Билет 1: Краевая задача

$u'' - u = -1$
u(0)=u(1)=0
h=1/4
Написать разностную задачу. Получить решение дифференциальной и разностной задачи.
Ответ:
$Y_1=Y_3=0.0849$
$Y_2=0.1127$

Билет 2: Задача Коши
$u' + xu^2=0$
u(1)=1
(Видимо) определить погрешность
Решение методом Рунге-Кнутта
Ответ: $u(1+h)=1-h+0.5h^2-1/4h^4+O(h^5)$ (точное решение)
$Y_1=1-h+0.5h^2+0.5h^3-0.5h^4=y(1+h)$
$Y(1+h)-u(1+h)\approx 0.5h^3$

Билет 3: $u'(x)+xu^2=0$, u(1)=1.
(видимо) определить погрешность
$y(1+h)=1-h+0.5h^2+0.25h^3-0.125h^4+\ldots$
$y(1+h)-u(1+h)\approx h^3/4$

Билет 4: $u'(x)+(1+x)u^3=0$ u(0)=1;
Сделать 1 шаг по методу Рунге-Кнутта с h=0.05, $\alpha=1$
Ответ: u(h)=0.95238, y(h)=0.95250

Билет 5: Доказать, что для такой задачи
$\frac{du}{dt}=u^2$, $0<t<1/u_0$, $u(0)=u_0>0$

разностная схема $\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}=y_n * y_{n+1}$,n=0,1,...
является точной, те $y_n=u(t_n)$

Билет 6: Вычислить $I=\int_1^2 \frac{dx}{x}$ с помощью квадратурной формулы Гаусса с 3-мя узлами
Ответ: $I_h=0.6931216$

Билет 7: Методом Симпсона с шагом h=1/4 вичислить интеграл $I=\int_1^2 \frac{dx}{x}$. Дать априорную и апостериорную оценки погрешности.
Ответ: $I_h=0.6931545$

$|\psi| \leq 3.255 * 10^{-5}$
$I_h - I = 8*10^{-6}$

Билет 8: С помощью квадратурной формулы Гаусса с двумя узлами вычислить интеграл

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

Ответ: $I_h = 0.6923$

Билет 9: Для n=3 построить квадратурные формулы интерполяционного типа

$\rho(x) \equiv 1$, $x_1 = a$, $x_2 = b$

Ответ: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$

Билет 10: Построить интерполяционный многочлен 2-ой степени

$f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$

Ответ: $L_2(x) = -\frac{3}{\pi^2}x^2 - \frac{1}{2\pi}x + 1$

Билет 11: Построить интерполяционный многочлен функции u= $\frac{1}{1+x^2}$ второй степени по ее значениям в точках $x_0=1$, $x_1=0.5$, $x_2=1$

Ответ: $L_2(x) = -0.2x^2 - 0.3x + 1$

Билет 12: Построить интерполяционный многочлен 2-ой степени функции

$$y = \frac{1}{1-x}$$

$x_0 = -1$, $x_{1=} -0.5$, $x_2 = 0$

и вычислить его значение в точке x=0.5

Ответ: $L_2(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{6}x + 1$

Билет 13: Построить сплайн для функции f(x)= $\frac{1}{1+x}$ на [0,2] ,

$x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$

Ответ: на [0,1]

$S_1 = 0.5 - \frac{14}{81}(x-1) - \frac{1}{108}(x-1)^2 - \frac{109}{184}(x-1)^3$

На [1,2]

$S_2 = \frac{1}{3} - \frac{47}{324}(x-2) + \frac{1}{27}(x-2)^2 + \frac{5}{324}(x-2)^3$

Билет 14: Выписать систему уравнений, определяющих кубический сплайн с условием периодичности
Ответ:

$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i+1}}{h_i}\right)$, i=1…N-1

$c_0 = c_N$; $c_1 = c_{N+1}$; …
$h_0 = h_N$; $f_0 = f_N$

Билет 15: Решить СЛАУ методом Гаусса
$5x_1+3x_2+4x_3=23$
$5x_1-3x_2+4x_3=11$
$5x_1+3x_2-4x_3=-1$
$x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$
Ответ : $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$

Билет 16: $2x+y=4$
$x+y=3$
Записать метод простой итерации и определить, при каких τ он сходится, $x_0=y_0=0$; $\tau=2/3$, построить две первые итерации.

Ответ: $\frac{x_{n+1}-x_n}{\tau} + 2x_n + y_n = 4$

$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} + x_n + y_n = 3$

$0 < \tau < \frac{2}{\lambda_{\max}(A)}$ $\lambda_{\max} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2.618$

На первом шаге итерации получим 8/3 2 ¿ righ ¿ ¿ ¿ (¿)¿ ¿ ¿ , на втором 4/9 8/9 ¿ righ ¿ ¿ ¿ (¿)¿ ¿ ¿

Билет 17: Найти число обусловленности матрицы $\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & -0.01 \end{matrix}$

Ответ: 200

Билет 18: Найти число умножений, требуемых для перемножения двух матриц y=Ax (порядок матрицы A=m).
Ответ: m^2

Билет 19: Найти число умножений, требуемых для перемножения двух квадратных матриц y=AB (порядок матриц A и B=m)

Билет 20: $y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}=f_i$
$I=1,2,\ldots,N-1$, $y_0=m_1$, $y_N=m_2$
Выписать формулы прогонки, посчитать число умножений и делений, определить, устойчива ли она.

Ответ: $\alpha_{i+1}=\dfrac{1}{1-\alpha_i}$, $\beta_{i+1}=\dfrac{\beta_i+f_i}{1-\alpha_i}$, $i=1\ldots N-1$

$\alpha_1=0$, $\beta_1=m_1$
Число делений = 2(N-1)
Число умножений =N-1
Прогонка устойчива. Ахуеть, да?