_i'(x)=b_i+c_i(x-x_i)+\frac{d_i}{2}(x-x_i)^2$$

$$S_i''(x)=c_i+d_i(x-x_i)$$

т.е. $S_i(x_i)=a_i$; $S_i'(x_i)=b_i$; $S_i''(x_i)=c_i$

$\Rightarrow a_i=f(x_i)$: $i=\overline{1,n}$ ✓

3 условие $S_i(x_{i-1})=f_{i-1}$: $f_i+b_i(\underbrace{x_{i-1}-x_i}_{h})+\frac{c_i}{2}(\underbrace{x_{i-1}-x_i}_{h})^2+\frac{d_i}{6}(\underbrace{x_{i-1}-x_i}_{h})^3=f_{i-1}$ $i=\overline{1,n}$

или. $\boxed{b_ih_i+\frac{c_i}{2}h_i^2+\frac{d_i}{6}h^3=f_{i-1}-f_i}$ + условие 2: $S'(x)$ непр. в x_i ✓

$S_i'(x_{i-1})=S_{i-1}'(x_{i-1})=b_{i-1}$ $\Rightarrow c_ih_i-\frac{d_i}{2}h_i^2=b_i-b_{i-1}$ $i=\overline{2,n}$

аналогично $S_i''(x_{i-1})=S_{i-1}'(x_{i-1})=c_{i-1}$ $i=\overline{2,n}$ $\Rightarrow d_ih_i=c_i-c_{i-1}$ ✓

$$\begin{cases} S''_1(x_0) = S''_1(a) = c_1 - d_1 h_1 = 0 \\ S''_n(x_n) = S''_n(b) = c_n = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $3n$ уравнений для $3n$ неизвестных $b_i\, c_i\, d_i$, $i=\overline{1,n}$

Сх-ть:

$\underline{\text{Т.1}}$ $f(x)$ непр-на на $[a,b]$:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : h < \delta : |f(x) - S(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b]$

$\underline{\text{Т.2}}$ $f(x)$ на $[a,b]$ 4 непр производных и $f''(a) = f''(b) = 0$:

$$\left.\begin{aligned} |f(x) - S(x)| &\le M_4 h^4 \\ |f'(x) - S'(x)| &\le M_4 h^3 \\ |f''(x) - S''(x)| &\le M_4 h^2 \end{aligned}\right\} \forall x \in [a,b]$$

$$M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

5 Метод наименьших квадратов

1) Число узлов велико.
2) Значения y_i в x_i приближенно

$F(x)$ - аппроксимирует $y(x)$, т.е.

$$F(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k(x) \quad m \ll n$$

δ_i - погрешность:

$$\delta_i = y_i - F(x_i) = y_i - \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k(x_i) \; (i = \overline{0,n})$$

суммарная квадратичная погрешность:

$$J = \sum_{i=0}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i - \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k(x_i)\right)^2$$

ищем набор a_k т.ч. J minimal.

$\Rightarrow$ поиск экстремума для ф-ции нескольких переменных

$$\frac{\partial J}{\partial a_l} = -2 \sum_{i=0}^{n} \left(y_i - \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k(x_i)\right) \varphi_l(x_i) = 0 \quad l = \overline{0,m}$$

$\Downarrow$

$$\sum_{k=0}^{m} \gamma_{lk} a_k = b_l \quad l = \overline{0,m} \quad : \gamma_{lk} = \sum_{i=0}^{n} \varphi_l(x_i) \varphi_k(x_i)$$

$$b_l = \sum_{i=0}^{n} \varphi_l(x_i) y_i$$

$\Rightarrow$ СЛАУ $a_0, \dots a_m$ размерности $m+1$

матрица коэфф-тов Γ из γ_{lk} - матрица Грама

если $\det \Gamma \neq 0 \Rightarrow \exists!$ решение $\overline{a_0}, \dots \overline{a_m}$

-9- $\bar{a}_0, \ldots \bar{a}_m$ - решении
$a_0, \ldots a_m$ - любой другой набор коэф.

$$a_0 = \bar{a}_0 + \Delta a_0 \quad \ldots \quad a_m = \bar{a}_m + \Delta a_m$$

$$(\Delta a_0)^2 + (\Delta a_1)^2 + \ldots + (\Delta a_m)^2 > 0$$

$$\delta_i^2 = \left(y_i - \sum_{k=0}^{m} (\bar{a}_k + \Delta a_k) \varphi_k(x_i) \right)^2 =$$

$$= \left((y_i) - \sum_{k=0}^{m} \bar{a}_k \varphi_k(x_i) - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \Delta a_k \varphi_k(x_i)}_{*} \right)^2 =$$

$$= \left(y_i - \sum_{k=0}^{m} \bar{a}_k \varphi_k(x_i) \right)^2 - 2 \left(y_i - \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \varphi_k(x_i) \right)(*) - (*)^2$$

$$-2 \sum_{i=0}^{n} \left(\left(y_i - \sum_{k=0}^{m} \bar{a}_k \varphi_k(x_i) \right) \left(\sum_{l=0}^{m} \Delta a_l \varphi_l(x_i) \right) \right) =$$

$$= -2 \sum_{l=0}^{m} \Delta a_l \left(\sum_{i=0}^{n} y_i \varphi_l(x_i) - \sum_{k=0}^{m} \bar{a}_k \sum_{i=0}^{n} \varphi_k(x_i) \varphi_l(x_i) \right) =$$

$$= -2 \sum_{l=0}^{m} \Delta a_l \left(b_l - \sum_{k=0}^{m} \bar{a}_k \gamma_{lk} \right) = 0$$

$$\Rightarrow J(\bar{a}_0 + \Delta a_0, \bar{a}_1 + \Delta a_1 \ldots \bar{a}_m + \Delta a_m) =$$

$$= J(\bar{a}_0, \bar{a}_1 \ldots \bar{a}_m) + \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{m} \Delta a_k \varphi_k(x_i) \right)^2 > J(\bar{a}_0, \ldots \bar{a}_m)$$

Пример.

i	x_i	y_i
0	0,0	0,95
1	0,5	1,54
2	1,0	2,04
3	1,5	2,46
4	2,0	2,95

$F(x) = a_0 + a_1(x)$

$n = 4$

$m = 1$

$\varphi_0(x) = 1$

$\varphi_1(x) = x$

$$\gamma_{0,0} = \sum_{i=0}^{4} \varphi_0(x_i)\,\varphi_0(x_i) = 1+1+1+1+1 = 5$$

$$\gamma_{0,1} = \gamma_{1,0} = \sum_{i=0}^{4} \varphi_0(x_i)\,\varphi_1(x_i) = 0\cdot 1 + 0,5 + 1 + 1,5 + 2 = 5$$

$$\gamma_{1,1} = \sum_{i=0}^{4} \varphi_1(x_i)\,\varphi_1(x_i) = 0,25 + 1 + 2,25 + 4 = 7,5$$

$$b_0 = \sum_{i=0}^{4} \varphi_0(x_i)\,y_i = 0,95 + 1,54 + 2,04 + 2,46 + 2,95 = 9,94$$

$$b_1 = \sum_{i=0}^{4} \varphi_1(x_i)\,y_i = 0,5\cdot 1,54 + 2,04 + 1,5\cdot 2,46 + 2\cdot 2,95 = 12,4$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 9,94 \\ 5 & 7,5 & 12,4 \end{array}\right] \Rightarrow F(x) = 1,004 + 0,984x$$

6 Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона. Сходимость

x_i – узлы,

весовые множители, веса

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) + R_n$$

погрешность, остаточный член

c_i подбираются так, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ или

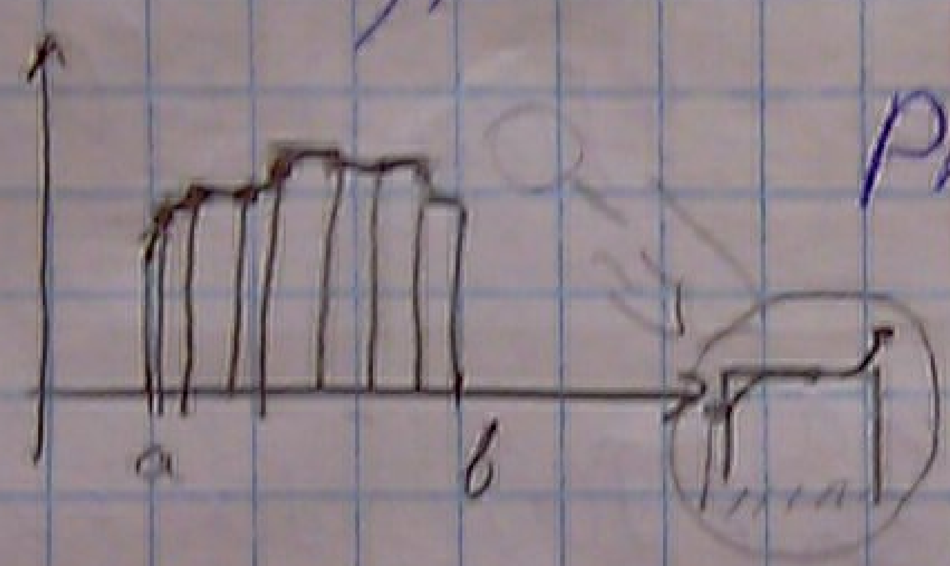
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) = I \quad \text{– сходимость}$$

ГЛАВА 4

P_n **Прямоугольники:** $[a,b]$ разбиваем на n отрезков

$h = \frac{b-a}{n}$ длины; $x_i = a + ih$, $0 \le i \le n$

$\xi_i = a + (i - \frac{1}{2})h$ – средние точки



$$P_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$$

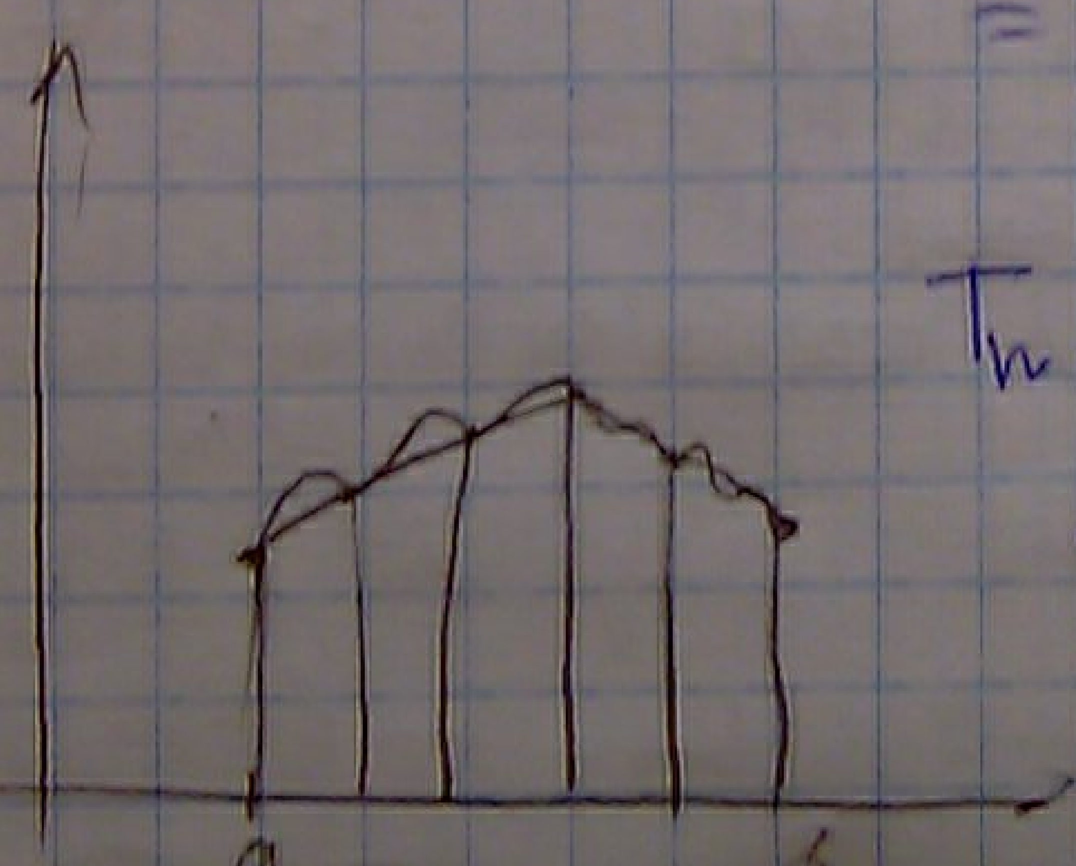
$$I = P_n + \alpha_n$$

T_n **Трапеции:** $g_n(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}(x - x_{i-1})$

$x \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \le i \le n$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_n(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}(x - x_{i-1}) \right) dx =$$

$$= \frac{h}{2}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) \Rightarrow$$



$$T_n = \int_a^b g_n(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g_n(x)\,dx =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2} f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(b)\right)$$

S_n Симпсон: n-четно, группируем по парам

$[a, x_1], [x_1, x_2]; \; [x_2, x_3], [x_3; x_4]; \ldots$

$\forall \, [x_{2j-2}, x_{2j}]$ строим интерполяционный многочлен Лагранжа 2-й степени

$$g_n(x) = f(x_{2j-2}) \frac{(x - x_{2j-1})(x - x_{2j})}{2h^2} +$$

$$+ f(x_{2j-1}) \frac{(x - x_{2j-2})(x - x_{2j})}{(-h^2)} +$$

$$+ f(x_{2j}) \frac{(x - x_{2j-2})(x - x_{2j-1})}{2h^2}$$

$$x \in [x_{2j-2}, x_{2j}], \quad 1 \le j \le n/2$$

$$\int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} g_n(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})\right)$$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n/2} \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} g_n(x)\,dx = \frac{b-a}{3n}\left(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) \ldots f(b)\right) \quad (*)$$

$$\boxed{S_n = \frac{4}{3} T_n - \frac{1}{3} T_{n/2}}$$

S_n, T_n - интегральная сумма

Разбиваем на $n+1$ точек $+ \, a, b$:

$\eta_0 = a \qquad \eta_{2j-1} = x_{2j-1} - 2h/3 \qquad 1 \le j \le n/2$

$\eta_{n+1} = b \qquad \eta_{2j} = x_{2j-1} + 2h/3$

$\Rightarrow [\eta_{i-1}, \eta_i] \qquad 1 \le i \le n+1$

длина $[a, \eta_1]$ и $[\eta_n, b]$ $h/3$, отрезки, где внутри чётные $2h/3$, нечётные $4h/3$

$\Rightarrow$ интегральная сумма в виде $(*)$

т.к. P_n, T_n, S_n - интегральные суммы, то все сходятся

7 Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона. Исследование остаточных членов.

прямоугольник и трапеция:

Из прямоуг: $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = f(\xi_i)h + \frac{h^3}{24} f''(\eta_i^*)$ $\quad \eta_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $\eta_i^{**} \in [x_{i-1}, x_i]$

МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА:

трап: $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} - \frac{h^3}{12} f''(\eta_i^{**})$

Суммируем $\Rightarrow \alpha_{прям} = \frac{h^3}{24} \sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i^*) = \frac{h^2}{24}\left(h \sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i^*)\right)$

$\beta_{трапец} = \frac{-h^3}{12} \sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i^{**}) = \frac{-h^2}{12}\left(h \sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i^{**})\right)$

$f''(x)$ – непрерывна $\Rightarrow$ интегрируема по $[a,b]$:

$$\lim_{n\to\infty} h \sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i^*) = \int_a^b f''(x)dx = f'(b) - f'(a)$$

$$\lim_{n\to\infty} h \sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i^{**}) = \int_a^b f''(x)dx = f'(b) - f'(a)$$

$\Rightarrow \alpha_n = \frac{1}{n^2}(A + \mu_n) \qquad \beta_n = \frac{1}{n^2}(B + \nu_n)$

$A = \frac{(b-a)^2}{24}(f'(b) - f'(a)) \qquad B = -\frac{(b-a)^2}{12}(f'(b) - f'(a))$

$\mu_n = \frac{(b-a)^2}{24}\underbrace{\left(h\sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i^*) - \int_a^b f''(x)dx\right)}_{(*)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \nu_n = -\frac{(b-a)^2}{12}(*) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Лемма $x_i, \eta \in [a,b]$: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) = \varphi(\eta)$ // непрерывна, т.е. $\alpha_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\eta^*)$

$\beta_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\eta^{**})$

и если M_2 – max, то $\alpha_n \le (b-a)^3 M_2$ -"- -"- -"-

Симпсон: 4 раза непрерывно дифференцируемая $f(x)$

$n/2 -$ [illegible]

Рассмотрим отрезок, длины $2h$, внутри $[x_{2j-2}, x_{2j}]$

$1 \le j \le n/2$

$$\int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})\right) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta_j)$$

Из математического анализа: $\Rightarrow$

$$\gamma_n = -\frac{h^5}{90}\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\eta_j) = -\frac{h^4}{180}\left(2h\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\eta_j)\right)$$

$\int_a^b f^{(4)}(x)\,dx$ – непр-на $\Rightarrow$ интегрируема.

$$\lim_{n\to\infty} 2h\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\eta_j) = \int_a^b f^{(4)}(x)\,dx = f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)$$

$$\Rightarrow \gamma_4 = \frac{1}{h^4}\Bigg(\underbrace{-\frac{(b-a)^4}{180}\left(f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)\right)}_{C} +$$

$$+ \underbrace{\left(-\frac{(b-a)^4}{180}\left(2h\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\eta_j) - \int_a^b f^{(4)}(x)\,dx\right)\right)}_{\sigma_n}\Bigg)$$

$$\sigma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

8 Апостериорная оценка погрешности и повышение точности квадратурных формул по результатам расчетов с разными шагами.

Прямоугольник: n-четное, посчитали $P_{n/2}$ и P_n

$$I = P_{n/2} + \frac{4}{n^2}(A + \mu_{n/2}) \qquad I = P_n + \frac{1}{n^2}(A + \mu_n)$$

$$\Rightarrow \quad (P_{n/2} - P_n) + \frac{3}{n^2}A + \frac{1}{n^2}(4\mu_{n/2} - \mu_n) = 0$$

$$\alpha_n = \frac{1}{n^2}(A + \mu_n) = \underbrace{\frac{1}{3}(P_n - P_{n/2})}_{\text{известно}} + \underbrace{\frac{4}{3n^2}(\mu_n - \mu_{n/2})}_{\text{б.м.}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_n = \frac{1}{3}(P_n - P_{n/2})}$$

Трапеция: $\beta_n = \underline{\frac{1}{3}(T_n - T_{n/2})} + \underline{\frac{4}{3n^2}(\nu_n - \nu_{n/2})} \approx \frac{1}{3}(T_n - T_{n/2})$

Симпсон: $\gamma_n = \frac{1}{n^4}(C + \delta_n) = \underline{\frac{1}{15}(S_n - S_{n/2})} + \underline{\frac{16}{15n^4}(\delta_n - \delta_{n/2})}$

$$\approx \frac{1}{15}(S_n - S_{n/2})$$

Прямоугольник	Трапеция	Симпсон
$I = \frac{4}{3}P_n - \frac{1}{3}P_{n/2} + \tilde{\alpha}_n$	$I = \frac{4}{3}T_n - \frac{1}{3}T_{n/2} + \tilde{\beta}_n$	$I = \frac{16}{15}S_n - \frac{1}{15}S_{n/2} + \tilde{\gamma}_n$
$\tilde{\alpha}_n = \frac{4}{3n^2}(\mu_n - \mu_{n/2}) = O(n^{-2})$	$\tilde{\beta}_n = \frac{4}{3n^2}(\nu_n - \nu_{n/2}) = O(n^{-2})$	$\tilde{\gamma}_n = \frac{16}{15n^2}(\delta_n - \delta_{n/2}) = O(n^{-4})$

9 Квадратурные формулы Гаусса.

Формулировка: построить квадратурную формулу с числом узлов n, которая является точной $\forall$ полинома $\deg = 2n-1$ или ниже.

Пусть $x \in [-1;1]$: $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) + \varepsilon_n$

$\forall$ полинома $\deg 2n-1$ или $<$: $\varepsilon_n = 0$

$f(x) = 1, x, x^2 \ldots x^{2n-1} \Rightarrow$

$$\int_{-1}^{1} x^m dx = \frac{1}{m+1}\left(1+(-1)^m\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^m \quad 0 \le m \le 2n-1$$

$\Rightarrow$ система $2n$ нелинейных уравнений с $2n$ неизвестными.

$m=0$: $\sum_{i=1}^{n} c_i = 2$

Пример: 1 узел. $\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_1 x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2f(0) + \varepsilon_1$

Полиномы Лежандра: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

$P_0(x) = 1$; $P_1(x) = x$; $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$; $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$ ...

Св-ва:
1) $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$
2) $P_n(1) = 1$; $P_n(-1) = (-1)^n$
3) $(-1;1)$ n простых корней, симметричны отн. 0
4) $\forall Q_m(x)$ $m<n$: $\int_{-1}^{1} Q_m(x) P_n(x) dx = 0$
4,1) $m \ne n$: $\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) = 0$

$\omega_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ $\quad x_i$ - искомые узлы

$Q_m(x)$ - произвольный $m<n$. $\int_{-1}^{1} Q_m(x)\,\omega_n(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i Q_m(x_i)\omega_n(x_i) = 0$

$\Rightarrow \omega_n(x_i)$ – полином Лежандра с точностью до множителя

$$\omega_n(x) = A_n P_n(x)$$

Чтобы посчитать, берем $Q_{n-1,m}(x) = \dfrac{(x-x_1)\cdots(x-x_{m-1})(x-x_{m+1})\cdots(x-x_n)}{(x_m-x_1)\cdots(x_m-x_{m-1})(x_m-x_{m+1})\cdots(x_m-x_n)}$

числитель – $\dfrac{\omega_n(x)}{(x-x_m)}$; знаменатель: значение числ. в x_m

$$Q_{n-1,m}(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq m \\ 1, & i = m \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} Q_{n-1,m}(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i Q_{n-1,m}(x_i) = c_m$$

$$c_m = \int_{-1}^{1} Q_{n-1,m}(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{m-1})(x-x_{m+1})\cdots(x-x_n)}{(x_m-x_1)\cdots(x_m-x_{m-1})(x_m-x_{m+1})\cdots(x_m-x_n)}$$

Проверка:

1) $Q_{n-1}(x) = \sum_{m=1}^{n} Q_{n-1}(x_m)\, Q_{n-1,m}(x)$ // совпадают в n точках, степень $n-1$ $\Rightarrow$ совпадают

$$\int_{-1}^{1} Q_{n-1}(x)\,dx = \sum_{m=1}^{n} Q_{n-1}(x_m) \int_{-1}^{1} Q_{n-1,m}(x)\,dx =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} c_m Q_{n-1}(x_m)$$

2)

$$Q_{2n-1}(x) = P_n(x)\, q_{n-1}(x) + r_{n-1}(x)$$

$$\int_{-1}^{1} Q_{2n-1}(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \left(P_n(x)\, q_{n-1}(x) + r_{n-1}(x)\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} r_{n-1}(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i\, r_{n-1}(x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \left(P_n(x_i)\, q_{n-1}(x_i) + r_{n-1}(x_i)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i Q_{2n-1}(x_i)$$

чтд

10 Решение систем ЛАУ методом Гаусса.

1 этап: $\triangledown$ вид
2 этап: обратный ход

1 эт. $\begin{cases} \text{делений: } n+(n-1)+\ldots+1 = \frac{1}{2}n(n+1) \\ \text{сложений и умножений: } n(n-1)+(n-1)(n-2)+\ldots+2\cdot 1 = \frac{1}{3}n(n^2-1) \end{cases}$

2 эт. $\begin{cases} \text{сложений и умножений: } Q_3 = 1+2+\ldots(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1) \end{cases}$

Улучшение метода: в 1 этапе выбираем max по стр

ГЛАВА 1

11 Решение систем ЛАУ с трехдиагональной матрицей методом прогонки

$$\left[\begin{array}{ccccccc} C_1 & B_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_2 & C_2 & B_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & C_3 & B_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1} & C_{n-1} \end{array}\right] \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_{n-1} \end{array}$$

$x_0 = q_0$
$x_n = q_n$

$+ \quad x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}$

$$x_{i-1} = \alpha_i x_i + \beta_i = \alpha_i \alpha_{i+1} x_{i+1} + \alpha_i \beta_{i+1} + \beta_i$$

$$\Rightarrow \boxed{(A_i \alpha_i \alpha_{i+1} + C_i \alpha_{i+1} + B_i) x_{i+1} + A_i \alpha_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i + C_i \beta_{i+1} - F_i = 0}$$

$i = \overline{1, n-1}$

+ требуем $\begin{cases} A_i \alpha_i \alpha_{i+1} + C_i \alpha_{i+1} + B_i = 0 \\ A_i \alpha_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i + C_i \beta_{i+1} - F_i = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \alpha_{i+1} = \frac{-B_i}{A_i \alpha_i + C_i}; \quad \beta_{i+1} = \frac{F_i - A_i \beta_i}{A_i \alpha_i + C_i} \quad i = \overline{1, n-1}$$

$x_0 = q_0 = \alpha_1 x_1 + \beta_1 \Rightarrow \alpha_1 = 0$
$\beta_1 = q_0$

$x_n = q_n$ прогонка $\downarrow \uparrow$

$O(n)$

12 Обусловленность систем линейных алгебраич. уравнений

$\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. $\quad \|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

z - единичной длины $\|z\| = 1 \Rightarrow \|A\| = \sup\limits_{\|z\|=1} \|Az\|$

Адамар: Задача корректна, если: решение $\exists!$ и непрерывно от вх. дан.

$Ax = f$, входные данные f; $\quad (\Delta A \neq 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = A^{-1} f$

изменим $\tilde{f} = f + \delta f$: $\quad \tilde{x} = A^{-1}\tilde{f} = A^{-1}f + A^{-1}\delta f = x + \delta x$

$\delta x = A^{-1}\delta f$

$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta f\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\delta x\| \to 0$ при $\|\delta f\| \to 0$

$\Rightarrow$ задача по Адамару

$\|f\| \leq \|A\| \|x\|$

$\|f\| \|\delta x\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| \|x\| \|\delta f\|$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta f\|}{\|f\|}$$

Чем больше M_A, тем хуже.

$M_A = \|A\| \|A^{-1}\|$ - число обусловлен. матрицы A

Оценка этого числа:

$M_A \geq \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}$ (в силу невырожден. $\lambda_{min} \neq 0$)

$Ay = \lambda_{max} y$

$|\lambda_{max}| \|y\| = \|Ay\| \leq \|A\| \|y\|$ т.к. $\|y\| \neq 0 \Rightarrow |\lambda_{max}| \leq \|A\|$ (1)

$\Downarrow$

$A^{-1}z = \lambda_{min} z \Rightarrow A^{-1}z = \frac{1}{\lambda_{min}} z \Rightarrow \frac{1}{|\lambda_{min}|} \leq \|A^{-1}\| \Rightarrow M_A \leq \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}$

= в случае симметричной

13. Каноническая форма записи одношаговых итерационных методов. Достаточное условие сходимости.

в E_n введена норма $\|x\|$. Решение СЛАУ в виде $x_k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$

Сходимость: $\lim\limits_{k\to\infty}\|x_k - x\| = \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt{(x_1^k - x_1)^2 + \dots + (x_n^k - x_n)^2} = 0$

$\Rightarrow$ покомпонентная сходимость: $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^k = x_i \quad 1 \le i \le n$

Итерационные: $x_{k+1} = F(x_k)$ – одношаговый

$x_{k+1} = F(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-m+1})$ – m шаговый

Каноническая форма записи:

$$B_{k+1}\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau_{k+1}} + Ax_k = f \qquad \det B_{k+1} \neq 0, \quad \tau_{k+1} > 0$$

B_{k+1}, τ_{k+1} – итерационные параметры
если B и τ не зависят от k, то они стационарные.

$$B_{k+1}x_{k+1} = f\tau_{k+1} + B_{k+1}x_k - \tau_{k+1}Ax_k$$

$$B_{k+1}x_{k+1} = (B_{k+1} - A\tau_{k+1})x_k + \tau_{k+1}f$$

проще всего $B_{k+1} = E \Rightarrow x_{k+1} = (E - A\tau_{k+1})x_k + \tau_{k+1}f$

Сходимость: $z_k = x_k - x$ – погрешность решения

$\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$

$\psi_k = Ax_k - f$ – невязка // хорошо ли x_k подхода

$= A(z_k + x) - f = Az_k \Rightarrow \boxed{z_k = A^{-1}\psi_k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\psi_k\| \le \|A\|\,\|z_k\|$

$\|z_k\| \le \|A^{-1}\|\,\|\psi_k\|$

самосопряженный: $(Ax, y) = (x, Ay)$ $\forall x, y \in E_n$. в ортонормированном базисе $A^* = A^T$

Лемма1: Чтобы симметричная матрица была $A > 0 \Leftrightarrow \lambda_i > 0$

Лемма2: $A = A^*$ и $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n > 0$: $\lambda_n \|x\|^2 \leqslant (Ax, x) \leqslant \lambda_1 \|x\|^2$

Лемма3: $A > 0$ $\exists \delta > 0$: $(Ax, x) \geqslant \delta \|x\|^2$, $\forall x \in E_n$

Достаточное условие сходимости (Т. Самарского):

$A = A^*$, $A > 0$; $\tau > 0$: $B - \frac{\tau}{2} A > 0$,

тогда $\forall x_0$, итерационный процесс сходится

Д-во: $B - \frac{\tau}{2} A > 0 \Leftrightarrow (Bx, x) > \frac{\tau}{2} (Ax, x)$ $\forall x \in E_n \neq 0$

$$0 < \tau < \tau_0 = \inf_{x \neq 0} \frac{2(Bx, x)}{(Ax, x)}$$

$$x_k = z_k + x$$

$$\Downarrow$$

$$B \cdot \frac{z_{k+1} - z_k}{\tau} + A z_k = 0 \qquad B > 0 \Rightarrow \exists B^{-1}$$

$$z_{k+1} = z_k - \tau B^{-1} A z_k = z_k - \tau \omega_k \quad \Big| * A$$

$$\omega_k = B^{-1} A z_k \Rightarrow A z_k = B \omega_k$$

$$A z_{k+1} = A z_k - \tau A \omega_k$$

Рассмотрим последовательность положительных функционалов: $J_k = (A z_k, z_k)$

$$J_{k+1} = (A z_k - \tau A \omega_k, z_k - \tau \omega_k) =$$

$$= (A z_k, z_k) - \tau (A \omega_k, z_k) - \tau (A z_k, \omega_k) + \tau^2 (A \omega_k, \omega_k)$$

$\{$ св-во: $(A \omega_k, z_k) = (A z_k, \omega_k) = (B \omega_k, \omega_k)$ $\}$

$$= J_k - 2\tau (B \omega_k, \omega_k) + \tau^2 (A \omega_k, \omega_k) =$$

$$= J_k - 2\tau \underbrace{\left(\left(B - \frac{\tau}{2} A \right) \omega_k, \omega_k \right)}_{(*)} \quad \geqslant 0$$

$\Rightarrow J_k \geqslant J_{k+1} \geqslant \ldots \geqslant 0 \Rightarrow$ сходится. + лемма3: $(*) \geqslant \delta \|\omega_k\|^2$

$$J_k - J_{k+1} = 2\tau\left(\left(B - \frac{\tau}{2}A\right)w_k, w_k\right) \geq 2\tau\delta \|w_k\|^2$$

$k \to \infty$: $\|w_k\| \to 0$ $\quad \|z_k\| \leq \|A^{-1}\| \|B\| \|w_k\| \to$

14 Метод простой итерации

$B=E$
τ - const
$A=A^*>0$:

$$x_{k+1}=(E-\tau A)x_k+\tau f$$

$$\Downarrow$$

$$\tau_0=\inf_{x\neq 0}\frac{2(x,x)}{(Ax,x)}=\frac{2}{\sup\limits_{x\neq0}\frac{(Ax,x)}{(x,x)}}$$

$e_1 \ldots e_n$ — ортонормированный базис собственных векторов A; $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n > 0$, разложим $x\neq 0$ по собственным векторам

$$x=\xi_1 e_1+\ldots+\xi_n e_n$$

$$(x,x)=\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2;\quad (Ax,x)=\lambda_1\xi_1^2+\lambda_2\xi_2^2+\ldots+\lambda_n\xi_n^2;$$

$$\sup_{x\neq0}\frac{(Ax,x)}{(x,x)}=\sup_{x\neq0}\frac{\lambda_1\xi_1^2+\ldots+\lambda_n\xi_n^2}{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}=\lambda_1$$

$\Rightarrow$ метод сходится $\forall\tau$: $0<\tau<\tau_0=2/\lambda_1$

Матрица оператора перехода: $S=E-\tau A$; $S=S^*$

$$x_{k+1}=Sx_k+\tau f$$
$$z_{k+1}=Sz_k$$

Лемма 1: пусть у A собственный вектор e_i с собств. зн. λ_i. Тогда оператор перехода, порожденный S, также имеет собственный вектор e_i, но собств. зн. $\mu_i(\tau)=1-\tau\lambda_i$

Д-во: $Se_i=(E-\tau A)e_i=(1-\tau\lambda_i)e_i=\mu_i e_i$

$$\|S\|=\max_{1\leq i\leq n}|\mu_i(\tau)|$$

Лемма 2 Для сходимости метода простой итерации при любом выборе начального приближения, необходимо и достаточно, чтобы S: $|\mu_i(\tau)|<1$, $1\leq i\leq n$ (*)

Достаточность: $(*)\Leftrightarrow\|S\|<1$; $\|z_{k+1}\|\leq\|S\|\,\|z_k\|\leq\ldots\leq\|S\|^{k+1}\|z_0\|\to 0$, $k\to\infty$

Необходимость: пусть среди μ_i хотя бы одно $|\mu_j|\geq 1$.
Выбираем $x_0=x+e_j$, $z_0=e_j$: $z_k=S^k e_j=\mu_j^k e_j$,

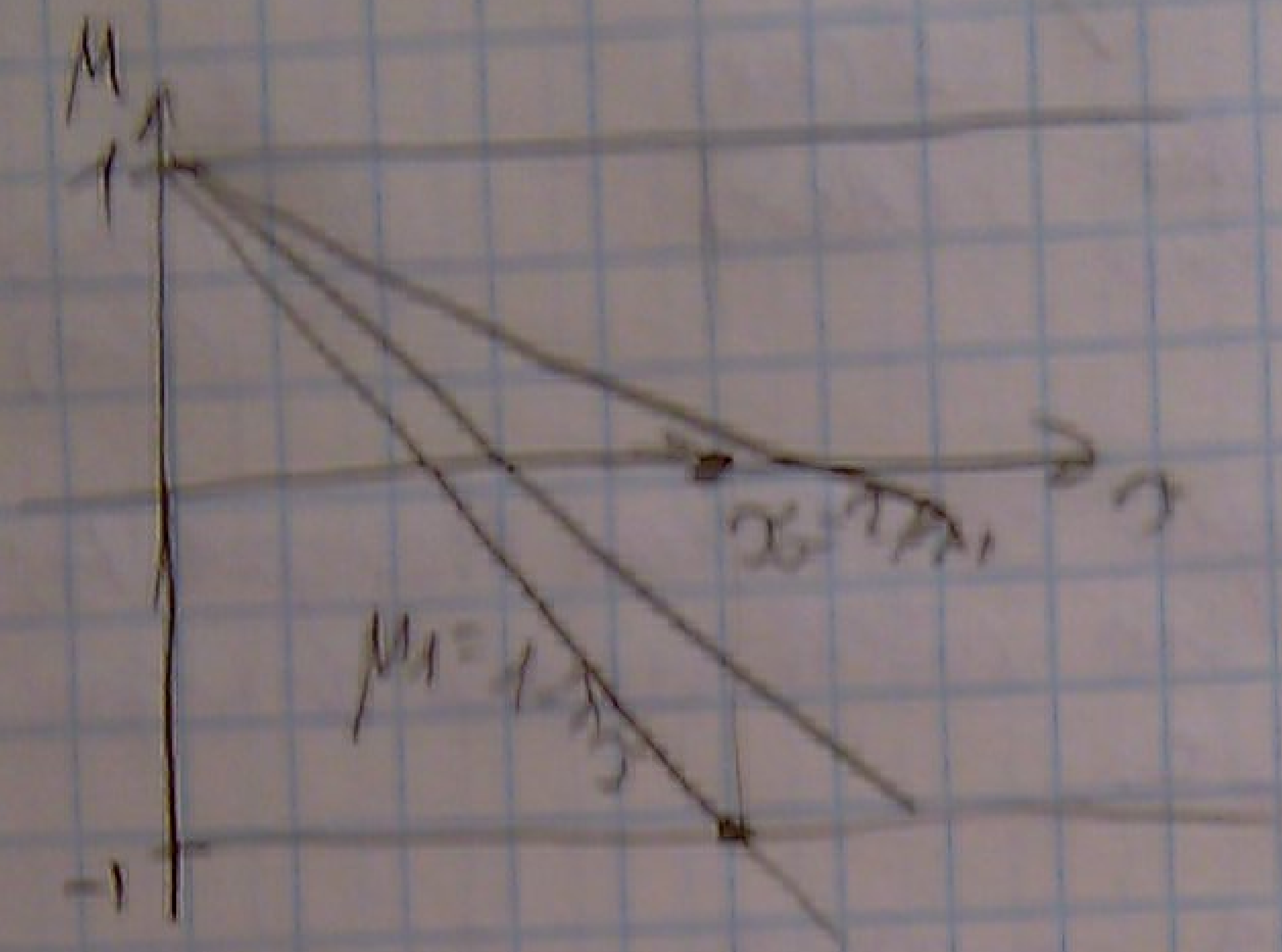
$$\|z_k\|=|\mu_j|^k\geq 1$$

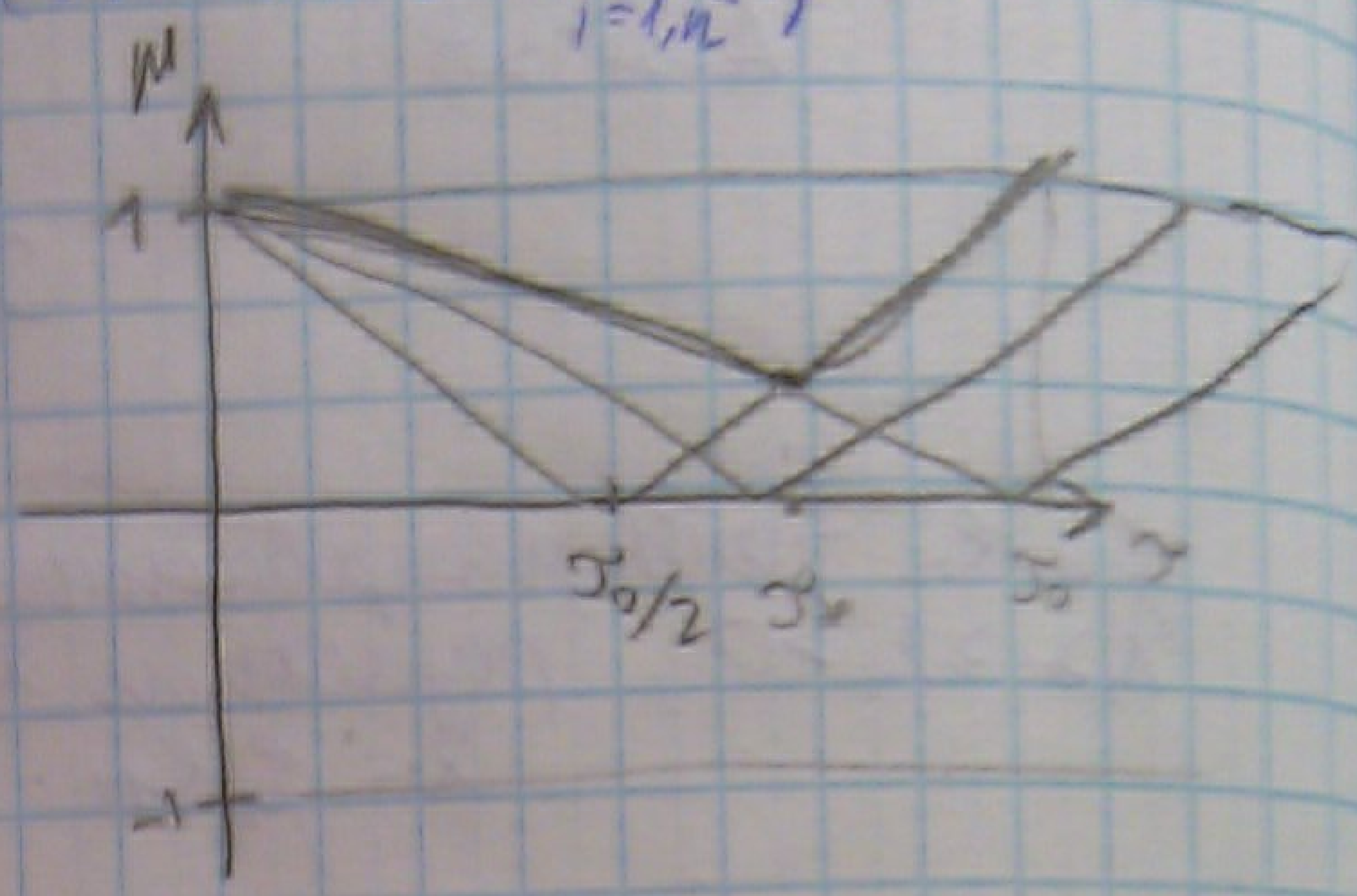
т.с. $\|z_k\|\not\to 0$ ч.т.д.

$\Rightarrow$ нужно установить τ, при котором $|\mu_i|<1$

$0<\tau<\tau_0 = 2/\lambda_1$ — Самарский рисует

Скорость сходимости: $q(\tau) = \|S\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |\mu_i(\tau)|$





На $[\tau_0/2, \tau_0]$ ищем τ_*: $\mu_n(\tau) = 1-\tau\lambda_n = -\mu_1(\tau) = \tau\lambda_1 - 1$

$$\Downarrow$$

$$\tau_* = \frac{2}{\lambda_1+\lambda_n} < \tau_0$$

$$\Rightarrow \|S\| = \max_{1\le i\le n} |\mu_i(\tau)| = \begin{cases} \mu_n(\tau) & 0\le\tau\le\tau_* \\ -\mu_1(\tau) & \tau_*\le\tau<\tau_0 \end{cases}$$

$$\min\|S\| = 1-\tau_*\lambda_n = \frac{\lambda_1-\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_n} = \frac{M_A-1}{M_A+1}$$

15 Метод Зейделя и верхней релаксации.

Зейдель:

$$A = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{диагональная}}}{D} + \overset{\text{нижн.}\Delta}{T_H} + \underset{\text{верхн.}\Delta}{T_B}$$

$$B = D + T_H, \quad \tau = 1$$

$$(D+T_H)(x_{k+1} - x_k) + Ax_k = f$$

$$(D+T_H)x_{k+1} + T_B x_k = f$$

$$\Downarrow$$

$$a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^k + \ldots + a_{1n}x_n^k = f_1$$

$$\vdots \quad k+1$$

$$a_{n1}x_1^{k+1} \ldots \quad a_{nn}x_n^{k+1} = f_n$$

$\Rightarrow$ почти обратный ход в методе Гаусса: $x_i^{k+1} = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(f_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k\right)$, $i=\overline{1,n}$

предполагаем $a_{ii} \neq 0$! (Если A по Самарскому ($A = A^* > 0$), то все $a_{ii} > 0$)

Метод Зейделя сходится при диагональном преобладании

Верхняя релаксация: почти метод Зейделя: $\underbrace{(D + T_H\omega)}_{B}\dfrac{(x_{k+1}-x_k)}{\omega} + Ax_k = f$

$$\left(\frac{1}{\omega}D + T_H\omega\right)(x_{k+1} - x_k) + Ax_k = f$$

влияет на диагональ

$$\left(\frac{1}{\omega}D + T_H\right)x_{k+1} + \left[\left(1-\frac{1}{\omega}\right)D + T_B\right]x_k = f$$

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^k\right)_{i=\overline{1,n}}$$

Условие сходимости:

A - по Самарскому $\Rightarrow T_H^* = T_B,\ T_B^* = T_H$: $(T_H x, x) = (T_H^* x, x) = (T_B x, x)$

$$B - \frac{\tau}{2}A = (D + \omega T_H) - \frac{\omega}{2}(D + T_B + T_H) = \left(1 - \frac{\omega}{2}\right)D + \frac{\omega}{2}(T_H - T_B)$$

$$\left(\left(B-\frac{\tau}{2}A\right)x,x\right)=\left(1-\frac{\omega}{2}\right)(\overset{A}{\cancel{B}}x,x)>0$$

0, ведь $A>0$

$$\Rightarrow 0<\omega<2$$

16 Разностная апроксимация производных

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ — равномерная сетка

$x_{i+1} - x_i = h = b-a/n$

сеточная ф-ция $y_0 \ y_1 \ \ldots \ y_{n-1} \ y_n$

$\Rightarrow$ n+1 мерное линейное пр-во

$\|y\|_C = \max|y_i|$ — норма

ГЛАВА 5

Разностные отношения:

$L_h^+[y_i] = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$ $\quad 0 \le i \le n-1$ — правое р.о

$L_h^-[y_i] = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$ $\quad 1 \le i \le n$ — левое р.о

$L_h^{(0)}[y_i] = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h}$ $\quad 1 \le i \le n-1$ — центральное р.о

$\Downarrow$

$$\left.\begin{aligned} \psi_i^+ &= L_h^+[y_i] - y'(x_i) \quad i = \overline{0, n-1} \\ \psi_i^- &= L_h^-[y_i] - y'(x_i)) = \overline{1, n} \\ \psi_i^{(0)} &= L_h^{(0)}[y_i] - y'(x_i) \quad i = \overline{1, n-1} \end{aligned}\right\} \text{погрешности р.о}$$

пусть $y(x)$ 2-жды непрерывно диф-ма на $[a,b]$ $\Rightarrow$ Тейлор (лагранж)

$$y_{i+1} = y(x_i + h) = y_i + y'(x_i)h + \frac{1}{2}y''(x_i + \theta_i h)h^2$$
$\theta \in [0,1]$

$$\Rightarrow \psi_i^+ = \frac{1}{2}y''(x_i + \theta_i h)h$$
$$\psi_i^- = -\frac{1}{2}y''(x_i - \theta_i h)h$$

$y''(x)$ непр $\Rightarrow$ огран на $[a,b]$ $\Rightarrow$ $M_2 \ge |y''(x)|$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \psi_i^+ = \frac{1}{2}M_2 h \qquad \psi_i^+ = \frac{1}{2}M_2 h$$

Для $\psi_i^{(0)}$, предположим, что $y \in C^3[a,b]$

$$y_{i+1} = y_i + y'(x_i)h + \frac{1}{2}y''(x_i)h^2 + \frac{1}{6}y'''(x_i + \theta_{1,i}h)h^3$$
$$y_{i-1} = y_i - y'(x_i)h + \frac{1}{2}y''(x_i)h^2 - \frac{1}{6}y'''(x_i - \theta_{2,i}h)h^3$$

$$\psi_i^{(0)} = \frac{1}{12}\left(y'''(x_i + \theta_{1i}h) + y'''(x_i - \theta_{2i}h)\right)h^2 \Rightarrow$$

$$|y'''(x)| \leq M_3 \Rightarrow \quad |\psi_i^{(0)}| \leq \frac{1}{6} M_3 h^2.$$

Вторая производная:

$$L_h(y_i) = \frac{\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h}}{h} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}$$

$$\psi_i = L_h[y] - y''(x_i)$$

$$y(x) \in C^4[a,b] : \quad y_{i+1} = y(x_i+h) = y_i + y'(x_i)h + \frac{1}{2}y''(x_i)h^2 + \frac{1}{6}y'''(x_i)h^3 + \frac{1}{24}y^{(4)}(x_i+\theta_{1,i}h)h^4$$

$$y_{i-1} = y(x_i - h) = y_i - y'(x_i)h + \frac{1}{2}y''(x_i)h^2 - \frac{1}{6}y'''(x_i)h^3 + \frac{1}{24}y^{(4)}(x_i+\theta_{2,i}h)h^4$$

$$\psi_i = \frac{1}{24}\left(y^{(4)}(x_i+\theta_{1,i}h) + y^{(4)}(x_i-\theta_{2,i}h)\right)h^2$$

$$|y^{(4)}(x)| \leq M_4 \quad a \leq x \leq b$$

$$|\psi_i| < \frac{1}{12} M_4 h^2$$

(17) Метод Эйлера

Задача Коши для $\begin{cases} u' = f(x,u) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$

$f(x,u)$ – непрерывна, липшиц по u в окр-ти (x_0, u_0)

Метод Эйлера: строим решение на $[x_0, x_0 + \ell]$, вводим шаг $h = \frac{\ell}{n}$
$x_i = x_0 + ih$, $0 \le i \le n$

$\Rightarrow$ ставим $\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)$ $\quad 0 \le i \le n-1$

$y_0 = u_0$

$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$ – посл вычисляем y_i
– такая схема ЯВНАЯ

Точность? вводим $z_i = y_i - u_i$ $\quad 0 \le i \le n$ погрешность решения
$\psi_i = \dfrac{(u_{i+1} - u_i)}{h} - f(x_i, u_i)$ $\quad 0 \le i \le n-1$ погрешность аппроксимации

Как связаны z_i и ψ_i? $\quad y_i = u_i + z_i$

$$\Downarrow$$

$$\frac{z_{i+1} - z_i}{h} + \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = f(x_i, u_i + z_i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_{i+1} - z_i}{h} = \underbrace{\left(f(x_i, u_i + z_i) - f(x_i, u_i)\right)}_{\frac{\partial f}{\partial u}(x_i, u_i + \theta_i z_i) z_i} - \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} - f(x_i, u_i)\right)$$

$\frac{\partial f}{\partial u}(x_i, u_i + \theta_i z_i) z_i$ // Лагранж

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} z_{i+1} = \left(1 + h \dfrac{\partial f}{\partial u}(x_i, u_i + \theta_i z_i)\right) z_i - \psi_i h, & 0 \le i \le n-1 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

Вводим $\|\psi_c\| = \max\limits_{0 \le i \le n-1} |\psi_i|$: $|\psi_i| \le \|\psi\|_c$

Пусть $\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)$ ограничена: $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\right| \le C$

$\Rightarrow$ $\left|1 + h \frac{\partial f}{\partial u}(x_i, u_i + \theta_i z_i)\right| \le 1 + Ch \le e^{Ch} = q > 1$

$\Downarrow$

$|z_{i+1}| \le q |z_i| + \|\psi_c\| h$

$\Downarrow$

-31- $Z_0 = 0$

$|Z_1| \le \|\psi\|_C h$

$|Z_2| \le (1+q)\|\psi\|_C h$

$|Z_n| \le (1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})\|\psi_C\| h$

т.к. $q>1$: $1+q+q^2+\ldots+q^{n-1} < n\cdot q^n = n e^{Chn}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow |Z_i| \le nh\, e^{Chn}$ $\quad 0 \le i \le n$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\|Z_C\| \le l e^{Cl} \|\psi\|_C}$$

$\|\psi\|_C - ?$ $f(x,u)$ - непр. нр. произв. $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial u$:

$$u''(x) = f'_x(x,u) + f'_u(x,u) f(x,u)$$

Тейлор + Лагранж: $u_{i+1} = u(x_i+h) = u_i + u'(x_i)h + \frac{1}{2}u''(x_i+\theta_i h)h^2$

$$\Downarrow$$

$$\psi_i = \frac{1}{2}u''(x_i+\theta_i h)h$$

$u''(x)$ непр-на и огран. $\Rightarrow$ $|u''(x)| \le M_2$ $\quad [x_0; x_0+l]$

$\Rightarrow \|\psi_C\| \le \frac{M_2}{2}h$; $\|Z_C\| \le \frac{M_2 l}{2} e^{Cl} h$

метод первого порядка от h.

18 Метод Рунге-Кутта

Повышение Эйлера точности? Пусть $u(x)$ имеет высшие производные

$$u_{i+1} = u(x_i+h) = u_i + u'(x_i)h + \frac{1}{2}u''(x_i)h^2 + \frac{1}{6}u'''(x_i)h^3 + \dots$$

Новое рекуррентное соотношение:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i,y_i)h + \frac{1}{2}\left(f'_x(x_i,y_i) + f'_y(x_i,y_i)f(x_i,y_i)\right)h^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = f(x_i,y_i) + \frac{1}{2}\left(f'_x(x_i,y_i) + f'_y(x_i,y_i)f(x_i,y_i)\right)h}$$

$$f(x_i,y_i) + \frac{1}{2}\left(f'_x(x_i,y_i) + f'_y(x_i,y_i)f(x_i,y_i)\right)h =$$

$$= \beta f(x_i,y_i) + \alpha f(x_i+\gamma h, y_i+\delta h) + O(h^2)$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – свободные параметры для равенства

$$f(x_i+\gamma h, y_i+\delta h) = f(x_i,y_i) + \left(\gamma f'_x(x_i,y_i) + \delta f'_y(x_i,y_i)\right)h + O(h^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha\gamma = 1/2 \\ \alpha\delta = \frac{1}{2}f(x_i,y_i) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \beta = 1-\alpha \\ \gamma = 1/2\alpha \\ \delta = 1/2\alpha \cdot f(x_i,y_i) \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{y_{i+1}-y_i}{h} = (1-\alpha)f(x_i,y_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, y_i + \frac{h}{2\alpha}f(x_i,y_i)\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + \left[(1-\alpha)f(x_i,y_i) + \alpha f\left(x_i+\frac{h}{2\alpha}, y_i+\frac{h}{2\alpha}f(x_i,y_i)\right)\right]h$$

Чаще всего $\left[\begin{array}{l}\alpha = 1 \\ \alpha = 1/2\end{array}\right.$

$\alpha = 1/2$ $\quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i,y_i) + f(x_i+h, y_i+h f(x_i,y_i))\right)$

1 шаг по Эйлеру: $\tilde{y}_{i+1} = y_i + f(x_i,y_i)h$

2 шаг: $f(x_{i+1},\tilde{y}_{i+1})$

3 шаг: $\left(f(x_i,y_i) + f(x_{i+1},\tilde{y}_{i+1})\right)/2$

4 шаг: $y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i,y_i) + f(x_{i+1},\tilde{y}_{i+1})}{2}h$

$\alpha = 1$ $\quad y_{i+1} = y_i + f\left(x_i + h/2, y_i + h/2\, f(x_i,y_i)\right)$

1 шаг по Эйлеру с шагом $h/2$: $y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2}f(x_i,y_i)$

2 шаг $f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}) \Rightarrow y_{i+1}$ по ф-ле

Точность: $\psi_i = \dfrac{u_{i+1}-u_i}{h} - \left[(1-\alpha) f(x_i, u_i) + \alpha f\left(x_i + \dfrac{h}{2\alpha}, u_i + \dfrac{h}{2\alpha} f(x_i, u_i)\right)\right]$

$u_{i+1} = y_{i+1} + z_{i+1}$: $\quad \dfrac{z_{i+1}-z_i}{h} + \dfrac{u_{i+1}-u_i}{h} = (1-\alpha) f(x_i, u_i + z_i) + \alpha f\left(x_i + \dfrac{h}{2\alpha}, u_i + z_i + \dfrac{h}{2\alpha} f(x_i, u_i + z_i)\right)$

$$\frac{z_{i+1}-z_i}{h} = \Big\{ \underbrace{\left[(1-\alpha) f(x_i, u_i+z_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, u_i + z_i + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, u_i + z_i)\right)\right]}_{\text{было}} - \underbrace{\left[(1-\alpha) f(x_i, u_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, u_i + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, u_i)\right)\right]}_{\text{прибавим}} \Big\} - \underbrace{\left\{ \frac{u_{i+1}-u_i}{h} - \left[(1-\alpha) f(x_i, u_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, u_i + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, u_i)\right)\right] \right\}}$$

в этой скобке члены, дающие погрешность ψ_i

Рассмотрим: $F(\nu) = (1-\alpha) f(x_i, \nu) + \alpha f\left(x_i + \dfrac{h}{2\alpha}, \nu + \dfrac{h}{2\alpha} f(x_i, \nu)\right)$

$\Downarrow$

$F(u_i + z_i) - F(u_i) = F'(u_i + \theta_i z_i)\, z_i \quad 0<\theta_i<1$

$F'(\nu) = (1-\alpha) f'_\nu(x_i, \nu) + \alpha f'_\nu\left(x_i + \dfrac{h}{2\alpha}, \nu + \dfrac{h}{2\alpha} f(x_i, \nu)\right)\left(1 + \dfrac{h}{2\alpha} f'_\nu(x_i, \nu)\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_{i+1} = (1 + hF'(u_i + \theta_i z_i))\, z_i - \psi_i h & (0 \le i \le n-1) \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

с учетом ψ_i, u_i, θ_i

Считаем, что производная $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x,u)$ огр-на

$\Rightarrow |1 + hF'(u_i + \theta_i z_i)| \le 1 + Ch + \dfrac{1}{2} C^2 h^2 < e^{Ch} = q$

$\Downarrow$

$|z_{i+1}| \le q |z_i| + \|\psi\|_C h$

$\Downarrow$ из предыдущего билета

$\|z\|_C \le l e^{Cl} \|\psi\|_C$

Пусть $f(x,u)$ имеет непрерывные 2-е производные -34-

$$u_{i+1} = u(x_i+h) = u_i + u'(x_i)h + \frac{1}{2}u''(x_i)h^2 + \frac{1}{6}u'''(\bar{x}_i)h^3$$

$$f\left(x_i+\frac{h}{2\alpha};\ u_i+\frac{h}{2\alpha}f(x_i,u_i)\right) = f(x_i,u_i) + \frac{h}{2\alpha}\left(f'_x(x_i,u_i) + f'_u(x_i,u_i)f(x_i,u_i)\right)$$

$$+\frac{h^2}{8\alpha^2}\left(f''_{xx}(\tilde{x}_i,\tilde{u}_i) + 2f''_{xy}(\tilde{x}_i,\tilde{u}_i)f(\tilde{x}_i,\tilde{u}_i) + f''_{uu}(\tilde{x}_i,\tilde{u}_i)f^2(\tilde{x}_i,\tilde{u}_i)\right)$$

$\bar{x}_i = x_i + \bar{\theta}_i h;$ $\tilde{x}_i = x_i + \tilde{\theta}_i\frac{h}{2\alpha};$ $\tilde{u}_i = u_i + \tilde{\theta}_i\frac{h}{2\alpha}f(x_i,u_i)$

$\bar{y}_i =$

$$0 < \tilde{\bar{\theta}}_i < 1$$

Подставим в ψ_i + $u'(x_i) = f(x_i,u_i)$

$u''(x_i) = f'_x(x_i,u_i) + f'_u(x_i,u_i)f(x_i,u_i)$

$$\psi_i = h^2\left(\frac{1}{6}u'''(\bar{x}_i) - \frac{1}{8\alpha}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\tilde{x}_i,\tilde{u}_i) + 2f''_{xu}(\tilde{x}_i,\tilde{u}_i)f(\tilde{x}_i,\tilde{u}_i)\right.\right.$$

$$\left.\left.+ f''_{uu}(\tilde{x}_i,\tilde{u}_i)f^2(\tilde{x}_i,\tilde{u}_i)\right]\right)$$

т.к. огр-на.

$$|\psi_i| \le \|\psi_c\| \le Mh^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|z\|_c \le Ml e^{\alpha l}h^2$$

19 Метод Адамса

$u(x)$ – решение диф. ур. $u'(x) = f(x, u(x)) = F(x)$

$u_{i+1} = u_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x)dx$ но $F(x)$?

Пусть дошли до x_i. Есть $x_j, y_j, f(x_j, y_j)$ $\forall j \le i$

Берем $m \le i$ и строим $P_m(x)$: $P_m(x_j) = f(x_j, y_j)$ $i-m \le j \le i$

$$P_m(x) = \sum_{j=i-m}^{i} f(x_j, y_j) Q_{m,j}(x)$$

Лагранж $\frac{(x-x_{i-m}) \dots (x-x_{j-1})(x-x_{j+1}) \dots (x-x_i)}{(x_j-x_{i-m}) \dots (x_j-x_i)}$

$$\Downarrow$$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_m(x)\,dx = y_i + \sum_{j=i-m}^{i} a_j f(x_j, y_j)$$

$$a_j = \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q_{m,j}(x)\,dx$$

$m=0$ $F(x) \approx P_0 = f(x_i, y_i)$ – Эйлер

$m=1$

$$P_1(x) = f(x_i, y_i)\frac{x - x_{i-1}}{h} - f(x_{i-1}, y_{i-1})\frac{x - x_i}{h}$$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + \left(\frac{3}{2} f(x_i, y_i) - \frac{1}{2} f(x_{i-1}, y_{i-1})\right)h$$

но можно только со 2-й точки. y_1 по Эйлеру или Рунге-Кутта

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{3}{2} f(x_i, y_i) - \frac{1}{2} f(x_{i-1}, y_{i-1})$$

$$\psi_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \left(\frac{3}{2} f(x_i, y_i) - \frac{1}{2} f(x_{i-1}, y_{i-1})\right) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{3}{2}\left(u'(x_i) - \frac{1}{2} u'(x_{i-1})\right)$$

$f(x, u)$ непр 2-е производные все

$$u_{i+1} = u_i + u'(x_i)h + \frac{1}{2}u''(x_i)h^2 + \frac{1}{6}u'''(x_i + \tilde{\theta}_i h)h^3$$

$$u'(x_{i-1}) = u'(x_i) - u''(x_i)h + \frac{1}{2}u'''(x_i - \tilde{\tilde{\theta}}_i h)h^2$$

$$\Rightarrow \psi_i = \left(\frac{1}{6}u'''(x_i + \tilde{\theta}_i h) + \frac{1}{4}u'''(x_i - \tilde{\tilde{\theta}}_i h)\right)h^2$$

$$|\psi_i| \le \|\psi\|_C \le \frac{5}{12} M_3 h^2$$

$m=4$ Самая популярная

-36- $y_{i+1} = y_i + h\left(\frac{55}{24} f(x_i, y_i) - \frac{59}{24} f(x_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{37}{24} f(x_{i-2}, y_{i-2}) - \frac{9}{24} f(x_{i-3}, y_{i-3})\right)$

$$y_{i+1} = y_i + h f_i + \frac{1}{2} h^2 \Delta^1 f_i + \frac{5}{12} h^3 \Delta^2 f_i + \frac{3}{8} h^4 \Delta^3 f_i$$

$$f_i = f(x_i, y_i)$$

$$\Delta^1 f_i = \frac{1}{h}\left(f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})\right)$$

$$\Delta^2 f_i = \frac{1}{h^2}\left(f(x_i, y_i) - 2 f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2})\right)$$

$$\Delta^3 f_i = \frac{1}{h^3}\left(f(x_i, y_i) - 3 f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 3 f(x_{i-2}, y_{i-2}) - f(x_{i-3}, y_{i-3})\right)$$

20 Краевая задача для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка

Апроксимация: $L_h(y_i) = \dfrac{\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h} - \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h}}{h} = \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$

Задача: $u'' - q(x)u = -f(x) \quad a < x < b$

$\left.\begin{array}{l} u(a) = u_1 \\ u(b) = u_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ краевая задача

Пусть $f(x)$ и $q(x)$ непр-ны на $[a,b]$ причем $q(x) \geq q_0 > 0$

$\Rightarrow$ решение $\exists!$

Берем n, берем $h = \dfrac{b-a}{n} \Rightarrow$ СЕТКА $x_i = a + ih$; $0 \leq i \leq n$

$\Rightarrow \dfrac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - q_i y_i = -f_i$

$\Downarrow$

$y_0 = u_1$

$y_n = u_2$ $\quad y_{i-1} - (2 + q_i h^2) y_i + y_{i+1} = -f_i h^2$

$1 \leq i \leq n-1$

$\Rightarrow$ система $(n-1)$ ур-е $(n-1)$ неизвестных (трехдиагональная)

Точность: $z_i = y_i - u_i \quad 0 \leq i \leq n \Rightarrow$

$\psi_i = \dfrac{(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})}{h^2} - q_i u_i + f_i \qquad 1 \leq i \leq n-1$

$\Downarrow$

$\dfrac{z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1}}{h^2} - q_i z_i = -\left(\dfrac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - q_i u_i + f_i\right)$

$= -\psi_i \qquad 1 \leq i \leq n-1$

$z_0 = z_n = 0$; Пусть: $\|z\| = |z_j| \geq |z_i| \quad 0 \leq i \leq n \qquad j \neq 0, n$

$(2 + q_j h^2) z_j = z_{j-1} + z_{j+1} + \psi_j h^2 \Rightarrow$

$$(2+q_j h^2)|z_j| = (2+q_j h^2)\|z\|_c \leq$$

$$\leq |z_{j+1}| + |z_{j-1}| + |\psi_j| h^2 \leq$$

$$2\|z_c\| + \|\psi\| h^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\|z_c\| \leq \frac{1}{q_0}\|\psi\|_c}$$

Пусть $f(x)$ и $q(x)$ 2-ды непр. дифф-мы на $[a, b]$

$$u_{i-1} = u_i - u'(x_i)h + \frac{1}{2}u''(x_i)h^2 - \frac{1}{6}u'''(x_i)h^3 + \frac{1}{24}u^{(4)}(x_i - \tilde{\theta}_i h)h_i^4$$
$$u_{i+1} = u_i + u'(x_i)h + \frac{1}{2}u''(x_i)h^2 + \frac{1}{6}u'''(x_i)h^3 + \frac{1}{24}u^{(4)}(x_i + \tilde{\tilde{\theta}}_i h)h_i^4$$

$$\psi_i = \underbrace{(u''(x_i) - q_i u_i + f_i)}_{=0} + \frac{h^2}{24}\left(u^{(4)}(x_i - \tilde{\theta}_i h) + u^{(4)}(x_i + \tilde{\tilde{\theta}}_i h)\right)$$

$$\|\psi\| \leq \frac{M_4}{12}h^2, \quad \|z\| \leq \frac{M_4}{12 q_0}h^2$$